

# Некоторые математические аспекты физики солнечных вспышек

Сомов Б.В.

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

## Аннотация

Солнечные вспышки воздействуют на межпланетное и околоземное космическое пространство жестким электромагнитным излучением, частицами высоких энергий, ударными волнами и быстрыми потоками плазмы с магнитным полем. Изучение вспышек имеет научное и прикладное значение.

С физической точки зрения, солнечная вспышка - сложное электродинамическое явление в замагниченной плазме. Основу явления составляет процесс, меняющий топологию магнитного поля, так называемое пересоединение. Этот процесс преобразует энергию поля в энергию частиц плазмы.

С математической точки зрения, вспышка - большая сложная система, структура и динамика которой определяются зависящими от времени граничными условиями, которые имеют две составляющие: регулярную и хаотическую. Представлен краткий обзор современного состояния и перспектив теории. Главное внимание уделено актуальным нерешенным математическим задачам физики солнечных вспышек.

## 1 Введение

Плазма в космических условиях обычно имеет высокую электрическую проводимость, т.е. низкое сопротивление. В такой плазме легко возникают электрические токи и, следовательно, легко генерируются магнитные поля. В космосе магнитные поля присутствуют везде. Самыми сильными магнитами в Галактике являются так называемые магнетары - намагниченные молодые нейтронные звезды. Поля в них, по-видимому, превышают  $10^{15}$  Гс. Между тем, наиболее изученными представляются магнитные поля ближайшей к нам звезды, Солнца. Они не превышают нескольких тысяч Гаусс, но обладают замечательным свойством. Начиная с некоторой высоты в атмосфере Солнца, точнее говоря с основания хромосферы, энергия магнитного поля значительно превышает тепловую, кинетическую и гравитационную энергию плазмы. Разумеется, речь идет о плотности энергии поля; так что, упомянутое свойство можно записать следующим образом:

$$\frac{B_0^2}{8\pi} \gg 2n_0k_B T_0, \quad \frac{B_0^2}{8\pi} \gg \frac{\rho_0 v_0^2}{2}, \quad \frac{B_0^2}{8\pi} \gg \rho_0 g_0. \quad (1)$$

Здесь  $B_0$ ,  $n_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ ,  $v_0$  - характерные значения напряженности магнитного поля, концентрации и температуры плазмы, ее плотности и скорости,  $g_0$  - ускорение силы тяжести на

поверхности Солнца. Условия (1) характерны для так называемых *активных областей* (АО) в атмосфере Солнца, в которых происходят вспышки.

Большая вспышка на Солнце - сложное электродинамическое явление в замагниченной плазме, о котором написаны многие книги, в том числе [1]. Вспышки оказывают воздействие на межпланетное и околоземное космическое пространство посредством ударных волн большой амплитуды, потоков частиц, ускоренных до высоких энергий, и жесткого электромагнитного излучения. Моделирование крупномасштабных геоэффективных событий на Солнце - ключевая проблема современной физики солнечно-земных связей. Цель данной статьи - обратить внимание на некоторые нерешенные математические задачи, связанные с физикой солнечных вспышек.

## 2 Приближение сильного поля

Применительно к атмосфере Солнца условия (1) выполняются, конечно, не везде и не всегда. Начиная с некоторой высоты в короне, становится существенной кинетическая энергия солнечного ветра. Внутри спокойных протуберанцев может оказаться немалой гравитационная энергия, а для эруптивных протуберанцев велика кинетическая энергия выбрасываемой в межпланетное пространство плазмы.

Тем не менее, область применимости условий (1) очень широка. А упомянутые выше факторы, как правило, определяют границы применимости приближения *сильного* магнитного поля. Более того, аналогичные условия часто встречаются и в других астрофизических объектах: магнитосфере Земли и других намагниченных космических тел. Главное, однако, в том, что поведение плазмы, как проводящей сжимаемой среды, в сильном поле очень отличается от обычного гидродинамического. Оно в большей степени отражает специфические особенности магнитной гидродинамики (МГД).

Имея в виду ранние классические работы по физике магнитосферы Земли, приближение сильного поля иногда отождествляют с простым потенциальным полем, точнее говоря, со статическим магнитным полем, источники которого (электрические токи) расположены за пределами рассматриваемой области. В действительности, приближение сильного поля охватывает гораздо более широкий класс статических, стационарных и динамических свойств космической плазмы.

Рассмотрим систему уравнений МГД в приближении идеальной среды (например, [2]):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (6)$$

$$p = p(\rho, s). \quad (7)$$

Все обозначения здесь общепринятые стандартные.

Пусть величины  $L$ ,  $\tau$ ,  $v$ ,  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $s_0$ ,  $B_0$  и  $g_0$  представляют собой характерные значения длины, времени, скорости, плотности, давления, энтропии, напряженности магнитного поля и гравитационного ускорения соответственно. Для простоты здесь гравитационное ускорение  $\mathbf{g}$  рассматривается как заданная функция координат.

Перепишем уравнения (2)–(7) в безразмерных переменных

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L}, \quad t^* = \frac{t}{\tau}, \quad \dots \quad \mathbf{B}^* = \frac{\mathbf{B}}{B_0}, \quad \mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{g}}{g_0}.$$

Опуская звездочку, получим систему безразмерных уравнений (см. раздел 8.3 в [2]:

$$\varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{\delta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\gamma^2 \frac{\nabla p}{\rho} - \frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{B} + \varepsilon_g \mathbf{g}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \delta \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \delta \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \delta (\mathbf{v} \cdot \nabla) s = 0, \quad (11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (12)$$

$$p = p(\rho, s). \quad (13)$$

Здесь

$$\delta = \frac{v\tau}{L}, \quad \varepsilon^2 = \frac{v^2}{V_A^2}, \quad \gamma^2 = \frac{p_0}{\rho_0 V_A^2}, \quad \varepsilon_g = \frac{gL}{V_A^2} \quad (14)$$

суть безразмерных параметры, характеризующие реальную физическую ситуацию, которую мы хотим описать в данной постановке математической задачи;

$$V_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}} \quad (15)$$

есть характерное значение Альфвеновской скорости.

Анализ безразмерных параметров позволяет нам понять, какие математические приближения существуют в рамках идеальной МГД. В частности, условия сильного магнитного поля (1) означают, что магнитная сила доминирует над всеми остальными: градиентом газового давления, силой инерции и т.д. Действительно, условия (1) в терминах безразмерных параметров (14) имеют вид

$$\varepsilon^2 \ll 1, \quad \gamma^2 \ll 1, \quad \varepsilon_g \ll 1. \quad (16)$$

Поэтому из уравнения (8) следует, что в нулевом порядке относительно малых параметров (16), магнитное поле является *бессильным*, т.е. удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = 0. \quad (17)$$

Этот вывод вполне естественен: если в некоторой области магнитная сила доминирует над всеми остальными, магнитное поле должно уравновешивать само себя. Как это осуществляется, очевидно. Разложим магнитную силу на силу магнитного натяжения и градиент давления магнитного поля:

$$\mathbf{F}_m = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \frac{B^2}{8\pi}. \quad (18)$$

Мы видим, что в случае бессильного поля градиент магнитного давления уравновешен силой магнитного натяжения.

Если, кроме того, в рассматриваемой области отсутствуют электрические токи, что бывает довольно редко, то сильное магнитное поле является просто потенциальным:

$$\text{rot } \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B} = \nabla \Psi, \quad \Delta \Psi = 0. \quad (19)$$

Разумеется, сказанным не исчерпываются все другие возможности. Рассмотрим только две из них.

