

Спектральные данные в слабо-диссипативной теории
Колмогорова-Арнольда-Мозера.
Богданов Р.И. (НИИЯФ МГУ), Богданов М.Р. (МГУ ИЭ)
bogdanov@bogdan.npi.msu.su

Мы рассматриваем простейший пример слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера (КАМ): динамическую систему в дискретном времени на плоскости, называемую в литературе "Bogdanov map". Суть заключается в изучении возмущения линейного оператора, являющегося жордановым блоком с единичными собственными числами, т.е. с простейшим вырождением спектра (коразмерность 2); в коразмерности один, пример дает бифуркация Андронова-Хопфа.

Дискретная динамическая система традиционно действует в линейном представлении на пространстве функций, тензоров и т.п. Спектр соответствующего оператора проявляется в большом количестве прикладных задач математической физики, в частности, в квантовой механике. Мы излагаем ответ, полученный численными исследованиями, в примере "Bogdanov map".

С альтернативными подходами, апеллирующими к адиабатическим инвариантам можно ознакомиться по предыдущим публикациям.

§1. Введение.

При рассмотрении разнообразных математических моделей физических или иных прикладных задач рано или поздно появляются линейные операторы. На сегодня слова "линейный оператор" означают большое количество разнообразных направлений исследований. Самым простым и естественным способом перейти к теории линейных операторов является подход теории представлений, возникшей в функциональном анализе, бурно развивавшемся после второй мировой войны вплоть до настоящего времени (см.[7],[8]).

Для приложений важным вопросом является исследование спектра соответствующего линейного оператора (см.[9],[10]). В квантовой механике спектр линейного оператора, связанного с помощью принципа соответствия Н. Бора с гамильтонианом классической механической системы (см.[5]), определяет энергетические уровни квантово-механической системы, что и служит основой дальнейших исследований инвариантов динамики.

Другое направление исследований апеллирует к работе Колмогорова-Петровского-Пискунова (см.[6]), где изучаются критические значения физических постоянных динамики (в частности, скорость распространения инфекции в питательной сплошной среде). Это направление привело к развитию и использованию методов теории бифуркаций, активно развивающейся в школе В.И. Арнольда во второй половине XX-го столетия (см.[2]).

В результате, наряду со спектрами линейных операторов классической квантовой теории, являющихся зачастую арифметическими последовательностями на вещественной или чисто мнимой прямой, появляются более экзотические наборы критических значений физических величин, отделяющих одни режимы динамики от связанных с ними других режимов. В частности, в рамках слабо-диссипативной версии теории Колмогорова-Арнольда-Мозера численные исследования в рамках современных возможностей РС показывают наличие до 10^3 бифуркационных значений физических параметров, которые на вещественной прямой проявляют весьма экзотические свойства. Слово "экзотические" здесь означает стохастические свойства вышеуказанных множеств: на вещественной прямой критические значения описываются распределениями с количеством вершин $\sim 10 \div 20$ точек, отстоящих друг от друга на сравнительно большом расстоянии.

В основе вышеуказанных свойств динамики лежит топология расположения в фазовом пространстве квазиравновесных состояний динамической системы (см.[3],[4]).

Ниже, вслед за краткими пояснениями, иллюстрируются спектры динамической системы в дискретном времени отображения "Bogdanov map".

§2. Топология периодических орбит в "Bogdanov map".

Мы рассматриваем отображение, обозначаемое через $g(x)$, плоскости на себя, зависящее от трех параметров:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + y_{n+1} \\ y_{n+1} &= y_n + F(x_n, y_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $F(x_n, y_n) = kx_n(x_n - 1) + (\varepsilon + \mu x_n)y_n$, а $k, \varepsilon, \mu \in \mathbb{R}$ - вещественные параметры.

Периодической орбитой $g(x)$ называется решение (нелинейного) функционального уравнения

$$g^n(x_0) = x_0,$$

, где неизвестные n - целое, а $x_0 \in \mathbb{R}^2$.

Удобно считать, что

$$g^j(x_0) \neq x_0 \text{ при } 1 \leq j \leq n,$$

т.е. n - минимальный (из возможных) период.

При $k = \varepsilon = \mu = 0$ мы имеем линейное отображение фазовой плоскости на себя, являющееся жордановым блоком с единичными собственными числами.

