УДК 517.925.44

Об одном классе операторов Штурма–Лиувилля и приближенном вычислении собственных значений[1]

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

§ 1. Введение

Задача о вычислении первых собственных чисел оператора Штурма -Лиувилля является одной из важных классических задач математической физики. Достаточно упомянуть ее роль в использовании метода Фурье для приближенного решения классических краевых задач в частных производных и в задачах теории устойчивости. Естественно, что проблеме вычисления первых собственных чисел посвящены исследования многих математиков. Мы сосредоточимся на обсуждении теоретических методов и алгоритмов, не касаясь методов численных.

Одним из наиболее употребительных способов является метод, основанный на хорошо известных равенствах, связывающих итерированные функции Грина рассматриваемой задачи и ее собственные значения:

$$\int_0^\pi G_k(x,x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^k}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

Одно из наиболее глубоких исследований в этом направлении принадлежит А.А. Дородницыну [1]. Суть метода проста: обрываем в равенствах (1) ряды до слагаемых с номером N и берем $(N+1)$-но первое равенство. Решаем полученную конечную систему и получаем приближенные значения собственных чисел, тем более точные, чем большее N взято. В силу хорошо известной во многих классических задачах локализации собственных чисел с точностью до $O(1)$ оценку

[1]Мат. сборник, № 1, т. 189, 1998. с. 133–148.

отброшенного остатка ряда сделать несложно и корректность метода очевидна. Вместе с тем метод обладает существенным недостатком: вычисление конкретных значений интегралов из левой части (1) не алгоритмизуется и эти интегралы в конечном виде через параметры исходной задачи, вообще говоря, не выражаются.

С созданием теории регуляризованных следов И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном [2] в 1953 г. и результатами И. М. Гельфанда [3], Л. А. Дикого [4], а также с появлением фундаментальной работы В. Б. Лидского и В. А. Садовничего [5] в распоряжении математиков появились новые соотношения на собственные числа операторов - регуляризованные следы k-ого порядка:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\lambda_n^k - A_n(k)] = B(k), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

здесь $A_n(k)$ - отрезок асимптотического разложения λ_n^k по степеням n такой, что обеспечена абсолютная сходимость ряда (но, вообще говоря, не обязательно минимальный из таких фрагментов асимптотического разложения), а $B(k)$ - сумма этого ряда, собственно и называемая k-м регуляризованным следом. Эти равенства важны и интересны из-за того, что и $A_n(k)$ и $B(k)$ выражаются в конечном виде через коэффициенты дифференциального выражения и краевых условий и их вычисление вполне может быть алгоритмизировано (см.[5, 6]).

В связи с этим И.М. Гельфанд и Л.А. Дикий [7] предложили в 1957 г. новый метод приближенного вычисления первых собственных чисел оператора Штурма–Лиувилля: аналогично схеме использования системы (1) удержать в системе (2) частные суммы рядов до N-го слагаемого в $(N+1)$-м регуляризованном следе и полученную приближенную систему решить, найдя некоторые приближения к собственным числам задачи. В [7] сделано конкретное вычисление для уравнения Матье по указанной схеме и получены значения трех первых собственных значений, верные в третьем знаке после запятой. Однако в [7] данный метод не обоснован: никаких оценок при переходе от рядов к их частным суммам сделано не было.

В 1995 г. С.А. Шкарин [8] доказал неединственность решения бесконечных линейных систем определенного вида и, в частности, для систем вида (2) из его результатов следует, что если в системе регуляризованных следов (2) числа λ_n считать неизвестными и решать эту систему относительно λ_n, то у (2) существует континуум решений, причем мы можем заранее совершенно произвольно задать любое конечное число (различных) собственных чисел и всегда существуют решения с этими заданными числами. Таким образом, было показано, что метод приближенного вычисления первых собственных чисел с помощью системы регуляризованных следов в трактовке И.М. Гельфанда и Л.А. Дикого не может быть реализован.

В настоящей работе[2] мы определяем и исследуем класс S операторов Штурма–Лиувилля, для которых система регуляризованных следов однозначно определяет все их собственные числа и позволяет приближенно вычислять первые. В числе доказанных свойств этого класса операторов есть следующее: этот класс плотен в множестве всех операторов Штурма–Лиувилля с потенциалом из L_2 в смысле операторной нормы. Эти два результата образуют метод приближенного вычисления первых собственных чисел любого оператора с потенциалом из L_2: сначала мы должны приблизить рассматриваемый оператор (методом, изложенным в п.4) с точностью до $\varepsilon/2$ оператором из класса S и затем уже для построенного приближающего оператора найти с точностью до $\varepsilon/2$ первые собственные числа(методом, изложенным в п.3). Таким образом, собственные числа исходного оператора будут найдены с точностью до ε.

§ 2. Операторы класса S

Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \tag{3}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \tag{4}$$

где $q(x) \in L_2[0,\pi]$, h, $H \in R$. На протяжении всей работы мы будем обозначать через $\varphi(x,\lambda)$ решение задачи Коши для уравнения (3) с начальными данными $\varphi(0,\lambda) = 1$, $\varphi'(0,\lambda) = h$.

Если $q(x) \in C^n[0,\pi]$, то хорошо известно (см. напр. [10]), что $\varphi(x,\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ имеет следующее асимптотическое разложение:

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + k_1(x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \cdots + k_{2i}(x)\frac{\cos\sqrt{\lambda}x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} +$$

$$+k_{2i+1}(x)\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{(\sqrt{\lambda})^{2i}} + \cdots + +O\left(\frac{e^{|\Im\sqrt{\lambda}|\pi}}{|\lambda|^{\frac{n+1}{2}}}\right), \tag{5}$$

[2]Эти результаты мы анонсировали в работе [9].