1. Пренебрежем для простоты гравитационной силой:  $\varepsilon_g = 0$ . Пусть, кроме того, в первом порядке по малым параметрам (16) выполняются условия

$$\varepsilon^2 \ll \gamma^2 \ll 1. \quad (20)$$

Тогда мы пренебрегаем силой инерции в уравнении (8) по сравнению с градиентом газового давления. Используя разложение (18), получаем следующее безразмерное уравнение:

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \nabla \left( \frac{B^2}{2} + \gamma^2 p \right). \quad (21)$$

Ввиду присутствия градиента газового давления магнитное поле теперь отличается от бессильного: сила магнитного натяжения  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}/4\pi$  должна уравновешивать не только градиент магнитного давления, но и градиент газового давления. Очевидно, эффект пропорционален малому параметру  $\gamma^2$ .

Это приближение естественно назвать магнитостатическим, поскольку  $\mathbf{v} = 0$ . Оно может успешно использоваться в тех областях сильного магнитного поля, где градиент газового давления немал, а течением плазмы можно пренебречь.

Условие магнитостатического равновесия используется при обсуждении вопроса о содержании избыточной магнитной энергии в том или ином астрофизическом объекте, причем неустойчивость равновесия или его отсутствие ассоциируются обычно с началом динамических явлений в космической плазме (см. главу 14 в [2]). Применительно к солнечным вспышкам такой подход является большой идеализацией реального явления, но весьма удобен в математическом отношении, поскольку вместо динамических моделей анализируются статические или квази-статические модели с медленно меняющимися граничными условиями (подробнее в обзоре [3]).

2. Сила инерции тоже порождает отклонения магнитного поля от бессилового:

$$\varepsilon^2 \left\{ \frac{1}{\delta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}. \quad (22)$$

Здесь мы пренебрегаем, в первом порядке, градиентом газового давления по сравнению с силой инерции. Теперь малые параметры удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_g = 0, \quad \gamma^2 \ll \varepsilon^2 \ll 1. \quad (23)$$

Задачи о течениях плазмы в сильном поле, точнее говоря, о течениях, вызываемых изменениями сильных магнитных полей, представляют большой интерес для современной космической электродинамики. Они подразумевают, что выполнены условия (23). При этом можно воспользоваться (22) в качестве МГД уравнения движения. Такой подход естественно назвать приближением сильного поля и холодной плазмы.

Достаточно сильное поле, изменяясь во времени и пространстве, легко приводит в движение сравнительно редкую космическую плазму. Этот эффект доступен самому всестороннему исследованию, по крайней мере, в двух космических объектах: в магнитосфере Земли и атмосфере Солнца. В солнечной короне над пятнами  $\gamma^2 \sim 10^{-7}$ . Поэтому здесь условия (23) могут выполняться с достаточно большим запасом по скоростям течений плазмы. Между тем, в проблеме быстрого пересоединения в высоко-температурных турбулентных токовых слоях во время солнечных вспышек реальные ограничения на область применимости модели начинаются в первую очередь со стороны параметра  $\gamma^2$ . Это означает, что нельзя пренебрегать газовым давлением в окрестности пересоединяющего токового слоя (см., например, задачу 17.2 в [2]). Тем не менее, для многих астрофизических нестационарных явлений приближение сильного поля хорошо оправдано и весьма эффективно при построении МГД модели.

Напомним смысл безразмерного параметра  $\delta = v\tau/L$ . Как видно из левой части уравнения (22), параметр  $\delta$  характеризует относительную роль локальной производной по времени  $\partial/\partial t$  и кинематического слагаемого  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$  в субстанциональной производной  $d/dt$ . Если  $\delta \gg 1$ , то, в нулевом порядке по малому параметру  $\delta^{-1}$ , течение плазмы можно рассматривать как стационарное:

$$\varepsilon^2 (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}. \quad (24)$$

Если же  $\delta \ll 1$ , т.е. если смещение плазмы  $v\tau$  за характерное время  $\tau$  изменения магнитного поля мало по сравнению с характерным масштабом длины  $L$ , то кинематической составляющей  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)$ , которая характеризует изменение во времени за счет течения со скоростью  $\mathbf{v}$ , можно пренебречь. При этом уравнение движения принимает особенно простой вид:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}. \quad (25)$$

Остальные уравнения становятся линейными. Это естественно, поскольку рассматриваемый случай соответствует малым смещениям плазмы относительно равновесного состояния, т.е. малым возмущениям. (При необходимости правая часть уравнения (25) линеаризуется обычным образом.)

В общем случае параметр  $\delta \approx 1$ , и полная система МГД уравнений для идеальной среды в приближении сильного поля и холодной плазмы принимает следующий вид:

$$\varepsilon^2 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (27)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0. \quad (28)$$

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые специфические особенности в постановке задач для системы уравнений (26)–(28).

### 3 Общая постановка задачи

Как было показано выше, система МГД уравнений для идеальной среды в приближении сильного поля и холодной плазмы содержит только один малый параметр  $\varepsilon = v/V_A$ . Будем искать общее решение системы уравнений (26)–(28) в виде степенного ряда по параметру  $\varepsilon^2$ , т.е. представим все неизвестные величины в виде

$$f(\mathbf{r}, t) = f^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 f^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (29)$$

Будем искать решение в три последовательных шага.

(а) В нулевом порядке по малому параметру  $\varepsilon^2$ , магнитное поле определяется уравнением

$$\mathbf{B}^{(0)} \times \text{curl } \mathbf{B}^{(0)} = 0. \quad (30)$$

Это уравнение должно быть дополнено граничным условием, которое в общем случае зависит от времени:

$$\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, t) \big|_S = \mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t). \quad (31)$$

Здесь  $S$  - граница области  $G$ , внутри которой применимо уравнение бессилового поля (30).

Применительно к условиям накопления энергии в АО перед солнечной вспышкой и быстрой реализации этой энергии во время вспышки, граничное условие (31) имеет две составляющие:

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{r}, t) = \mathbf{f}_{1,reg}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{f}_{1,ch}(\mathbf{r}, t). \quad (32)$$

Первая составляющая  $\mathbf{f}_{1,reg}(\mathbf{r}, t)$  используется при постановке задач, описывающих регулярные крупномасштабные явления в АО, в частности топологические свойства магнитного поля в АО и их изменения во время вспышки. Решение задач, использующих в качестве граничных условий только их регулярную часть, имеет определенные успехи в интерпретации наблюдаемых крупномасштабных динамических процессов в атмосфере Солнца.

Вторая составляющая  $\mathbf{f}_{1,ch}(\mathbf{r}, t)$  должна учитываться для описания хаотических мелкомасштабных явлений в солнечных вспышках. В принципе, соответствующие граничные условия нужно брать непосредственно из наблюдений магнитного поля на поверхности Солнца, на фотосфере. С развитием новых технологий современных космических исследований такие наблюдения, выполняемые с высоким пространственным и временным разрешением, становятся все более доступными. Значительный прогресс в этой области ожидается в связи с международным проектом "Solar-B".

(6) Изменяясь во времени согласно граничному условию (31), сильное бессиловое поле приводит плазму в движение. Кинематика этого движения однозначно определяется двумя другими условиями. Первое из них следует из уравнения движения (26) и означает ортогональность ускорения к линиям магнитного поля:

$$\mathbf{B}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = 0. \quad (33)$$

Это условие получается скалярным умножением уравнения (26) на вектор  $\mathbf{B}^{(0)}$ .

Второе условие является следствием уравнения вмерзженности (27)

$$\frac{\partial \mathbf{B}^{(0)}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v}^{(0)} \times \mathbf{B}^{(0)}). \quad (34)$$

Уравнения (33) и (34) позволяют найти поле скоростей  $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , если задано начальное

условие на скорость внутри области  $G$ :

$$\mathbf{v}_{\parallel}^{(0)}(\mathbf{r}, 0) \big|_G = \mathbf{f}_2(\mathbf{r}). \quad (35)$$

Здесь  $\mathbf{v}_{\parallel}^{(0)}$  - компонента скорости, направленная вдоль линий поля. Граничное условие (35) тоже имеет регулярную и хаотическую составляющие. Обе имеют принципиальное значение в физике солнечных вспышек.