При ненулевых значениях k , ε и μ отображение (1) имеет две неподвижные точки: $(0, 0)$ и $(0, 1)$. Мы численно изучаем периодические орбиты, которые имеют точки с абсциссой из отрезка $[0, 1]$. Выбор параметров k , ε и μ мы подчиняем условию наличия достаточно большого количества 10^3 периодических орбит (с учетом длины мантииссы и производительности современных процессоров РС).

Численное исследование показало, что периодические орбиты с ростом периода могут быть разбиты на кластеры, связанные с топологией расположения периодических орбит в фазовом пространстве. В подходящих условиях две периодических орбиты допускают упорядочение: период орбиты одной является кратным (в кольце целых чисел) периоду другой. В этом случае естественно назвать орбиту с большим периодом последующей. Слово "кластер" при вышеизложенном условии означает, что в окрестности каждой точки предыдущей орбиты лежит равное число различных точек последующей периодической орбиты. Отметим здесь, что в наших исследованиях действие основного отображения (1) на последующей орбите неприводимо.

§3. Численные характеристики динамики в кластерах.

Периодические орбиты, принадлежащие одному кластеру, проявляют традиционные интенсивные или экстенсивные свойства термодинамических величин. Другими словами, при возрастании периода в кластере некоторые величины насыщаются, т.е. выходят на определенные асимптотические значения: интенсивные переменные; некоторые ведут себя линейно (точнее афинно) с возрастанием периода: экстенсивные переменные.

К интенсивным переменным относятся средние величины вдоль периодических орбит произвольных гладких функций на фазовом пространстве. Другими словами, если $F(x, y)$ - произвольная гладкая функция на фазовой плоскости, то величина

$$\bar{F}(n, x_0) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n F(g^j(x_0)), \quad (2)$$

где n - период, а x_0 - точка в фазовом пространстве периодической орбиты, является интенсивной.

Пример экстенсивной величины представляет средний якобиан отображения вдоль периодической орбиты. В кластере периодических орбит средний якобиан в зависимости от периода образует прямую линию (точнее, сходится к прямой линии).

Наряду с якобианом отображения g большой интерес представляют другие инварианты матрицы Якоби. На иллюстрациях мы приводим собственные числа матрицы Якоби

$$\left. \frac{Dg^n(x)}{Dx} \right|_{x=x_0}, \quad (3)$$

где n - период, а x_0 - точка в фазовом пространстве периодической орбиты.

Иллюстрации выполнены для асимптотически (не) устойчивых периодических орбит. Поскольку для таких траекторий зачастую собственные числа матрицы Якоби (3) - комплексные, мы выполняем иллюстрации на комплексной плоскости (стандартно ось O_x).

При значениях параметров $k = \varepsilon = \mu = 0$ спектр линейного отображения g в неизолированной неподвижной точке равен единице (точка на единичной окружности). В наших расчетах ввиду малого отличия якобиана вдоль периодической орбиты от единицы спектр матрицы Якоби лежит в окрестности единичной окружности на комплексной плоскости (точнее, модуль собственных чисел матрицы Якоби $\sim (0.8, 1.1)$). Более удивительным фактом является поведение фазы комплексных собственных чисел матрицы Якоби. Фазы, взятые по модулю заполняют верхнюю полуокружность на единичной окружности на комплексной плоскости. Этот факт показывает "степени свободы" динамики, описываемой изучаемой моделью слабо-диссипативного возмущения консервативной системы.

На рис. 1 показаны собственные числа линеаризации отображения g^n в точке x_0 , являющейся представителем асимптотически устойчивой периодической орбиты с периодом n , отвечающих различным значениям n и x_0 . На рис. 2 то же самое выполнено для асимптотически неустойчивой периодической орбиты.

Рисунок 3 иллюстрирует вид собственных чисел для периодических орбит, имеющих топологический тип "седло". Для сопоставимости с прозрачной картиной рис. 1 и 2 для комплексных собственных чисел, на рис.3 по оси O_x откладывается полусумма собственных чисел (след оператора, уменьшенный вдвое), а по оси O_y квадратный корень из дискриминанта характеристического уравнения второго порядка.

Нетрудно заметить, что комплексные собственные числа лежат вблизи единичной окружности, а в гиперболическом случае в окрестности "единичной" гиперболы. Безусловно - это следствие того, что (1) является слабо-диссипативным возмущением консервативной системы (т.е. приближенно выполняется теорема Лиувилля о сохранении фазового объема).