где $k_i(x)$ можно найти из следующей рекуррентной цепочки соотношений:

$$k_1'(x) = \frac{1}{2}q(x), \quad k_1(0) = h$$

$$k_2'(x) = \frac{1}{2}(k_1''(x) - q(x)k_1(x)), \quad k_2(0) = 0$$

$$k_3'(x) = \frac{1}{2}(-k_2''(x) + q(x)k_2(x)), \quad k_3(0) = -k_2'(0)$$

$$\dots$$

$$k_l'(x) = \frac{(-1)^{l+1}}{2}(-k_{l-1}''(x) + q(x)k_{l-1}(x)), \tag{6}$$

$$k_{2i}(0) = 0, \quad k_{2i}'(0) + k_{2i+1}(0) = 0$$

$$\dots$$

Дадим следующее важное

Определение. Оператор вида (3) – (4) мы назовем оператором класса $S[0,\pi]$, если в разложении (5) для некоторого целого j, $1 \leqslant j \leqslant n+1$, $k_j(x) \equiv 0$ на $[0,\pi]$.

Замечание. Аналогично можно дать определение операторов класса $S[0,a]$ для любого вещественного a. Мы часто будем писать просто S без указания отрезка,когда это не может привести к недоразумению.

Данное определение автоматически подразумевает наличие у потенциала соответствующей гладкости.

Далее мы изучим некоторые свойства операторов класса S.

Лемма 1. Потенциал $q(x)$ любого оператора класса S есть голоморфная в некоторой окрестности отрезка $[0,\pi]$ функция,не продолжающаяся во всю плоскость как целая.

Доказательство. Пусть для некоторого номера N $k_N(x) \equiv 0$. Тогда в формулах (6) имеем

$$k_N'(x) \equiv 0 = \frac{(-1)^{N+1}}{2}(-k_{N-1}''(x) + q(x)k_{N-1}(x)), \tag{7}$$

$$k_{N+1}'(x) = \frac{(-1)^{N+2}}{2}(-k_N''(x) + q(x)k_N(x)) \equiv 0, \tag{8}$$

Причем если $N+1$ - четное, то $k_{N+1}(0) = 0$ и тогда $k_{N+1}(x) \equiv 0$, а если $N+1$ - нечетное, то $k_N'(0) + k_{N+1}(0) = 0$, отсюда $k_{N+1}(0) = 0$ и все равно $k_{N+1}(x) \equiv 0$. Таким образом, из (8) и (6) следует, что если

$k_N(x) \equiv 0$, то для любого $n > N$ $k_n(x) \equiv 0$ и (7) - последнее нетривиальное соотношение в цепочке равенств (6). Обозначив $k_l'(x) = k_l^*(x)$, мы получаем из (6) систему уравнений первого порядка относительно функций $k_l(x)$, $k_l^*(x)$, $l = 1, \ldots, N$, разрешенную относительно производных, содержащую $2N$ уравнение с полиномиальными нелинейностями без явного вхождения независимой переменной. Из этой системы возможно исключить все неизвестные кроме $k_l^*(x)$ (т.е. $q(x)$), и полученное нелинейное дифференциальное уравнение удовлетворяет условиям следующей теоремы [11,с.116]: Если в дифференциальном уравнении $P(z, w, w', ..., w^{(n)}) = 0$

$$P = \sum a_{j_0 j_1 \cdots j_n}(z) w^{j_0} (w')^{j_1} ... (w^{(n)})^{j_n}$$

есть многочлен по всем переменным и $d = \max(j_0 + ... + j_n)$ достигается только на одном слагаемом, то у уравнения нет целых трансцендентных решений. Заметив к этому,что из (6) в случае, когда $q(x)$ многочлен, следует, что и все $k_j(x)$ многочлены строго возрастающих степеней и, следовательно, не может быть обрыва асимптотического разложения (5), мы приходим к выводу, что $q(x)$ не целая. Так как $q(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$, то в некоторой окрестности этого отрезка полюсов у $q(x)$ нет. Лемма доказана.

Для дальнейшего необходимо напомнить некоторые определения и факты из обратной задачи для оператора Штурма–Лиувилля.

Оператором преобразования для оператора (3)-(4) и оператора того же вида с $q(x) \equiv 0$ и $h = 0$ называется обратимый оператор вида $I + K$, где K - интегральный оператор с треугольным ядром $K(x, y)$, переводящий $\cos\sqrt{\lambda}x$ в $\varphi(x, \lambda)$:

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}t\, dt, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi \tag{9}$$

Известно [см.,напр.,12], что $K(x, y)$ является решением следующей задачи:

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + q(x)K = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} \tag{10}$$

$$K_y'(x, 0) = 0; \quad K(x, x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt$$

и если известна $K(x, y)$, то $q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x, x)$, $\quad h = K(0, 0)$.

Переходной функцией обратной задачи $\Phi(x)$ называется следующая функция, строящаяся по заданному спектру оператора $\{\lambda_n\}$ и заданным нормировочным числам $\{\alpha_n, \quad \alpha_n = \int\limits_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx\}$:

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha_n} \cos \sqrt{\lambda_n} x - \frac{2}{\pi} \cos nx \right) + \frac{1}{\pi}, \tag{11}$$

Основное интегральное уравнение обратной задачи (уравнение Гельфанда-Левитана) связывает $K(x, y)$ и $\Phi(x)$:

$$K(x,y) + F(x,y) + \int\limits_0^x K(x,t)F(t,y)\, dt = 0, \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi \tag{12}$$

где

$$F(x,y) = \frac{1}{2}[\Phi(x+y) + \Phi(|x-y|)] \tag{13}$$

Мы можем сформулировать следующую лемму.

Лемма 2. Если потенциал $q(x)$ оператора (3)-(4) аналитичен в некоторой окрестности отрезка $[0, \pi]$, то ядро оператора преобразования $K(x, y)$ аналитично по каждой переменной в некоторой окрестности отрезка $[0, \pi]$ и переходная функция обратной задачи $\Phi(x)$ аналитична в некоторой окрестности отрезка $[0, 2\pi]$.

Доказательство. Сделав в задаче (10) замену переменных $x = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $y = \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ и обозначив $M(\alpha, \beta) = K(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta}{2})$, можно получить для функции $M(\alpha, \beta)$ следующее интегральное уравнение (см.[12,стр 16,17]):

$$M(\alpha,\beta) = h + \frac{1}{4} \int\limits_\beta^\alpha q\left(\frac{\delta}{2}\right) d\delta + \frac{1}{4} \int\limits_\beta^\alpha d\delta \int\limits_0^\beta q\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) M(\delta,\gamma)\, d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^\beta q\left(\frac{\delta}{2}\right) d\delta + \frac{1}{2} \int\limits_0^\beta \int\limits_0^\delta q\left(\frac{\delta+\gamma}{2}\right) M(\delta,\gamma)\, d\gamma d\delta. \tag{14}$$

Уравнение (4) есть уравнение типа Вольтерра, оно может быть решено с помощью метода последовательных приближений, причем последовательность этих приближений будет сходиться к решению равномерно на интересующей нас области. Отсюда следует, что если

$q(x)$ - аналитическая функция, то функция $K(x,y)$ также есть аналитическая функция.

Далее интегральное уравнение обратной задачи (12), рассматриваемое как уравнение относительно неизвестной функции $F(x,y)$, есть уравнение с независимой переменной x и параметром y. При значении параметра $y=0$ это уравнение переходит в уравнение типа Вольтерра относительно переходной функции $\Phi(x)$:

$$K(x,0)+\Phi(x)+\int\limits_0^x K(x,t)\Phi(t)\,dt=0 \tag{15}$$

Отсюда сразу следует, что при аналитической $K(x,y)$ функция $\Phi(x)$ также аналитична при $0\leqslant x\leqslant\pi$. Для доказательства ее аналитичности при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ рассмотрим уравнение (12) при $y=\frac{\pi}{2}$:

$$\Bigg[K(x,\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\Phi(x-\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}K(x,t)(\Phi(t+\frac{\pi}{2})+$$

$$+\Phi(\frac{\pi}{2}-t))\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}K(x,t)\Phi(t-\frac{\pi}{2})\,dt\Bigg]+$$

$$\frac{1}{2}\Phi(x+\frac{\pi}{2})+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x}K(x,t)\Phi(t+\frac{\pi}{2})\,dt=0. \tag{16}$$

Так как $\Phi(x)$ уже определена (из (15)) при $0\leqslant x\leqslant\pi$, то в квадратных скобках в (16) записана известная функция, и это уравнение типа Вольтерра на функцию $\tilde{\Phi}(x)=\frac{1}{2}\Phi(x+\frac{\pi}{2})$, определяющее $\Phi(x)$ при $\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$. Продолжая действовать таким образом, мы получим $\Phi(x)$ на всем интересующем нас отрезке и докажем ее аналитичность. Лемма доказана.

Теперь мы готовы перейти к описанию функций $K(x,y)$ и $\Phi(x)$, отвечающих операторам класса S. Запишем уравнение (12) в виде

$$\frac{1}{2}[\Phi(x+y)+\Phi(x-y)]+K(x,y)+\frac{1}{2}\int\limits_0^y K(x,t)[\Phi(t+y)+$$

$$+\Phi(y-t)]\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_y^x K(x,t)[\Phi(t+y)+\Phi(t-y)]\,dt=0,\quad 0\leqslant y\leqslant x$$

и продифференцируем его n раз по переменной y. Получим:

$$\frac{1}{2}\left[\Phi^{(n)}(x+y)+(-1)^n\Phi^{(n)}(x-y)\right]+\frac{\partial^n K(x,y)}{\partial y^n}+\Phi'(0)\frac{\partial^{n-2}K(x,y)}{\partial y^{n-2}}+$$

$$+\Phi'''(0)\frac{\partial^{n-4}K(x,y)}{\partial y^{n-4}}+\dots+\Phi^{\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)}(0)\frac{\partial^{\left(n-2\left[\frac{n}{2}\right]\right)}K(x,y)}{\partial y^{\left(n-2\left[\frac{n}{2}\right]\right)}}+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^y K(x,t)\left[\Phi^{(n)}(t+y)+\Phi^{(n)}(y-t)\right]dt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_y^x K(x,t)\left[\Phi^{(n)}(t+y)+(-1)^n\Phi^{(n)}(t-y)\right]dt=0 \qquad (17)$$

Сразу отметим, что если в уравнениях (17) при n нечетных положить $y=0$, то немедленно имеем, что

$$\left.\frac{\partial^{2k+1}K(x,y)}{\partial y^{2k+1}}\right|_{y=0}\equiv 0,\quad k=0,1,\dots \qquad (18)$$

т.е. разложение ядра оператора преобразования по степеням y содержит только четные степени y.

Проинтегрировав по частям представление (9), можно получить разложение (5) для $\varphi(x,\lambda)$ и, сравнив полученные коэффициенты, записать

$$-k_j(x)=(-1)^{\frac{j(j+1)}{2}}\left.\frac{\partial^{j-1}K(x,t)}{\partial t^{j-1}}\right|_{t=x} \qquad (19)$$

Здесь использованы равенства (18). Из (19) и из известных свойств цепочки функций $k_j(x)$ следует, что если для некоторого j_0 $\left.\frac{\partial^{j_0}K(x,t)}{\partial t^{j_0}}\right|_{t=x}\equiv 0$, то такое же тождество верно и для всех $j>j_0$ и так как в этом случае по леммам 1 и 2 $K(x,t)$ - аналитическая, то нетрудно вывести утверждение следующей леммы.

Лемма 3. Ядро оператора преобразования $K(x,t)$ для операторов класса S есть полином по второй переменной.

Вернемся к уравнениям (17) и рассмотрим их при $n=0,2,4,\dots$. При $n=0$ это будет исходное уравнение (12), выразим из него $K(x,y)$ и подставим в (17) при $n=2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\Phi'(0)F+\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}+\int\limits_0^x K(x,t)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-\Phi'(0)F\right]dt=0$$

Выразив отсюда $\frac{\partial^2 K}{\partial y^2}$ и подставив в (17) при $n = 4$, получим

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \Phi'(0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\Phi'^2(0) - \Phi'''(0)\right] F + \frac{\partial^4 K}{\partial y^4} +$$

$$+ \int\limits_0^x K(x,t)\left[\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \Phi'(0)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \left[\Phi'^2(0) - \Phi'''(0)\right] F\right] dt = 0$$

Вообще, при $n = 2k$ повторением этой процедуры будем иметь

$$M_{2k,y}(F(x,y)) + \frac{\partial^{2k} K(x,y)}{\partial y^{2k}} + \int\limits_0^x K(x,t) M_{2k,y}(F(t,y))\, dt = 0 \qquad (20)$$

где $M_{2k,y}$ - линейное дифференциальное выражение с постоянными коэффициентами (полиномами от значений нечетных производных $\Phi(x)$ в нуле) порядка $2k$ по переменной y, содержащее производные только четного порядка. Пусть $\frac{\partial^{2k} K(x,y)}{\partial y^{2k}} \equiv 0$ при некотором k. Рассмотрим уравнение (20) при этом k и положим там значение параметра $y = 0$:

$$M_{2k,x}(\Phi(x)) + \int\limits_0^x K(x,t) M_{2k,t}(\Phi(t))\, dt = 0 \qquad (21)$$

Это однородное уравнение Вольтерра относительно функции $M_{2k,x}(\Phi(x))$ и значит, имеет лишь нулевое решение:

$$M_{2k,x}(\Phi(x)) = 0 \qquad (22)$$

Таким образом, если оператор принадлежит классу S, то его переходная функция обратной задачи при некотором натуральном k (и при всех последующих) удовлетворяет уравнению (22). Обратно, если при некотором k выполнено (22), то, как следует из (20), $\frac{\partial^{2k} K(x,y)}{\partial y^{2k}} \equiv 0$ и ядро оператора преобразования $K(x,y)$ есть полином по второй переменной, что, по лемме 3 означает принадлежность оператора классу S. Таким образом, уравнения (22) полностью описывают класс S.

Замечание. Так как (22) есть линейное уравнение с постоянными коэффициентами, то $\Phi(x)$ есть обязательно квазиполином.

Покажем, как в случае оператора класса S решить основное интегральное уравнение обратной задачи. Снова обратимся к уравнениям

(17) при четных n, положим в них $y = 0$ и подставим неизвестную функцию $K(x,y)$ в виде $K(x,y) = \sum\limits_{m=0}^{N} q_m(x)y^{2m}$. Получим

$$\Phi(x) + a_{11}q_0(x) + \sum_{m=0}^{N} q_m(x) \int\limits_0^x t^{2m}\Phi(t)\,dt = 0$$

$$\Phi''(x) + a_{21}q_0(x) + a_{22}q_1(x) + \sum_{m=0}^{N} q_m(x) \int\limits_0^x t^{2m}\Phi''(t)\,dt = 0$$

$$\ldots$$

$$\Phi^{(2N)}(x) + a_{N+1,1}q_0(x) + \cdots + a_{N+1,N+1}q_N(x) +$$

$$+ \sum_{m=0}^{N} q_m(x) \int\limits_0^x t^{2m}\Phi^{(2N)}(t)\,dt = 0$$

где a_{ij} - числа, зависящие только от $\Phi(x)$, конкретный вид которых опустим. Мы получили линейную систему для неизвестных функций $q_0(x), \ldots, q_N(x)$, определяющих $K(x,y)$. Заметим, что так как $\Phi(x)$ - квазиполином, то $\Phi(x)$ - целая функция и значит, определитель этой системы $\Delta(x)$ - также целая функция. Если записать (в стандартных обозначениях метода Крамера) $q_i(x) = \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}$ и найти вид $\Delta(x)$ и $\Delta_i(x)$, то можно увидеть, что $\Delta'(x) = -\Delta_0(x) - x^2\Delta_1(x) - \cdots - x^{2N}\Delta_N(x)$ и отсюда

$$K(x,x) = \sum_{m=0}^{N} q_m(x)x^{2m} = -\frac{\Delta'(x)}{\Delta(x)}. \tag{23}$$

Мы видим, что $K(x,x)$ может иметь в качестве особенностей только полюса первого порядка, а $q(x) = 2\frac{d}{dx}K(x,x)$ в окрестности любой своей особой точки обязательно имеет вид $q(x) = \frac{const}{(x-a)^2} + \tilde{q}(x)$, где $\tilde{q}(x)$ - регулярная в окрестности точки a функция. Эти замечания существенно уточняют результат леммы 1.

Полученное нами характеристическое уравнение (22) в общем виде чрезвычайно сложно для исследования, так как записываемое формально линейным уравнением с постоянными коэффициентами, оно является, по сути, существенно нелинейной задачей из-за того, что постоянные коэффициенты нелинейно связаны со значениями в точке интересующего нас решения и его производных. Однако один частный случай поддается исследованию, и соответствующий результат мы сформулируем в виде леммы.

Лемма 4. Любой полином по четным степеням x является переходной функцией обратной задачи для некоторого оператора класса $S[0,a]$ с некоторым $a > 0$.

Доказательство. Действительно, возьмем $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{l} a_n x^{2n}$. Тогда $\Phi^{(2l+1)}(0) = 0$ и $M_{2l+2,x}(\Phi(x)) = \Phi^{(2l+2)}(x) = 0$ и для доказательства леммы осталось показать, что существует отрезок $[0,a]$, на котором основное интегральное уравнение обратной задачи (12)-(13) с выбранной нами $\Phi(x)$ разрешимо. Но это уравнение Фредгольма второго рода с непрерывным ядром $F(x,y)$ и на достаточно малом отрезке изменения x норма этого ядра будет меньше единицы и решение явно предъявляется рядом Неймана. Лемма доказана.

В условиях леммы 4 можно подробнее изучить свойства потенциала $q(x)$. Если $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{l} a_n x^{2n}$, то $\Delta(x)$ - полином степени $(l+1)(2l+1)$, и $K(x,x)$ представляется в виде

$$K(x,x) = -\sum_{k=0}^{m} \frac{n_k}{x - a_k}$$

где a_k - нули многочлена $\Delta(x)$, n_k - их кратности. Таким образом, в этом случае

$$q(x) = 2\sum_{k=0}^{m} \frac{n_k}{(x-a_k)^2} \tag{24}$$

$$h = K(0,0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{n_k}{a_k} \tag{25}$$

Далее отметим, что уравнение $-y'' + q(x)y = \lambda y$ с $q(x)$ вида (24) есть уравнение с регулярными особыми точками. По известной схеме [13] можно изучить структуру решений этого уравнения в окрестности любой из этих точек, и сравнив результаты такого исследования с имеющимися у нас данными мы можем получить дополнительную информацию о n_k.

Итак, для точки a_k определяющее уравнение имеет вид

$$-\rho^2 + \rho + 2n_k = 0, \quad \rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8n_k}}{2}$$

Одно из решений уравнения имеет в окрестности a_k вид $y_1 = (x-a_k)^{\rho_1}z_1(x)$, где $z_1(x)$ голоморфно в точке a_k, а второе решение в зависимости от того, целое ли число $\rho_1-\rho_2$ или нет, имеет вид $y_2=(x-a_k)^{\rho_2}z_2(x)$ или $y_2=cy_1\ln(x-a_k)+(x-a_k)^{\rho_2}z_2(x)$. Но нам известно, что у рассматриваемого нами уравнения есть решения с полюсами в точках $a_1,\dots,a_m$, следовательно, по крайней мере одно из чисел ρ_1,ρ_2 - целое и тогда $\sqrt{1+8n_k}$ - целое нечетное.

Пусть $\sqrt{1+8n_k}=m$, тогда $n_k=\frac{1}{8}(m^2-1)$ и легко видеть, что если $m=2N+1$, то $\frac{1}{8}(m^2-1)$ всегда целое и, следовательно, в выражении для $\rho_{1,2}$ вместо корня можно брать любое нечетное натуральное число. Окончательно имеем, что числа n_k могут иметь только вид $n_k=\frac{l(l+1)}{2}$, где l - любое натуральное.

§ 3. Приближенное вычисление первых собственных чисел операторов класса S

Основным результатом этого параграфа является следующая

Теорема 1. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ - спектр некоторого оператора L из класса S и пусть

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_n^k-A_n(k))=B(k),\quad k=1,2,\dots \tag{26}$$

полная система регуляризованных следов этого оператора. Тогда система (26) однозначно определяет спектр $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ и более того, для любого $\varepsilon>0$ существует натуральное $N(\varepsilon)$, а также существует натуральное K, зависящее только от оператора L (и не зависящее от ε), что если использовать в $A_n(k)$ (26) при $k=1,\dots,K$ первые N членов асимптотического разложения λ_n по степеням n, то будут верны неравенства

$$\left|\sum_{n=0}^{K-1}(\lambda_n^k-A_n(k))-B(k)\right|\leqslant\varepsilon,\quad k=1,\dots,K \tag{27}$$

Причем можно взять $K=13+[12\pi(3+H)2^pM_1]$, а $N\geqslant 2(K-1)\times\lg(4K+12)-\lg\frac{10\varepsilon}{3}$. Здесь p - число ненулевых членов асимптотики (5) для L,

$$M_1=\max_{0\leqslant i\leqslant p}\left\{\max_{x\in[0,\pi]}\left(\frac{1}{2}\int_0^x q(x)+h\right)^{(i)}\right\}.$$

Доказательство. Уравнение на собственные числа оператора (3), (4) имеет вид $\varphi'(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)=0$, что для оператора класса S можно (в силу конечности суммы (5)) переписать в виде

$$e^{2i\pi\sqrt{\lambda}}\sum_{k=0}^{p}\frac{a_k}{(\sqrt{\lambda})^k}-\sum_{k=0}^{p}\frac{b_k}{(\sqrt{\lambda})^k}=0 \tag{28}$$

с некоторыми постоянными коэффициентами a_k, b_k, выражающимися через коэффициенты $k_j(x)$ (5). Индекс p в (28) совпадает с номером последнего ненулевого коэффициента в (5). Оценим коэффициенты a_k, b_k в (28), для чего необходима оценка $k_j(x)$ и $k_j'(x)$ на отрезке $[0,\pi]$. Из формул (6) видно, что для оценки $k_p'(x)$ необходимо оценить $k''_{p-1}(x)$, для чего необходима оценка $k'''_{p-2}(x)$ и т.д.

Заметим, что введенная в формулировке теоремы константа M_1 может быть записана так:

$$M_1=\max_{0\leqslant i\leqslant p}\left\{\max_{x\in[o,\pi]}|k_1^{(i)}(x)|\right\} \tag{29}$$

Так как $k_1(x)=\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(x)\,dx+h$, то все необходимые нам производные $q(x)$ не превосходят $2M_1$. Из (6) легко получаем, что $\forall l\in N$

$$k_2^{(l+1)}(x)=\frac{1}{2}\left[k_1^{(l+2)}(x)-\sum_{m=0}^{l}C_m^l q^{(m)}(x)k_1^{(l-m)}(x)\right]$$

и для любого $l=0,\dots,p-2$

$$\left|k_2^{(l+1)}(x)\right|\leqslant\frac{1}{2}M_1+M_1M_12^l\leqslant 2^{p-1}M_1^2$$

Для самой функции $k_2(x)$ воспользуемся равенством

$$k_2(x)=-\frac{1}{2}k_1'(0)+\frac{1}{2}k_1'(x)-\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(x)k_1(x)\,dx$$

и увидим, что все интересующие нас производные $k_2(x)$, включая нулевую производную, оцениваются константой $M_2=\pi 2^{p-1}M_1^2$. Обозначим через M_j константу, ограничивающую все нужные нам производные $k_j(x)$. Тогда повторением указанной процедуры нетрудно получить следующую оценку:

$$M_j=\pi^{j-1}2^{(j-1)p-\frac{j(j+1)}{2}}M_1^j.$$

Для упрощения дальнейших выкладок примем:

$$\max_{0\leqslant i\leqslant p+1-l}\{\max_{x\in[0,\pi]}|k_l^{(i)}(x)|\}\leqslant \pi^l 2^{lp}M_1^l. \tag{30}$$

Далее легко установить, что коэффициенты a_k, b_k, $k=1,\ldots,p$ в (28) (при нормировке $a_0=b_0=1$) образуются как сумма не более чем трех слагаемых, каждое из которых есть значение в точке π функций $k_k(x)$, $k_{k-1}(x)$ или их первых производных, причем одно из этих слагаемых умножено на H.

Исходя из этого и (30), запишем

$$|a_k|,\quad |b_k|\leqslant (2+H)\pi^k 2^{kp}M_1^k,\quad k=1,\ldots,p. \tag{31}$$

Перепишем уравнение на собственные числа $\{\lambda_n\}$ (28) в виде

$$e^{2i\pi\sqrt{\lambda_N}}=\left(1+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{p}\frac{a_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k)}\right)^{-1} \tag{32}$$

и прологарифмируем (32) (пользуясь также классическим фактом о том, что $\{\lambda_n\}$ находится в окрестности именно $n\in N$):

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{1}{2\pi i}ln\left(1+\sum_{k=1}^{p}\frac{b_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right)-\frac{1}{2\pi i}ln\left(1+\sum_{k=1}^{p}\frac{a_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k}\right) \tag{33}$$

Из оценок (31) легко следует, что логарифмы в (33) разлагаются в ряд Тейлора (по степеням сумм, прибавляемых к 1) при $\sqrt{\lambda_n}>$ $>(3+H)\pi M_1 2^p$, а следовательно, они разлагаются в ряд Тейлора по степеням $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ в той же области:

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d_k}{(\sqrt{\lambda_n})^k} \tag{34}$$

Опуская несложную, но весьма громоздкую процедуру разложения логарифмов из (33) по степеням $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$ и применения к получаемым выражениям оценок (31), запишем необходимую для дальнейшего оценку коэффициентов d_k из (34):

$$|d_k|\leqslant[\pi(3+H)2^pM_1]^k,\quad k=1,2,\ldots \tag{35}$$

Оценка (35) указывает, что, вообще говоря, равенства (34) верны (не как асимптотические, а как точные, со сходящимся рядом) не для всех λ_n, а только начиная с некоторого номера. Используя рассуждение типа обращения степенного ряда по Бурману-Лагранжу, нетрудно заметить, что начиная с некоторого номера K имеют место представления $\sqrt{\lambda_n}$ в виде сходящегося ряда по степеням n:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{n^k}, n \geqslant K \tag{36}$$

Нам необходима оценка K и c_k из (36).

Итак, рассмотрим функцию [3] $\psi(z) = A + \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1}$, где $A \neq 0$, $|a_k| \leqslant CR^{-k-1}$, $C > 0$ и $R > 0$ - некоторые константы. Тогда функция $w(z) = \frac{z}{\psi(z)}$ аналитична в некоторой окрестности нуля и

$$\frac{1}{w(z)} = \frac{A}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{37}$$

Нам надо в некоторой окрестности нуля получить разложение

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{Aw} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k w^k \tag{38}$$

и оценить снизу ρ - радиус сходимости ряда $\sum b_k w^k$. Сразу поясним, что разложение (37) соответствует (34) (n по $\sqrt{\lambda_n}$), а (38) соответствует (36) ($\sqrt{\lambda_n}$ по n), и K из (36) связано с ρ так: $K = \left[\frac{1}{\rho}\right] + 1$.

Пусть D - область в C, содержащая ноль, ∂D - простая замкнутая спрямляемая кривая, и $w(z)$ аналитична в $\overline{D}$ и

$$w(z_1) \neq w(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in \overline{D}, \quad z_1 \neq z_2 \tag{39}$$

Также пусть $B = \min\limits_{z \in \partial D} |w(z)|$. Так как у нас $w(0) = 0$, то в силу (37) $B > 0$. Другими словами, w является биекцией $\overline{D}$ на ее образ и этот образ содержит круг $K_B = \{w \in C | |w| \leqslant B\}$. Пусть $G = w^{-1}(K_B)$. Так как функция f разлагается в ряд

$$f(z) = f(z(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n,$$

[3] Авторы признательны А.Ю.Попову за существенную помощь в получении нижеследующей оценки для K и c_k.

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=B} \frac{f(z(w))}{w^{n+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G} \frac{f(z)w'(z)}{(w(z))^{n+1}}\,dz \tag{40}$$

Нас в соответствие с (38) интересует разложение функции

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{Aw(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\psi(z)}{Az} = \frac{A-\psi(z)}{Az},$$

аналитической в круге $|z| < R$. В качестве областей D мы можем брать круги $|z| < r$, $r < R$, причем r надо выбрать так, чтобы $w(z)$ было инъективным в $|z| < r$, а величина

$$B = B(r) = \min_{|z|=r} |w(z)| = \min_{|z|=r} \left|\frac{z}{\psi(z)}\right| = \frac{r}{\max\limits_{|z|=r} |\psi(z)|}$$

была бы возможно большей. Тогда $\rho = \sup\limits_r B(r)$.

Лемма 5. Пусть $C_1 = \frac{C}{|A|}$, $r_0 = \frac{R}{2(1+C_1)}$. Тогда $\psi(z) \neq 0$ при $|z| < 2r_0$ и в этом круге $w(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k z^k$, $|\delta_k| \leqslant \frac{1+2C_1}{C+|A|} r_0^{1-k}$, $k \geqslant 2$.

Доказательство.

$$|\psi(z)| \geqslant |A| - \sum_{k=0}^{\infty} C\left(\frac{|z|}{R}\right)^{k+1} = |A|(1 - \frac{C_1|z|}{R-|z|}).$$

Если $|z| < \frac{R}{1+C_1}$, то $\frac{C_1|z|}{R-|z|} < 1$ и действительно $\psi(z) \neq 0$ при $|z| < 2r_0$. Если $|z| = r_0$, то $|\psi(z)| \geqslant |A|\frac{1+C_1}{2C_1+1}$ и

$$|\delta_k| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r_0} \frac{w(z)}{z^{k+1}}\,dz\right| \leqslant \frac{\max\limits_{|z|=r_0}\left|\frac{z}{\psi(z)}\right|}{r_0^k} = \frac{r_0^{1-k}}{\min\limits_{|z|=r_0}|\psi(z)|} \leqslant \frac{2C_1+1}{|A|(1+C_1)} r_0^{1-k}$$

Лемма доказана.

Лемма 6. Если $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|\delta_n| r^{n-1} < |\delta_1|$, то отображение $w(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n z^n$ инъективно в круге $|z| \leqslant r$.

Доказательство. $w(z_1) - w(z_2) = \delta_1(z_1 - z_2) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} \delta_2(z_1^n - z_2^n) \Rightarrow$ при $z_1 \neq z_2$, $|z_1|$, $|z_2| \leqslant r$ имеем

$$\left|\frac{w(z_1)-w(z_2)}{z_1 - z_2}\right| \geqslant |\delta_1| - \sum_{n=2}^{\infty} |\delta_n| |\sum_{j=0}^{n-1} z_1^j z_2^{n-1-j}| \geqslant |\delta_1| - \sum_{n=2}^{\infty} n|\delta_n| r^{n-1} > 0$$

Лемма доказана.

У нас $\delta_1 = \frac{1}{A}$ и надо подобрать r так, чтобы было выполнено неравенство

$$\frac{1}{|A|}\frac{1+2C_1}{1+C_1}\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1} < \frac{1}{|A|}$$

или

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1} < \frac{1+C_1}{1+2C_1}.$$

Очевидно, достаточно выполнения неравенства $\frac{1}{\left(1-\frac{r}{r_0}\right)^2} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$, и отсюда $\frac{r}{r_0} \leqslant 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}$. Примем $r = \frac{2}{11}r_0 = \frac{R}{11(1+C_1)}$ и оценим ρ. В силу изложенного перед леммой 5 $\rho \geqslant \frac{r}{\max\limits_{|z|=r}|\psi(z)|}$, а в отношении $\max|\psi(z)|$ имеем:

$$\max_{|z|=r}|\psi(z)| \leqslant |A| + \sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^{k+1} \leqslant |A| + C\frac{r}{R}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^k = |A| + \frac{rC}{R-r}$$

и окончательно для ρ получаем следующую оценку: $\rho \geqslant \frac{R}{12(|A|+C)}$ и для K верно:

$$K = \left[\frac{12(|A|+C)}{R}\right] + 1 \tag{41}$$

Наконец, воспользуемся разложением (34) и оценками (35) для записи оценки для K в терминах, прямо связанных с исходной задачей: $A = 1$, $C = \frac{1}{\pi(3+H)2^p M_1}$, $R = C$, и имеем

$$K = [12 + 12\pi(3+H)2^p M_1] + 1 = 13 + [12\pi(3+H)2^p M_1] \tag{42}$$

Для оценки коэффициентов c_k из (36) используем формулы (40), оценки для $w(z)$ из леммы 5 и несложную оценку максимума $\psi(z)$. Итак,

$$|c_k| \leqslant \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=\frac{2}{11}r_0}\frac{A-\psi(z)}{Az}\frac{w'(z)}{(w(z))^{k+1}}\,dz\right| =$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=|\frac{2}{11}r_0}\frac{1}{A}\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_l z^l\right)\frac{(\psi(z))^{k+1}}{z^{k+1}}\left(\sum_{l=1}^{\infty}\delta_l l z^l - 1\right)\,dz\right) \leqslant$$

$$\leqslant 24\left(\frac{6}{5}\pi(3+H)2^pM_1\right)^k \tag{43}$$

Наконец, докажем неравенства (27). Мы опять пожертвуем качеством оценки (они будут весьма грубыми) в пользу простых и коротких рассуждений и выкладок. Итак, пусть номер N таков, что

$$|\sqrt{\lambda_K} - A_N(K)| < \varepsilon_K(N) \tag{44}$$

где $A_N(K)$ отрезок разложения (36) до члена $\frac{C_N}{K^N}$. Подберем для любого $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_K(N)$ так, чтобы

$$|(\sqrt{\lambda_K})^l - A_N^l(K)| < \varepsilon \tag{45}$$

для $l = 1, 2\ldots, 2(K-1)$. Из (36) и оценок (42), (43) легко получаем

$$|\sqrt{\lambda_K}| < K + 3 \tag{46}$$

и, оценивая $|A_N(K)| < 2|\sqrt{\lambda_k}|$, $(1+\varepsilon)^n - 1 < \varepsilon n 2^{n-1}$, имеем, что при выборе

$$\varepsilon_K(N) < \frac{\varepsilon}{(4(K+3))^{2(K-1)}} \tag{47}$$

из (44) будет следовать (45). Далее, так как $\varepsilon_K(N) = \sum\limits_{l=N+1}^{\infty} \frac{C_l}{K^l}$, то, выбрав N в соответствие с неравенством

$$\frac{3}{10^{N+1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{(4(K+3))^{2(K-1)}} \tag{48}$$

мы определим $A_N(K)$ так, что будет выполнено (47). Теорема 1 доказана.

§ 4. Приближение произвольного оператора Штурма–Лиувилля оператором класса S

Теорема 2. Для произвольного оператора Штурма–Лиувилля L с потенциалом из $L_2[0,\pi]$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует оператор класса S с областью определения такой же, как и у L и такой, что норма их разности не превосходит ε.

Доказательство. Рассмотрим оператор (3), (4) и его переходную функцию обратной задачи $\Phi(x)$ (11). Если $q(x) \in L_2[0,\pi]$, то $\Phi(x) \in$ $\in AC[0,2\pi]$ ($\Phi(x)$ может иметь в точке 2π разрыв первого рода, что несущественно для дальнейшего, и мы будем принимать за $\Phi(x)$ функцию, совпадающую с $\Phi(x)$ на $[0,2\pi)$ и равную в $x=2\pi$ пределу $\Phi(x)$) и $\Phi'(x) \in L_2[0,2\pi]$. Приблизим $\Phi(x)$ многочленом $P\Phi(x,\varepsilon_1)$, содержащим лишь четные степени x, с точностью до ε_1 по норме $C[0,2\pi]$ и таким, что $P\Phi'(x,\varepsilon_1)$ приближает $\Phi'(x)$ в $L_2[0,2\pi]$ также с точностью ε_1 (о способах построения подобных приближений см. [14]). Тогда, очевидно, функция $PF(x,y,\varepsilon_1) = \frac{1}{2}[P\Phi(x+y,\varepsilon_1) + P\Phi(|x-y|,\varepsilon_1)]$ будет аналогично приближать $F(x,y)$ (13).

Основное интегральное уравнение обратной задачи (12) есть уравнение по переменной y с параметром x и при каждом фиксированном x есть уравнение Фредгольма второго рода. Обозначая оператор $\int\limits_0^x K(x,t)F(t,y)\,dt = \mathcal{F}_x(K(x,y))$, перепишем (12) в более удобной для нас форме:

$$(I+\mathcal{F}_x)K(x,y) = -F(x,y) \tag{49}$$

Аналогичное уравнение с $PF(x,y,\varepsilon_1)$ вместо $F(x,y)$ запишем так:

$$(I+\mathcal{PF}_{x,\varepsilon_1})K_{\varepsilon_1}(x,y) = -PF(x,y,\varepsilon_1) \tag{50}$$

Считая для удобства $PF(x,y,0) = F(x,y)$, перепишем (50) в виде

$$(I+\mathcal{F}_x+[\mathcal{PF}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x])K_{\varepsilon_1}(x,y) = -F(x,y)+(-PF(x,y,\varepsilon_1)+F(x,y)) \tag{51}$$

Так как $\Phi(x)$ является переходной функцией обратной задачи некоторого оператора L, то уравнение (49) однозначно разрешимо при любом x [9] и, следовательно, существует оператор $(I+\mathcal{F}_x)^{-1}$. Применим этот оператор к обеим частям равенства (51):

$$(I+(I+\mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{PF}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x))K_{\varepsilon_1}(x,y) =$$

$$= K(x,y)+(I+\mathcal{F}_x)^{-1}(F(x,y)-PF(x,y,\varepsilon_1)) \tag{52}$$

Далее, так как $PF(x,y,\varepsilon_1)$ есть равномерное приближение для $F(x,y)$, то норма оператора $\mathcal{PF}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x$ может быть выбором ε_1 сделана сколь угодно малой (оценку опустим ввиду тривиальности), а значит, и норма $(I+\mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{PF}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x)$ тоже может быть сделана сколь угодно малой. Тогда оператор, применяемый к $K_{\varepsilon_1}(x,y)$ в (52) обратим и, более того, обратный к нему представим в виде суммы ряда Неймана. Применим этот ряд Неймана к левой и правой частям (52):

$$K_{\varepsilon_1}(x,y)=\left(\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l((I+\mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}\mathcal{F}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x))^l\right)(K(x,y)+$$

$$+(I+\mathcal{F}_x)^{-1}(F(x,y)-PF(x,y,\varepsilon_1))=$$

$$=K(x,y)-(I+(I+\mathcal{F}_x)^{-1}(\mathcal{P}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x))\times$$

$$\times(I+\mathcal{F}_x^{-1})(F(x,y)-PF(x,y,\varepsilon_1)+\mathcal{P}\mathcal{F}_{x,\varepsilon_1}-\mathcal{F}_x)K(x,y)) \qquad (53)$$

Из (53) уже легко оценивается $|K_{\varepsilon_1}(x,y)-K(x,y)|$. Заметим, что попутно мы доказали разрешимость основного интегрального уравнения, основанного на функции $P\Phi(x,\varepsilon_1)$, что само по себе не очевидно, так как про эту функцию заранее не известно, что она является переходной функцией некоторого оператора Штурма-Лиувилля на отрезке $[0,a]$ (ср. с леммой 4).

Дифференцируя уравнение (12) по x и по y, соответственно получим:

$$K'_x(x,y)+F'_x(x,y)+K(x,x)F(x,y)+\int_0^x K'_x(x,t)F(t,y)\,dt=0 \qquad (54)$$

$$K'_y(x,y)+F'_y(x,y)+K(x,x)F(x,y)-K(x,0)\Phi(y)-$$

$$-\int_0^x K'_t(x,t)F(t,y)\,dt=0 \qquad (55)$$

Совершенно аналогично тому, как было получено уравнение (53), мы можем исследовать и (54), (55) (используя уже имеющуюся из (53) функцию $K_{\varepsilon_1}(x,y)$ и ее близость к $K(x,y)$) и доказать возможность дифференцирования $K(x,y)$ с сохранением необходимого приближения.

Таким образом, $q_{\varepsilon_1}(x)=2\frac{d}{dx}K_{\varepsilon_1}(x,x)$ и $h_{\varepsilon_1}=K_{\varepsilon_1}(0,0)$ будут параметрами оператора, приближающего исходный с любой точностью и при этом, ввиду того, что $P\Phi(x,\varepsilon_1)$ есть многочлен по четным степеням x, по лемме 4 это будут параметры оператора класса S. Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что h_{ε_1} всегда можно выбрать равным h. Действительно, $h=K(0,0)=-\Phi(0)$ и мы всего лишь должны при приближении $\Phi(x)$ следить за тем, чтобы $\Phi(0)=P\Phi(0,\varepsilon_1)$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что, конечно, для произвольного оператора L нельзя рассчитывать на точно известную $\Phi(x)$. Саму $\Phi(x)$ можно найти приближенно последовательным решением двух уравнений Вольтерра второго рода: сначала уравнения (14), а затем (15) и (16). Последовательные приближения для уравнений этого типа сходятся очень быстро, и получить необходимые оценки здесь несложно. То, что мы будем знать $\Phi(x)$ приближенно, на доказательстве теоремы 2 не отразится.

Литература

1. *А.А.Дородницын.* Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. УМН , 1952,т. 7, N6, с.3-96
2. *И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР,т.88, 1953, с. 593-596.
3. *И.М.Гельфанд.* О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. УМН,т.11,N1, 1956,с. 191-198.
4. *Л.А.Дикий.*Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке. Изв.АН СССР,сер.матем.,1955,т.19,N4,с. 187-200.
5. *В.Б.Лидский,В.А.Садовничий.* Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Функ.ан. и его прил.,т.1, N2, 1967,с. 52-59.
6. *В.Б.Лидский,В.А.Садовничий.* Формулы следов в случае уравнения Орра-Зоммерфельда. Изв.АН СССР,сер.матем.,т.32,N3,1968,с. 633-648.
7. *Л.А.Дикий.* Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. ДАН СССР, 1957,т.116, N 1,с.12-14.
8. *С.А.Шкарин.* О способе Гельфанда-Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Вестник МГУ,сер 1,1996,N 1,с. 39-44.
9. *В.А.Садовничий,В.Е.Подольский.* О вычислении первых собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Доклады РАН, 1996, т. 346,N 2,с. 162-164.
10. *В.А.Марченко.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка.I. Тр. ММО, 1952,т.1,с. 327-420.
11. *Г.Виттих.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям.М., Физматгиз,1960, 319 с.

12. *Б.М.Левитан.* Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М., Наука,1984, 320 с.
13. *В.В.Голубев.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М., Гостехиздат, 1950, 436 с. М., Наука,1965, 407 с.
14. *Н.И.Ахиезер.* Лекции по теории аппроксимации. М., Наука,1965, 407 с.