Компонента скорости, перпендикулярная к линиям магнитного поля, определяется однозначно из уравнения замороженности в любой момент времени, включая начальный, если известно поле  $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ .

(в) После того, как мы нашли поле скоростей  $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^{(0)} \mathbf{v}^{(0)} = 0 \quad (36)$$

позволяет определить распределение плотности плазмы  $\rho^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , если известно ее распределение в области  $G$  в начальный момент времени

$$\rho^{(0)}(\mathbf{r}, 0) \big|_G = f_3(\mathbf{r}). \quad (37)$$

Таким образом уравнения (30), (33), (34) и (36) полностью определяют неизвестные величины нулевого порядка  $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  и  $\rho^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , если заданы граничное условие (31) и начальные условия (35) и (37) внутри области  $G$ .

В любой момент времени  $t$  магнитное поле  $\mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  находится из уравнения (30) и граничного условия (31). Затем скорость  $\mathbf{v}^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  определяется из уравнений (33) и (34) и начального условия (35). Наконец уравнение непрерывности (36) вместе с начальным условием (37) позволяют нам найти распределение плотности плазмы  $\rho^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ .

Имея в виду большие неопределенности, характерные для астрофизических приложений (за исключением физики Солнца), можно ограничиться нулевым порядком величин относительно малого параметра  $\varepsilon^2$ , пренебрегая отклонениями магнитного поля от бессилового состояния. Легко убедиться, в то же время, что последовательное применение разложения (29) к системе уравнений (26)–(28) позволяет получить замкнутую систему уравнений для определения МГД величин в любом порядке относительно параметра  $\varepsilon^2$ .

Однако уже при решении задачи в нулевом порядке относительно параметра  $\varepsilon^2$ , могут появиться области, в которых газовое давление становится существенным. Здесь должны учитываться эффекты, пропорциональные малому параметру  $\gamma^2$ , как это обсуждалось в предыдущем разделе. Этот факт часто накладывает ограничения на применимость приближения сильного поля.



Вопрос о существовании непрерывных решений МГД уравнений в приближении сильного поля проще всего рассмотреть, используя двумерные задачи.

## 4 Непрерывные решения задачи

В некоторых случаях двумерные задачи оказываются неплохим приближением для описания реальных трехмерных течений космической плазмы в сильных магнитных полях.

Существуют два типа задач, рассматривающих плоские течения плазмы, т.е. течения плазмы, поле скоростей которых имеет вид

$$\mathbf{v} = \{v_x(x, y, t), v_y(x, y, t), 0\}. \quad (38)$$

### 4.1 Задачи первого типа

К первому типу относятся задачи с магнитным полем, которое всюду параллельно оси  $z$  декартовой системы координат. Соответствующие токи параллельны плоскости  $(x, y)$ . Таким образом

$$\mathbf{B} = \{0, 0, B(x, y, t)\}, \quad (39)$$

$$\mathbf{j} = \{j_x(x, y, t), j_y(x, y, t), 0\}. \quad (40)$$

Типичным примером является задача о продольной компоненте магнитного поля в пересоединяющем токовом слое [2].

### 4.2 Задачи второго типа

Здесь рассматриваются плоские течения плазмы (38), связанные с плоскими магнитными полями

$$\mathbf{B} = \{B_x(x, y, t), B_y(x, y, t), 0\}. \quad (41)$$

Электрические токи такого поля параллельны оси  $z$ :

$$\mathbf{j} = \{0, 0, j(x, y, t)\}. \quad (42)$$

Векторный потенциал  $\mathbf{A}$  тоже имеет только одну компоненту:

$$\mathbf{A} = \{0, 0, A(x, y, t)\}.$$

Магнитное поле  $\mathbf{B}$  определяется через  $z$ -компоненту векторного потенциала:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial y}, -\frac{\partial A}{\partial x}, 0 \right\}. \quad (43)$$

Скалярная функция  $A(x, y, t)$  часто называется вектор-потенциалом и обладает следующими свойствами (см. [2]).

(а) Уравнение

$$A(x, y, t) = \text{const}, \quad t = \text{const}, \quad (44)$$

определяет семейство линий магнитного поля в плоскости  $z = \text{const}$  в момент времени  $t$ .

(б) Разность значений вектор-потенциала на двух линиях поля равна величине магнитного потока между ними:

$$\Phi = A_2 - A_1. \quad (45)$$

(в) Вектор-потенциал удовлетворяет уравнению вмерзженности (27) в следующем виде:

$$\frac{dA}{dt} \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)A = 0. \quad (46)$$

Это значит, что поверхности

$$A(x, y, t) = \text{const} \quad (47)$$

являются лагранжевыми поверхностями, т.е. движутся вместе с плазмой. Таким образом, переходя к лагранжевым переменным

$$x = x(x_0, y_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, t), \quad (48)$$

находим первый интеграл движения в виде

$$A(x, y, t) = A(x_0, y_0, 0) \equiv A_0 \quad (49)$$

в любой момент времени  $t$ . Здесь  $x_0, y_0$  - координаты некоторой жидкой частицы в начальный момент времени;  $x, y$  - координаты той же частицы в момент времени  $t$ .

(г) Главное свойство вектор-потенциала состоит в том, он удовлетворяет уравнению

$$\Delta A = 0, \quad (50)$$

т.е. является гармонической функцией переменных  $x$  и  $y$ . Следовательно, рассматривая плоскость  $(x, y)$  как комплексную плоскость  $z = x + iy$ , удобно ввести аналитическую функцию

$$F(z, t) = A(x, y, t) + iA^+(x, y, t). \quad (51)$$

Здесь  $A^+(x, y, t)$  - функция комплексно-сопряженная с  $A(x, y, t)$ .

Введение комплексного потенциала  $F(z, t)$  позволяет эффективно использовать методы теории функций комплексного переменного, особенно метод конформных отображений, для решения задач космической электродинамики в приближении сильного магнитного поля.

## 5 Разрывные решения задачи

Среди большого многообразия разрывных решений системы уравнений МГД (см., например, [2]) большой интерес в приложениях к физике солнечных вспышек имеют разрывные решения в окрестности нулевых точек магнитного поля, в которых отлично от нуля электрическое поле:

$$\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E} \neq 0. \quad (52)$$

Для краткости будем называть такие нулевые точки *особыми*. Такие точки противостоят уравнению вмерзженности (46).

Условие вмерзженности допускает непрерывную деформацию сильного магнитного поля и соответствующее ей непрерывное течение плазмы всюду, кроме особых нулевых точек (точнее говоря, линий, параллельных оси  $z$  декартовой системы координат, введенной в предыдущем разделе), в которых магнитное поле обращается в нуль, а электрическое поле отлично от нуля.

Отметим, что одновременное обращение в нуль в одной точке обоих полей весьма маловероятно. Поэтому особые нулевые точки магнитного поля встречаются довольно часто. Эти точки являются характерной особенностью задачи магнитного пересоединения в космической плазме, в частности, в плазме атмосферы Солнца во время вспышки.

## 6 Накопление и освобождение энергии во вспышках

Источник энергии вспышки - магнитные поля в атмосфере Солнца. Они определяют морфологию и энергетику АО, в которой происходит вспышка. Здесь велика плотность энергии магнитного поля и выполнены условия (1). Магнитное поле в АО можно представить в виде суммы двух составляющих: (а) потенциальное, или бестоковое, поле и (б) непотенциальное поле, создаваемое электрическими токами в АО.

### 6.1 Фундаментальные свойства потенциальных полей

Во-первых, потенциальное поле, удовлетворяя заданным граничным условиям, имеет абсолютный минимум энергии, поскольку не содержит никаких токов. Следствием этого факта является известный характер поведения линий магнитного поля. Если их разорвать каким-либо образом (например, эруптивным протуберацем), они снова замыкаются к первоначальному потенциальному полю путем магнитного пересоединения. Такое поведение весьма характерно для больших эруптивных вспышек.

Во-вторых, изменяясь во времени и пространстве, сильное поле приводит в движение плазму в короне. Как было показано выше, это движение может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений, которые много проще, чем уравнения МГД в частных производных. Такова естественная простота реальных физических условий в атмосфере Солнца, о которой забывают в пользу стандартных или рафинированных компьютерных программ для численного интегрирования уравнений МГД. Чтобы решать упрощенные уравнения, достаточно найти потенциальное поле как функцию времени. Это нетрудно.

Однако, поскольку бестоковое поле не имеет свободной энергии, с неизбежностью необходимо учитывать токонесущие составляющие магнитного поля, чтобы объяснить накопление энергии перед вспышкой.

## 6.2 Классификация непотенциальных полей

Непотенциальные составляющие магнитного поля в АО создаются электрическими токами в хромосфере и короне. Принципиально важно отличать токи различной природы, поскольку они имеют абсолютно разные физические свойства и, по этой причине, совершенно по-разному ведут себя в предвспышечном процессе. Реальные токи в солнечной атмосфере целесообразно разбить на две широкие категории, как показано на рис. 6.2: (а) распределенные токи, плотность которых невелика, и (б) концентрированные токи, имеющие большую плотность и, следовательно, большую скорость токонесущих электронов.

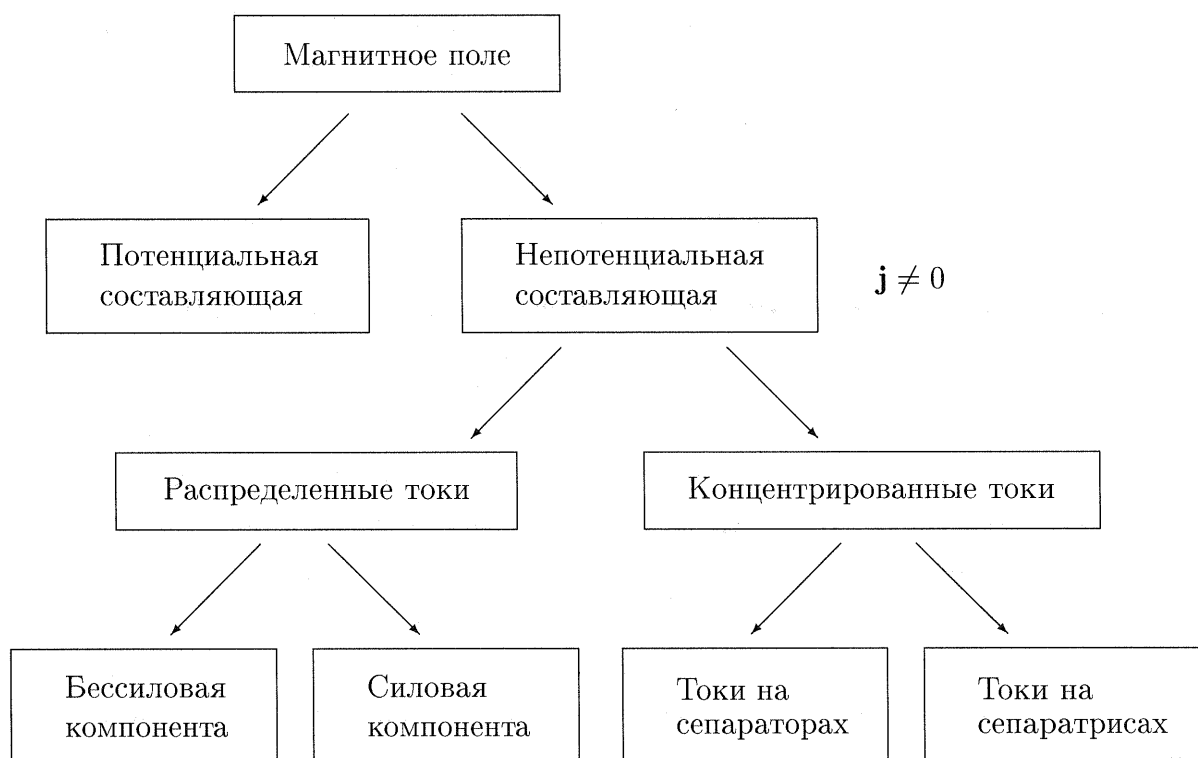


Рис. 1. Главные составляющие магнитного поля в активной области (АО).

Если магнитное поле является сильным, распределенные токи с необходимостью параллельны или почти параллельны линиям поля. Таким образом поле является бессиловым или почти бессиловым. Энергия бессилового поля в активной области, разумеется, больше чем энергия поля потенциального, но меньше некоторого предела, соответствующего энергии так называемого “полностью открытого” поля с токовым слоем, разделяющим магнитные поля противоположной направленности от фотосферы до бесконечности (межпланетного пространства). Реальные поля в короне никогда не являются

полностью открытыми или полностью замкнутыми. Поэтому вопрос о возможности накопить энергию в виде бессилового поля (т.е. равновесного магнитного поля, в котором электрические токи параллельны линиям поля) формально является открытым.

Что касается распределенных токов, перпендикулярных линиям поля, то они генерируются в атмосфере Солнца любой немагнитной силой, например, силой тяжести протуберанца. Между тем, ввиду условия (1), такие силы обычно малы по сравнению с магнитной силой. Важно, однако, другое. Любые распределенные токи, как бессильные, так и силовые, в хорошо проводящей плазме солнечной короны диссипируют слишком медленно. Это создает проблему освобождения их энергии, точнее говоря, преобразования магнитной энергии в тепловую и кинетическую энергию плазмы, энергию ускоренных частиц.

Первая часть проблемы (нагрев и гидродинамика) кажется разрешимой, если предполагать те или иные МГД неустойчивости предвспышечной равновесной конфигурации распределенных токов. Однако проблема ускорения частиц во вспышках требует существенно другие подходы, принципиально отличающиеся от МГД. Более того, импульсный характер ускорения частиц до высоких энергий подразумевает действие очень сильных электрических полей, на несколько порядков превышающих критическое драйверовское поле. Такие условия можно ожидать при наличии очень концентрированных электрических токов. Эти токи в виде слоев текут по сепараторам и сепаратрисным поверхностям в активных областях.

### 6.3 Пересоединяющие токовые слои

В плазме высокой проводимости тонкие токовые слои появляются, чтобы воспрепятствовать перераспределению взаимодействующих магнитных потоков на сепараторах поля. В условиях короны процесс пересоединения в таких слоях (их называют пересоединяющие токовые слои, RCL) перед вспышкой идет очень медленно. Это позволяет накопить большую энергию в виде магнитного поля токового слоя. Чем шире слой, тем больше накопленная энергия, она же - энергия взаимодействия магнитных потоков.

Кроме того, течения плазмы в фотосфере порождают токовые слои на сепаратрисных поверхностях. Эти слои, однако, принципиально отличаются от RCL. Пересоединяющий слой представляет собой как минимум двумерную структуру: втекающая с двух сторон в слой плазмы вытекает из него в ортогональных направлениях, из торцов. Напротив, токовые слои на сепаратрисах можно рассматривать как одномерные тангенциальные разрывы. В отличие от RCL, они неэволюционны (см. [2]). Для токовых слоев на сепаратрисах отсутствуют стационарные решения. Такие слои всегда расширяются в окружающую плазму в противоположных направлениях от сепаратрисных поверхностей. Поэтому концентрация тока в них может падать. Между тем, в RCL концентрация токов обычно нарастает и может достигнуть того или иного предела, приводящего к вспышке.

Таким образом, потенциальная составляющая магнитного поля почти полностью определяет глобальную структуру активной области в короне, а избыток энергии перед вспышкой накапливается в окрестности сепараторов в форме энергии магнитного поля RCL и токовых слоев на сепаратрисных поверхностях.

## 7 Математические модели пересоединения

В приближении сильного поля Сыроватский [4] построил простую аналитическую модель RCL в виде поверхности разрыва, разделяющей магнитные поля противоположной направленности, как это показано на рис. 2а. Другая классическая модель пересоединения называется течением Петчека [5] и обычно рассматривается в качестве альтернативы к токовому слою Сыроватского. В модели Петчека процесс пересоединения линий магнитного поля отделен от процесса диссипации поля. Пересоединение происходит в небольшой диффузионной области  $D$ , как показано на рис. 2б, а превращение магнитной энергии в тепловую и кинетическую энергию плазмы осуществляется на четырех присоединенных ударных МГД волнах  $S_{\pm}$ .

Марковский и Сомов [6] предложили двумерную модель пересоединения, являющуюся обобщением работ Сыроватского и Петчека. В данной модели поле, считающееся потенциальным, рассматривается во внешности токовой конфигурации. Эта конфигурация, изображенная на рис. 3 в виде системы разрезов на плоскости, состоит из бесконечно тонкого токового слоя (горизонтальный разрез длиной  $2a$ ), к концам которого присоединены, наподобие усов, четыре ударные МГД-волны (наклонные разрезы длиной  $r$ ). Нормальная компонента магнитного поля на токовом слое обращается в нуль, а на ударных МГД-волнах, наклоненных к токовому слою под углом  $\pi\alpha$ , она равна заданной постоянной  $\beta$ ; поле на бесконечности линейно возрастает с коэффициентом пропорциональности  $\gamma$ . Величины  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $r$  и  $a$  являются свободными параметрами модели.

Описанная модель сводится к задаче Римана–Гильберта во внешности указанной системы разрезов. В работе [7] была найдена асимптотика решения этой задачи, соответствующая малой длине  $r$  "усов"; было показано, что поправка к полю без "усов т.е. решению Сыроватского, имеет порядок  $\sqrt{r}$ . Ниже обсуждается полное решение задачи Римана–Гильберта применительно к условиям магнитного пересоединения в солнечных вспышках. Искомая функция строится в аналитическом виде. Метод решения базируется на установленных в работе [8] явных асимптотиках для искомых преобразов, на полученных там же явных формулах аналитического продолжения функции Аппеля и высокоэффективном методе ее вычисления.

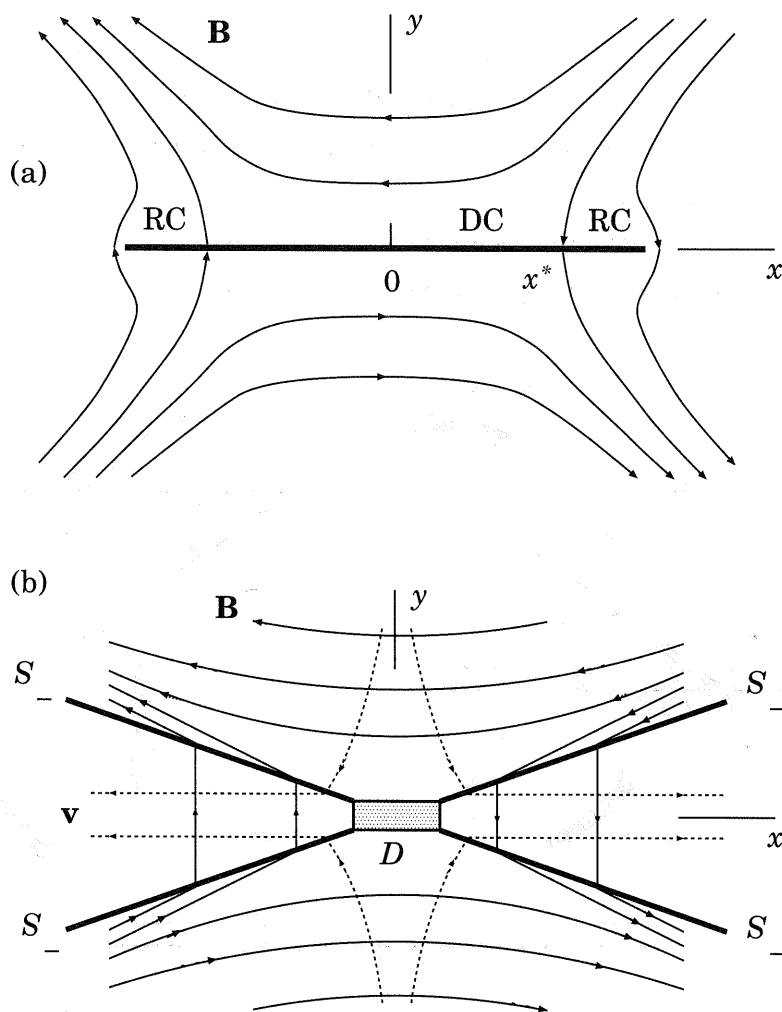


Рис. 2. Две классические модели магнитного пересоединения. (а) Токовый слой Сыроватского содержит область прямого тока (DC) и две присоединенные области обратного тока (RC). (б) Течение Петчека состоит из диффузионной области  $D$  и четырех присоединенных МГД ударных волн  $S_-$  медленного типа.

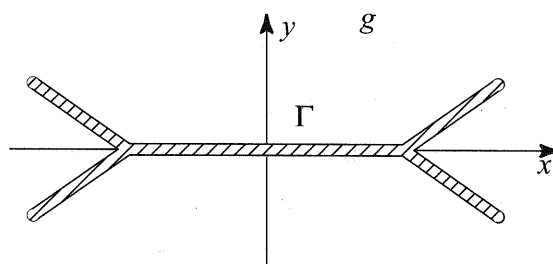


Рис. 3. Система разрезов комплексной плоскости, соответствующая постановке задачи о токовом слое с присоединенными ударными волнами.

## 8 Постановка задачи и ее решение

Из описанной выше математической модели следует, что функция  $\mathcal{F}(z) = u(z) + iv(z)$ , связанная с магнитным полем  $B = (B_x, B_y, 0)$  соотношениями  $u(z) = B_x$ ,  $v(z) = -B_y$ , является аналитической функцией в области  $g$  вне разрезов на комплексной плоскости  $z = x + iy$ , показанных на рис. 3.

Поскольку задача обладает симметрией относительно осей  $x$  и  $y$ , достаточно рассмотреть ее в одной четверти области  $g$ , например в пересечении  $g$  с первым квадрантом (рис. 4).

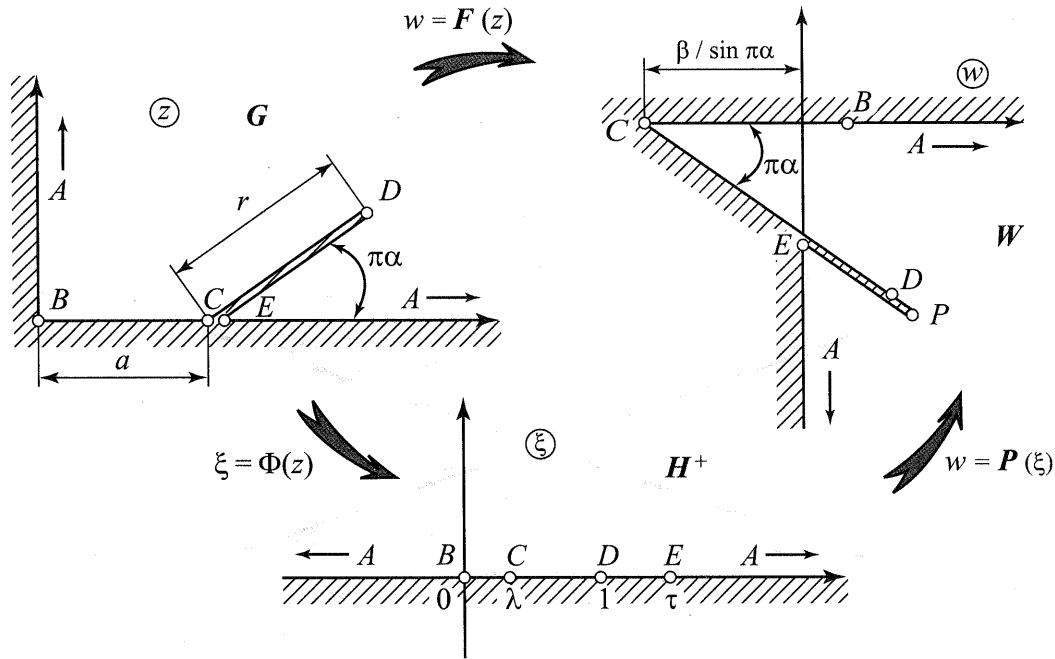


Рис. 4. Метод конформных отображений для решения задачи Римана–Гильберта.

Полученную таким образом область обозначим через  $G$ . Постановка задачи Римана–Гильберта для функции  $\mathcal{F}$  в области  $G$  следующая:

$$v = 0, \quad z \in ABC; \quad u \sin \pi\alpha + v \cos \pi\alpha = -\beta, \quad z \in CDE; \quad u = 0, \quad z \in EA; \quad (53)$$

$$\mathcal{F}(z) = -i\gamma z + o(1), \quad z \rightarrow \infty. \quad (54)$$

Для того, чтобы найти решение  $\mathcal{F}(z)$  задачи (53), (54), сведем ее с помощью конформного отображения  $z = \Phi^{-1}(\xi)$  верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+ = \{\xi : \text{Im } \xi > 0\}$  на область  $G$  (рис. 4) к аналогичной задаче Римана–Гильберта в канонической области  $\mathbb{H}^+$ . Получив решение  $\mathcal{P}(\xi)$  последней и возвратившись к исходной области  $G$  с помощью отображения  $\Phi$ , т.е. подставив  $\xi = \Phi(z)$  в  $\mathcal{P}(\xi)$ , найдем искомое решение задачи в виде суперпозиции:

$$\mathcal{F}(z) = \mathcal{P} \circ \Phi(z). \quad (55)$$



Поскольку область  $G$  представляет собой многоугольник (с пятью вершинами), то конформное отображение  $z = \Phi^{-1}(\xi)$  полуплоскости  $\mathbb{H}^+$  на нее можно записать в виде интеграла Кристоффеля–Шварца [9]:

$$\Phi^{-1}(\xi) = \mathcal{K} \int_0^\xi t^{-1/2} (t - \lambda)^{-\alpha} (t - 1) (t - \tau)^{\alpha-1} dt.$$

Он содержит три неизвестных параметра: множитель  $\mathcal{K}$  перед интегралом и прообразы  $\lambda$  и  $\tau$  вершин  $C$  и  $E$  (рис. 4); в качестве прообразов вершин  $A$ ,  $B$  и  $D$  выбраны соответственно точки  $\xi = \infty$ ,  $\xi = 0$  и  $\xi = 1$ . Для неизвестных параметров  $\mathcal{K}$ ,  $\lambda$ ,  $\tau$  возникает система нелинейных уравнений. Ее решение, как известно [10], строится с помощью метода Ньютона в сочетании с методом продолжения по параметру. Возникающие при этом главные трудности связаны с выбором хорошего начального приближения для неизвестных параметров и с обеспечением высокой точности вычисления функции Апеля, фигурирующей в этой системе.

В работе [8] дан метод аналитического продолжения и высокоэффективного вычисления возникающих в указанной нелинейной системе функций Апеля. Дан метод нахождения асимптотик для неизвестных параметров отображения  $\Phi^{-1}(\xi)$ . Этот метод основан на теории конформного отображения сингулярно деформируемых областей [11].

Отображение  $\Phi(z)$ , фигурирующее в представлении (55) для искомого решения  $\mathcal{F}(z)$  получено путем обращения интеграла Кристоффеля–Шварца в виде набора степенных рядов с явно выписанными коэффициентами. Множества сходимости этих разложений покрывают в совокупности замкнутую область  $G$  за исключением бесконечно удаленной точки, и для любой точки  $z \in \overline{G} \setminus \{\infty\}$  можно указать хотя бы одно разложение из этого набора, которое сходится в данной точке  $z$  экспоненциально.

Функция  $\mathcal{P}(\xi)$ , являющаяся решением задачи Римана–Гильберта в верхней полуплоскости  $\mathbb{H}^+$ , имеет следующий вид:

$$\mathcal{P}(\xi) = -i\gamma \mathcal{K} \int_\lambda^\xi \frac{(t - \lambda)^{\alpha-1}}{(t - \tau)^{\alpha+1/2}} (t - p) dt - \frac{\beta}{\sin \pi \alpha}, \quad (56)$$

$$p = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\sqrt{\tau - \lambda}}{\pi^{3/2} \mathcal{K}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 2\alpha(\tau - \lambda) + \lambda.$$

Отметим, что аналитическая функция  $w = \mathcal{F}(z)$  осуществляет конформное отображение исходной области  $G$  на некоторую область  $\mathcal{W}$ , которую в соответствии с [9], будем называть областью годографа. Из представления  $\mathcal{P}(\xi)$  в виде интеграла Кристоффеля–Шварца (56) вытекает, что область годографа  $\mathcal{W}$  является многоугольником (с четырьмя вершинами), см. рис. 4. Этот факт придает геометрическую наглядность решению рассматриваемой задачи и облегчает его анализ.

## 9 Численная реализация решения

Численная реализация задачи дана для следующих физически значимых функций и величин. Во-первых, дана картина распределения линий магнитного поля, являющихся линиями уровня функции  $\psi^*(z)$ , связанной с решением  $\mathcal{F}$  задачи соотношением

$$\psi^*(z) = \text{Im} \int^z \mathcal{F}(t) dt.$$

Во-вторых, найдены величины  $B(0) = \mathcal{F}(0)$  и  $\text{res } \mathcal{F}(\infty)$ , т.е. магнитное поле в начале координат и вычет в бесконечности, определяющие важные характеристики процесса магнитного пересоединения, а именно, скорость пересоединения  $V$  и полный ток  $\mathcal{J}$ ; их связь с отмеченными величинами определяется следующим образом:

$$V = V_0 / \mathcal{F}(0), \quad \mathcal{J} = 2\pi i \mathcal{J}_0 \text{res } \mathcal{F}(\infty), \quad (57)$$

где  $V_0$  и  $\mathcal{J}_0$  – некоторые размерные физические константы [6].

В-третьих, вычислены локальные характеристики поля на фронтах ударных волн (т.е. на наклонных разрезах  $\Gamma_j$ ), а именно, углы  $\pi\theta_1$  и  $\pi\theta_2$  наклона силовой линии к внутренним нормальям в точке пересечения этой линии с разрезом. Очевидно, что в каждой точке разреза (за исключением его конца) имеются две внутренние нормали, соответствующие двум сторонам (или берегам) разреза. Величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , вернее – соотношения между ними, определяет тип ударных волн [6].

Приведем выражения для  $\mathcal{F}(0)$ ,  $\text{res } \mathcal{F}(\infty)$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Формулу для  $\mathcal{F}(0)$  получаем, интегрируя в (56) до точки  $\xi = 0$  и используя представление Эйлера для гипергеометрической функции  $F$  [12]:

$$\mathcal{F}(0) = \beta F_\beta + \gamma F_\gamma. \quad (58)$$

Коэффициенты этого представления определяются равенствами

$$F_\beta = -\frac{1}{\sin \pi \alpha} + \frac{\lambda^\alpha \sqrt{\tau - \lambda}}{\pi \sqrt{\pi} \alpha \tau^{1/2+\alpha}} \Gamma(1-\alpha) \Gamma(1/2+\alpha) F\left(1/2+\alpha, 1; 1+\alpha; \lambda/\tau\right),$$

$$F_\gamma = \frac{\mathcal{K} \lambda^\alpha}{\tau^{1/2+\alpha}} \left[ 2(\tau - \lambda) F\left(1/2+\alpha, 1; 1+\alpha; \lambda/\tau\right) + \frac{\lambda}{1+\alpha} F\left(1/2+\alpha, 1; 2+\alpha; \lambda/\tau\right) \right].$$

Из соотношения (58) следует, что величина  $\mathcal{F}(0)$  больше, равна или меньше нуля соответственно, если отношение  $\beta/\gamma$  меньше, равно или больше величины  $\mathcal{V}_0$ , определяемой равенством:

$$\mathcal{V}_0 = -\frac{F_\gamma}{F_\beta}. \quad (59)$$

Вычет  $\text{res } \mathcal{F}(\infty)$  находим из лорановского разложения функции  $\mathcal{F}(z)$  в точке  $z = \infty$ , как коэффициент при  $z^{-1}$ , взятый с противоположным знаком:

$$\text{res } \mathcal{F}(\infty) = i \left( \beta R_\beta + \gamma R_\gamma \right). \quad (60)$$

Коэффициенты этого представления определяются равенствами

$$R_\beta = \frac{\sqrt{\tau - \lambda}}{\pi \sqrt{\pi} \mathcal{K}} \Gamma(1 - \alpha) \Gamma(1/2 + \alpha), \quad R_\gamma = \frac{\tau}{2} - 1.$$

Из соотношения (60) вытекает, что величина  $2\pi i \operatorname{res} \mathcal{F}(\infty)$  больше, равна или меньше нуля, соответственно, если отношение  $\beta/\gamma$  меньше, равно или больше величины  $J_0$ , определяемой равенством:

$$J_0 = -\frac{R_\gamma}{R_\beta}.$$

Формулы для углов  $\pi\theta_1$  и  $\pi\theta_2$  дадим только на (наклонном) разрезе, лежащем в первом квадранте, поскольку переход к соответствующим углам на других разрезах может быть легко выполнен с использованием симметрии решения  $\mathcal{F}(z)$  рассматриваемой задачи. В качестве положительного направления отсчета этих углов примем направление отсчета против часовой стрелки от соответствующей внутренней нормали.

Введем на дуге  $CDE$  границы области  $G$  натуральный параметр  $s$ , т.е. текущую длину дуги, которую будем отсчитывать от вершины разреза в правильном направлении обхода контура  $\partial G$  (так, что область остается слева):

$$z(s) = a + r(1 - s \operatorname{sign} s) e^{i\pi\alpha}, \quad s \in [-1, 1], \quad z \in \Gamma_1.$$

При этом подразумевается, что когда  $s$  возрастает от  $-1$  до  $0$  (соответственно от  $0$  до  $1$ ), то точка  $z(s)$  пробегает берег  $(CD)$  (соответственно берег  $(DE)$ ) разреза  $\Gamma_1$ . Образом точки  $z(s)$  при отображении  $\mathcal{F}$  будет точка  $w = \mathcal{F}(z(s))$  прямолинейного участка границы области  $\mathcal{W}$  (см. рис. 4), представимая формулой

$$\mathcal{F}[z(s)] = -\frac{\beta}{\sin \pi\alpha} + e^{-i\pi\alpha} \sigma(s), \quad s \in [-1, 1],$$

где вещественная величина  $\sigma(s)$  есть расстояние от точки  $C$  до  $\mathcal{F}(z(s))$ . Следовательно, функция  $\sigma(s)$  находится из выражения

$$\sigma(s) = e^{i\pi\alpha} \left\{ \mathcal{F}[z(s)] + \frac{\beta}{\sin \pi\alpha} \right\}, \quad (61)$$

Нетрудно убедиться, что зависимость  $\theta(s)$  угла между линией магнитного поля и нормалью к  $\Gamma_1$  от параметра  $s$  выражается через  $\sigma(s)$  следующим образом:

$$\theta(s) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left[ \operatorname{tg} \pi\alpha + \frac{\sigma(s)}{\beta} \right], \quad (62)$$

а величины  $\theta_1$  и  $\theta_2$  связаны с  $\theta$  соотношениями

$$\theta_1(s) = \theta(s), \quad s \in [-1, 0]; \quad \theta_2(s) = \theta(s), \quad s \in [0, 1]. \quad (63)$$

## 10 Вопросы интерпретации результатов

Остановимся прежде всего на характеристиках поля, а именно, на величинах  $\mathcal{F}(0)$  и  $\text{res } \mathcal{F}(\infty)$ , определяющих скорость пересоединения и полный ток (3.1). Эти величины линейно зависят от параметров  $\gamma$  и  $\beta$  задачи.

Обратимся теперь к исследованию картины магнитного поля  $B$ , представляемой как распределение силовых линий поля вблизи токовой конфигурации, т.е. в исходной области  $g$  (рис. 3). В дальнейшем всегда будем полагать  $\gamma = 1$ , что соответствует потенциальному гиперболическому полю на бесконечности.

Для исследования картины поля было проведено большое количество вычислительных экспериментов. В частности, было установлено, что при изменении геометрических параметров области  $g$  картина поля слабо меняется в качественном отношении. Сильное изменение картины поля происходит при варьировании параметра  $\beta$  (и фиксированных остальных параметрах). Критическими значениями  $\beta$ , при которых такое изменение носит принципиальный характер, являются  $\beta = 0$  и  $\beta = \mathcal{V}_0$ ; последняя величина определяется из (59).

Проведенный анализ изменения поля при варьировании параметра  $\beta$  позволяет сделать следующие выводы. При  $\beta \in (-\infty, 0)$  линии поля не пересекают токовый слой (горизонтальный разрез); некоторые из них образуют замкнутые контуры с закруткой против часовой стрелки, а внутри области  $g$  возникают две нулевые точки поля, симметрично расположенные на вещественной оси. В плазме высокой проводимости, при наличии электрического поля, в этих точках должны появиться вторичные токовые слои. Следовательно, полученная картина поля должна быть дополнена парой разрезов комплексной плоскости такой длины, при которой исчезают вторичные нулевые точки. В противном случае, постановка задачи не доопределена, имея в виду ее физический смысл.

При  $\beta = 0$  силовые линии не пересекают ни токового слоя, ни ударных волн, т.к. на всей токовой конфигурации выполняется равенство  $\psi^* = \text{const}$ . Замкнутые силовые линии и нулевые точки поля внутри области отсутствуют. Такая структура поля, по-видимому, является граничной между математическими решениями, не имеющими физического смысла (не доопределенными), и решениями, допускающими физическую интерпретацию. Например, при  $\beta \in (0, \mathcal{V}_0)$  токовый слой пересекают две симметрично расположенные линии магнитного поля. Точки пересечения отделяют участки слоя, на которых электрический ток течет в противоположном направлении по отношению к току в центральной части слоя (т.е. области обратного тока на краях слоя). Замкнутые линии магнитного поля и нулевые точки поля внутри области отсутствуют. Эти особенности структуры поля хорошо демонстрирует рис. 5, соответствующий  $\beta = 1$ .

При  $\beta = \mathcal{V}_0 = 1.53$  точки пересечения токового слоя линиями магнитного поля сливаются в начале координат, что как раз и соответствует  $B(0) = 0$ . Замкнутые линии поля и нулевые точки поля внутри области по-прежнему отсутствуют. Этот предельный

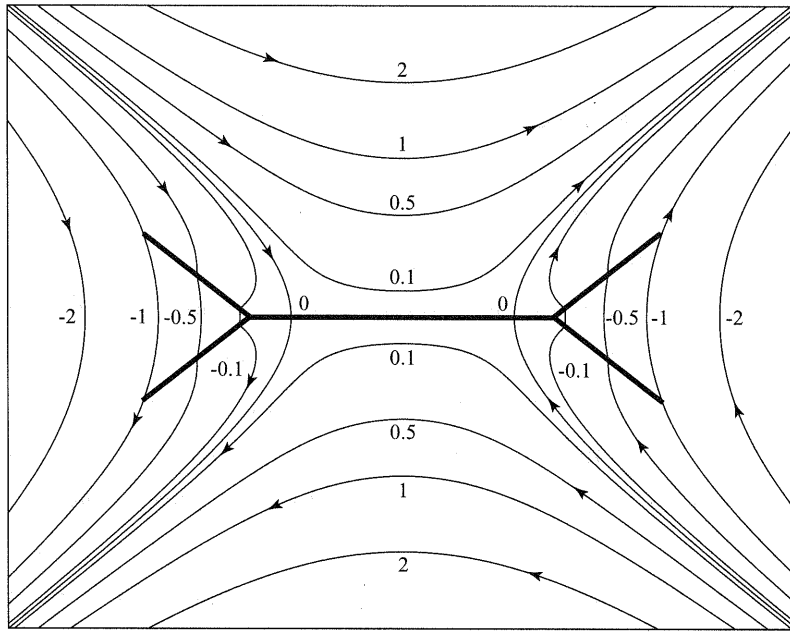


Рис. 5. Структура магнитного поля в окрестности токового слоя с присоединенными ударными волнами.

случай, по-видимому, соответствует второй границе области математических решений, имеющих физический смысл. Действительно, при  $\beta \in (\mathcal{V}_0, +\infty)$  линии магнитного поля не пересекают токовый слой. Некоторые из них образуют замкнутые контуры с закруткой по часовой стрелке, а внутри области  $g$  возникают две нулевые точки поля, симметрично расположенные на мнимой оси. Таким образом мы снова приходим к условиям, когда математическая задача снова не доопределена с точки зрения физического смысла.

## 11 Перспективы применения новых математических методов

Теоретические исследования динамики плазмы в явлении магнитного пересоединения в настоящее время остаются весьма актуальной ввиду огромного числа астрофизических и лабораторных приложений. Как правило, они рассматриваются с привлечением численных методов с использованием мощных современных компьютеров. Если при этом решаются МГД задачи, то обычно полная система уравнений диссипативной МГД интегрируется численно, без всяких дополнительных упрощающих предположений в явном виде. Естественно возникает вопрос, а нужны ли вообще какие-либо аналитические методы типа рассмотренного здесь приближения сильного поля?

Ответ на этот вопрос прост. В тех случаях, когда упрощающее предположение не является дополнительным, а продиктовано природой явления, его специфическими условиями (иными словами, если в рассматриваемом астрофизическом объекте магнитное поле действительно оказывается сильным), использование более сложного подхода методически не оправдано. Кроме того, при выборе удобного приближения и метода неизбежно приходится учитывать не только ожидаемый результат, но и реальные возможности для его получения. С этой точки зрения, более простое приближение, как правило, более выгодно, требует меньше времени для расчетов на компьютере. В любом случае, и это принципиально важно, для интерпретации полученных численно результатов, нужны простые аналитические решения типа течения Петчека, токового слоя Сыроватского и т.д. Такова ситуация в теории магнитного пересоединения в космической и лабораторной плазме.

В проблеме солнечных вспышек остается незавершенной хорошо известная топологическая модель вспышечно-активных областей [13]. В нулевом приближении по малому параметру  $\varepsilon^2$ , рассматривая магнитное поле АО как потенциальное, эта модель позволяет определить положение источника энергии во вспышке, а также положение и форму вспышечных лент в хромосфере. Модель устанавливает причинную связь между большими дуэнточными вспышками и  $S$ -образными изгибами нейтральной линии магнитных полей в фотосфере. Эта связь принципиально важна для объяснения корональных выбросов массы в межпланетное пространство. Между тем, даже линейное приближение по малому параметру  $\varepsilon^2$  остается неизученным, хотя именно оно позволило бы описать динамику вспышечной плазмы в масштабе АО. Решение этой теоретической задачи представляет большой практический интерес. Оно необходимо для интерпретации современных наблюдательных данных, полученных на спутниках SOHO, TRACE и RHESSI.

Весьма интересное развитие ожидает классические задачи с неизвестной границей, точнее говоря, двумерные задачи, в которых положение и форма границы области сильного поля определяются самосогласованным образом с использованием метода конформных отображений. Первоначально такие задачи решались для расчета формы границы магнитосферы Земли и токовых слоев в хвосте магнитосферы. Как выясняется в настоящее время (см. [14]), аналогичный аналитический метод (в сочетании с численными расчетами) может оказаться эффективным для решения электродинамических задач в современной релятивистской астрофизике.

Одним из возможных приложений этого нового подхода, по-видимому, будут короны аккреционных дисков компактных объектов: нейтронных звезд и черных дыр. Здесь, как и в короне Солнца, магнитное поле является сильным и вызывает мощные вспышки с ускорением частиц до высоких энергий. Однако, применительно к коронам аккреционных дисков, нестационарные электродинамические задачи, по-видимому, еще в большей мере зависят от хаотической составляющей граничных условий. Это обстоятельство делает проблему вспышек в космической плазме еще более сложной и более интересной в

математическом плане.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-02-16125а).

## Список литературы

- [1] Somov B.V. Physical Processes in Solar Flares // Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 1992.
- [2] Somov B.V. Cosmic Plasma Physics // Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000.
- [3] Litvinenko Y.E., Somov B.V. Aspects of the global MHD equilibria and filament eruptions in the solar corona // Space Science Rev. 2001. V. 95. N 1. P. 67-77.
- [4] Сыроватский С.И. О возникновении токовых слоев в плазме с вмороженным сильным магнитным полем // Журн. эксперим. теор. физ. 1971. Т. 60. N 5. С. 1727-1741.
- [5] Petschek H.E. Magnetic field annihilation // In: AAS-NASA Symp. on the Physics of Solar Flares, 1964. NASA SP-50. P. 425-439.
- [6] Марковский С.А., Сомов Б.В. Модель магнитного пересоединения в токовом слое с ударными волнами. Физика солнечной плазмы // М.: Наука. 1989. С. 456-465.
- [7] Власов В.И., Марковский С.А., Сомов Б.В. Об аналитической модели магнитного пересоединения в плазме // Деп. ВИНТИ N 769-B89, 6.01.1989.
- [8] Безродных С.И., Власов В.И. Задача Римана-Гильберта в сложной области для модели магнитного пересоединения в плазме // Журн. вычисл. мат. матем. физ. 2002. Т. 42. N. 3. С. 277-312.
- [9] Лаврентьев М.А., Шабад Б.В. Методы теории функций комплексного переменного // М.: Наука, 1973.
- [10] Коппенфельс В., Штальман Ф. Практика конформных отображений // М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
- [11] Власов В.И. Краевые задачи в областях с криволинейной границей // М.: ВЦ АН СССР, 1987.

- [12] Бэйтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра // М.: Наука, 1973.
- [13] Горбачев В.С., Сомов Б.В. Солнечные вспышки 5 ноября 1980 г. как результат магнитного пересоединения на сепараторе // Астроном. журн. 1989. Т. 66. С. 105-113.
- [14] Somov B.V., Oreshina A.V., Oreshina I.V., Shakura N.I. Flares in accretion disk coronae // Adv. Space Res. 2003, V. 32. N 6. P. 1087-1096.