Заключение.

Авторы [1] численно изучали поведение чисел вращения в модели (1) при ε и $\mu \sim 10^{-1}$. Они мотивировались понятием "чертовой лестницы" (см. [1] и библиографию там же). В наших численных исследованиях мы интересовались анализом временных

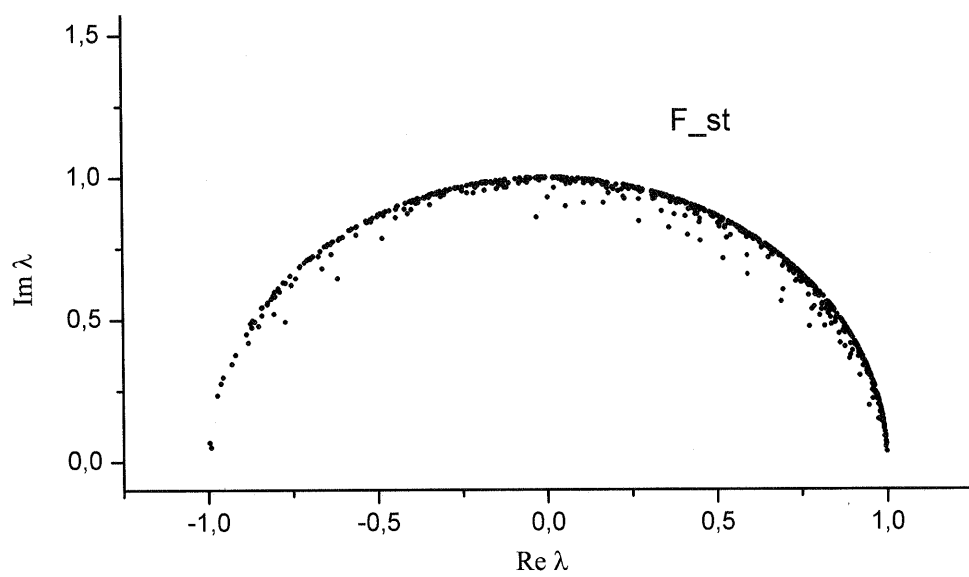


Рис. 1:

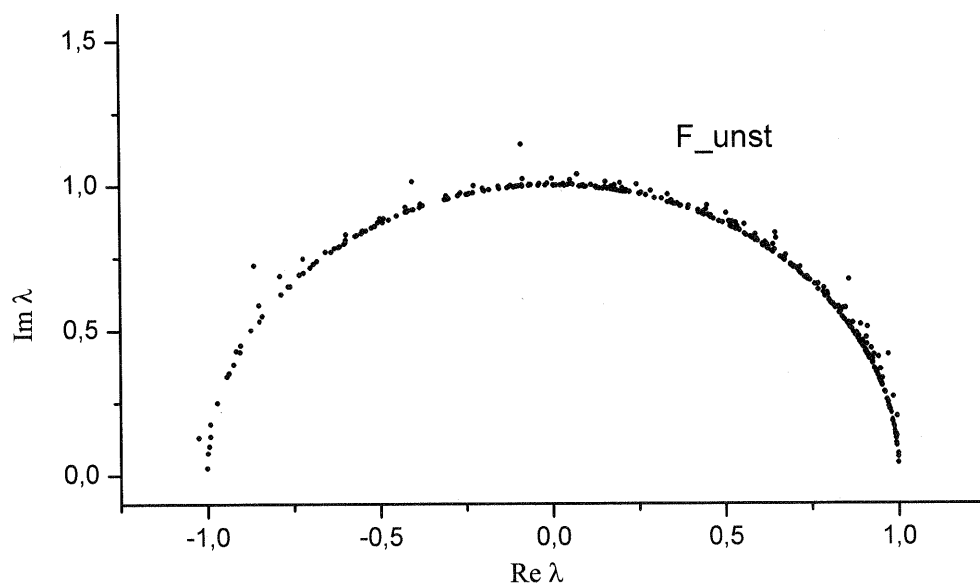


Рис. 2:

средних вдоль периодических орбит, т.е. поведением адиабатических инвариантов динамики. Для усреднения выбираются величины, имеющие физический смысл, что подсказывает формы анализа численного материала с учетом результатов, методов и подходов математической физики. Приведенные выше иллюстрации спектров асимптотически (не)устойчивых орбит показывают естественную с математической точки зрения картину: модули собственных комплексных чисел имеют определенную структуру, а фазы ведут себя не тривиальным образом, что находится в согласии со сложностью фазированных сигналов в экспериментальной физике. Подчеркнем, что при указанном характере спектральных данных, содержательные физические величины такие как энергия, длина свободного пробега и т.п. при сравнении асимптотически (не)устойчивых орбит с гиперболическими обнаруживают согласие в пределах 10%, т.е. ведут себя устойчивым образом.

Список литературы

- [1] Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1993 v.3, №4, 803-842. [2] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978, 304 с. [3] Богданов Р.И. Нелинейные динамические системы на плоскости и их приложения. - М.: Вузовская книга, 2003. 376 с. [4] Богданов Р.И. Фазовые портреты динамических систем на плоскости и их инварианты. - М.: Вузовская книга, 2008, 428 с. [5] Бор Н. Избранные научные труды в двух томах, т.1. - М.: Наука, 1970, 583 с. [6] Колмогоров А.Н. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985, 470 с. [7] Кириллов А.А. Геометрическое квантование. // "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления" (Итоги науки и техники ВИ-НИТИ АН СССР), 1985, т. 4, с. 141-178. [8] Кириллов А.А. Элементы теории представлений. М., Наука, 1972. [9] Плеснер А.И. Спектральная теория линейных операторов. М.: Наука, 1965, 624 с. [10] Садовничий В.А. Теория операторов. Учеб. для вузов.- 3-е изд., стер. - М.: Высшая школа, 1999, 368 с.

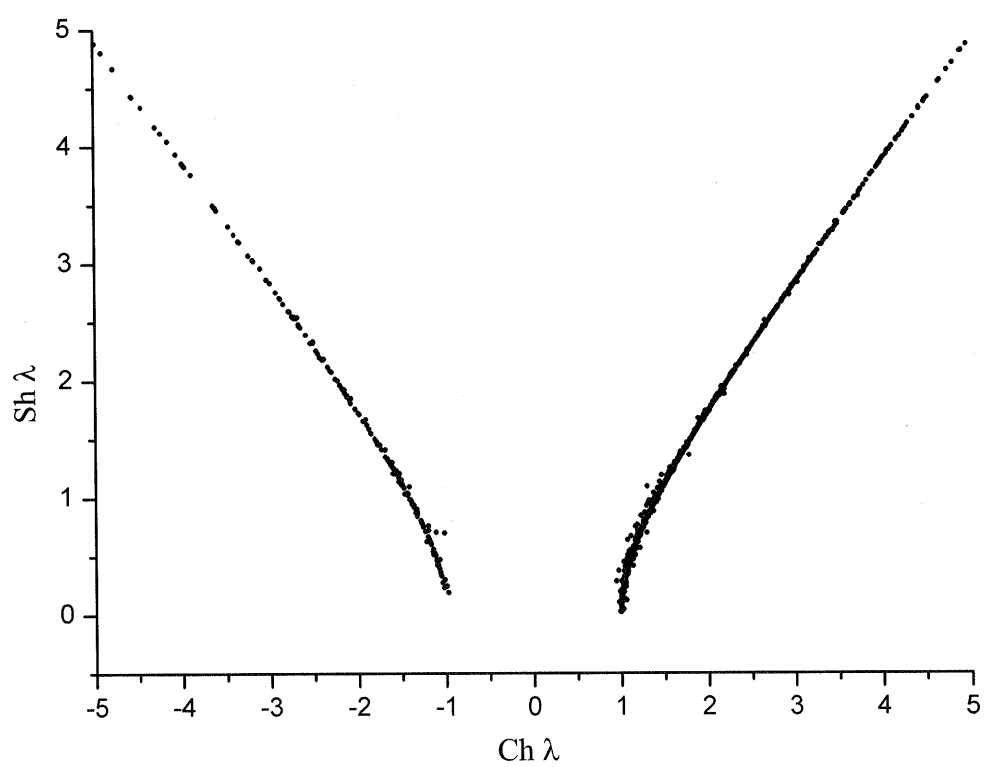


Рис. 3: