

УДК 517.925.44

Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом¹

В. А. Винокуров, В. А. Садовничий

§ 1. Введение

На семинаре по спектральной теории Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова профессор В. А. Садовничий поставил вопрос о связи асимптотики собственных значений и собственных функций краевой задачи для уравнения

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0 \quad (1.1)$$

с краевыми условиями Штурма

$$y(0) \cos(\varphi_0) + y'(0) \sin(\varphi_0) = 0, \quad (1.2)$$

$$y(\ell) \cos(\varphi_\ell) + y'(\ell) \sin(\varphi_\ell) = 0 \quad (1.3)$$

на отрезке $[0, \ell]$, с дифференциальными свойствами потенциала – функции $q(x)$.

На основе результатов работы В.А. Винокурова [1], следуя операторной технике, представленной в [2], здесь предлагаются явные асимптотические формулы с оценкой остатка вида $O(n^{-(m+1)})$ для любого фиксированного натурального числа m при $n \rightarrow \infty$, для собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма – Лиувилля (1.1-1.3) при условии суммируемости функции $q(x)$. Здесь n – номер собственного значения λ_n .

¹Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 47-108.

Задача Штурма – Лиувилля (1.1-1.3) является классической и имеет обширную библиографию (см. [3]–[6]). Асимптотические формулы для её собственных значений и собственных функций построены до любого степенного порядка по номеру n . Однако, в литературе (см. [6]) существование асимптотической формулы для корня из положительного собственного значения $\sqrt{\lambda_n}$ с ошибкой $O\left(\frac{1}{n^{m+2}}\right)$ обосновано лишь для случая потенциальной функции $q(x)$, имеющей m -тую соболевскую производную. Предлагаемые же нами асимптотические формулы любого порядка m справедливы для любого суммируемого потенциала $q(x)$.

Кроме задачи Штурма – Лиувилля мы рассматриваем также периодическую краевую задачу для уравнения (1.1) с краевыми условиями

$$y(0) = y(\ell), \quad y'(0) = y'(\ell). \quad (1.4)$$

Краевая задача на собственные значения для дифференциального уравнения (1.1) сегодня широко используется в математическом моделировании физических процессов, являясь, в частности, одним из основных инструментов квантовой механики (см., например, [7], [8]). При этом ограничение гладкости потенциала нарушается уже в простейшей задаче квантовой механики с прямоугольной потенциальной ямой или прямоугольным барьером. Предлагаемые нами формулы, в которых участвуют лишь моменты потенциальной функции, несут важную и обозримую информацию для задач с разрывным потенциалом, содержащим, например, δ -функции.

Приведём два примера построенных асимптотик для частного случая $\ell = \pi$ и $m = 1$.

Пример 0.1. Для первой краевой задачи

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_n} &= n - \frac{1}{2\pi n} \left(\int_0^\pi q(t)(1 - \cos(2nt))dt \right) + \psi_{n,1}; \\ y_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\sin(nx) + \frac{1}{2\pi n} \left(\cos(nx) \left(\pi \int_0^x q(t)dt - x \int_0^\pi q(t)dt + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + x \int_0^\pi q(t) \cos(2nt)dt - \pi \int_0^x q(t) \cos(2nt)dt \right) \right) + \end{aligned}$$

$$+ \sin(nx) \left(\int_0^\pi (\pi - t) q(t) \sin(2nt) dt - \right. \\ \left. - \pi \int_0^x q(t) \sin(2nt) dt \right) + \Delta y_n(x).$$

Здесь λ_n – n -ное собственное значение, $y_n(x)$ – соответствующая нормированная собственная функция, причём

$$|\psi_{n,1}| \leq \frac{20b^2}{\pi \left(n\pi - \frac{1}{4}\right)^2}, \quad |\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{256,5b^2 + 4,1b}{\left(n\pi - \frac{1}{4}\right)^2}, \quad b \equiv \pi \int_0^\pi |q(t)| dt.$$

Пример 0.2. Для периодической краевой задачи

$$\sqrt{\lambda_{n,\sigma}} = 2n - \frac{1}{4\pi n} \left(\int_0^\pi q(t) dt - \sigma \left| \int_0^\pi q(t) e^{-i4nt} dt \right| \right) + \psi_{n,\sigma,1},$$

где $\sigma = \pm 1$ и

$$|\psi_{n,\sigma,1}| \leq \frac{20b^2}{\pi \left(2n\pi - \frac{1}{4}\right)^2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Символ \diamond в тексте означает конец доказательства.

§ 2. Постановка задачи и переход к матричной форме

Мы рассматриваем дифференциальное уравнение (1.1) на отрезке $[0, \ell]$ с функцией $q(x)$, принимающей вещественные значения и суммируемой на отрезке $[0, \ell]$. Решением уравнения (1.1) мы называем вещественнозначную функцию $y(x)$, имеющую абсолютно непрерывную первую производную на $[0, \ell]$ и удовлетворяющую соотношению

$$y'(x) - y'(0) + \int_0^x (\lambda + q(t)) y(t) dt = 0, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.1)$$

Ищутся такие значения числового вещественного параметра λ , что краевая задача Штурма – Лиувилля (1.1-1.3) или периодическая краевая задача (1.1, 1.4) имеют нетривиальные (не равные тождественно нулю) решения. Соответствующие значения λ называются собственными значениями, а соответствующие решения $y(x)$ – собственными функциями.

1. Перейдём к *матричной формулировке задачи на собственные значения и собственные функции*.

Введём матрицу-функцию размерами 2×1 , т.е. столбец $Y(x)$ вида $Y(x) \equiv \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$.

Мы предполагаем, что $Y(x)$ — абсолютно непрерывная функция, принимающая значения в пространстве вещественнозначных матриц $M(2 \times 1, \mathbf{R})$.

Введём матричную функцию $A(x, \lambda)$, зависящую от аргументов $x \in [0, \ell]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ со значениями в $M(2 \times 2, \mathbf{R})$ вида

$$A(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(\lambda + q(x)) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Тогда в рассматриваемом классе функций уравнение (1.1) для функции $y(x)$ эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx} Y(x) = A(x, \lambda) Y(x) \quad (2.3)$$

для матрицы $Y(x)$. Решение дифференциального уравнения (2.3) также понимается в интегральном смысле, т.е. как решение соответствующего интегрального уравнения. Введём строки $B_0 = (\cos \varphi_0, \sin \varphi_0)$, $B_\ell = (\cos \varphi_\ell, \sin \varphi_\ell)$, т.е. матрицы из пространства $M(1 \times 2, \mathbf{R})$. Тогда граничные условия Штурма (1.2) и (1.3) принимают соответственно вид

$$B_0 Y(0) = 0, \quad (2.4)$$

$$B_\ell Y(\ell) = 0. \quad (2.5)$$

Итак, краевая задача Штурма принимает теперь вид дифференциального уравнения (2.3) и краевых условий (2.4, 2.5) для определения собственного значения $\lambda \in \mathbf{R}$, при котором существует нетривиальное решение $Y(x)$. А периодическая краевая задача состоит из уравнения (2.3) и краевых условий

$$Y(0) = Y(\ell). \quad (2.6)$$

2. Введём матрицу фундаментальной системы решений или матрицант $W(x, \lambda)$ в терминологии [9], как функцию двух аргументов $x \in [0, \ell]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ со значениями в $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}W(x, \lambda) = A(x, \lambda)W(x, \lambda) \quad (2.7)$$

и начальному условию

$$W(0, \lambda) = E. \quad (2.8)$$

Здесь $E \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ - единичная матрица, функция $W(x, \lambda)$ предполагается абсолютно непрерывной по аргументу x и решение задачи Коши (2.7, 2.8) понимается в интегральном смысле, т. е. как решение интегрального уравнения

$$W(x, \lambda) = E + \int_0^x A(t, \lambda)W(t, \lambda)dt, \quad x \in [0, \ell]. \quad (2.9)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.3) записывается с помощью матрицанта в виде

$$Y(x) = W(x, \lambda)C, \quad (2.10)$$

где $C = Y(0)$.

Задача Штурма – Лиувилля в силу представления (2.10) редуцируется теперь к определению неизвестного параметра $\lambda \in \mathbf{R}$ и неизвестного столбца $C \in \mathcal{M}(2 \times 1, \mathbf{R})$, таких, что система двух линейных уравнений для неизвестного вектора $C \in \mathbf{R}^2$

$$B_0 C = 0, \quad B_\ell W(\ell, \lambda)C = 0 \quad (2.11)$$

имеет нетривиальное решение. Что эквивалентно равенству нулю определителя матрицы 2×2 , составленной из строк $B_\ell W(\ell, \lambda)$ и B_0

$$\det \begin{pmatrix} B_\ell W(\ell, \lambda) \\ B_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

Итак, собственные значения задачи Штурма – Лиувилля суть корни уравнения (2.12).

В случае периодической краевой задачи, подставляя представление (2.10) в краевые условия (2.6), мы приходим к соотношению

$$C = W(\ell, \lambda)C \quad (2.13)$$

для неизвестного ненулевого вектора $C \in \mathbf{R}^2$ и спектрального параметра $\lambda \in \mathbf{R}$. Соотношение (2.13) означает, что число 1 является собственным значением матрицы $W(\ell, \lambda)$. Это и есть условие для определения неизвестного параметра λ .

Вывод 2.1. Таким образом, после введения матрицанта $W(x, \lambda)$ задача об определении собственных значений для задачи Штурма – Лиувилля редуцирована нами к решению уравнения (2.12), а для периодической краевой задачи – к определению значений параметра λ , при которых матрица $W(\ell, \lambda)$ имеет собственное значение 1.

§ 3. Вычисление матрицанта

В предыдущем параграфе мы свели задачу об определении собственных функций и собственных значений к построению матрицанта $W(x, \lambda)$ и решению уравнения с матрицей $W(\ell, \lambda)$. Проведём в этом параграфе вычисление матрицанта $W(x, \lambda)$ с получением для него явного представления (3.14).

1. Уточним наши обозначения и терминологию о матрицах.

Пусть Λ - поле вещественных чисел \mathbf{R} или комплексных чисел \mathbf{C} . Через $\mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ мы обозначаем линейное пространство матриц из p строк и q столбцов с элементами из поля Λ . Матрица размеров $1 \times q$ называется строкой, а размеров $p \times 1$ – столбцом. Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами. Множество матриц $\mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ с p строками и q столбцами образует линейное пространство над полем Λ . Линейное пространство вектор-столбцов $\mathcal{M}(p \times 1, \Lambda)$ мы отождествляем с векторным пространством Λ^p и вводим в нём норму $|B|$ элемента $B \in \mathcal{M}(p \times 1, \Lambda)$, равную $|B| \equiv \sqrt{|b_{11}|^2 + |b_{21}|^2 + \dots + |b_{p1}|^2}$. Линейное пространство $\mathcal{M}(1 \times q, \Lambda)$ матриц-строк рассматривается как пространство линейных ограниченных функционалов A на линейном нормированном пространстве $\mathcal{M}(q \times 1, \Lambda)$, действующих по правилу $A(B) \equiv AB$ для $B \in \mathcal{M}(q \times 1, \Lambda)$. Норма $|A|$ элемента $A \in \mathcal{M}(1 \times q, \Lambda)$ есть норма функционала и равна $|A| \equiv \sqrt{|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1q}|^2}$.

Векторное пространство $\mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ рассматривается как векторное пространство линейных операторов $A : \mathcal{M}(q \times 1, \Lambda) \rightarrow \mathcal{M}(p \times 1, \Lambda)$, действующих по правилу $A(B) \equiv AB$ для всякого $B \in \mathcal{M}(q \times 1, \Lambda)$. Определяется норма $|A|$ элемента $A \in \mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ как норма соответствующего линейного оператора. Линейное пространство $\mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ с введённой нормой является полным, т. е. $\mathcal{M}(p \times q, \Lambda)$ – банахово

пространство.

В случае $p = q$ для элементов банахова пространства $\mathcal{M}(p \times p, \Lambda)$ определена кроме операций сложения и умножения на скаляр операция умножения двух элементов, относительно которой множество $\mathcal{M}(p \times p, \Lambda)$ является полугруппой с единицей. Итак, пространство $\mathcal{M}(p \times p, \Lambda)$ становится банаховой алгеброй, т. е. линейным пространством, которое нормировано и полно, и для которого введена дополнительно операция умножения элементов, обращающая его в ассоциативную алгебру с единицей, причём норма элемента удовлетворяет условиям: 1) $|E| = 1$ для единичной матрицы E , 2) $|A_1 A_2| \leq |A_1| |A_2|$ для любых двух матриц A_1 и A_2 из $\mathcal{M}(p \times p, \Lambda)$.

2. Вернёмся к вопросу о построении матрицанта $W(x, \lambda)$, т. е. решения задачи Коши (2.7, 2.8) в алгебре матриц $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$. Хотя решение $W(x, \lambda)$ при наших условиях принадлежит пространству матриц с действительными элементами, мы, используя естественное вложение банаховой алгебры матриц над действительным полем $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ в банахову алгебру матриц над комплексным полем $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$, будем производить вычисления в банаховой алгебре $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$.

Далее в этом параграфе рассматриваем случай $\lambda > 0$, т. е. $\lambda = s^2$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$. Введём матрицы

$$G(s) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ is & -is \end{pmatrix}, \quad G^{-1}(s) \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{is} \\ 1 & \frac{1}{is} \end{pmatrix}, \quad D \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Произведём следующую замену переменных

$$W(x, s^2) \equiv G(s) \exp(isx D) W_{gf}(x, s) G^{-1}(s) \quad (3.2)$$

в уравнении (2.7) и получим для матрицы $W_{gf}(x, s)$ задачу Коши

$$\frac{d}{dx} W_{gf}(x, s) = A_{gf}(x, s) W_{gf}(x, s), \quad (3.3)$$

$$W_{gf}(0, s) = E, \quad (3.4)$$

где матрица

$$A_{gf}(x, s) \equiv \frac{q(x)}{s} R(2sx), \quad (3.5)$$

а матрица

$$R(t) \equiv \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & e^{-it} \\ -e^{it} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Для рассматриваемых нами действительных значений t норма матрицы

$$|R(t)| \leq 1, \quad (3.7)$$

поэтому, если число s удовлетворяет неравенству

$$|s| > \int_0^{\ell} |q(x)| dx, \quad (3.8)$$

то матрица $A_{gf}(x, s)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\ell} |A_{gf}(x, s)| dx \leq \frac{\int_0^{\ell} |q(x)| dx}{|s|} < 1. \quad (3.9)$$

Но при выполнении условия (3.9) для решения задачи Коши (3.3, 3.4) справедливо следующее экспоненциальное представление из работы [1]

$$W_{gf}(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} J_k(x) \right), \quad (3.10)$$

где

$$J_1(x) \equiv \int_0^x A_{gf}(x) dx, \quad (3.11)$$

а при $k \geq 2$

$$J_k(x) \equiv \frac{1}{k} \int_0^x \cdots \int_0^x \text{val } k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \times \\ \times [A_{gf}(\xi_k), \dots [A_{gf}(\xi_2), A_{gf}(\xi_1)] \dots] d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k, \quad (3.12)$$

причём ряд, стоящий в показателе экспоненты (3.10) сходится в банаховой алгебре $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ абсолютно и равномерно по аргументу $x \in [0, \ell]$ и параметру $s \in]-\infty, -a] \cup [a, \infty[$ при любом числе

$$a > \int_0^{\ell} |q(x)| dx. \quad (3.13)$$

Итак, для всякого вещественного числа s , удовлетворяющего условию (3.8), мы получили для матрицанта $W(x, s^2)$ следующее представление при $x \in [0, \ell]$

$$W(x, s^2) = G(s) \exp(isx D) \exp(J(x, s)) G^{-1}(s), \quad (3.14)$$

где матрица $J(x, s)$ есть сумма ряда

$$J(x, s) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} J_k(x, s). \quad (3.15)$$

3. Ряд (3.15) сходится со скоростью геометрической прогрессии в банаховой алгебре $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$ с оценкой остатка

$$|J(x, s) - \sum_{k=1}^m J_k(x, s)| \leq \frac{\gamma^{m+1}(x, s)}{(m+1)(1 - \gamma(x, s))}, \quad (3.16)$$

если

$$\gamma(x, s) \equiv \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(t)| dt < 1, \quad (3.17)$$

(см. §5, п. 1). Поэтому формула (3.14) при замене суммы ряда $J(x, s)$ на его m -тую сумму $\sum_{k=1}^m J_k(x, s)$ даёт асимптотическое представление матрицанта с ошибкой $O\left(\lambda_n^{-\frac{m+1}{2}}\right)$, если в качестве s взять приближение к $\sqrt{\lambda_n}$ с ошибкой $O\left(\lambda_n^{-\frac{m+1}{2}}\right)$, где λ_n — n -тое собственное значение. При этом в представлении (3.14) от потенциала $q(x)$ зависит лишь множитель $\exp(J(x, s))$, который для сколь угодно больших положительных собственных значений λ_n сколь угодно близок к единице, ибо аргумент экспоненты $J(x, s)$ удовлетворяет неравенству

$$|J(x, s)| \leq \frac{9}{8|s|} \int_0^x |q(t)| dt,$$

(см. лемму 7.2). Таким образом, если для любого натурального числа m мы построим асимптотику параметра s_n с ошибкой $O\left(\lambda_n^{-\frac{m+1}{2}}\right)$ при $n \rightarrow \infty$, то мы определим как собственное значение λ_n , так и собственную функцию $y_n(x)$ с точностью $O\left(\lambda_n^{-\frac{m}{2}}\right)$ для любого натурального числа m .

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Кроме представления (3.14), справедливого при условии (3.8), мы можем пользоваться представлением (3.2) справедливым при любом ненулевом вещественном числе s и суммируемой на $[0, \ell]$ функции $q(x)$. При этом $W_{gf}(x, s)$ есть матрицант для дифференциального уравнения (3.3), который может быть построен в виде суммы ряда Неймана соответствующего интегрального уравнения.

§ 4. Схема вычисления собственных значений

Для определения положительных собственных значений задачи Штурма – Лиувилля мы получили уравнение (2.12), а периодической задачи – условие, что число 1 есть собственное значение матрицанта $W(\ell, \lambda)$. Теперь рассмотрим вырожденную краевую задачу с $q(x) \equiv 0$ на $[0, \ell]$ и занумеруем её собственные значения $\lambda_{n,0}$ в порядке возрастания $\lambda_{1,0} < \lambda_{2,0} < \dots < \lambda_{n,0} < \dots$. Введём положительные корни из положительных собственных значений $s_{n,0} \equiv \sqrt{\lambda_{n,0}}$. В окрестности каждого значения $s_{n,0}$ будем искать положительный корень $s_n = \sqrt{\lambda_n}$ из собственного значения искомой краевой задачи в виде

$$s_n = s_{n,0} + r. \quad (4.1)$$

Преобразуем уравнение (2.12) к виду уравнения для числа r , к которому применим принцип сжатых отображений с начальной нулевой итерацией $r_0 = 0$.

В случае, когда корень из собственного значения $s_{n,0}$ вырожденной задачи не имеет простого вида, а является корнем трансцендентного уравнения, мы вместо представления (4.1) будем также использовать представление

$$s = \mu_n + r, \quad (4.2)$$

где μ_n — главный член асимптотики вырожденной краевой задачи при $n \rightarrow \infty$.

1. *Задача Штурма – Лиувилля. Преобразование уравнения для собственных значений.*

Преобразуем уравнение для собственных значений (2.12), используя представление (3.2) для матрицанта. Но сначала введём некоторые дополнительные величины и обозначения.

Обозначим через $B_1 \equiv (1, 1)$, $B_2 \equiv (1, -1)$, матрицы-строки размерами 1×2 . Введём матрицу-строку $B(\varphi) = B(\varphi, s) \equiv \cos(\varphi)B_1 +$

$+is \sin(\varphi)B_2$. Заметим, что $B(0) = B_1$, $B(\frac{\pi}{2}) = isB_2$, $B_1D = B_2$, $B_2D = B_1$ и $\det \begin{pmatrix} B_2 \\ B_1 \end{pmatrix} = 2$.

Подставим в уравнение (2.12) матрицант $W(\ell, s^2)$ в форме (3.2), получим уравнение

$$\det \begin{pmatrix} B(\varphi_\ell, s) \exp(is\ell D) W_{gf}(\ell, s) G^{-1}(s) \\ B_0 \end{pmatrix} = 0,$$

эквивалентное при $s \neq 0$ уравнению

$$\det \begin{pmatrix} B(\varphi_\ell, s) \exp(is\ell D) W_{gf}(\ell, s) \\ B(\varphi_0, s) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.3)$$

2. Задача Штурма – Лиувилля в вырожденном случае.

В вырожденном случае, когда $q(x) \equiv 0$ на $[0, \ell]$, известно, (см., например, [3]), что краевая задача Штурма – Лиувилля может иметь не более двух отрицательных собственных значений λ , может иметь нулевое собственное значение и имеет последовательность положительных собственных значений, которая неограниченно возрастает. Соответствующие положительные значения $s_{n,0} \equiv \sqrt{\lambda_{n,0}}$, как мы установили в §1, являются корнями уравнения (4.3). В вырожденном случае $W_{gf}(\ell, s) = E$ и уравнение (4.3) сводится к виду

$$\det \begin{pmatrix} B(\varphi_\ell, s) \exp(is\ell D) \\ B(\varphi_0, s) \end{pmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

В случае, когда φ_0 и φ_ℓ принимают значения, кратные $\frac{\pi}{2}$ или когда $\varphi_0 = \varphi_\ell$, уравнение (4.4) сводится к тригонометрическому и имеет положительные решения вида $s_n = n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$ при $\varphi_0 = \varphi_\ell$ или при $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi_\ell = \pm\frac{\pi}{2}$, и положительные решения вида $s_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$ при $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_\ell = \pm\frac{\pi}{2}$ или при $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ и $\varphi_\ell = 0$. В случае, когда $\varphi_0 \neq \varphi_\ell$ и φ_0 или φ_ℓ принимает значение, не кратное $\frac{\pi}{2}$, уравнение (4.4) является трансцендентным уравнением для s . Положительные корни этого уравнения имеют асимптотику при $n \rightarrow \infty$ вида $s_n = n\frac{\pi}{\ell} + O(\frac{1}{n})$ при $\varphi_0 \cdot \varphi_\ell \neq 0$, и асимптотику при $n \rightarrow \infty$ вида $s_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell} + O(\frac{1}{n})$ при $\varphi_0 \cdot \varphi_\ell = 0$.

Введём последовательность положительных чисел $\mu_n(\varphi_0, \varphi_\ell)$, $n \in \mathbb{N}$, зависящую от параметров $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi_\ell \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ следующего вида

$$\mu_n(\varphi_0, \varphi_\ell) = \begin{cases} n\frac{\pi}{\ell}, & \text{при } \varphi_0\varphi_\ell \neq 0 \text{ или при } \varphi_0 = \varphi_\ell = 0; \\ (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}, & \text{при } \varphi_0\varphi_\ell = 0 \text{ и } \varphi_0 \neq \varphi_\ell. \end{cases} \quad (4.5)$$

Последовательность $\mu_n(\varphi_0, \varphi_\ell)$ является главным членом асимптотики $s_{n,0}$ для вырожденной краевой задачи, т. е. $s_{n,0} - \mu_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \rightarrow \infty$.

3. Преобразуем уравнение (4.3), используя подстановку (4.2).

Тогда $\exp(is\ell D) = \exp(i(\mu_n + r)\ell D) = \exp(i\mu_n \ell D) \exp(ir\ell D)$.

В случае I, когда $\varphi_0 \varphi_\ell \neq 0$ или $\varphi_0 = \varphi_\ell = 0$, согласно (4.5)

$$\exp(i\mu_n \ell D) = \exp(in\pi D) = \begin{pmatrix} e^{in\pi} & 0 \\ 0 & e^{-in\pi} \end{pmatrix} = (-1)^n E. \quad (4.6)$$

В случае II, когда $\varphi_0 \varphi_\ell = 0$ и $\varphi_0 \neq \varphi_\ell$, согласно (4.5)

$$\begin{aligned} \exp(i\mu_n \ell D) &= \exp\left(i\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi D\right) = \\ &= \begin{pmatrix} e^{i(n-\frac{1}{2})\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i(n-\frac{1}{2})\pi} \end{pmatrix} = (-1)^{n+1} iD. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Итак,

$$\exp(is\ell D) = \begin{cases} (-1)^n \exp(ir\ell D), & \text{в случае I;} \\ (-1)^{n+1} iD \exp(ir\ell D), & \text{в случае II.} \end{cases} \quad (4.8)$$

Возможны три ситуации :

A) φ_0 и φ_ℓ принимают значения кратные $\frac{\pi}{2}$;

B) одна из величин φ_0 или φ_ℓ принимает значение кратное $\frac{\pi}{2}$, а вторая нет;

C) φ_0 и φ_ℓ не принимают значений кратных $\frac{\pi}{2}$.

Далее в настоящей статье для ясности изложения основной конструкции мы ограничимся подробным рассмотрением ситуации A.

4. Ситуация A состоит из 4 подситуаций:

1) $\varphi_0 = \varphi_\ell = 0$ – первая краевая задача; 2) $\varphi_0 = \varphi_\ell = \frac{\pi}{2}$ – вторая краевая задача; 3) $\varphi_0 = 0$, $\varphi_\ell = \frac{\pi}{2}$; 4) $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_\ell = 0$. Для рассмотрения ситуации A мы будем использовать экспоненциальное представление произведения

$$\exp(ir\ell D)W_{gf}(\ell, s) = \exp(ir\ell D) \exp(J(\ell, s)), \quad (4.9)$$

справедливое при условии (3.8). Более того, при дополнительных условиях

$$|r|\ell \leq \frac{1}{4}, \quad (4.10)$$

$$|J(\ell, s)| \leq \frac{1}{4} \quad (4.11)$$

согласно [1] для произведения (4.9) верно представление

$$\exp(ir\ell D) \exp(J(\ell, s)) = \exp(H(J(\ell, s), ir\ell D)), \quad (4.12)$$

где матрица $H = H(J(\ell, s), ir\ell D)$ из пространства $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ имеет норму

$$|H| \leq \frac{3}{4}. \quad (4.13)$$

Представление (4.12) позволяет в ситуации А "прологарифмировать" уравнение (4.3) в следующем смысле.

С учётом представления (4.12) уравнение (4.3) принимает следующий вид : в подситуации А1

$$\det \begin{pmatrix} B_1 \exp(H) \\ B_1 \end{pmatrix} = 0; \quad (4.14)$$

в подситуации А2

$$\det \begin{pmatrix} B_2 \exp(H) \\ B_2 \end{pmatrix} = 0; \quad (4.15)$$

в подситуации А3

$$\det \begin{pmatrix} B_1 \exp(H) \\ B_1 \end{pmatrix} = 0; \quad (4.16)$$

в подситуации А4

$$\det \begin{pmatrix} B_2 \exp(H) \\ B_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.17)$$

Отметим, что в уравнениях (4.14, 4.15) $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$, а в уравнениях (4.16, 4.17) $\mu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, так что уравнения (4.14) и (4.16), а также (4.15) и (4.17) на самом деле различны, ибо в представлении (4.2) они отличаются значением μ_n .

Равенства (4.14–4.17) эквивалентны линейной зависимости строк соответствующего определителя, т. е. существованию скаляра $t_n \in \mathbf{C}$, что

$$B_1 \exp(H) = t_n B_1 \quad (4.18)$$

в случаях А1 и А3 или

$$B_2 \exp(H) = t_n B_2 \quad (4.19)$$

в случаях А2 и А4. Транспонируем равенства (4.18, 4.19)

$$\exp(H^T) B_1^T = t B_1^T, \quad (4.20)$$

$$\exp(H^T) B_2^T = t B_2^T. \quad (4.21)$$

Мы видим, что B_1^T и B_2^T соответственно собственные векторы матрицы $\exp(H^T)$. Но экспонента осуществляет взаимно-однозначное отображение единичного открытого шара с центром в нуле банаховой алгебры на открытую окрестность единицы (см. [10], стр. 288), поэтому в силу неравенства (4.13) матрица H^T является логарифмом матрицы $\exp(H^T)$ и собственный вектор матрицы $\exp(H^T)$ является собственным вектором матрицы H^T и наоборот. Итак, равенство (4.20) эквивалентно существованию скаляра $\xi \in \mathbb{C}$, что

$$H^T B_1^T = \xi B_1^T, \quad (4.22)$$

а равенство (4.21) эквивалентно существованию скаляра $\xi \in \mathbb{C}$, что

$$H^T B_2^T = \xi B_2^T. \quad (4.23)$$

Или транспонируя (4.22), (4.23), получаем равенства

$$B_1 H = \xi B_1, \quad (4.24)$$

$$B_2 H = \xi B_2. \quad (4.25)$$

Но равенства (4.24), (4.25) представляют собой условия линейной зависимости строк и эквивалентны условиям

$$\det \begin{pmatrix} B_1 H \\ B_1 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.26)$$

и

$$\det \begin{pmatrix} B_2 H \\ B_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.27)$$

соответственно.

Вывод 4.1. При выполнении условий (3.8), (4.10), (4.11) в под-ситуациях А1 и А3 параметр r является корнем уравнения (4.26) с соответствующим $\mu_n(\varphi_0, \varphi_\ell)$, а в подситуациях А2 и А4 параметр r является корнем уравнения (4.27) с соответствующим $\mu_n(\varphi_0, \varphi_\ell)$.

Введём величину

$$P \equiv H - i\ell D \quad (4.28)$$

и подставим в уравнения (4.26, 4.27) $H = i\ell D + P$. Получим соответственно

$$\det \begin{pmatrix} B_1(i\ell D + P) \\ B_1 \end{pmatrix} = 0, \quad (4.29)$$

и

$$\det \begin{pmatrix} B_2(i\ell D + P) \\ B_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (4.30)$$

Учитывая свойства матриц B_1 и B_2 , получаем соответственно из (4.29)

$$r = \frac{i}{2\ell} \det \begin{pmatrix} B_1 P \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

и из (4.30)

$$r = -\frac{i}{2\ell} \det \begin{pmatrix} B_2 P \\ B_2 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Уравнение (4.31) применяется в подситуациях A1 и A3, а уравнение (4.32) – в подситуациях A2 и A4. Далее мы покажем, что при достаточно большом μ_n к уравнениям (4.31) и (4.32) применим принцип сжатых отображений с начальным приближением $r_0 = 0$.

5. Периодическая краевая задача.

Для периодической краевой задачи согласно выводу 2.1 собственное значение λ находится из условия, что матрицант $W(\ell, \lambda)$ имеет собственное значение единицу. Но согласно формуле Лиувилля (см. [4], стр. 73) определитель $\det W(x, \lambda) = 1$ при всех $x \in [0, \ell]$ и всех $\lambda \in \mathbf{R}$. Поэтому, если корень характеристического полинома матрицы $W(\ell, \lambda)$ равен единице, он имеет кратность два.

При $\lambda = s^2$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$ матрицы $W(\ell, \lambda)$ и $\exp(is\ell D)W_{gf}(\ell, s)$ подобны, согласно представлению (3.2), поэтому требование, чтобы единица была корнем кратности два характеристического полинома матрицы $W(\ell, \lambda)$ эквивалентно требованию, чтобы единица была корнем кратности два характеристического полинома матрицы $W_c(\ell, s) = \exp(is\ell D)W_{gf}(\ell, s)$.

В вырожденном случае при $q(x) \equiv 0$ последнее произведение сводится к матрице

$$\exp(is\ell D)W_{gf}(\ell, s) = \exp(is\ell D) = \begin{pmatrix} e^{is\ell} & 0 \\ 0 & e^{-is\ell} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

с корнями характеристического полинома матрицы e^{isl} и e^{-isl} . Поэтому условие, что единица корень кратности два характеристического полинома матрицы, сводится к уравнению $e^{isl} = 1$, положительные корни которого $s_{n,d} = 2n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbf{N}$. Итак, определяем для периодической краевой задачи последовательность $\mu_n \equiv 2n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbf{N}$ и возвращаемся к основной задаче, вводя замену переменных (4.2).

Для экспоненты при замене (4.2) получим

$$\exp(islD) = \exp(i(\mu_n + r)\ell D) = \exp(i\mu_n \ell D) \exp(ir\ell D) = \exp(ir\ell D). \quad (4.34)$$

Введём матрицу $W_m(\ell, s) \equiv \exp(ir\ell D)W_{gf}(\ell, s)$. Матрица $W_m(\ell, s)$ равна матрице $W_c(\ell, s)$.

Согласно пункту 4 при условиях (3.8), (4.10), (4.11) верно представление $W_m(\ell, s) = \exp(H(J(\ell, s), ir\ell D))$. Но в силу неравенства (4.13), матрица H является логарифмом матрицы $W_m(\ell, s)$ и поэтому (см. [9], стр. 159) единица – корень кратности два характеристического полинома матрицы W_m тогда и только тогда, когда нуль – корень кратности два характеристического полинома матрицы H .

Вывод 4.2. При выполнении условий (3.8), (4.10), (4.11) положительное число λ является собственным значением периодической краевой задачи тогда и только тогда, когда число $r = \sqrt{\lambda} - \mu_n$ таково, что матрица $H(J(\ell, \mu_n + r), ir\ell D)$ имеет нуль корнем характеристического полинома кратности 2.

§ 5. Алгебра Ли дифференциального уравнения

1. Алгебра Ли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Подмножество $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}(n \times n, \Lambda)$ мы называем алгеброй Ли, если : 1) оно является линейным пространством над полем \mathbf{R} , 2) для любых двух матриц $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$ их коммутатор $[A, B] \equiv AB - BA$ также принадлежит \mathcal{L} .

Размерностью алгебры Ли \mathcal{L} мы называем её размерность как линейного пространства над полем \mathbf{R} .

В работе [1] для линейного обыкновенного дифференциального уравнения в банаховой алгебре (для краткости *лоду*) вида

$$\frac{d}{dx}W(x) = A(x)W(x), \quad x \in]0, \ell[,$$

где $A(x)$ – заданная, а $W(x)$ – искомая функции со значениями в $\mathcal{M}(n \times n, \Lambda)$ аргумента $x \in]0, \ell[$, было введено понятие алгебры Ли $\text{ali}(A)$ данного лоду. Если функция $A = A(x)$ непрерывна, то алгебра Ли $\text{ali}(A)$ есть наименьшая алгебра Ли в $\mathcal{M}(n \times n, \Lambda)$, содержащая все значения функции $A(x)$.

В общем случае суммируемой функции $A(x)$ алгебра Ли $\text{ali}(A)$ есть наименьшая алгебра Ли из $\mathcal{M}(n \times n, \Lambda)$, содержащая значения $A(x)$ во всех точках $x \in]0, \ell[$ интегральной гладкости.

Точка $x \in]0, \ell[$ – точка интегральной гладкости, если выполнено равенство

$$\frac{d}{dx} \int_0^x A(t) dt = A(x). \quad (5.1)$$

В [1] установлено, что матрицант лоду принадлежит группе Ли, соответствующей алгебре Ли данного лоду.

Укажем алгебры Ли, соответствующие лоду (2.7) и (3.3).

2. Алгебра Ли дифференциального уравнения (3.3).

Из выражений (3.5), (3.6) для матрицы $A_{gf}(x, s)$ вытекает, что при любых параметрах $x \in [0, \ell]$, $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$ справедливо равенство

$$A_{gf}(x, s) = \frac{q(x)}{2s} (K_1 + \sin(2sx)K_2 + \cos(2sx)K_3), \quad (5.2)$$

где K_1, K_2, K_3 постоянные матрицы из $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ вида

$$K_1 \equiv \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, K_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, K_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Матрицы K_1, K_2, K_3 линейно независимы над полем \mathbf{C} и для них справедливы соотношения коммутации

$$[K_1, K_2] = 2K_3; [K_1, K_3] = -2K_2; [K_2, K_3] = -2K_1. \quad (5.4)$$

Линейную оболочку элементов K_1, K_2, K_3 над полем \mathbf{R} в $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ обозначим \mathcal{Lit} . Множество \mathcal{Lit} – алгебра Ли размерности 3 с базисом из элементов K_1, K_2, K_3 , который мы назовём K -базисом. Любой элемент $A \in \mathcal{Lit}$ представляется единственным образом в виде линейной комбинации

$$A = a_1 K_1 + a_2 K_2 + a_3 K_3 \quad (5.5)$$

элементов K_1, K_2, K_3 со скалярными коэффициентами a_1, a_2, a_3 из поля действительных чисел \mathbf{R} .

Всюду далее мы используем обозначения типа (5.5). Матрицы обозначаются прописными буквами, а коэффициенты их разложения в K -базисе теми же строчными буквами с индексом.

По построению справедливо включение $A_{gf}(x, s) \in \mathcal{Lit}$ при любом $x \in [0, \ell]$ и любом $s \in \mathbf{R}$, $s \neq 0$. Если $q(x) = 0$ почти всюду на $[0, \ell]$, то алгебра Ли $\text{ali}(A_{gf})$ нульмерна и состоит лишь из нуля. Если $q(x) \neq 0$ на множестве положительной меры, то алгебра Ли $\text{ali}(A_{gf}) = \mathcal{Lit}$.

ЛЕММА 5.1. При выполнении условия (3.8) матрицы $J_i(x, s)$, $i \in \mathbf{N}$ вида (4.11), (4.12), матрица $J(x, s)$ вида (4.15) принадлежат алгебре Ли \mathcal{Lit} при всех $x \in [0, \ell]$. Если дополнительно выполнены условия (4.10) и (4.11), то матрица $H(x, s)$ и однородные полиномы Ли $H_k(x, s)$ степеней $k \in \mathbf{N}$, составляющие ряд Хаусдорфа $H(x, s)$, принадлежат алгебре Ли \mathcal{Lit} .

Справедливость леммы следует из равенства $iD = K_1$ и замкнутости алгебры Ли \mathcal{Lit} .

Для всех матриц K_1, K_2, K_3 их след равен нулю, поэтому для любой матрицы $A \in \mathcal{Lit}$ её след равен нулю $A \in \mathcal{Lit} \Rightarrow \text{tr}(A) = 0$. Для любой матрицы $A \in \mathcal{Lit}$ верно $\det(\exp(A)) = 1$ и, в частности, $\det(\exp(J(x, s))) = 1$, $\det(\exp(H(x, s))) = 1$ при условии, что ряды, определяющие матрицы $J(x, s)$ и $H(x, s)$ сходятся.

Сопоставим каждой матрице $A \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ матрицу GAG^{-1} , где $G = G(s)$, $s \neq 0$ – матрица вида (3.1). Мы получим взаимно-однозначное преобразование подобия алгебры $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ на себя. При этом

$$GK_1G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{s} \\ -s & 0 \end{pmatrix}, GK_2G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$GK_3G^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{s} \\ -s & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

Итак, алгебра Ли \mathcal{Lit} при введённом преобразовании переходит в алгебру Ли, которую мы обозначим \mathcal{Lir} , лежащую в алгебре матриц $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ с вещественными элементами. Алгебра Ли \mathcal{Lir} как подмножество в алгебре $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ задаётся линейным уравнением $\text{tr}(A) = 0$.

3. Алгебра Ли лоду (2.7).

Так как матрица $A(x, \lambda)$ вида (2.2) имеет нулевой след, то $A(x, \lambda) \in \mathcal{Lir}$ при любых $x \in [0, \ell]$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Если функция $q(x)$ почти всюду

равна постоянной c , то группа Ли лоду (2.7) одномерна – это прямая в $M(2 \times 2, \mathbf{R})$, проходящая через матрицу $A(c, \lambda)$. Если функция $q(x)$ не равна почти всюду постоянной, то группа Ли лоду (2.7) $\text{ali}(A) = \mathcal{L}ir$.

4. Норма матрицы $G(s)$.

При вычислении матрицанта в §2 мы ввели матрицу $G(s)$ вида (3.1). Сосчитаем её норму.

ЛЕММА 5.2. Если $s \in \mathbf{R}$, то матрица $G(s) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ is & -is \end{pmatrix}$ имеет норму

$$|G(s)| = \begin{cases} \sqrt{2}, & |s| < 1; \\ \sqrt{2}|s|, & |s| \geq 1. \end{cases}$$

5. Вычисление коммутатора двух матриц через их координаты.

Для матриц A и B из алгебры Ли $\mathcal{L}it$ их матрица-коммутатор $C = [A, B]$ имеет координаты, выражаемые через координаты матриц A и B в том же базисе и структурные константы алгебры Ли в этом базисе. Для упрощения массива структурных констант введём кроме K -базиса из трёх матриц K_1, K_2, K_3 , N -базис из трёх матриц

$$N_1 \equiv \frac{1}{2}K_1, \quad N_2 \equiv \frac{1}{2}K_2, \quad N_3 \equiv \frac{1}{2}K_3, \quad (5.7)$$

для которых коммутационные соотношения принимают вид

$$[N_1, N_2] = N_3, \quad [N_2, N_3] = -N_1, \quad [N_3, N_1] = N_2. \quad (5.8)$$

Соотношения коммутации (5.8) могут быть записаны в единой форме

$$[N_\alpha, N_\beta] = \sum_{\gamma=1}^3 e_{\alpha\beta\gamma} N_\gamma, \quad (5.9)$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – массив структурных констант вида :

$$e_{123} = 1, \quad e_{213} = -1, \quad e_{231} = -1, \quad e_{321} = 1, \quad e_{312} = 1, \quad e_{132} = -1,$$

причём $e_{\alpha\beta\gamma} = 0$ при наличии двух одинаковых индексов.

Для матриц $A = \sum_{\alpha=1}^3 a_\alpha N_\alpha$, $B = \sum_{\beta=1}^3 b_\beta N_\beta$ их коммутатор

$$C = [A, B] = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha b_\beta [N_\alpha, N_\beta] = \sum_{\gamma=1}^3 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} b_\beta \right) N_\gamma,$$

т. е. координаты матрицы C равны

$$c_\gamma = \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{\beta=1}^3 a_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} b_\beta \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^3 a_\alpha e_{\alpha\beta\gamma} b_\beta, \quad \gamma \in \overline{1,3}, \quad (5.10)$$

или

$$c_1 = a_3 b_2 - a_2 b_3, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1. \quad (5.11)$$

Матрица $R(t)$ вида (3.6) в базисе $\{N_1, N_2, N_3\}$ записывается в виде

$$R(t) = N_1 + \sin(t) \cdot N_2 + \cos(t) \cdot N_3. \quad (5.12)$$

Обозначим координаты матрицы $R(t)$ в этом базисе через

$$\rho_{1,1}(t) \equiv 1, \quad \rho_{1,2}(t) \equiv \sin(t), \quad \rho_{1,3}(t) \equiv \cos(t), \quad (5.13)$$

а координаты матрицы $[R(t_k), \dots [R(t_2), R(t_1)] \dots]$ – через $\rho_{k,\gamma}(t_1, t_2, \dots t_k), \gamma \in \overline{1,3}$, т. е.

$$[R(t_k), \dots [R(t_2), R(t_1)] \dots] = \sum_{\gamma=1}^3 \rho_{k,\gamma}(t_1, t_2, \dots t_k) N_\gamma. \quad (5.14)$$

Тогда согласно (5.11)

$$\begin{aligned} \rho_{2,1}(t_1, t_2) &= -\sin(t_2 - t_1), \quad \rho_{2,2}(t_1, t_2) = \cos(t_2) - \cos(t_1), \\ \rho_{2,3}(t_1, t_2) &= -(\sin(t_2) - \sin(t_1)), \end{aligned} \quad (5.15)$$

и по индукции

$$\rho_{k,\gamma}(t_1, t_2, \dots t_k) = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \rho_{1,\alpha}(t_k) e_{\alpha\beta\gamma} \rho_{k-1,\beta}(t_1, t_2, \dots t_{k-1}), \quad (5.16)$$

при $k = 2, 3, \dots$

§ 6. Оценки членов ряда $J(x, s)$

В этом параграфе мы оценим члены $J_k(x, s)$ ряда (3.15), представляющего матричную функцию $J(x, s)$, с целью получения оценок скорости сходимости исходного и формально продифференцированного по параметру s ряда.

На протяжении этого параграфа будем использовать обозначение $B(x) \equiv A_{gf}(x, s)$ для матрицы (3.5), т. е.

$$B(x) = \frac{q(x)}{s} R(2sx). \quad (6.1)$$

Согласно [1] для величин $J_k(x, s)$, заданных формулами (3.11, 3.12), справедливо представление

$$J_k(x, s) = \int_0^x \cdots \int_0^x \text{val } k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) B(\xi_k) B(\xi_{k-1}) \dots B(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k \quad (6.2)$$

при $k \geq 1$, где $\text{val } 1(\xi_1) \equiv 1$ и $|\text{val } k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)| \leq \frac{1}{k}$ при $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \in \mathbf{R}^k$.

1. *Перейдём к оценке величин $J_k(x, s)$.*

Согласно определяющей формуле (6.1) при учёте неравенства (3.7) имеем

$$|B(x)| = \frac{|q(x)|}{|s|} |R(2sx)| \leq \frac{|q(x)|}{|s|}. \quad (6.3)$$

Введём обозначения $\gamma(x, s) \equiv \frac{1}{|s|} \int_0^x |q(\xi)| d\xi$, $\gamma(\ell, s) \equiv \gamma$. Тогда оценивая интегралы по норме, из (6.3) получаем

$$|J_k(x, s)| \leq \frac{1}{k} \int_0^x \cdots \int_0^x |B(\xi_k)| \dots |B(\xi_1)| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k \leq \frac{\gamma^k(x, s)}{k}. \quad (6.4)$$

Введём остаток ряда

$$Rj_m(x, s) \equiv \sum_{k=m}^{\infty} J_k(x, s). \quad (6.5)$$

Тогда в силу неравенства (6.4) при $\gamma < 1$ верно

$$|Rj_m(x, s)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |J_k(x, s)| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\gamma^k(x, s)}{k} \leq \frac{\gamma^m(x, s)}{m(1 - \gamma(x, s))}. \quad (6.6)$$

Для суммы всего ряда при $\gamma < 1$ имеем

$$|J(x, s)| \leq |J_1(x, s)| + |Rj_2(x, s)| \leq \gamma(x, s) + \frac{\gamma^2(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} =$$

$$= \gamma(x, s) \left(1 + \frac{\gamma(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} \right). \quad (6.7)$$

Введём частные суммы ряда (3.15) вида $Sj_m(x, s) \equiv \sum_{k=1}^m J_k(x, s)$. Для положительного числа a введём множество чисел $I_a \equiv]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$. Мажорантными оценками по норме устанавливается справедливость леммы.

ЛЕММА 6.1. Если число $a > \int_0^\ell |q(x)| dx$, то ряд $\sum_{k=1}^\infty J_k(x, s)$ сходится в области $[0, \ell] \times I_a$ изменения переменных x, s абсолютно и равномерно к непрерывной функции $J(x, s)$ и справедливо неравенство

$$|J(x, s)| \leq \gamma(x, s) \left(1 + \frac{\gamma(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} \right).$$

Для частной суммы $Sj_m(x, s)$ и остатка $Rj_m(x, s)$ ряда справедливы неравенства

$$|Sj_1(x, s)| = |J_1(x, s)| \leq \gamma(x, s), \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} |Sj_m(x, s)| &\leq \sum_{k=1}^m |J_k(x, s)| \leq \sum_{k=1}^m \frac{\gamma^k(x, s)}{k} \leq \\ &\leq \gamma(x, s) \left(1 + \frac{\gamma(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} \right), \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$|Rj_1(x, s)| \leq \sum_{k=1}^\infty |J_k(x, s)| \leq \gamma(x, s) \left(1 + \frac{\gamma(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} \right), \quad (6.10)$$

$$|Rj_m(x, s)| \leq \sum_{k=m}^\infty |J_k(x, s)| \leq \frac{\gamma^m(x, s)}{m(1 - \gamma(x, s))}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (6.11)$$

2. Оценим частные производные $\frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s)$.

Частная производная матрицы (6.1) согласно формулам (3.5), (3.6) равна

$$\frac{\partial}{\partial s} B(x, s) = -\frac{q(x)}{s^2} R(2sx) + \frac{xq(x)}{s} \begin{pmatrix} 0 & \exp(-2isx) \\ \exp(2isx) & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.12)$$

Переходя к нормам, получаем $\left| \frac{\partial}{\partial s} B(x, s) \right| \leq \frac{|q(x)|}{|s|} \left(\frac{1}{|s|} + |x| \right)$. Откуда при дополнительном условии $|s| \geq a$, $a > 0$ следует неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} B(x, s) \right| \leq \frac{|q(x)|}{|s|} \left(\frac{1}{|a|} + |x| \right). \quad (6.13)$$

Так как функция $q(x)$ суммируема, то интеграл $\int_0^x B(t, s) dt$ допускает дифференцирование по параметру s в области $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ и справедлива формула о внесении частной производной под знак интеграла $\frac{\partial}{\partial s} \int_0^x B(t, s) dt = \int_0^x \frac{\partial}{\partial s} B(t, s) dt$ (см. [12], с.794). Оценивая интеграл по норме и применяя неравенство (6.13), получаем неравенство

$$\left| \int_0^x \frac{\partial}{\partial s} B(t, s) dt \right| \leq \left(\frac{1}{a} + \ell \right) \gamma(x, s). \quad (6.14)$$

При $\gamma < 1$, что обеспечивается неравенством (3.13) и включением $s \in I_a$, ряд (6.5) и формально продифференцированный по s ряд $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s)$ сходятся абсолютно и равномерно по аргументу (x, s) в области $[0, \ell] \times I_a$, поэтому (см. [12], с. 780-781) сумма ряда (6.5) является непрерывной по совокупности переменных (x, s) функцией в области $[0, \ell] \times I_a$, имеет непрерывную по совокупности переменных (x, s) частную производную по s в той же области и справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial s} Rj_m(x, s) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s)$ при $m \in \mathbf{N}$, где ряд в правой части сходится абсолютно и равномерно в банаховой алгебре $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$. В частности, при $m = 1$ получаем $\frac{\partial}{\partial s} J(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s)$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 6.2. Если число $a > \int_0^{\ell} |q(x)| dx$, то функция $J(x, s)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по s в области $[0, \ell] \times I_a$. Формально продифференцированный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s)$ сходится в той же области абсолютно и равномерно к функции $\frac{\partial}{\partial s} J(x, s)$. Справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} J(x, s) \right| \leq \left(\frac{1}{a} + \ell \right) \frac{\gamma(x, s)}{1 - \gamma(x, s)}. \quad (6.15)$$

При каждом натуральном m справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} S j_m(x, s) \right| \leq \sum_{k=1}^m \left| \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s) \right| \leq \left(\frac{1}{a} + \ell \right) \frac{\gamma(x, s)}{1 - \gamma(x, s)}, \quad (6.16)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} R j_m(x, s) \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} J_k(x, s) \right| \leq \left(\frac{1}{a} + \ell \right) \frac{\gamma^m(x, s)}{1 - \gamma(x, s)}. \quad (6.17)$$

§ 7. Оценка ряда Хаусдорфа $H(J(\ell, s), ir\ell D)$

При получении уравнения для определения спектрального параметра s в пункте 4 параграфа 3 мы использовали формулу Хаусдорфа из работы [1] для представления произведения двух экспонент от двух матриц $A(1)$ и $A(2)$ из банаховой алгебры $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$ в форме экспоненты от некоторой новой матрицы H

$$\exp(A(2)) \exp(A(1)) = \exp(H). \quad (7.1)$$

При условии $|A(1)| + |A(2)| < 1$ представление (7.1) существует и матрица H может быть построена в виде ряда Хаусдорфа

$$H = H(A(1), A(2)) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} H_k(A(1), A(2)), \quad (7.2)$$

где $H_1(A(1), A(2)) = A(1) + A(2)$, а каждый член $H_k(A(1), A(2))$ при $k \geq 2$ есть однородный полином вида

$$\begin{aligned} & H_k(A(1), A(2)) = \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i \in \{1, 2\}^k} k a p k(i_1, i_2, \dots, i_k) [A(i_k), [A(i_{k-1}), \dots [A(i_2), A(i_1)] \dots]]. \end{aligned} \quad (7.3)$$

В уравнениях (4.31), (4.32) для определения спектрального параметра r участвует матрица

$$P(A(1), A(2)) \equiv H(A(1), A(2)) - A(2), \quad (7.4)$$

для которой справедливо представление

$$P(A(1), A(2)) = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(A(1), A(2)) \quad (7.5)$$

с $P_1(A(1), A(2)) = A(1)$ и $P_k(A(1), A(2)) = H_k(A(1), A(2))$ при $k \geq 2$. Наша задача в этом параграфе для случая

$$A(1) \equiv J(x, s), \quad (7.6)$$

$$A(2) \equiv irxD \quad (7.7)$$

оценить матрицу P и её частную производную по параметру s , если $r \equiv s - \mu_n$.

1. Для суммы остатка ряда (7.2) мы применим следующий результат из статьи [13].

ЛЕММА 7.1. Пусть $|A(1)| + |A(2)| \equiv \alpha \leq \frac{1}{2}$, $A(1)$, $A(2)$ – элементы матричной алгебры $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$, тогда при $k = 3, 4, \dots$ справедливы неравенства $|H_k(A(1), A(2))| \leq \frac{(2\alpha)^{k-2}}{2k(k-1)} |[A(2), A(1)]|$ и справедливы неравенства $|Rh_k(A(1), A(2))| \leq \frac{(2\alpha)^{k-2}}{2(k-1)} |[A(2), A(1)]|$.

Мы используем обозначения для остатка ряда

$$Rh_m \equiv \sum_{k=m}^{\infty} H_k, \quad Rp_m \equiv \sum_{k=m}^{\infty} P_k, \quad (7.8)$$

при $m \in \mathbb{N}$.

В условиях леммы 7.1 справедливо неравенство (следствие 1 из [13])

$$|Rh_2(A(1), A(2))| \leq \frac{3}{4} |[A(2), A(1)]|. \quad (7.9)$$

Для обеспечения условия $\alpha \leq \frac{1}{2}$ мы наложим следующие ограничения на область изменения параметра s

$$|r|\ell \leq \frac{1}{4}, \quad (7.10)$$

$$\gamma(\ell, s) \leq \frac{1}{5}. \quad (7.11)$$

Тогда

$$|A(2)| \leq |r|\ell \leq \frac{1}{4}, \quad (7.12)$$

и согласно лемме 6.1

$$|A(1)| = |J(x, s)| \leq \gamma(x, s) \left(1 + \frac{\gamma(x, s)}{2(1 - \gamma(x, s))} \right),$$

т. е. с учётом (7.11) верно $|A(1)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s)$ и, в частности,

$$|A(1)| \leq \frac{9}{40}. \quad (7.13)$$

Из неравенств (7.12) и (7.13) следует, что

$$|A(1)| + |A(2)| = \alpha < \frac{1}{2}. \quad (7.14)$$

Неравенство (7.10) можно записать в форме

$$|s - \mu_n| \leq \frac{1}{4\ell}, \quad (7.15)$$

а неравенство (7.11) – в форме

$$|s| \geq 5 \int_0^\ell |q(x)| dx. \quad (7.16)$$

Если

$$\mu_n - \frac{1}{4\ell} \geq 5 \int_0^\ell |q(x)| dx, \quad (7.17)$$

то положительный сегмент значений числа s , задаваемый неравенством (7.15), лежит внутри множества, задаваемого неравенством (7.16). Поэтому при выполнении неравенства (7.17) сегмент значений параметра s вида $Sb_n \equiv [\mu_n - \frac{1}{4\ell}, \mu_n + \frac{1}{4\ell}]$, определяемый неравенством (7.15), лежит внутри области, определяемой неравенством (7.16).

Мы убедились в справедливости следующей леммы.

ЛЕММА 7.2. Для натурального числа n , удовлетворяющего неравенству (7.17), множество значений параметра s , удовлетворяющих неравенствам (7.10), (7.11), есть сегмент Sb_n . При этом для всех $s \in Sb_n$ справедливы неравенства (7.12)–(7.14) для норм матриц $A(1)$ и $A(2)$ вида (7.6), (7.7).

Оценки леммы 7.1 теперь приводят нас к следующему результату.

ЛЕММА 7.3. Для натурального числа n , удовлетворяющего неравенству (7.17), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(J(x, s), irxD)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $[0, \ell] \times Sb_n$ значений параметров x, s к непрерывной функции $P(J(x, s), irxD)$ параметров x, s , удовлетворяющей

неравенствам

$$|P(J(x, s), i r x D)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |P_k(J(x, s), i r x D)| \leq \frac{99}{64} \gamma(x, s). \quad (7.18)$$

Для частных сумм и остатков ряда справедливы неравенства

$$|P_1(J(x, s), i r x D)| = |J_1(x, s)| \leq \frac{9}{8} \gamma(x, s), \quad (7.19)$$

$$\left| \sum_{k=1}^m P_k(J(x, s), i r x D) \right| \leq \sum_{k=1}^m |P_k(J(x, s), i r x D)| \leq \frac{99}{64} \gamma(x, s), \quad m = 2, 3, \dots \quad (7.20)$$

$$\left| \sum_{k=2}^{\infty} P_k(J(x, s), i r x D) \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty} |P_k(J(x, s), i r x D)| \leq \frac{3}{4} |J(x, s), D| |r| x, \quad (7.21)$$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=m}^{\infty} P_k(J(x, s), i r x D) \right| \leq \sum_{k=m}^{\infty} |P_k(J(x, s), i r x D)| \leq \\ & \leq \frac{\left(2 \left(\frac{9}{8} \gamma(x, s) + |r| x\right)\right)^{m-2}}{2(m-1)} |[J(x, s), D]| |r| x, \quad m = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (7.22)$$

2. Оценка производной $\frac{\partial P}{\partial s}$.

Для оценки производной $\frac{\partial P}{\partial s}$ проведём оценки производных $\frac{\partial P_k}{\partial s}$ членов ряда (7.5).

Согласно (7.6), (7.7) имеем для производных

$$\frac{\partial A(1)}{\partial s} = \frac{\partial J(x, s)}{\partial s}, \quad \frac{\partial A(2)}{\partial s} = i x D.$$

Отсюда $\left| \frac{\partial A(2)}{\partial s} \right| = x$ и согласно лемме 6.2

$$\left| \frac{\partial A(1)}{\partial s} \right| \leq 2\ell \frac{\gamma(x, s)}{1 - \gamma(x, s)}. \quad (7.23)$$

Мы проводим оценки для числа n , удовлетворяющего неравенству (7.17), и числа $s \in Sb_n$, поэтому $\gamma(\ell, s) \equiv \gamma \leq \frac{1}{5}$ и из (7.23) следует

$$\left| \frac{\partial A(1)}{\partial s} \right| \leq \frac{\ell}{2}.$$

Мажорантными оценками по норме устанавливается, что формально продифференцированный ряд $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial H_k(J(x, s), irxD)}{\partial s}$ сходится абсолютно и равномерно по аргументам x, s на множестве $[0, \ell] \times Sb_n$. По теореме о почленном дифференцировании функционального ряда (см. [12], с. 780-781) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} H_k(J(x, s), irxD)$ определяет функцию, имеющую непрерывную частную производную по s , и допустимо почленное дифференцирование ряда

$$\frac{\partial}{\partial s} Rh_m(J(x, s), irxD) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} H_k(J(x, s), irxD)$$

при $m \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 7.4. Для натурального числа n , удовлетворяющего неравенству (7.17), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(J(x, s), irxD)$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $Q \equiv [0, \ell] \times Sb_n$ значений параметров x, s к непрерывной по совокупности переменных x, s функции $P(J(x, s), irxD)$. Функция $P(J(x, s), irxD)$ имеет на множестве Q непрерывную производную по s , причём допустимо почленное дифференцирование по s членов исходного ряда и формально продифференцированный по s ряд сходится к функции $\frac{\partial}{\partial s} P(J(x, s), irxD)$ абсолютно и равномерно на множестве Q . Справедливы следующие оценки :

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} P_1(J(x, s), irxD) \right| \leq \frac{5}{2} \ell \gamma(x, s), \quad (7.24)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} P_k(J(x, s), irxD) \right| &\leq \frac{3}{2} \ell (|J(x, s)| + |r|x)^{k-1} \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \ell \left(\frac{9}{8} \gamma(x, s) + |r|x \right)^{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial s} \left(\sum_{k=m}^{\infty} P_k(J(x, s), irxD) \right) \right| &\leq \sum_{k=m}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} P_k(J(x, s), irxD) \right| \leq \\ &\leq 3\ell \left(\frac{9}{8} \gamma(x, s) + |r|x \right)^{m-1}, \quad m = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial s} P(J(x, s), irxD) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial s} P_k(J(x, s), irxD) \right| \leq 3\ell(2\gamma(x, s) + |r|x). \quad (7.27)$$

3. Оценка приращения общего члена ряда Хаусдорфа.

Пусть $A(1)$, $A(2)$, $A'(1)$, $A'(2)$ – произвольные матрицы из $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Обозначим $B(1) \equiv A'(1) - A(1)$, $B(2) \equiv A'(2) - A(2)$, и рассмотрим разность

$$\Delta H_k \equiv H_k(A'(1), A'(2)) - H_k(A(1), A(2)) \quad (7.28)$$

значений k -го члена ряда Хаусдорфа в двух точках $(A'(1), A'(2))$ и $(A(1), A(2))$.

Используя формулу конечных приращений Лагранжа, устанавливается следующая лемма.

ЛЕММА 7.5. Для любых матриц $A(1)$, $A(2)$, $B(1)$, $B(2)$ из $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$ и любого натурального k для k -того члена ряда Хаусдорфа справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |H_k(A(1) + B(1), A(2) + B(2)) - H_k(A(1), A(2))| \leq \\ & \leq (|B(1)| + |B(2)|)(|A(1)| + |A(2)| + |B(1)| + |B(2)|)^{k-1}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

§ 8. Принцип сжатых отображений и его модификации

Для определения n -го собственного значения возмущённой задачи мы получили в §3 уравнение вида

$$r = g(r) \quad (8.1)$$

для величины $r = s - \mu_n$. Для доказательства существования решения этого уравнения мы применим принцип сжатых отображений. А итерации метода последовательных приближений дадут нам аппроксимацию искомого корня уравнения (8.1) с любой степенью точности. На m -той итерации мы получим величину s_n с ошибкой $O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$. Но функция $g(r)$ в нашем случае представляется с помощью суммы бесконечного ряда, m -тый член которого имеет порядок $O\left(\frac{1}{n^m}\right)$, поэтому

если при вычислении m -той итерации r_m мы отбросим члены ряда, начиная с $(m+1)$ -го, то внесём ошибку в значение r_m того же порядка $O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$, что даёт сам метод последовательных приближений. Более того, при вычислении m -той итерации члены ряда с номерами не большими m также целесообразно вычислять лишь с ошибкой порядка $O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$. В этом параграфе наша задача обосновать допустимость таких модификаций метода последовательных приближений и оценить их точность.

1. *Принцип сжатых отображений для функции на симметричном отрезке.*

Рассмотрим вещественную функцию $g(r)$, определённую на сегменте $I = I(b) \equiv [-b, b]$, $b > 0$. Пусть выполнены условия

$$\sup_{r \in I} |g(r)| \leq b; \quad (8.2)$$

$$\exists \eta \in]0, 1[: \forall r'' \in I, \forall r' \in I \quad \left| g(r'') - g(r') \right| \leq \eta |r'' - r'|. \quad (8.3)$$

Тогда принцип сжатых отображений (см. [14], с. 73) гарантирует существование на отрезке I единственного решения a уравнения (8.1). Это решение является пределом итерационной последовательности $r_0 = 0$, $r_{m+1} = g(r_m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Справедлива оценка погрешности m -той итерации $|r_m - a| \leq \eta^m b$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

2. *Модификация метода. Приближённое вычисление функции g .*

Пусть вычисление значения $g(r_m)$ происходит приближённо. То есть, пусть задана последовательность отображений $g_m : I(b) \rightarrow I(b)$, $m = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\sup_{r \in J} |g(r) - g_m(r)| \leq v_{m+1}, \quad (8.4)$$

где $\{v_m\}_{m=2}^{\infty}$ — неотрицательная числовая последовательность. Доопределим $v_1 \equiv b$. Определим итерационную последовательность

$$x_0 = 0, \quad (8.5)$$

$$x_{m+1} = g_m(x_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

и оценим погрешность $d_{m+1} \equiv |x_m - a|$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Для d_1 справедливо неравенство

$$d_1 \leq b. \quad (8.7)$$

Далее по индукции при $m = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} d_{m+1} &= |x_m - a| = |g_m(x_{m-1}) - g(a)| \leq \\ &\leq |g_m(x_{m-1}) - g(x_{m-1})| + |g(x_{m-1}) - g(a)| \leq v_{m+1} + \eta d_m, \end{aligned}$$

т. е.

$$d_{m+1} \leq \eta d_m + v_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.8)$$

Введём величины

$$D_1 \equiv v_1, \quad (8.9)$$

$$D_{m+1} \equiv \eta D_m + v_{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

Тогда в силу неравенств (8.7, 8.8) справедливы неравенства

$$d_m \leq D_m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.11)$$

Таким образом, величины D_m , вычисляемые по формулам (8.9, 8.10) дают оценку отклонения m -той итерации от корня a уравнения (8.1).

3. Введём теперь дополнительное предположение, что величины v_m и величина η являются функциями некоторого параметра $\varepsilon \in Q$, где Q – интервал вида $Q =]0, \varepsilon_0[$ или $Q = [0, \varepsilon_0]$ при некотором $\varepsilon_0 > 0$. Предположим, что справедливы неравенства

$$v_m \leq \bar{v}_m \varepsilon^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.12)$$

$$\eta \leq t\varepsilon, \quad (8.13)$$

где $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$ и t – некоторые неотрицательные числа.

Заменив в правой части (8.9, 8.10) величины v_m и η на их оценки сверху (8.12, 8.13) мы получим неотрицательные величины

$$\bar{D}_1 \varepsilon \equiv \bar{v}_1 \varepsilon, \quad (8.14)$$

$$\bar{D}_2 \varepsilon^2 \equiv (t\bar{D}_1 + \bar{v}_2) \varepsilon^2, \quad (8.15)$$

.....

$$\bar{D}_{m+1} \varepsilon^{m+1} \equiv (t\bar{D}_m + \bar{v}_{m+1}) \varepsilon^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.16)$$

мажорирующие неотрицательные величины D_m :

$$D_m \leq \bar{D}_m \varepsilon^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.17)$$

Но равенства (8.14–8.16) означают следующее соотношение для формальных степенных рядов

$$D(\varepsilon) = t\varepsilon D(\varepsilon) + V(\varepsilon), \quad (8.18)$$

где $D(\varepsilon)$ и $V(\varepsilon)$ – формальные степенные ряды от формального аргумента ε вида

$$D(\varepsilon) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \bar{D}_m \varepsilon^m, \quad (8.19)$$

$$V(\varepsilon) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \bar{V}_m \varepsilon^m. \quad (8.20)$$

ЛЕММА 8.1. Если степенной ряд (8.20) сходится на интервале Q , содержащем непустое открытое множество, то при любом положительном числе $\rho \in Q$, таком, что $t\rho < 1$ степенной ряд (8.19) сходится при $\varepsilon \in]-\rho, \rho[$ и справедливы неравенства

$$d_m \leq D_m \leq \frac{V(\rho)}{1-t\rho} \left(\frac{\varepsilon}{\rho}\right)^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

Доказательство. Если степенной ряд $V(\varepsilon)$ с неотрицательными коэффициентами сходится при некотором положительном числе $\rho \in Q$, то он определяет в круге $U_\rho \equiv \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq \rho\}$ непрерывную функцию $V(z)$ комплексного аргумента z , аналитическую внутри круга. Если $t\rho < 1$, то из равенства

$$D(z) = tzD(z) + V(z)$$

при $|z| \leq \rho$ следует, что верно равенство $D(z) = \frac{V(z)}{1-tz}$ и функция $D(z)$ также непрерывна в замкнутом круге U_ρ и аналитична внутри. Так как коэффициенты ряда (8.19) неотрицательны,

$$\bar{D}_m \rho^m \leq D(\rho) = \frac{V(\rho)}{1-t\rho}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда получаем неравенства

$$\bar{D}_m \leq \frac{V(\rho)}{1-t\rho} \frac{1}{\rho^m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Итак, справедливы неравенства

$$\bar{D}_m \varepsilon^m \leq \frac{V(\rho)}{1 - t\rho} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^m, \quad m = 1, 2, \dots$$

доказывающие неравенства (8.21) и лемму 8.1. \diamond

СЛЕДСТВИЕ 8.1. Если степенной ряд (8.20) сходится при некотором $\varepsilon_1 > 0$, то существует число $\rho > 0$, что при любом $\varepsilon \in]0, \rho[$ метод последовательных приближений (8.5, 8.6) сходится с оценкой погрешности

$$|x_m - a| \leq \frac{V(\rho)}{(1 - t\rho)} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^{m+1}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следствие 8.1 получается из леммы 8.1 при $Q =]0, \varepsilon_1[$, $\rho = \frac{1}{2} \min\{\frac{1}{t}, \varepsilon_1\}$. \diamond

§ 9. Применение принципа сжатых отображений для определения собственных значений

Мы рассматриваем краевую задачу для уравнения (1.1) на определение положительных собственных значений λ . Положительное значение корня квадратного $\sqrt{\lambda} = s$ – спектральный параметр, используемый при построении матрицанта и собственных функций краевой задачи.

Если λ_n – положительное собственное значение исходной задачи, то через $s_n \equiv \sqrt{\lambda_n}$ мы обозначаем соответствующее значение спектрального параметра s . Для случая вырожденной краевой задачи с $q(x) \equiv 0$ мы обозначаем через μ_n соответствующее значение спектрального параметра s_n . Далее для невырожденной краевой задачи мы рассматриваем вокруг значения μ_n интервал $Sb_n \equiv [\mu_n - \frac{1}{4\ell}, \mu_n + \frac{1}{4\ell}]$ значений параметра s и проводим замену переменных $s - \mu_n \equiv r$. Для параметра r на сегменте $I_0 \equiv [-\frac{1}{4\ell}, \frac{1}{4\ell}]$ мы получили в §3 уравнение вида

$$r = g_n(r) \tag{9.1}$$

для задачи Штурма – Лиувилля. В этом параграфе мы получим уравнение вида (9.1) и для периодической краевой задачи.

Основная задача данного параграфа – доказать возможность применения принципа сжатых отображений к уравнению (9.1) и, пользу-

ясь методом последовательных приближений, доказать существование на отрезке I_0 единственного корня r_n уравнения (9.1).

Далее мы отказываемся от вычисления сумм бесконечных рядов, определяющих $J(\ell, s)$ и $H(\ell, s)$ и вводим модифицированный метод последовательных приближений с итерациями $r_{n,0} \equiv 0$, $r_{n,1}$, $r_{n,2}, \dots$. При проведении m -той итерации модифицированного метода используются лишь значения первых m членов рядов, задающих матрицы $J(\ell, s)$ и $H(\ell, s)$. Мы покажем, что $r_n = r_{n,m} + O\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right)$ и что при достаточно большом n модифицированный метод последовательных приближений сходится.

Наряду с величинами $r_{n,m}$ — m -той итерацией решения уравнения (9.1) мы используем величины $s_{n,m} \equiv \mu_n + r_{n,m}$, $\lambda_{n,m} \equiv s_{n,m}^2$.

1. Подлинейный функционал.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1. Отображение $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ банахова пространства X в поле вещественных чисел \mathbf{R} назовём подлинейным функционалом, если выполнены требования

$$\text{I. } \forall A \in X \quad |f(A)| \leq |A|;$$

$$\text{II. } \forall A \in X, \forall B \in X \quad |f(A) - f(B)| \leq |A - B|.$$

Любой вещественный линейный непрерывный функционал $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ с нормой $\|f\| \leq 1$ удовлетворяет требованиям I, II и является подлинейным функционалом.

Примеры подлинейных функционалов.

Пример 8.1. Пусть $X = \mathcal{Lit}$, где $\mathcal{Lit} \subset \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$ — алгебра Ли, определённая в §4, п. 2. Определим функционал на X вида $f(A) = \sigma \frac{i}{2} \det \begin{pmatrix} B_\alpha A \\ B_\alpha \end{pmatrix}$, где величина σ может принимать значения $+1$ и -1 , а индекс α — значения 1 и 2 .

Пример 8.2. Пусть снова $X = \mathcal{Lit}$ и для матрицы $A \in \mathcal{Lit}$ функционал $f(A) = \sigma_1 a_1 + \sigma_2 |a_2 + ia_3|$ где a_1, a_2, a_3 — координаты матрицы A в базисе $\{K_1, K_2, K_3\}$, а величины σ_1 и σ_2 могут принимать значения $+1$ и -1 .

2. Оценка параметра $\gamma(\ell, s)$ на интервале Sb_n .

В §2 формулой (3.17) мы ввели величину $\gamma(\ell, s) = \frac{v}{s}$, $v = \int_0^\ell |q(x)| dx$.

Если параметр $s \in [\mu_n - \frac{1}{4\ell}, \mu_n + \frac{1}{4\ell}]$, то

$$\gamma(\ell, s) \leq \gamma\left(\ell, \mu_n - \frac{1}{4\ell}\right) \equiv \gamma_n. \quad (9.2)$$

Величина μ_n является функцией параметра $n \in \mathbf{N}$ вида: $\mu_n = \mu(n) = n\frac{\pi}{\ell}$ в случае I задачи Штурма – Лиувилля; $\mu_n = \mu(n) = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$ в случае II задачи Штурма – Лиувилля (см. формулу (4.5)); $\mu_n = \mu(n) = 2n\frac{\pi}{\ell}$ для периодической краевой задачи.

Функции $\mu(n)$ как полиномы первой степени от аргумента n продолжаются на всю вещественную ось \mathbf{R} до функций $\mu(x)$. Поэтому мы можем ввести функции $\gamma(x) \equiv \gamma(\ell, \mu(x) - \frac{1}{4\ell})$ и рассмотреть уравнение $\gamma(x) = y$ при $y > 0$. Его решение

$$d(x) = \begin{cases} \frac{v\ell}{\pi y} + \frac{1}{4\pi} & , \text{ в случае I;} \\ \frac{v\ell}{\pi y} + \frac{1}{4\pi} + \frac{1}{2} & , \text{ в случае II;} \\ \frac{v\ell}{2\pi y} + \frac{1}{8\pi} & , \text{ для периодической задачи.} \end{cases} \quad (9.3)$$

Функция $x = d(y)$ – обратная функция к функции $y = \gamma(x)$, поэтому при $a > 0$ неравенства $\gamma(n) \leq a$ и $n \geq d(a)$ эквивалентны и неравенства $\gamma(n) < a$ и $n > d(a)$ эквивалентны.

3. Периодическая краевая задача.

Итак, далее в этом параграфе предполагается, что

$$r \in I_0, \quad (9.4)$$

$$n \geq d\left(\frac{1}{5}\right). \quad (9.5)$$

Матрица $H(J(\ell, \mu_n + r), i\ell D) \in \mathcal{Lit}$, поэтому её след равен нулю и её характеристический полином имеет нуль корнем кратности два тогда и только тогда, когда

$$\det(H(J(\ell, \mu_n + r), i\ell D)) = 0. \quad (9.6)$$

Но согласно формуле (4.28) для матрицы $H(J(\ell, \mu_n + r), i\ell D)$ справедливо представление $H = i\ell D + P$, а матрица $P \in \mathcal{Lit}$ в базисе $\{K_1, K_2, K_3\}$ имеет представление $P = p_1 K_1 + p_2 K_2 + p_3 K_3$ с действительными коэффициентами p_1, p_2, p_3 . Итак,

$$H = (r\ell + p_1)K_1 + p_2 K_2 + p_3 K_3 = \begin{pmatrix} (r\ell + p_1)i & p_2 + ip_3 \\ p_2 - ip_3 & -(r\ell + p_1)i \end{pmatrix}$$

и $\det H = (r\ell + p_1)^2 - (p_2^2 + p_3^2)$. Уравнение (9.6), таким образом, выполнено тогда и только тогда, когда выполнено одно из уравнений

$$r = \frac{1}{\ell} \left(-p_1 + \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \right) \quad (9.7)$$

или

$$r = \frac{1}{\ell} \left(-p_1 - \sqrt{p_2^2 + p_3^2} \right). \quad (9.8)$$

Введём функции $f_+(P) = -p_1 + |p_2 + ip_3|$, $f_-(P) = -p_1 - |p_2 + ip_3|$ на алгебре Ли \mathcal{Lit} , тогда уравнения (9.7) и (9.8) можно записать соответственно в форме

$$r = \frac{1}{\ell} f_+(P), \quad (9.9)$$

$$r = \frac{1}{\ell} f_-(P), \quad (9.10)$$

где согласно примеру 8.2 пункта 1 функционалы f_+ и f_- будут подлинейными.

4. Применимость принципа сжатых отображений.

Для значений параметра r из сегмента $Sb_n = [\mu_n - \frac{1}{4\ell}, \mu_n + \frac{1}{4\ell}]$ мы получили в §3 следующее уравнение для определения спектрального значения r_n краевой задачи Штурма – Лиувилля в ситуации А. В подситуациях А1 и А3 это уравнение (4.31), а в подситуациях А2 и А4 – это уравнение (4.32).

Матрица $P = P_n(r)$ является функцией параметра r и значения μ_n . Как правило, при изучении величины P при фиксированном номере n мы отмечаем только её зависимость от параметра r и пишем $P = P(r)$.

В периодической краевой задаче мы получили в предыдущем пункте уравнения (9.7) и (9.8) для определения значения r_n , приводимые к виду (9.9), (9.10) с подлинейными функционалами. Но согласно примеру 8.1 пункта 1 и уравнения (4.31), (4.32) приводятся к виду

$$r = \frac{1}{\ell} f(P(r)) \quad (9.11)$$

с подлинейным функционалом $f : \mathcal{Lit} \rightarrow \mathbf{R}$.

Поэтому далее в этом параграфе мы исследуем применение метода последовательных приближений к решению уравнения вида (9.11) относительно аргумента r при выполнении условий (9.4) и (9.5).

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.1. При $n \geq d(\frac{1}{5})$ для любого $r \in I_0$ справедливы неравенства

$$|P_n(r)| \leq \frac{99}{64} \gamma_n, \quad (9.12)$$

$$\left| \frac{1}{\ell} f(P_n(r)) \right| \leq \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}. \quad (9.13)$$

Справедливость утверждения 9.1 следует из леммы 7.3 и свойства I подлинейного функционала.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9.2. При $n \geq d(\frac{1}{5})$ и $b \in]0, \frac{1}{4\ell}]$ для любых чисел $r' \in I(b)$ и $r'' \in I(b)$ выполнены неравенства

$$|P(r'') - P(r')| \leq L|r'' - r'|, \quad (9.14)$$

$$\left| \frac{1}{\ell} f(P(r'')) - \frac{1}{\ell} f(P(r')) \right| \leq \frac{L}{\ell} |r'' - r'|, \quad (9.15)$$

где $L = 3\ell(2\gamma_n + b\ell)$.

Справедливость утверждения 9.2 следует из леммы 7.4 и свойства II подлинейного функционала.

Функция $g_n(r) \equiv \frac{1}{\ell} f(P_n(r))$ согласно неравенству (9.13) отображает сегмент $J(\frac{1}{4\ell})$ в сегмент $I(R_n)$, где

$$R_n \equiv \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}. \quad (9.16)$$

Выберем номер n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$R_n \leq \frac{1}{4\ell}, \quad (9.17)$$

т. е. $\frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell} \leq \frac{1}{4\ell}$ или эквивалентно $\gamma_n \leq \frac{16}{99}$ или эквивалентно

$$n \geq d\left(\frac{16}{99}\right). \quad (9.18)$$

Для номеров n , удовлетворяющих неравенству (9.18), функция $g_n(r)$: 1) отображает отрезок $J(\frac{1}{4\ell})$ в себя; 2) отображает отрезок $I(R_n)$ в себя; 3) верно неравенство (9.17).

Теперь при условии (9.18) выберем номер n настолько большим, чтобы на сегменте $I(R_n)$ функция $g_n(r)$ удовлетворяла условию Липшица с константой $\eta_n = \frac{\ell}{\ell} < 1$. Для этого согласно утверждению 9.2

достаточно потребовать, чтобы $\frac{L}{\ell} = 3(2\gamma_n + R_n\ell) < 1$, или эквивалентно $\gamma_n < \frac{64}{681}$, или эквивалентно

$$n > d \left(\frac{64}{681} \right). \quad (9.19)$$

Итак, при выполнении неравенства (9.19) функция $g_n(r)$ осуществляет сжатое отображение сегмента $I(R_n)$ в себя. Согласно §8, п. 1 применим принцип сжатых отображений и справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 9.1. При $n > d(\frac{64}{681})$ уравнение (9.11) имеет на сегменте $J(\frac{1}{4\ell})$ единственное решение r_n , причём $|r_n| \leq R_n$.

Последовательность

$$r_{n,0} = 0, \quad (9.20)$$

$$r_{n,m+1} = g_n(r_{n,m}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.21)$$

принадлежит сегменту $I(R_n)$, сходится к значению r_n и справедливы неравенства

$$|r_n - r_{n,m}| \leq \eta_n^m R_n, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (9.22)$$

где $\eta_n = \frac{681}{64} \gamma_n$, $R_n = \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}$.

5. Применение модифицированного метода последовательных приближений.

Модифицируем метод последовательных приближений, заменяя при построении m -той итерации $r_{n,m}$ бесконечные ряды их частными суммами порядка не выше m . Введём частные суммы ряда (3.15) вида $Sj_m(\ell, s) \equiv \sum_{k=1}^m J_k(\ell, s)$, $m = 1, 2, \dots$ и определим следующие матрицы $T_{n,m}(x, r)$ при $n \in \mathbf{N}$, $m \in \mathbf{N}$, $r \in \mathbf{R}$. При $m = 0$ полагаем $T_{n,0}(x, r) \equiv 0$. При $m = 1$ полагаем

$$T_{n,1}(x, r) \equiv J_1(x, \mu_n + r), \quad n \in \mathbf{N}, \quad r \in \mathbf{R} \setminus \{-\mu_n\}. \quad (9.23)$$

При $m = 2, 3, \dots$ полагаем ($n \in \mathbf{N}, r \in \mathbf{R} \setminus \{-\mu_n\}$)

$$T_{n,m}(x, r) \equiv Sj_m(x, \mu_n + r) + \sum_{k=2}^m H_k(Sj_{m-k+1}(x, \mu_n + r), irxD). \quad (9.24)$$

Вместо вычисления значения функции $g_n(r)$ в методе последовательных приближений мы будем вычислять на m -том шаге значения функции $g_{n,m}(r) \equiv \frac{1}{\ell} f(T_{n,m}(\ell, r))$.

Начнём с оценки частных сумм $Sj_m(x, s)$. Из леммы 6.1 вытекает справедливость леммы.

ЛЕММА 9.1. При $n \geq d(\frac{1}{5})$ и $s \in Sb_n$ справедливы неравенства $|Sj_m(x, s)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s)$ для любого натурального номера m .

Теперь оценим по норме величины $T_{n,m}(x, r)$.

ЛЕММА 9.2. При $n \geq d(\frac{1}{5})$ и $r \in I_0$ справедливы неравенства

$$|T_{n,m}(x, r)| \leq \frac{99}{64}\gamma(x, s) \quad (9.25)$$

при любом натуральном m .

Доказательство. При $m = 1$ имеем (9.23) и в силу леммы 9.1 верно неравенство (9.25).

При $m = 2, 3, \dots$ справедлива согласно определяющей формуле (9.24) оценка по норме

$$|T_{n,m}(x, r)| \leq |Sj_m(x, \mu_n + r)| + \sum_{k=2}^m |H_k(Sj_{m-k+1}(x, \mu_n + r), irxD)|. \quad (9.26)$$

В силу леммы 9.1 при $s \in Sb_n$ верно неравенство

$$|Sj_m(x, s)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s) \leq \frac{9}{40} < \frac{1}{4} \quad (9.27)$$

и в силу принадлежности $r \in I_0$ верно неравенство

$$|irxD| = |r|x|D| = |r|x \leq \frac{1}{4}.$$

Поэтому при $k = 3, 4, \dots$ применима лемма 7.1) и верны неравенства

$$|H_k(Sj_{m-k+1}(x, s), irxD)| \leq \frac{(2(\frac{9}{8}\gamma(x, s) + |r|x))^{k-2}}{2k(k-1)} 2\frac{9}{8}\gamma(x, s)|r|x. \quad (9.28)$$

А при $k = 2$ верно неравенство

$$|H_2(Sj_{m-1}(x, s), irxD)| = \frac{1}{2}|[Sj_{m-1}(x, s), irxD]| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s)|r|x. \quad (9.29)$$

Подставляя в неравенство (9.26), оценки (9.27, 9.28, 9.29), получаем при $m = 3, 4, \dots$ неравенства

$$|T_{n,m}(r)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s) + \frac{9}{8}\gamma(x, s)|r|x \left(1 + \sum_{k=3}^m \frac{(2(\frac{9}{8}\gamma(x, s) + |r|x))^{k-2}}{k(k-1)} \right), \quad (9.30)$$

а при $m = 2$ – неравенство

$$|T_{n,2}(r)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s) + \frac{9}{8}\gamma(x, s)|r|x. \quad (9.31)$$

Заметим, что $2\left(\frac{9}{8}\gamma(x, s) + |r|x\right) \leq 2\left(\frac{9}{8} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) < 1$. Поэтому мы можем оценить сверху частную сумму

$$\sum_{k=3}^m \frac{\left(2\left(\frac{9}{8}\gamma(x, s) + |r|x\right)\right)^{k-2}}{k(k-1)} \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\left(2\left(\frac{9}{8}\gamma + \theta\right)\right)^{k-2}}{k(k-1)} \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2}. \quad (9.32)$$

Из (9.30), (9.31), (9.32) получаем

$$|T_{n,m}(x, r)| \leq \frac{9}{8}\gamma(x, s) \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{99}{64}\gamma(x, s). \quad \diamond$$

СЛЕДСТВИЕ 9.1. При $n \geq d\left(\frac{1}{5}\right)$ при любом $r \in I_0$ и любом $m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$|g_{n,m}(r)| \leq R_n, \quad (9.33)$$

где величина R_n определена формулой (9.16), т. е. функция $g_{n,m}$ отображает сегмент I_0 в сегмент $I(R_n)$. При $n \geq d\left(\frac{16}{99}\right)$ функция $g_{n,m}$ отображает отрезок $I(R_n)$ в себя.

Итак, при $n \geq d\left(\frac{16}{99}\right)$ определены итерации модифицированного метода последовательных приближений

$$r_{n,0} = 0, \quad (9.34)$$

$$r_{n,m+1} = g_{n,m}(r_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.35)$$

Для оценки скорости сходимости этого метода оценим степень аппроксимации матрицы

$$P_n(x, r) \equiv P(J(x, \mu_n + r), irxD)$$

матрицами $T_{n,m}(x, r)$.

ЛЕММА 9.3. Пусть $n \geq d\left(\frac{1}{5}\right)$, $x \in [0, \ell]$, $r \in I(R_n)$. Тогда при $m = 1$ справедливо неравенство

$$|P_n(x, r) - T_{n,1}(x, r)| \leq \frac{3313}{1024}\gamma_n^2 \quad (9.36)$$

а при $m = 2, 3, \dots$ справедливы неравенства

$$|P_n(x, r) - T_{n,m}(x, r)| \leq$$

$$\leq \left(\frac{5}{4} \frac{1}{m+1} + \frac{891}{512} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-1} \frac{1}{m} + \left(\frac{171}{64} \right)^{m-1} \right) \gamma_n^{m+1}. \quad (9.37)$$

Доказательство. При $m = 1$ согласно формулам (7.5), (9.23) в обозначениях § 6 (формула (7.8))

$$P_n(x, r) - T_{n,1}(x, r) = Rj_2(x, \mu_n + r) + Rh_2(J(x, \mu_n + r), irxD). \quad (9.38)$$

По неравенству (7.9) и лемме 6.1 верно неравенство

$$|Rh_2(J(x, \mu_n + r), irxD)| \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} \gamma_n \frac{99}{64} \gamma_n = \frac{27 \cdot 99}{16 \cdot 64} \gamma_n^2. \quad (9.39)$$

Справедливо неравенство (6.6), т. е.

$$|Rj_2(x, \mu_n + r)| \leq \frac{\gamma^2}{2(1-\gamma)} \leq \frac{\gamma^2}{2(1-\frac{1}{5})} = \frac{5}{8} \gamma_n^2. \quad (9.40)$$

В силу (9.38, 9.39, 9.40) верно (9.36).

При $m = 2, 3, \dots$ разность $\Delta \equiv P_n(x, r) - T_{n,m}(x, r)$ согласно определяющим формулам (7.5) и (9.24) допускает представление

$$\Delta = Rj_{m+1}(x, \mu_n + r) + Q + Rh_{m+1}(J(x, \mu_n + r), irxD), \quad (9.41)$$

где

$$Q \equiv \sum_{k=2}^m (H_k(J(x, \mu_n + r), irxD) - H_k(Sj_{m-k+1}(x, \mu_n + r), irxD)). \quad (9.42)$$

Согласно неравенству (6.6)

$$|Rj_{m+1}(x, \mu_n + r)| \leq \frac{\gamma_n^{m+1}}{(m+1)^{\frac{4}{5}}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\gamma_n^{m+1}}{m+1}. \quad (9.43)$$

Согласно лемме 7.1

$$\begin{aligned} |Rh_{m+1}(J(x, \mu_n + r), irxD)| &\leq \frac{(2(\frac{9}{8}\gamma_n + \frac{99}{64}\gamma_n))^{m-1}}{m} \frac{9}{8} \gamma_n \frac{99}{64} \gamma_n = \\ &= \frac{9}{8} \cdot \frac{99}{64} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-1} \frac{1}{m} \gamma_n^{m+1}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Согласно леммам 7.5 и 6.1

$$|Q| \leq \sum_{k=2}^m \frac{\gamma_n^{m-k+2}}{(m-k+2)^{\frac{4}{5}}} \left(\frac{171}{64} \gamma_n \right)^{k-1} \leq \frac{855}{856} \left(\frac{171}{64} \right)^{m-1} \gamma_n^{m+1}. \quad (9.45)$$

и окончательно имеем

$$|Q| \leq \left(\frac{171}{64} \right)^{m-1} \gamma_n^{m+1}. \quad (9.46)$$

Из представления (9.41, 9.42) и неравенств (9.43, 9.44, 9.46) вытекает неравенство (9.37). \diamond

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Существует последовательность положительных чисел $\{bt_m\}_{m=0}^{\infty}$, что для любого номера $n \geq d\left(\frac{1}{5}\right)$, любого $x \in [0, \ell]$, любого $r \in I(R_n)$ и любого $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$|P_n(x, r) - T_{n,m}(x, r)| \leq bt_m \gamma_n^{m+1}.$$

Причём можно положить $bt_0 = \frac{99}{64}$, $bt_1 = \frac{3313}{1024}$, $bt_m = \frac{3}{m} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-1}$, $m = 2, 3, \dots$

СЛЕДСТВИЕ 9.3. При $n \geq d\left(\frac{1}{5}\right)$ при любом $r \in I_0$ при $m = 1$ справедливо неравенство

$$|g_n(r) - g_{n,1}(r)| \leq \frac{3313}{1024} \frac{\gamma_n^2}{\ell}, \quad (9.47)$$

а при $m = 2, 3, \dots$ справедливо неравенство

$$|g_n(r) - g_{n,m}(r)| \leq \left(\frac{5}{4m+4} + \frac{891}{512} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-1} \frac{1}{m} + \left(\frac{171}{64} \right)^{m-1} \right) \frac{\gamma_n^{m+1}}{\ell}. \quad (9.48)$$

Согласно построениям §7, п. 2 введём величины

$$v_1 \equiv R_n = \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}, v_2 \equiv \frac{3313}{1024} \frac{\gamma_n^2}{\ell}, \quad (9.49)$$

$$v_m \equiv \left(\frac{5}{4} \frac{1}{m} + \frac{891}{512} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-2} \frac{1}{m-1} + \left(\frac{171}{64} \right)^{m-2} \right) \frac{\gamma_n^m}{\ell}, \quad m = 3, 4, \dots \quad (9.50)$$

Принимая величину γ_n за параметр $\varepsilon \geq 0$, введём также соответствующие величины коэффициентов при γ^m :

$$\bar{v}_1 \equiv \frac{1}{\ell} \frac{99}{64}, \bar{v}_2 \equiv \frac{1}{\ell} \frac{3313}{1024}, \quad (9.51)$$

$$\bar{v}_m \equiv \frac{1}{\ell} \left(\frac{5}{4} \frac{1}{m} + \frac{891}{512} \left(\frac{171}{32} \right)^{m-2} \frac{1}{m-1} + \left(\frac{171}{64} \right)^{m-2} \right), \quad m = 3, 4, \dots \quad (9.52)$$

В этих обозначениях $v_m = v_m(\varepsilon) = \bar{v}_m \gamma_n^m$, $m = 1, 2, \dots$ при $\varepsilon = \gamma_n$.

6. *Оценки степенного ряда, задающего функцию $v(\varepsilon)$.*

Чтобы оценить погрешность итераций модернизированного метода последовательных приближений, согласно §8, п. 3 введём степенной ряд

$$v(\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \bar{v}_m \varepsilon^m \quad (9.53)$$

и изучим свойства представляемой им функции.

ЛЕММА 9.4. Степенной ряд (9.53) с коэффициентами (9.51–9.52) сходится на интервале $Q = [0, \frac{32}{171}[$ и задаёт аналитическую функцию $v(\varepsilon)$. Остаток ряда (9.53) на множестве Q удовлетворяет неравенству

$$\sum_{m=3}^{\infty} \bar{v}_m \varepsilon^m \leq \frac{1}{\ell} \frac{8\varepsilon^3}{1 - \left(\frac{171}{32}\varepsilon\right)}. \quad (9.54)$$

Доказательство. Радиус сходимости R степенного ряда (9.53) определяется из соотношения $\frac{1}{R} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{\bar{v}_m} = \frac{171}{32}$, поэтому $R = \frac{32}{171}$.

Согласно формуле (9.52)

$$\begin{aligned} \sum_{m=3}^{\infty} \bar{v}_m \varepsilon^m &= \frac{\varepsilon^3}{\ell} \left(\frac{5}{4} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^{m-3}}{m} + \right. \\ &+ \frac{891}{512} \cdot \frac{171}{32} \sum_{m=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{171}{32}\varepsilon\right)^{m-3}}{m-1} + \frac{171}{64} \sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{171}{64}\varepsilon\right)^{m-3} \Bigg). \end{aligned} \quad (9.55)$$

Для рядов в правой части формулы (9.55) справедливы неравенства

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{\varepsilon^{m-3}}{m} \leq \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i = \frac{1}{3} (1 - \varepsilon)^{-1} \leq \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{171}{32} \varepsilon \right) \right)^{-1}; \quad (9.56)$$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \frac{\left(\frac{171}{32}\varepsilon\right)^{m-3}}{m-1} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{171}{32}\varepsilon\right)^i = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{171}{32} \varepsilon \right) \right)^{-1}; \quad (9.57)$$

$$\sum_{m=3}^{\infty} \left(\frac{171}{64}\varepsilon\right)^{m-3} = \left(1 - \left(\frac{171}{64} \varepsilon \right) \right)^{-1} \leq \left(1 - \left(\frac{171}{32} \varepsilon \right) \right)^{-1}. \quad (9.58)$$

Из неравенств (9.56-9.58) и формулы (9.55) следует неравенство

$$\sum_{m=3}^{\infty} \bar{v}_m \varepsilon^m \leq \frac{\varepsilon^3}{\ell} \left(\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{891}{512} \cdot \frac{171}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{171}{64} \right) \left(1 - \left(\frac{171}{32} \varepsilon \right) \right)^{-1}. \quad (9.59)$$

Но

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{891}{512} \cdot \frac{171}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{171}{64} < 8.$$

Неравенство (9.54) доказано. \diamond

7. Теорема о сходимости модифицированного метода последовательных приближений.

Проведённые построения подготовили нас к доказательству следующей основной теоремы.

ТЕОРЕМА 9.2. При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ модифицированный метод последовательных приближений (9.34, 9.35) определён и сходится к корню $r_n \in I(R_n)$ уравнения (9.11). При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливы следующие оценки для погрешности первых трёх итераций

$$|r_n - r_{n,0}| \leq \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}, \quad (9.60)$$

$$|r_n - r_{n,1}| \leq \frac{80671}{4096} \frac{\gamma_n^2}{\ell}, \quad (9.61)$$

$$|r_n - r_{n,2}| \leq \frac{170896445}{786432} \frac{\gamma_n^3}{\ell}. \quad (9.62)$$

При $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ и любом $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$|r_n - r_{n,m}| \leq \frac{1}{\ell} 3,5 \left(\frac{681}{32} \right)^m \gamma_n^{m+1}. \quad (9.63)$$

Доказательство. При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ согласно пункту 4 отображение $g_n : I(R_n) \rightarrow I(R_n)$ является сжатием. По теореме 1 при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ существует на сегменте $I(R_n)$ единственный корень r_n уравнения (9.11). При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливы следствия 9.1 и 9.3, определён модифицированный метод последовательных приближений, справедливы неравенства (9.47, 9.48) и определена последовательность $\{v_m\}_1^\infty$ по формулам (9.49-9.50). Тогда применимы построения §7 п. 2 для оценки погрешности модифицированного метода последовательных приближений и верны неравенства (8.11), т. е.

$$|r_n - r_{n,m}| \leq D_{m+1}, \quad (9.64)$$

где величины D_1, D_2, \dots выражаются через величины v_1, v_2, \dots по формулам (8.9, 8.10) с $\eta = \eta_n = \frac{681}{64}\gamma_n$. Тогда

$$\begin{aligned} |r_n - r_{n,0}| &\leq D_1 = v_1 = \frac{99}{64} \frac{\gamma_n}{\ell}, \\ |r_n - r_{n,1}| &\leq D_2 = \eta_n D_1 + v_2 = \left(\frac{681}{64} \cdot \frac{99}{64} + \frac{3313}{1024} \right) \frac{\gamma_n^2}{\ell} = \frac{80671}{4096} \frac{\gamma_n^2}{\ell}, \\ |r_n - r_{n,2}| &\leq D_3 = \eta_n D_2 + v_3 = \\ &= \left(\frac{681}{64} \cdot \frac{80671}{4096} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{891}{512} \cdot \frac{171}{32} \cdot \frac{1}{2} + \frac{171}{64} \right) \frac{\gamma_n^3}{\ell} = \frac{170896445}{786432} \frac{\gamma_n^3}{\ell} \end{aligned}$$

и неравенства (9.60-9.62) доказаны.

Если $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$, то $\gamma_n < \frac{64}{681}$ и существует положительное число $\rho \in]\gamma_n, \frac{64}{681}[$. Обозначим $\varepsilon = \gamma_n$, $t = \frac{681}{64}$ и применим лемму 8.1. Тогда справедливо неравенство

$$D_m \leq \frac{v(\rho)}{1 - t\rho} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \right)^m \quad (9.65)$$

при каждом $m = 1, 2, \dots$ и так как $\frac{\varepsilon}{\rho} < 1$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m = 0$ и следовательно согласно (9.64) верно $\lim_{m \rightarrow \infty} r_{n,m} = r_n$, т. е. итерации метода последовательных приближений сходятся к корню r_n .

Для получения оценок (9.63) применим при $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ ещё раз лемму 8.1 с $\rho = \frac{32}{681}$. Тогда неравенство (9.65) принимает вид

$$D_m \leq \frac{v(\rho)}{(1 - t\rho)} \left(\frac{\gamma_n}{\rho} \right)^m. \quad (9.66)$$

Здесь $1 - t\rho = 1 - \frac{681}{64} \cdot \frac{32}{681} = \frac{1}{2}$ и согласно лемме 9.4 для $\rho = \frac{32}{681}$ верно неравенство

$$v(\rho) \leq \frac{\rho}{\ell} \left(\frac{99}{64} + \frac{3313}{1024}\rho + \frac{8\rho^2}{1 - \left(\frac{171}{32}\rho\right)} \right). \quad (9.67)$$

При $\rho = \frac{32}{681}$ верно

$$\frac{99}{64} + \frac{3313}{1024}\rho + \frac{8\rho^2}{1 - \left(\frac{171}{32}\rho\right)} = \frac{99}{64} + \frac{32}{681} \left(\frac{3313}{1024} + 8 \frac{32}{681} \cdot \frac{681}{510} \right) < 1,724. \quad (9.68)$$

Из (9.64, 9.66-9.68) следует справедливость неравенства (9.63). \diamond

Из доказательства и результатов теоремы 9.2 вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 9.4. Существует последовательность положительных чисел $\{br_m\}_{m=0}^{\infty}$, такая, что при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливы неравенства

$$|r_n - r_{n,m}| \leq br_m \frac{\gamma_n^{m+1}}{\ell}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.69)$$

причём можно положить $br_0 = \frac{99}{64}$, $br_1 = \frac{80671}{4096}$, $br_2 = \frac{170896445}{786432}$. При $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ в неравенствах (9.69) можно положить

$$br_m = 3,5 \left(\frac{681}{32}\right)^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (9.70)$$

8. Асимптотические формулы для сдвига собственных значений.

Пусть $\lambda_{n,0} \equiv \mu_n^2$ – положительное собственное значение невозмущённой задачи с $q(x) \equiv 0$ и $\Delta\lambda_n \equiv \lambda_n - \lambda_{n,0}$ – сдвиг собственного значения. Введём вычисляемую на m -той итерации величину

$$\Delta\lambda_{n,m} \equiv \lambda_{n,m} - \mu_n^2 = (\mu_n + r_{n,m})^2 - \mu_n^2 \quad (9.71)$$

и сравним аппроксимативный сдвиг $\Delta\lambda_{n,m}$ с точным сдвигом собственного значения.

ЛЕММА 9.5. При $n \geq \max\{2, d\left(\frac{32}{681}\right)\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливо представление

$$\Delta\lambda_n = \Delta\lambda_{n,m} + \theta_{n,m}, \quad (9.72)$$

где

$$|\theta_{n,m}| \leq 8,12 \left(\frac{681}{32}\right)^m \frac{v}{\ell} \gamma_n^m. \quad (9.73)$$

Для первых трёх итераций оценка (9.73) может быть уточнена.

ЛЕММА 9.6. При $n > \max\{1, d\left(\frac{64}{681}\right)\}$, $m = 0, 1, 2$ справедливо представление

$$\Delta\lambda_n = 2\mu_n r_{n,m} + \nu_{n,m}, \quad (9.74)$$

где

$$|\nu_{n,0}| \leq 3,32 \frac{v}{\ell}; \quad |\nu_{n,1}| \leq 42,14 \frac{v}{\ell} \gamma_n; \quad |\nu_{n,2}| \leq (459\ell v + 2,4) \frac{\gamma_n^2}{\ell^2}. \quad (9.75)$$

§ 10. Асимптотические формулы первого и второго порядков для собственных значений

Пользуясь модифицированным методом последовательных приближений, на основании теоремы 9.2 выпишем явные асимптотические формулы для собственных значений первого и второго порядков в данном параграфе. На протяжении этого параграфа мы используем N -базис для представления матриц из алгебры Ли \mathcal{Lit} .

1. *Выражения для матриц $Sj_m(x, s)$ в N -базисе.*

Согласно лемме 9.3 матрицы $T_{n,m}(x, r)$ аппроксимируют матрицу $P_n(x, r)$, представимую суммой бесконечного ряда (7.5), с ошибкой порядка $O(\gamma_n^{m+1})$ равномерно по x на сегменте $[0, \ell]$. Выпишем явные выражения для матриц $Sj_m(x, s)$, используемых при построении матриц $T_{n,m}(x, r)$.

Согласно определяющим формулам (3.11, 3.12) для матриц $J_k(x, s)$ и выражению (3.5) для матрицы $A_{gf}(x, s)$, справедливы формулы

$$J_k(x, s) = \frac{1}{ks^k} \int_0^x \cdots \int_0^x q(\xi_1)q(\xi_2) \cdots q(\xi_k) \text{val } k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \times \\ \times [R(2s\xi_k), \dots [R(2s\xi_2), R(2s\xi_1)], \dots] d\xi_1 \cdots d\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.1)$$

Матрицы $[R(2s\xi_k), \dots [R(2s\xi_2), R(2s\xi_1)], \dots]$ в N -базисе имеют представление (5.14), в силу которого $J_k(x, s) = \sum_{\gamma=1}^3 j_{k,\gamma}(x, s) N_\gamma$, где

$$j_{k,\gamma}(x, s) = \frac{1}{ks^k} \int_0^x \cdots \int_0^x q(\xi_1)q(\xi_2) \cdots q(\xi_k) \text{val } k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) \times \\ \times \rho_{k,\gamma}(2s\xi_1, 2s\xi_2, \dots, 2s\xi_k) d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_k. \quad (10.2)$$

Частная сумма $Sj_m(x, s) = \sum_{k=1}^m J_k(x, s)$ в N -базисе записывается в виде

$$Sj_m(x, s) = \sum_{\gamma=1}^3 sj_{m,\gamma}(x, s) N_\gamma \text{ с координатами } sj_{m,\gamma}(x, s) = \sum_{k=1}^m j_{k,\gamma}(x, s).$$

В частном случае $k = 1$ мы принимаем $\text{val } 1(\xi_1) \equiv 1$ и

$$J_1(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi_1) R(2s\xi_1) d\xi_1.$$

Соответственно координаты матрицы $J_1(x, s)$ в N -базисе равны

$$j_{1,1}(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi_1) d\xi_1, j_{1,2}(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi_1) \sin(2s\xi_1) d\xi_1,$$

$$j_{1,3}(x, s) = \frac{1}{s} \int_0^x q(\xi_1) \cos(2s\xi_1) d\xi_1. \quad (10.3)$$

В частном случае $k = 2$ координаты матрицы $J_2(x, s)$ согласно формулам (10.2) и (5.15) равны :

$$j_{2,1}(x, s) = \frac{-1}{2s^2} \int_0^x \int_0^x q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \cos(2s\xi_1) \sin(2s\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (10.4)$$

$$j_{2,2}(x, s) = \frac{1}{2s^2} \int_0^x \int_0^x q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \cos(2s\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (10.5)$$

$$j_{2,3}(x, s) = \frac{-1}{2s^2} \int_0^x \int_0^x q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \sin(2s\xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (10.6)$$

Величина второго члена ряда Хаусдорфа

$$H_2(J_1(x, s), rxK_1) = \frac{1}{2} [xrK_1, J_1(x, s)] = xr[N_1, \sum_{\gamma=1}^3 j_{1,\gamma}(x, s) N_\gamma] =$$

$$= xr(j_{1,2}(x, s) N_3 - j_{1,3}(x, s) N_2) \quad (10.7)$$

Таким образом, согласно формуле (9.23) получаем следующий вид матрицы $T_{n,1}(x, r)$

$$T_{n,1}(x, r) = \sum_{\gamma=1}^3 j_{1,\gamma}(x, s) N_\gamma, \quad (10.8)$$

где $s = \mu_n + r$.

Для матрицы $T_{n,2}(x, r)$ согласно формуле (9.24) получаем следующий вид

$$T_{n,2}(x, r) = S j_2(x, s) + H_2(S j_1(x, s), rxK_1) =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^3 (j_{1,\gamma}(x, s) + j_{2,\gamma}(x, s)) N_{\gamma} + xr(j_{1,2}(x, s) N_3 - j_{1,3}(x, s) N_2).$$

т. е.

$$T_{n,2}(x, r) = (j_{1,1}(x, s) + j_{2,1}(x, s)) N_1 + (j_{1,2}(x, s) + j_{2,2}(x, s) - xrj_{1,3}(x, s)) N_2 + (j_{1,3}(x, s) + j_{2,3}(x, s) + xrj_{1,2}(x, s)) N_3. \quad (10.9)$$

2. Выражение функции $f(A)$ из уравнения (9.11) через координаты матрицы $A \in \mathcal{Lit}$ в N -базисе.

Для определения значения r_n мы получили в §9 уравнение (9.11) с подлинейным функционалом $f(A)$, определённом на алгебре Ли \mathcal{Lit} матриц A из $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$.

Для функционала $f(A)$ мы встретили три выражения :

1) выражение $F : f(A) = \frac{i}{2} \det \begin{pmatrix} B_1 A \\ B_1 \end{pmatrix},$

2) выражение $S : f(A) = \frac{-i}{2} \det \begin{pmatrix} B_2 A \\ B_2 \end{pmatrix},$

3) выражение $P : f(A) = -a'_1 + \sigma |a'_2 + ia'_3|, \sigma = \pm 1,$

где a'_1, a'_2, a'_3 – координаты матрицы $A \in \mathcal{Lit}$ в K -базисе. Выражение F соответствует краевой задаче Штурма – Лиувилля, ситуации A , подситуации $A1$ и $A3$. Выражение S соответствует краевой задаче Штурма – Лиувилля, ситуации A , подситуации $A2$ и $A4$. Выражение P соответствует периодической краевой задаче.

Запишем матрицу $A \in \mathcal{Lit}$ через её координаты в N -базисе $A = a_1 N_1 + a_2 N_2 + a_3 N_3$. Через координаты матрицы A получаем

1) выражение $F : f(A) = \frac{a_3 - a_1}{2},$

2) выражение $S : f(A) = -\frac{a_1 + a_3}{2},$

3) выражение $P : f(A) = \frac{1}{2}(-a_1 + \sigma |a_2 + ia_3|), \sigma = \pm 1.$

3. Асимптотические формулы первого приближения имеют вид $r_{n,1} = \frac{1}{\ell} f(T_{n,1}(\ell, 0))$. Подставляя сюда выражение $T_{n,1}(\ell, r)$ в координатах по формуле (10.8) и выражения величин $j_{1,\gamma}(\ell, \mu_n)$ по формулам (10.3) получаем :

в случае F :

$$r_{n,1} = -\frac{1}{2\ell\mu_n} \int_0^{\ell} q(x)(1 - \cos(2\mu_n x)) dx, \quad (10.10)$$

в случае S :

$$r_{n,1} = -\frac{1}{2\ell\mu_n} \int_0^\ell q(x)(1 + \cos(2\mu_n x))dx, \quad (10.11)$$

в случае P :

$$r_{n,1,\sigma} = -\frac{1}{2\ell\mu_n} \left(\int_0^\ell q(x)dx - \sigma \left| \int_0^\ell q(x)e^{-i2\mu_n x}dx \right| \right). \quad (10.12)$$

При этом согласно теореме 9.2 $r_n = r_{n,1} + \psi_{n,1}$, где при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливо неравенство

$$|\psi_{n,1}| \leq \frac{80671}{4096} \frac{\gamma_n^2}{\ell}. \quad (10.13)$$

4. Асимптотические формулы второго приближения имеют вид $r_{n,2} = \frac{1}{\ell} f(T_{n,2}(\ell, r_{n,1}))$. Подставляя сюда выражение $T_{n,2}(\ell, r_n)$ в координатах по формуле (10.9) и выражения величин $j_{1,\gamma}$ и $j_{2,\gamma}$ по формулам (10.3) и (10.4-10.6), получаем :

в случае F :

$$\begin{aligned} r_{n,2} = & \frac{1}{2\ell} (j_{1,3}(\ell, s_{n,1}) - j_{1,1}(\ell, s_{n,1})) + \\ & + \frac{1}{2\ell} (j_{2,3}(\ell, s_{n,1}) - j_{2,1}(\ell, s_{n,1})) + \frac{r_{n,1}}{2} j_{1,2}(\ell, s_{n,1}), \end{aligned} \quad (10.14)$$

в случае S :

$$\begin{aligned} r_{n,2} = & -\frac{1}{2\ell} (j_{1,1}(\ell, s_{n,1}) + j_{1,3}(\ell, s_{n,1})) - \\ & - \frac{1}{2\ell} (j_{2,1}(\ell, s_{n,1}) + j_{2,3}(\ell, s_{n,1})) - \frac{r_{n,1}}{2} j_{1,2}(\ell, s_{n,1}), \end{aligned} \quad (10.15)$$

в случае P :

$$\begin{aligned} r_{n,2} = & \frac{1}{2\ell} (- (j_{1,1}(\ell, s_{n,1}) + j_{2,1}(\ell, s_{n,1})) + \\ & + \sigma | (j_{1,2}(\ell, s_{n,1}) + j_{2,2}(\ell, s_{n,1}) - \ell r_{n,1} j_{1,3}(\ell, s_{n,1})) + \\ & + i (j_{1,3}(\ell, s_{n,1}) + j_{2,3}(\ell, s_{n,1}) + \ell r_{n,1} j_{1,2}(\ell, s_{n,1})) |). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Согласно теореме 9.2 $r_n = r_{n,2} + \psi_{n,2}$, где при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливо неравенство $|\psi_{n,2}| \leq 218 \frac{\gamma_n^3}{\ell}$.

5. Упрощённый вид асимптотических формул второго приближения.

Формулы второго приближения (10.14-10.16) могут быть упрощены путём отбрасывания величин порядка $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Для сокращения записи формул введём обозначения следующих интегралов

$$\operatorname{co}(f(x), \nu) \equiv \int_0^\ell f(x) \cos(\nu x) dx, \operatorname{si}(f(x), \nu) \equiv \int_0^\ell f(x) \sin(\nu x) dx. \quad (10.17)$$

В этих обозначениях

$$j_{1,1}(\ell, s_{n,1}) = \frac{1}{s_{n,1}} \int_0^\ell q(\xi_1) d\xi_1 = \frac{1}{\mu_n} \operatorname{co}(q(x), 0) + \Delta_{1,1}, \quad (10.18)$$

где $|\Delta_{1,1}| \leq \frac{v^2}{\ell \mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}$. Аналогично

$$j_{1,2}(\ell, s_{n,1}) = \frac{1}{\mu_n} (\operatorname{si}(q(x), 2\mu_n) + 2r_{n,1} \operatorname{co}(xq(x), 2\mu_n)) + \Delta_{1,2}, \quad (10.19)$$

где $|\Delta_{1,2}| \leq \frac{v^2(1+2v\ell)}{\ell \mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}$. Аналогично

$$j_{1,3}(\ell, s_{n,1}) = \frac{1}{\mu_n} (\operatorname{co}(q(x), 2\mu_n) - 2r_{n,1} \operatorname{si}(xq(x), 2\mu_n)) + \Delta_{1,3}, \quad (10.20)$$

где

$$|\Delta_{1,3}| \leq \frac{v^2(1+2v\ell)}{\ell \mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}. \quad (10.21)$$

Аналогично

$$j_{2,\gamma}(\ell, s_{n,1}) = j_{2,\gamma}(\ell, \mu_n) + \Delta_{2,\gamma}, \quad \gamma \in \overline{1, 3}, \quad (10.22)$$

где

$$|\Delta_{2,1}| \leq \frac{v^3}{\mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}, \quad |\Delta_{2,2}| \leq \frac{2v^3}{\mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}, \quad |\Delta_{2,3}| \leq \frac{2v^3}{\mu_n (\mu_n - \frac{1}{4\ell})^2}. \quad (10.23)$$

Подставив асимптотические формулы (10.18, 10.19, 10.20, 10.22) в выражение (10.14), мы получаем в случае F

$$\begin{aligned} r_{n,2} = r_{n,1} - \frac{r_{n,1}}{\ell\mu_n} (\operatorname{si}(xq(x), 2\mu_n) - \frac{\ell}{2} \operatorname{si}(q(x), 2\mu_n)) + \\ + \frac{1}{2\ell} (j_{2,3}(\ell, \mu_n) - j_{2,1}(\ell, \mu_n)) + \Delta_{n,2,f}, \end{aligned} \quad (10.24)$$

где

$$|\Delta_{n,2,f}| \leq \frac{v^2}{\ell^2 \mu_n \left(\mu_n - \frac{1}{4\ell}\right)^2} (1 + 4\ell v + (\ell v)^2). \quad (10.25)$$

В случае S , подставляя выражения (10.18, 10.19, 10.20, 10.22) в формулу (10.15), получаем

$$\begin{aligned} r_{n,2} = r_{n,1} + \frac{r_{n,1}}{\ell\mu_n} (\operatorname{si}(xq(x), 2\mu_n) - \frac{\ell}{2} \operatorname{si}(q(x), 2\mu_n)) - \\ - \frac{1}{2\ell} (j_{2,1}(\ell, \mu_n) + j_{2,3}(\ell, \mu_n)) + \Delta_{n,2,s}, \end{aligned} \quad (10.26)$$

где

$$|\Delta_{n,2,s}| \leq \frac{v^2 (1 + 4\ell v + (\ell v)^2)}{\ell^2 \mu_n \left(\mu_n - \frac{1}{4\ell}\right)^2}. \quad (10.27)$$

В случае P , подставляя выражения (10.18, 10.19, 10.20, 10.22) в формулу (10.16), получаем

$$\begin{aligned} r_{n,2} = -\frac{1}{2\ell\mu_n} \int_0^\ell q(x) dx + \\ + \frac{1}{4\ell\mu_n^2} \int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \cos(2\mu_n \xi_1) \sin(2\mu_n \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 + \\ + \sigma \left| \frac{1}{2\ell\mu_n} \int_0^\ell q(x) e^{-2i\mu_n x} dx - i \frac{r_{n,1}}{\ell\mu_n} \int_0^\ell \left(x - \frac{\ell}{2}\right) q(x) e^{-2i\mu_n x} dx - \right. \\ \left. - i \frac{1}{4\ell\mu_n^2} \int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) e^{-2i\mu_n \xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \right| + \Delta_{n,2,p}, \end{aligned} \quad (10.28)$$

где

$$|\Delta_{n,2,p}| \leq \frac{v^2}{\ell^2 \mu_n \left(\mu_n - \frac{1}{4\ell}\right)^2} (1,5 + 7,3\ell v + 1,6(\ell v)^2). \quad (10.29)$$

Полученные формулы верны при условии $\ell \mu_n \geq \frac{5}{4}$.

6. *Пример со степенным потенциалом.*

Рассмотрим потенциал

$$q(x) = \frac{c}{x^\beta}, \quad x \in]0, \ell], \quad (10.30)$$

где $c \in \mathbf{R}$ – действительная числовая константа, и параметр $\beta \in]0, 1[$. Тогда функция $q(x)$ суммируема на отрезке $[0, \ell]$ и

$$a_0 \equiv \int_0^\ell q(x) dx = \frac{c \ell^{1-\beta}}{1-\beta}, \quad v \equiv \int_0^\ell |q(x)| dx = |c| \frac{\ell^{1-\beta}}{1-\beta}. \quad (10.31)$$

Интегрированием по частям устанавливается справедливость леммы.

ЛЕММА 10.1. Для любых чисел $\ell > 0$, $\beta > 0$, $\nu > 0$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_0^\ell x^{-\beta} e^{-i\nu \frac{\pi}{\ell} x} dx &= \frac{\ell^{(1-\beta)} \Gamma(1-\beta) e^{-i(1-\beta)\frac{\pi}{2}}}{(\nu\pi)^{1-\beta}} + \\ &+ \frac{\ell^{(1-\beta)} e^{-i(\nu-\frac{1}{2})\pi}}{\nu\pi} \left(1 + \frac{i\beta}{\nu\pi} + i^2 \frac{\beta(\beta+1)}{(\nu\pi)^2} + \right. \\ &\left. + \dots + i^{k-1} \frac{(\beta)_{k-1}}{(\nu\pi)^{k-1}} + \eta_k(\beta, \nu) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (10.32)$$

где при $k = 0, 1, 2, \dots$ использовано обозначение $(\beta)_k \equiv \frac{\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\beta)}$ и справедливо неравенство $|\eta_k(\beta, \nu)| \leq 2 \frac{(\beta)_k}{(\nu\pi)^k}$. Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера.

Выпишем теперь асимптотические формулы первого и второго порядка для собственных значений первой, второй и периодической краевых задач. В асимптотические формулы первого порядка мы подставим также выражения коэффициентов Фурье из предыдущего пункта для частного случая степенного потенциала $q(x) = \frac{c}{x^\beta}$, $\beta \in]0, 1[$.

7. Первая краевая задача.

Для первой краевой задачи параметры $\varphi_0 = \varphi_\ell = 0$ задают краевые условия $y(0) = 0$ и $y(\ell) = 0$. Величины $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$, величины $\gamma_n = \frac{\ell v}{n\pi - \frac{1}{4}}$, $n \in \mathbf{N}$. Поэтому функция (9.3) равна $d(y) = \frac{\ell v}{\pi y} + \frac{1}{4\pi}$. Приводимые ниже оценки справедливы для номеров

$$n > \frac{1}{\pi} \left(\frac{681}{64} \ell v + \frac{1}{4} \right). \quad (10.33)$$

Согласно нашей классификации из §3, п. 3 мы находимся в ситуации А, подситуация А1. Согласно п. 2 данного параграфа мы используем в подситуации А1 выражение F .

Первое приближение для r_n в случае F даётся формулой (10.10), которая в данной ситуации принимает вид

$$r_{n,1} = -\frac{1}{2n\pi} \left(\int_0^\ell q(x) dx - \int_0^\ell q(x) \cos \left(2n\frac{\pi}{\ell} x \right) dx \right). \quad (10.34)$$

Неравенство (10.13) в настоящем случае даёт

$$|\psi_{n,1}| \leq 20 \frac{\ell v^2}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (10.35)$$

Формула для сдвига собственного значения (9.74) в настоящем случае даёт при $n > 1$

$$\Delta \lambda_n = -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell q(x) dx + \frac{1}{\ell} \int_0^\ell q(x) \cos \left(2n\frac{\pi}{\ell} x \right) dx + \nu_{n,1}, \quad (10.36)$$

где

$$|\nu_{n,1}| \leq 42,14 \frac{v^2}{(n\pi - \frac{1}{4})}. \quad (10.37)$$

Согласно (10.24) второе приближение даёт

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n,1} + \frac{r_{n,1}}{2n\pi} \int_0^\ell (\ell - 2x) q(x) \sin \left(2n\frac{\pi}{\ell} x \right) dx - \frac{\ell}{(2n\pi)^2} \times \\ &\times \left(\int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \left(1 - \cos \left(2n\frac{\pi}{\ell} \xi_1 \right) \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \sin\left(2n\frac{\pi}{\ell}\xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2) + \Delta_{r,2,f}, \quad (10.38)$$

где согласно (10.25) $|\Delta_{n,2,f}| \leq \frac{lv^2}{n\pi(n\pi - \frac{1}{4})^2} (1 + 4(lv) + (lv)^2)$.

В частном случае степенного потенциала (10.30) согласно лемме 10.1 из (10.34-10.37) получаем

$$r_n = -\frac{a_0}{2n\pi} \left(1 - \frac{\Gamma(2-\beta)}{(2n\pi)^{(1-\beta)}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\right) + \psi'_{n,1},$$

где

$$|\psi'_{n,1}| \leq \frac{|a_0|}{(n\pi - \frac{1}{4})^2} \left(20\ell|a_0| + \frac{\beta(1-\beta)}{4n\pi}\right). \quad (10.39)$$

Для сдвига собственного значения получаем при $n > 1$

$$\Delta\lambda_n = -\frac{a_0}{\ell} \left(1 - \frac{\Gamma(2-\beta)}{(2n\pi)^{(1-\beta)}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\right) + \theta'_{n,1}, \quad (10.40)$$

где

$$|\theta'_{n,1}| \leq \frac{|a_0|}{\ell(n\pi - \frac{1}{4})} \left(42,14\ell|a_0| + \frac{\beta(1-\beta)}{(2n\pi)}\right). \quad (10.41)$$

8. Вторая крайняя задача.

Для второй краевой задачи параметры $\varphi_0 = \varphi_\ell = \frac{\pi}{2}$ задают краевые условия $y'(0) = 0$ и $y'(\ell) = 0$. Величины $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$, величины $\gamma_n = \frac{v}{n\pi - \frac{1}{4}}$, $n \in \mathbb{N}$. Функция (9.3) равна $d(y) = \frac{\ell v}{\pi y} + \frac{1}{4\pi}$. Приводимые ниже асимптотические оценки верны при условии (10.33).

Для второй краевой задачи мы имеем ситуацию A , подситуация $A2$ и используем выражение S .

Первое приближение для r_n в случае S даётся формулой (10.11), которая в данном случае принимает вид

$$r_{n,1} = -\frac{1}{2n\pi} \left(\int_0^\ell q(x) dx + \int_0^\ell q(x) \cos\left(2n\frac{\pi}{\ell}x\right) dx \right). \quad (10.42)$$

Справедлива оценка (10.35).

Формула для сдвига собственного значения даёт при $n > 1$

$$\Delta\lambda_n = -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell q(x) dx - \frac{1}{\ell} \int_0^\ell q(x) \cos\left(2n\frac{\pi}{\ell}x\right) dx + \nu_{n,1}, \quad (10.43)$$

где для величины $\nu_{n,1}$ верна оценка (10.37).

Согласно (10.26) второе приближение даёт

$$\begin{aligned} r_n &= r_{n,1} - \frac{r_{n,1}}{2n\pi} \int_0^\ell (\ell - 2x) q(x) \sin\left(2n\frac{\pi}{\ell}x\right) dx + \frac{\ell}{(2n\pi)^2} \times \\ &\times \left(\int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \left(1 + \cos\left(2n\frac{\pi}{\ell}\xi_1\right)\right) \times \right. \\ &\times \left. \sin\left(2n\frac{\pi}{\ell}\xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 \right) + \Delta_{n,2,s}, \end{aligned} \quad (10.44)$$

где согласно (10.27) $|\Delta_{n,2,s}| \leq \frac{\ell v^2(1+4(\ell v) + (\ell v)^2)}{n\pi(n\pi - \frac{1}{4})^2}$.

В частном случае степенного потенциала (10.30) по лемме 10.1 из (10.11, 10.13) получаем

$$r_n = -\frac{a_0}{2n\pi} \left(1 + \frac{\Gamma(2-\beta)}{(2n\pi)^{(1-\beta)}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\right) + \psi'_{n,1}, \quad (10.45)$$

где $\psi'_{n,1}$ удовлетворяет неравенству (10.39), и при $n > 1$

$$\Delta\lambda_n = -\frac{a_0}{\ell} \left(1 + \frac{\Gamma(2-\beta)}{(2n\pi)^{(1-\beta)}} \sin\left(\frac{\pi\beta}{2}\right)\right) + \theta'_{n,1}, \quad (10.46)$$

где $\theta'_{n,1}$ удовлетворяет неравенству (10.41).

9. Периодическая краевая задача.

Периодическая краевая задача задаётся краевыми условиями $y(0) = y(\ell)$ и $y'(0) = y'(\ell)$. Величины $\mu_n = 2n\frac{\pi}{\ell}$, величины $\gamma_n = \frac{\ell v}{2n\pi - \frac{1}{4}}$, $n \in \mathbf{N}$. Функция (9.3) равна $d(y) = \frac{\ell v}{2\pi y} + \frac{1}{8\pi}$. Приводимые оценки справедливы для номеров

$$n > \frac{1}{2\pi} \left(\frac{681}{64} \ell v + \frac{1}{4} \right). \quad (10.47)$$

В периодической краевой задаче мы используем выражение P .

Первое приближение для r_n даётся формулой (10.12), принимающей вид

$$r_{n,\sigma,1} = -\frac{1}{4n\pi} \left(\int_0^\ell q(x) dx - \sigma \left| \int_0^\ell q(x) e^{-i4n\frac{\pi}{\ell}x} dx \right| \right), \quad (10.48)$$

причём справедливо представление $r_{n,\sigma} = r_{n,\sigma,1} + \psi_{n,\sigma,1}$ с оценкой

$$|\psi_{n,\sigma,1}| \leq 20 \frac{\ell v^2}{(2n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (10.49)$$

Здесь $\sigma = \pm 1$ и n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству (10.47). Сдвиг собственного значения

$$\Delta\lambda_{n,\sigma} = -\frac{1}{\ell} \int_0^\ell q(x) dx + \frac{\sigma}{\ell} \left| \int_0^\ell q(x) e^{-i4n\frac{\pi}{\ell}x} dx \right| + \theta_{n,\sigma,1}, \quad (10.50)$$

где номер $n > 1$ и $|\theta_{n,\sigma,1}| \leq 42,14 \frac{v^2}{(2n\pi - \frac{1}{4})}$.

Согласно (10.28) второе приближение даёт

$$\begin{aligned} r_{n,\sigma} = & -\frac{1}{4n\pi} \int_0^\ell q(x) dx + \\ & + \frac{\ell}{(4n\pi)^2} \int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \cos\left(\frac{4n\pi}{\ell} \xi_1\right) \sin\left(\frac{4n\pi}{\ell} \xi_2\right) d\xi_1 d\xi_2 + \\ & + \sigma \left| \frac{1}{4n\pi} \int_0^\ell q(x) e^{-i4n\frac{\pi}{\ell}x} dx + i \frac{r_{n,\sigma,1}}{(4n\pi)} \int_0^\ell (\ell - 2x) q(x) e^{-i4n\frac{\pi}{\ell}x} dx - \right. \\ & \left. - i \frac{\ell}{(4n\pi)^2} \int_0^\ell \int_0^\ell q(\xi_1) q(\xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) e^{-i4n\frac{\pi}{\ell}\xi_2} d\xi_1 d\xi_2 \right| + \Delta_{n,2,p}, \quad (10.51) \end{aligned}$$

где согласно (10.29) $|\Delta_{n,2,p}| \leq \frac{\ell v^2 (\frac{3}{2} + 7,3(\ell v) + 1,6(\ell v)^2)}{2\pi n (2n\pi - \frac{1}{4})^2}$.

В частном случае степенного потенциала (10.30) согласно лемме 10.1 из (10.48-10.49) получаем

$$r_{n,\sigma} = -\frac{a_0}{4n\pi} \left(1 - \sigma \operatorname{sign}(c) \frac{\Gamma(2-\beta)}{(4n\pi)^{(1-\beta)}} \right) + \psi'_{n,\sigma,1}, \quad (10.52)$$

где $|\psi'_{n,\sigma,1}| \leq \frac{|a_0|}{(2n\pi - \frac{1}{4})^2} \left(20\ell|a_0| + \frac{1-\beta}{2} \right)$. Для сдвига собственных значений по формулам (10.48, 9.74) при $n > 1$ получаем

$$\Delta\lambda_{n,\sigma} = -\frac{a_0}{\ell} \left(1 - \sigma \operatorname{sign}(c) \frac{\Gamma(2-\beta)}{(4n\pi)^{(1-\beta)}} \right) + \theta'_{n,\sigma,1}, \quad (10.53)$$

где $|\theta'_{n,\sigma,1}| \leq \frac{|a_0|}{\ell(2n\pi - \frac{1}{4})} (42,14\ell|a_0| + (1-\beta))$.

§ 11. Асимптотика собственных функций

Определив с любой степенью точности собственные значения, перейдём к построению аппроксимации собственной функции.

1. Асимптотика матрицанта.

При условии $\gamma(\ell, s) < 1$ мы получили в параграфе 2 (формула (3.14)) следующее представление для матрицанта

$$W(x, s^2) = G(s) \exp(xsK_1) \exp(J(x, s))G^{-1}(s). \quad (11.1)$$

Здесь $J(x, s)$ представляется суммой бесконечного ряда (3.15) для остатка которого справедлива оценка (6.6), поэтому при $s \rightarrow \infty$

$$Rj_m(x, s) = O\left(\left(\frac{v}{s}\right)^m\right). \quad (11.2)$$

Таким образом, из (11.1), (11.2) получаем асимптотическое представление матрицанта ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$W(x, s^2) = G(s) \exp(xsK_1) \exp\left(Sj_m(x, s) + O\left(\left(\frac{v}{s}\right)^{m+1}\right)\right) G^{-1}(s) \quad (11.3)$$

при $s \rightarrow \infty$.

2. В случае, когда $\lambda_n = s_n^2$ — собственное значение и номер $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$, мы представили параметр s_n в виде

$$s_n = \mu_n + r_n \quad (11.4)$$

и преобразовали матрицант (11.1) к виду

$$W(x, \lambda_n) = G(s_n) \exp(x\mu_n K_1) \exp(H(J(x, s_n), xr_n K_1))G^{-1}(s_n). \quad (11.5)$$

В последнем выражении сомножитель $\exp(x\mu_n K_1)$ нам известен точно, а при вычислении остальных сомножителей мы предполагаем использовать аппроксимацию величины s_n её m -тым приближением $s_{n,m}$ и аппроксимацию бесконечного ряда $H(J(x, s_n), xr_n K_1)$ его конечной суммой.

Итак, пусть

$$s_{n,m} = \mu_n + r_{n,m} + \psi_{n,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.6)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.1. Справедливы соотношения

$$|G(s)| = \sqrt{2} \max\{1, |s|\}, \quad s \in \mathbf{R}, \quad (11.7)$$

$$|G^{-1}(s)| = \sqrt{2} \max\{1, \frac{1}{|s|}\}, \quad s \in \mathbf{R} \setminus \{0\}, \quad (11.8)$$

$$G(s_n) - G(s_{n,m}) = i\psi_{n,m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (11.9)$$

$$G^{-1}(s_n) - G^{-1}(s_{n,m}) = \frac{i\psi_{n,m}}{2s_n s_{n,m}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (11.10)$$

Доказательство. Равенства (11.7, 11.8) следуют из леммы 5.2.

Равенства (11.9, 11.10) следуют из вида матриц $G(s)$ и $G^{-1}(s)$ (формулы (3.1)) и формул (11.4, 11.6). \diamond

3. Согласно представлению (7.4) верно равенство

$$H(J(x, s), xrK_1) = xrK_1 + P(J(x, s), xrK_1). \quad (11.11)$$

В §9 для аппроксимации бесконечного ряда $P(J(x, s), xrK_1)$ мы ввели величины $T_{n,m}(x, r)$ вида (9.23, 9.24). Для аппроксимации величины $H(J(x, s_n), xr_n K_1)$ мы введём величины

$$Th_{n,m}(x) \equiv xr_{n,m}K_1 + T_{n,m}(x, r_{n,m-1}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.12)$$

ЛЕММА 11.1. При $x \in [0, \ell]$, $n > d(\frac{64}{681})$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$|H(J(x, s_n), xr_n K_1)| \leq \frac{99}{32} \gamma_n, \quad (11.13)$$

$$|Th_{n,m}(x)| \leq \frac{99}{32} \gamma_n, \quad (11.14)$$

$$|\exp(H(J(x, s_n), xr_n K_1))| \leq e^{\frac{99}{32} \gamma_n}, \quad (11.15)$$

$$|\exp(Th_{n,m}(x))| \leq e^{\frac{99}{32} \gamma_n}, \quad (11.16)$$

$$|H(J(x, s_n), xr_n K_1) - Th_{n,m}(x)| \leq bth_m \gamma_n^{m+1}, \quad (11.17)$$

$$|\exp(H(J(x, s_n), xr_n K_1)) - \exp(Th_{n,m}(x))| \leq bth_m \gamma_n^{m+1} \exp\left(\frac{99}{16} \gamma_n\right), \quad (11.18)$$

где $bth_0 = \frac{99}{32}$ и $bth_m = bt_m + br_m + \frac{681}{64} br_{m-1}$ при $m = 1, 2, \dots$. В частности, $bth_1 = \frac{161342}{4096} < 40$, $bth_2 < 435$. При $m \geq 2$ и $n \geq d(\frac{32}{681})$ можно положить $bth_m = 5,27 \left(\frac{681}{32}\right)^m$.

Доказательство. Согласно лемме 7.3, неравенству (9.2), теореме 9.1 и представлению (11.11) верно неравенство (11.13). Согласно лемме 9.2, неравенству (9.2), теореме 9.1 и представлению (11.12) верно неравенство (11.14). Так как $|\exp(A)| \leq \exp(|A|)$, то из неравенств (11.13, 11.14) следуют неравенства (11.15, 11.16).

Согласно формулам (11.11, 11.12) разность

$$\begin{aligned} & H(J(x, s_n), xr_n K_1) - Th_{n,m}(x) = \\ & = x(r_n - r_{n,m})K_1 + P(J(x, s_n), xr_n K_1) - T_{n,m}(x, r_{n,m-1}) = \\ & = x(r_n - r_{n,m})K_1 + (P(J(x, s_n), xr_n K_1) - P(J(x, s_{n,m-1}), xr_{n,m-1} K_1)) + \\ & \quad + (P(J(x, s_{n,m-1}), xr_{n,m-1} K_1) - T_{n,m}(x, r_{n,m-1})). \end{aligned} \quad (11.19)$$

Далее оцениваем слагаемые в правой части (11.19) по норме

$$|x(r_n - r_{n,m})K_1| = |x||r_n - r_{n,m}| \leq \ell|\psi_{n,m}|. \quad (11.20)$$

Согласно лемме 7.4 и формуле конечных приращений (теорема 13 из [12])

$$|P(J(x, s_n), xr_n K_1) - P(J(x, s_{n,m-1}), xr_{n,m-1} K_1)| \leq \frac{681}{64} \ell \gamma_n |\psi_{n,m-1}|. \quad (11.21)$$

Согласно следствию 9.2

$$|P(J(x, s_{n,m-1}), xr_{n,m-1} K_1) - T_{n,m}(x, r_{n,m-1})| \leq bt_m \gamma_n^{m+1}. \quad (11.22)$$

Из равенства (11.19) и неравенств (11.20-11.22) получаем неравенство (11.17).

Далее справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & |\exp(H(J(x, s_n), xr_n K_1)) - \exp(Th_{n,m}(x))| \leq \\ & \leq |H(J(x, s_n), xr_n K_1) - Th_{n,m}(x)| \times \\ & \times \exp(|H(J(x, s_n), xr_n K_1)| + |Th_{n,m}(x)|), \end{aligned}$$

из которого в силу неравенств (11.17, 11.13, 11.14) следует неравенство (11.18). \diamond

4. Собственная функция красовой задачи.

Если матрицант имеет вид (11.1), то общее решение уравнения (2.3) для матрицы-столбца $Y(x)$ есть $Y(x) = W(x, s^2)Y(0)$, где $Y(0) = C \in \mathbf{R}^2$ – вектор вещественных констант. Функция $y(x)$ является

первой компонентой векторной функции $Y(x)$. В случае $C \neq 0$ выразим столбец констант $C \in \mathbf{R}^2$ через столбец констант $D \in \mathbf{R}^2$ с нормой $|D| = 1$ и число $\alpha > 0$ по формуле $C = \alpha \sqrt{\frac{2}{\ell}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} D$. Тогда ненулевое решение дифференциального уравнения (1.1) можно записать при $\gamma(\ell, s) < 1$ в форме

$$y(x) = \alpha \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(xsK_1) \exp(J(x, s)) FD, \quad (11.23)$$

где $B_1 \in \mathcal{M}(1 \times 2, \mathbf{R})$, $F \in \mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{C})$, $D \in \mathbf{R}^2$, $\alpha > 0$ и $B_1 = (1, 1)$, $F \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$.

Если значение параметра s соответствует собственному значению, т. е. $s = s_n$ и $s_n^2 = \lambda_n$, причём $n > d(\frac{64}{681})$, то $s_n = \mu_n + r_n$ и формула (11.23) даёт следующее выражение для собственной функции

$$y_n(x) = \alpha_n St_n(x) D_n, \quad (11.24)$$

где

$$St_n(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x\mu_n K_1) \exp(H(J(x, s_n), x r_n K_1)) F. \quad (11.25)$$

После определения нормированного вектора D_n из однородных краевых условий мы подставляем выражение для собственной функции (11.24) в условие нормировки $\int_0^\ell y_n^2(x) dx = 1$ и определяем α_n по формуле $\alpha_n = (\langle N_n D_n, D_n \rangle)^{-\frac{1}{2}}$, где N_n — нормирующая матрица из $\mathcal{M}(2 \times 2, \mathbf{R})$ вида

$$N_n = \int_0^\ell St_n^*(x) St_n(x) dx. \quad (11.26)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.1. В случае первого краевого условия в нуле вектор D_n одинаков для всех номеров n и даётся формулой $D_n = D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично в случае второго краевого условия в нуле вектор $D_n = D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ для всех номеров n .

5. Аппроксимация собственной функции краевой задачи.

Введём следующую аппроксимирующую матрицу

$$St_{n,m}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x\mu_n K_1) \exp(Th_{n,m}(x)) F, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.27)$$

Подставляя в выражение (11.26) для нормирующей матрицы вместо матрицы $St_n(x)$ её аппроксимацию (11.27), получим аппроксимацию нормирующей матрицы

$$N_{n,m} \equiv \int_0^\ell S^* t_{n,m}(x) St_{n,m}(x) dx. \quad (11.28)$$

Далее в краевом условии используем вместо точного значения параметра s_n его m -тое приближение $s_{n,m}$ и вместо точного матрицанта $W(x, \lambda_n)$ его m -тое приближение и получаем приближённое значение $D_{n,m} \in M(2 \times 1, \mathbf{R})$, $|D_{n,m}| = 1$, вместо точного значения D_n .

Приближённое значение $\alpha_{n,m}$ нормирующего множителя α_n получаем по формуле

$$\alpha_{n,m} = (\langle N_{n,m} D_{n,m}, D_{n,m} \rangle)^{-\frac{1}{2}}. \quad (11.29)$$

Итак мы построили m -тое приближение к собственной функции

$$y_{n,m}(x) \equiv \alpha_{n,m} St_{n,m}(x) D_{n,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (11.30)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.2. В силу замечания 11.1 для краевой задачи Штурма – Лиувилля с первым или вторым граничным условием в нуле матрица-столбец $D_n = D_0$ известна точно и в этом случае

$$y_{n,m}(x) = \alpha_{n,m} St_{n,m}(x) D_0, \quad (11.31)$$

$$\alpha_{n,m} = (\langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle)^{-\frac{1}{2}} \quad (11.32)$$

при всех $m = 0, 1, 2, \dots$

Перейдём к оценке ошибок аппроксимации при замене величин $St_n(x)$, N_n , α_n , $y_n(x)$ на их аппроксимации величинами $St_{n,m}(x)$, $N_{n,m}$, $\alpha_{n,m}$, $y_{n,m}(x)$ соответственно.

6. Аппроксимация матрицы $St_n(x)$ и нормирующей матрицы N_n .

Используя лемму 11.1 оценим близость матрицы $St_{n,m}(x)$ к матрице $St_n(x)$.

Предварительно введём в этом параграфе обозначение $\delta_n = \frac{99}{64} \gamma_n = R_n \ell$, где R_n - величина, введённая формулой (9.16).

ЛЕММА 11.2. При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$, $x \in [0, \ell]$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства :

$$|St_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(2\delta_n), \quad (11.33)$$

$$|St_{n,m}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(2\delta_n), \quad (11.34)$$

$$|St_n(x) - St_{n,m}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(4\delta_n), \quad (11.35)$$

где последовательность положительных чисел $\{bth_m\}_{m=0}^{\infty}$ определена в лемме 11.1.

Доказательство. Выпишем нормы матриц, входящих в правые части формул (11.25) и (11.27) :

$$|B_1| = \sqrt{2}, \quad (11.36)$$

$$|\exp(x\mu_n K_1)| = \begin{vmatrix} \exp(ix\mu_n) & 0 \\ 0 & \exp(-ix\mu_n) \end{vmatrix} = 1, \quad (11.37)$$

$$|F| = \left| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} |G^*(1)| = \frac{1}{2} |G(1)| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (11.38)$$

В последней строке мы использовали лемму 5.2.

Из неравенств (11.15, 11.16) леммы 11.1 и равенств (11.36-11.38) следуют неравенства (11.33, 11.34).

Неравенство (11.35) следует из неравенства (11.18) леммы 11.1, ибо

$$\begin{aligned} & |St_n(x) - St_{n,m}(x)| = \\ & = \left| \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x\mu_n K_1) (\exp(H(J(x, s_n), x r_n K_1)) - \exp(Th_{n,m}(x))) F \right| \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sqrt{2} \cdot 1 \cdot bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(4\delta_n) \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(4\delta_n). \quad \diamond \end{aligned}$$

Из доказанной леммы 11.2 получается следующая оценка аппроксимации нормирующей матрицы N_n .

ЛЕММА 11.3. При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$|N_n - N_{n,m}| \leq 4bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(6\delta_n). \quad (11.39)$$

Доказательство. Справедливо тождество

$$\begin{aligned} St_n^*(x)St_n(x) - St_{n,m}^*(x)St_{n,m}(x) &\equiv \\ &\equiv (St_n^*(x) - St_{n,m}^*(x))St_n(x) + St_{n,m}^*(x)(St_n(x) - St_{n,m}(x)). \end{aligned} \quad (11.40)$$

Оценивая правую часть равенства (11.40) по норме и используя лемму 11.2 получаем при всех $x \in [0, \ell]$ неравенство

$$\begin{aligned} |St_n^*(x)St_n(x) - St_{n,m}^*(x)St_{n,m}(x)| &\leq |St_n^*(x) - St_{n,m}^*(x)||St_n(x)| + \\ &+ |St_{n,m}^*(x)||St_n(x) - St_{n,m}(x)| \leq 2\frac{2}{\ell}bth_m\gamma_n^{m+1}\exp(6\delta_n). \end{aligned} \quad (11.41)$$

Для разности $N_n - N_{n,m}$ получаем

$$\begin{aligned} |N_n - N_{n,m}| &= \left| \int_0^\ell (St_n^*(x)St_n(x) - St_{n,m}^*(x)St_{n,m}(x))dx \right| \leq \\ &\leq \int_0^\ell |St_n^*(x)St_n(x) - St_{n,m}^*(x)St_{n,m}(x)|dx \leq 4bth_m\gamma_n^{m+1}\exp(6\delta_n). \quad \diamond \end{aligned}$$

7. Вычислим нулевое приближение $N_{n,0}$ к нормирующей матрице N_n .

По построению $Th_{n,0} \equiv 0$ и $St_{n,0}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}}B_1 \exp(x\mu_n K_1)F$. Рассмотрим произведение

$$St_{n,0}^*(x)St_{n,0}(x) = \frac{2}{\ell}F^* \exp^*(x\mu_n K_1)B_1^* B_1 \exp(x\mu_n K_1)F.$$

По построению матрица

$$Cet_n(x) \equiv \exp^*(x\mu_n K_1)B_1^* B_1 \exp(x\mu_n K_1) \quad (11.42)$$

самосопряжённая и представима в виде $Cet_n(x) = E + Ced_n(x)$, где матрица $Ced_n(x)$ также самосопряжённая и представима в виде

$$Ced_n(x) = \exp^*(x\mu_n K_1)K_2 \exp(x\mu_n K_1) = K_2 \exp(2x\mu_n K_1). \quad (11.43)$$

Прямое вычисление по формуле (11.28) устанавливает справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 11.4. При всех натуральных n справедливо равенство $N_{n,0} = E + \frac{\theta}{\ell\mu_n} K_2$, где величина $\theta = 0$, если $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$ или $\mu_n = 2n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, и величина $\theta = 1$, если $\mu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$.

СЛЕДСТВИЕ 11.1. Если $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то при всех натуральных n верно равенство

$$\langle N_{n,0} D_0, D_0 \rangle = \langle E D_0, D_0 \rangle = 1,$$

ибо $\langle K_2 D_0, D_0 \rangle = 0$.

8. Оценка близости нормировочной матрицы к матрице $N_{n,0}$.

Применяя лемму 11.3 при $m = 0$ получаем справедливость следствия.

СЛЕДСТВИЕ 11.2. При $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ справедливо неравенство

$$|N_n - N_{n,0}| \leq 8\delta_n \exp(6\delta_n). \quad (11.44)$$

Применяя ещё раз лемму 11.3, из следствия 11.2 получаем справедливость леммы 11.5.

ЛЕММА 11.5. Существует последовательность неотрицательных чисел $\{bn_m\}_{m=0}^\infty$, такая, что при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$|N_{n,m} - N_{n,0}| \leq bn_m \delta_n \exp(6\delta_n). \quad (11.45)$$

Причём можно взять $bn_0 = 0$, $bn_1 = 17,58$. При $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ можно взять $bn_0 = 0$, $bn_1 = 12,79$ и $bn_m = 21,63$ при $m = 2, 3, \dots$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m = 0$ справедливость леммы 11.4 очевидна. При $m = 1, 2, 3, \dots$ справедливо неравенство

$$|N_{n,m} - N_{n,0}| \leq |N_n - N_{n,m}| + |N_n - N_{n,0}|. \quad (11.46)$$

Подставляя в неравенство (11.46) неравенства (11.39) и (11.44), получаем неравенство $|N_{n,m} - N_{n,0}| \leq (8 + 4bth_m \gamma_n^m \frac{64}{99}) \delta_n \exp(6\delta_n)$. Отсюда при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ полагаем $bn_m \equiv 8 + 4bth_m \left(\frac{64}{681}\right)^m \frac{64}{99}$. При этом $bn_1 = 8 + 4 \frac{161342}{4096} \frac{64}{681} \frac{64}{99} \leq 17,58$.

При $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ и $m = 1, 2, 3, \dots$ полагаем $bn_m \equiv 8 + \frac{256}{99} bth_m \left(\frac{32}{681}\right)^m$. При этом $bn_1 = 8 + 4 \frac{161342}{4096} \frac{32}{681} \frac{64}{99} \leq 12,79$. При $m = 2, 3, \dots$ получаем

$$bn_m = 8 + 4 \cdot 5,27 \left(\frac{681}{32}\right)^m \left(\frac{32}{681}\right)^m \frac{64}{99} = 8 + \frac{5,27 \cdot 256}{99} < 21,63. \quad \diamond$$

СЛЕДСТВИЕ 11.3. При $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ справедливы неравенства

$$|N_{n,m} - N_{n,0}| \leq 21,63\delta_n \exp(6\delta_n). \quad (11.47)$$

Из доказательства леммы 11.5 и следствия 11.1 вытекает следствие 11.4.

СЛЕДСТВИЕ 11.4. В условиях леммы 11.5 при $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ верны неравенства

$$|\langle N_{n,m}D_0, D_0 \rangle - \langle ED_0, D_0 \rangle| \leq bn_m\delta_n \exp(6\delta_n),$$

в частности, при $n \geq d\left(\frac{32}{681}\right)$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ верны неравенства

$$|\langle N_{n,m}D_0, D_0 \rangle - \langle ED_0, D_0 \rangle| \leq 21,63\delta_n \exp(6\delta_n).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.3. Если $\gamma_n = 0,02$, то $8\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{3}$. Если $\gamma_n = 0,01$, то $8\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{6}$. Если $\gamma_n = 0,08$, то $21,63\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{3}$. Если $\gamma_n = 0,004$, то $21,63\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{6}$. При $n = 3, 4, \dots$ справедливо неравенство $\frac{1}{\ell\mu_n} < \frac{1}{6}$ при $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$ и при $\mu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$.

Из следствия 11.2 леммы 11.5 и замечания 11.3 следует справедливость утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.2. Если $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$ или $\mu_n = 2n\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, то при $n \geq d(0,02)$ справедливо неравенство

$$|N_n - E| < \frac{1}{3}. \quad (11.48)$$

Если $\mu_n = (n - \frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}$, $n \in \mathbb{N}$, то неравенство (11.48) справедливо при $n \geq \max\{d(0,01), 3\}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.3. В случае первого или второго краевого условия в нуле при $n \geq d(0,02)$ справедливы неравенства

$$|N_n - N_{n,0}| < \frac{1}{3}, \quad |\langle N_n D_0, D_0 \rangle - 1| < \frac{1}{3},$$

а при $n \geq d(0,008)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливы неравенства

$$|N_{n,m} - N_{n,0}| < \frac{1}{3}, \quad |\langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle - 1| < \frac{1}{3}.$$

В дальнейшем нам потребуются следующие свойства функции $\text{squ}(x) \equiv x^{-\frac{1}{2}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.4. На множестве $x \geq 2^{-\frac{2}{3}}$ функция $\text{squ}(x) \equiv x^{-\frac{1}{2}}$ убывающая и её производная $|\text{squ}'(x)| \leq 1$. Для любых действительных чисел $x_1 \geq 2^{-\frac{2}{3}}$ и $x_2 \geq 2^{-\frac{2}{3}}$ верно неравенство

$$|\text{squ}(x_2) - \text{squ}(x_1)| \leq |x_2 - x_1|. \quad (11.49)$$

При $x \in [0,9; 1,1]$ справедливо представление

$$\text{squ}(x) = 1 - \frac{(x-1)}{2} + \alpha \frac{(x-1)^2}{2}, \quad (11.50)$$

где $|\alpha| \leq 1$. Верно числовое неравенство $2^{-\frac{2}{3}} < \frac{2}{3}$.

Из утверждений 11.3 и 11.4 и следствий 11.2 и 11.3 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 11.5. В случае первого или второго краевого условия в нуле при $n \geq d(0,02)$ справедливо неравенство

$$\max\{|\langle N_n D_0, D_0 \rangle - 1|, |\alpha_n - 1|\} \leq 8\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{3},$$

а при $n \geq d(0,008)$ справедливо неравенство

$$\max\{|\langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle - 1|, |\alpha_{n,m} - 1|\} \leq 21,63\delta_n \exp(6\delta_n) < \frac{1}{3}.$$

9. *Оценка степени близости приближённой собственной функции к точной.*

В этом пункте мы рассматриваем краевую задачу Штурма – Лиувилля с краевыми условиями $y(0) = 0$ или $y'(0) = 0$ на левом конце и $y(\ell) = 0$ или $y'(\ell) = 0$ на правом конце. Начнём с оценки близости нормирующих множителей точной собственной функции и аппроксимирующей функции.

ЛЕММА 11.6. Для краевой задачи Штурма – Лиувилля с граничными условиями первого или второго рода при $n \geq d(0,008)$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$|\alpha_n - \alpha_{n,m}| \leq 4bth_m \gamma_n^{m+1} \exp\left(\frac{297}{32} \gamma_n\right). \quad (11.51)$$

Доказательство. Согласно замечанию 11.2 в условиях настоящей леммы $\alpha_n = \text{squn}(\langle N_n D_0, D_0 \rangle)$, $\alpha_{n,m} = \text{squn}(\langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle)$, где $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. По утверждению 11.5 в условиях настоящей леммы верны неравенства

$$\langle N_n D_0, D_0 \rangle > \frac{2}{3}, \quad \langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle > \frac{2}{3}.$$

Согласно утверждению 11.4 тогда верно неравенство

$$\begin{aligned} |\alpha_n - \alpha_{n,m}| &\leq |\langle N_n D_0, D_0 \rangle - \langle N_{n,m} D_0, D_0 \rangle| \leq \\ &\leq |\langle (N_n - N_{n,m}) D_0, D_0 \rangle| \leq |N_n - N_{n,m}|. \end{aligned}$$

Теперь неравенство (11.51) следует из леммы 11.3. \diamond

Сформулируем и докажем основную теорему об асимптотике собственных функций.

ТЕОРЕМА 11.1. Для краевой задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[0, \ell]$ с суммируемым потенциалом и краевыми условиями первого или второго рода на каждом конце отрезка при $n > d\left(\frac{64}{681}\right)$ существуют собственные функции возмущённой задачи $y_n(x)$, определены аппроксимирующие функции $y_{n,m}(x)$ и при всех $n \geq d(0,008)$, $x \in [0, \ell]$, $m = 0, 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$|y_n(x) - y_{n,m}(x)| \leq 6\sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1}, \quad (11.52)$$

где $\{bth_m\}_{m=0}^\infty$ следующая последовательность положительных чисел:

$$\begin{aligned} bth_0 &= \frac{99}{32}, \quad bth_1 = \frac{161342}{4096}, \quad bth_2 = 435, \\ bth_m &= 5,27 \left(\frac{681}{32}\right)^m, \quad m = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (11.53)$$

Доказательство. Оценим разность

$$\alpha_n St_n(x) - \alpha_{n,m} St_{n,m}(x) = (\alpha_n - \alpha_{n,m}) St_n(x) + a_{n,m} (St_n(x) - St_{n,m}(x)). \quad (11.54)$$

По лемме 11.6 в условиях настоящей теоремы верно неравенство

$$|\alpha_n - \alpha_{n,m}| \leq 4bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(6\delta_n).$$

По лемме 11.2 в условиях настоящей теоремы верно неравенство

$$|St_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(2\delta_n).$$

По утверждению 11.5 в условиях настоящей теоремы верны неравенства

$$\frac{2}{3} < \alpha_{n,m} < \frac{4}{3}.$$

По лемме 11.2 в условиях настоящей теоремы верно неравенство

$$|St_n(x) - St_{n,m}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(4\delta_n). \quad (11.55)$$

Из соотношений (11.54-11.55) следует неравенство

$$\begin{aligned} |\alpha_n St_n(x) - \alpha_{n,m} St_{n,m}(x)| &\leq 4bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(6\delta_n) \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(2\delta_n) + \\ &+ \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1} \exp(4\delta_n) = \\ &= \left(4 \exp(4\delta_n) + \frac{4}{3}\right) \exp(4\delta_n) \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1}. \end{aligned} \quad (11.56)$$

При $\gamma_n \leq 0,008$ справедливо неравенство

$$\left(4 \exp(4\delta_n) + \frac{4}{3}\right) \exp(4\delta_n) < 6. \quad (11.57)$$

Итак, в условиях теоремы из (11.56, 11.57) получаем неравенство

$$|\alpha_n St_n(x) - \alpha_{n,m} St_{n,m}(x)| \leq 6 \sqrt{\frac{2}{\ell}} bth_m \gamma_n^{m+1}. \quad (11.58)$$

Поскольку в условиях теоремы $y_n(x) = \alpha_n St_n(x) D_0$, $y_{n,m}(x) = \alpha_{n,m} St_{n,m}(x) D_0$, где $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ или $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то неравенство (11.52) следует из неравенства (11.58) в силу оценки

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_{n,m}(x)| &= |(\alpha_n St_n(x) - \alpha_{n,m} St_{n,m}(x)) D_0| \leq \\ &\leq |\alpha_n St_n(x) - \alpha_{n,m} St_{n,m}(x)|. \quad \diamond \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 11.4. Напомним, что $\gamma_n \equiv (\ell v)/(\ell \mu_n - \frac{1}{4})$, где $v = \int_0^\ell |q(x)| dx$, $\mu_n = n \frac{\pi}{\ell}$ для первой и второй краевых задач и $\mu_n = (n - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\ell}$ для смешанной краевой задачи, $n \in \mathbb{N}$. Функции $y_{n,m}(x)$ определены соотношениями (11.30, 11.29, 11.28, 11.27, 11.12, 9.23, 9.24).

§ 12. Асимптотика первого порядка собственных функций задачи Штурма – Лиувилля

В этом параграфе мы рассматриваем краевую задачу Штурма – Лиувилля на отрезке $[0, \ell]$ с суммируемым потенциалом, причём на каждом конце отрезка $[0, \ell]$ задаются граничные условия первого или второго рода.

1. Применяя теорему 11.1, мы при $n \geq d(0,008)$ получаем аппроксимацию первого порядка $y_{n,1}(x)$ к собственной функции $y_n(x)$ вида

$$y_{n,1}(x) = \alpha_{n,1} St_{n,1}(x) D_0, \quad (12.1)$$

причём при всех $x \in [0, \ell]$ справедливо неравенство $|y_n(x) - y_{n,1}(x)| \leq 6\sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{161342}{4096} \gamma_n^2 \leq 236,4 \sqrt{\frac{2}{\ell}} \gamma_n^2$.

Учитывая, что выражение (12.1) представляет нормированную собственную функцию с ошибкой порядка $O(\frac{1}{n^2})$, мы можем препарировать дополнительно это выражение и привести его с точностью до величин $O(\frac{1}{n^2})$ к более простому виду. А именно, представляя экспоненту лишь двумя первыми членами ряда Тейлора, мы заменим матричную функцию $St_{n,1}(x)$ на матричную функцию

$$St_{n,1,a}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x \mu_n K_1) (E + T h_{n,1}(x)) F. \quad (12.2)$$

Далее нормирующий множитель $\alpha_{n,1}$ заменим на следующую аппроксимацию

$$\alpha_{n,1,t} \equiv 1 - \frac{1}{2\ell \mu_n} \int_0^\ell (\ell - x) q(x) \sin(2\mu_n x) dx \cdot \sigma(D_0), \quad (12.3)$$

где величина $\sigma(D_0) = 1$, если $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\sigma(D_0) = -1$, если $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Функция $y_{n,1,a}(x) \equiv \alpha_{n,1,t} St_{n,1,a}(x) D_0$ аппроксимирует собственную функцию $y_n(x)$ со следующей ошибкой.

ТЕОРЕМА 12.1. При $n \geq d(0,008)$ при всех $x \in [0, \ell]$ справедливо неравенство

$$|y_n(x) - y_{n,1,a}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{255,5b^2 + 4,1b}{(\ell\mu_n - \frac{1}{4})^2}, \quad (12.4)$$

где $y_n(x)$ – нормированная собственная функция задачи Штурма – Лиувилля на отрезке $[0, \ell]$ с суммируемым потенциалом $q(x)$ и граничными условиями первого или второго рода на каждом конце. Параметр $b \equiv \ell \int_0^\ell |q(x)| dx$.

2. Перейдём к подготовке доказательства теоремы 12.1. Начнём с оценки матричной функции $St_{n,1,a}(x)$.

ЛЕММА 12.1. При $n \in \mathbf{N}$, $x \in [0, \ell]$ справедливы неравенства

$$|Th_{n,1}(x)| \leq \eta_n, \quad (12.5)$$

$$|\exp(Th_{n,1}(x))| \leq \exp(\eta_n), \quad (12.6)$$

$$|E + Th_{n,1}(x)| \leq \exp(\eta_n), \quad (12.7)$$

$$|\exp(Th_{n,1}(x)) - (E + Th_{n,1}(x))| \leq \frac{1}{2} \eta_n^2 \exp(\eta_n), \quad (12.8)$$

$$\max\{|St_{n,1}(x)|, |St_{n,1,a}(x)|\} \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(\eta_n), \quad (12.9)$$

$$|St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{1}{2} \eta_n^2 \exp(\eta_n), \quad (12.10)$$

где $\eta_n \equiv \frac{2v}{\mu_n}$, $v \equiv \int_0^\ell |q(x)| dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценивая выражение (11.12) по норме, получаем

$$|Th_{n,1}(x)| \leq |x| |r_{n,1}| K_1 + \frac{1}{\mu_n} \int_0^x |q(t)| |R(2\mu_n t)| dt \leq \ell |r_{n,1}| + \frac{v}{\mu_n} \leq \frac{2v}{\mu_n}.$$

Здесь мы использовали выражения (10.10, 10.11) для $r_{n,1}$ и оценку $|R(\xi)| \leq 1$ из (3.7). Неравенство (12.5) доказано. Неравенства (12.6) и (12.7) непосредственно следуют из неравенства (12.5). Неравенство (12.8) следует из неравенства (12.5). Неравенства (12.9), (12.10) следуют из неравенств (12.6-12.8), представлений (11.27, 12.2) и соотношений

$$|B_1| = \sqrt{2}, \quad |\exp(x\mu_n K_1)| = 1, \quad |F| = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \diamond$$

3. Упрощение нормирующей матрицы $N_{n,1}$ до матрицы $N_{n,1,1}$.

Для аппроксимации нормирующей матрицы $N_{n,1}$ введём нормирующую матрицу

$$N_{n,1,a} \equiv \int_0^\ell St_{n,1,a}^*(x) St_{n,1,a}(x) dx. \quad (12.11)$$

ЛЕММА 12.2. При любом натуральном номере n справедливо неравенство

$$|N_{n,1} - N_{n,1,a}| \leq 2\eta_n^2 \exp(2\eta_n). \quad (12.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из тождества

$$\begin{aligned} & St_{n,1}^*(x) St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}^*(x) St_{n,1,a}(x) = \\ & = (St_{n,1}^*(x) - St_{n,1,a}^*(x)) St_{n,1}(x) + St_{n,1,a}^*(x) (St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}(x)) \end{aligned}$$

и неравенств (12.9, 12.10) леммы 12.1 следует неравенство

$$|St_{n,1}^*(x) St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}^*(x) St_{n,1,a}(x)| \leq \frac{2}{\ell} \eta_n^2 \exp(2\eta_n), \quad (12.13)$$

верное при всех $x \in [0, \ell]$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\ell St_{n,1}^*(x) St_{n,1}(x) dx - \int_0^\ell St_{n,1,a}^*(x) St_{n,1,a}(x) dx \right| \leq \\ & \leq \int_0^\ell |St_{n,1}^*(x) St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}^*(x) St_{n,1,a}(x)| dx \leq 2\eta_n^2 \exp(2\eta_n). \quad \diamond \end{aligned}$$

Вычислим матрицу $N_{n,1,a}$ с ошибкой $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ЛЕММА 12.3. Для матрицы

$$N_{n,1,1} \equiv N_{n,0} + \frac{1}{\ell\mu_n} (\text{si}((\ell-x)q(x), 2\mu_n)D - \text{co}((\ell-x)q(x), 2\mu_n)K_2) \quad (12.14)$$

(здесь матрица $D \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, матрица $K_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и использованы обозначения (10.17) при любом $n \in \mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$|N_{n,1,a} - N_{n,1,1}| \leq 2\eta_n \left(\eta_n + \frac{1}{\ell\mu_n} \right). \quad (12.15)$$

Доказательство. Так как матрица $St_{n,1,a}(x)$ имеет вид (12.2), то в обозначениях (11.42) справедливо равенство

$$\begin{aligned} St_{n,1,a}^*(x)St_{n,1,a}(x) = \\ = \frac{2}{\ell} F^* Cer_n(x)F + \frac{2}{\ell} F^* Th_{n,1}^*(x)F + \frac{2}{\ell} F^* Th_{n,1}(x)F + \\ + \frac{2}{\ell} F^* Th_{n,1}^*(x)Ced_n(x)F + \frac{2}{\ell} F^* Ced_n(x)Th_{n,1}(x)F + \\ + \frac{2}{\ell} F^* Th_{n,1}^*(x)Cer_n(x)Th_{n,1}(x)F. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Интегрируя равенство (12.16) и оценивая интегралы в правой части, убеждаемся в справедливости неравенства (12.15). \diamond

4. Упрощение нормирующего множителя $\alpha_{n,1}$ до величины $\alpha_{n,1,t}$.

ЛЕММА 12.4. При $d \geq d(0,008)$ справедливы неравенства

$$|\alpha_{n,1,t} - 1| \leq \frac{1}{2} \frac{v}{\mu_n} = \frac{1}{4} \eta_n \leq 0,004, \quad (12.17)$$

$$|\alpha_{n,1} - \alpha_{n,1,t}| \leq \frac{16,77b^2 + 4b}{(\ell\mu_n)^2}, \quad (12.18)$$

где $b \equiv \ell v$.

Доказательство. Согласно определяющей формуле (12.3)

$$|\alpha_{n,1,t} - 1| = \left| \frac{1}{2\ell\mu_n} \int_0^\ell (\ell-x)q(x) \sin(2\mu_n x) dx \cdot \sigma(D_0) \right| \leq \frac{1}{2\ell\mu_n} \ell v = \frac{1}{2} \frac{v}{\mu_n},$$

что доказывает (12.17).

Согласно леммам 12.2 и 12.3

$$\begin{aligned} |\langle N_{n,1}D_0, D_0 \rangle - \langle N_{n,1,1}D_0, D_0 \rangle| &\leq |N_{n,1} - N_{n,1,a}| + |N_{n,1,a} - N_{n,1,1}| \leq \\ &\leq 2\eta_n^2 \exp(2\eta_n) + 2\eta_n^2 + \frac{2\eta_n}{\ell\mu_n} = 2\eta_n^2(1 + \exp(2\eta_n)) + \frac{2\eta_n}{\ell\mu_n}. \end{aligned} \quad (12.19)$$

Применением утверждения 11.4 о свойствах функции $\text{squn}(x)$ устанавливается неравенство

$$\begin{aligned} |\alpha_{n,1} - \alpha_{n,1,t}| &= |(\alpha_{n,1} - \text{squn}(\langle N_{n,1,1}D_0, D_0 \rangle)) + \\ &+ (\text{squn}(\langle N_{n,1,1}D_0, D_0 \rangle) - \alpha_{n,1,t})| \leq 2\eta_n^2(1 + \exp(2\eta_n)) + \frac{2\eta_n}{\ell\mu_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\mu_n} \right)^2. \end{aligned} \quad (12.20)$$

Из (12.20) следует неравенство (12.18). \diamond

Леммы 12.1 и 12.4 позволяют нам доказать теорему 12.1.

5. Доказательство теоремы 12.1. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} y_{n,1}(x) - y_{n,1,a}(x) &= \alpha_{n,1}St_{n,1}(x)D_0 - \alpha_{n,1,t}St_{n,1,a}(x)D_0 = \\ &= (\alpha_{n,1} - \alpha_{n,1,t})St_{n,1}(x)D_0 + \alpha_{n,1,t}(St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}(x))D_0. \end{aligned} \quad (12.21)$$

Согласно леммам 12.1 и 12.4 верны неравенства

$$\begin{aligned} |y_{n,1}(x) - y_{n,1,a}(x)| &\leq \\ &\leq |\alpha_{n,1} - \alpha_{n,1,t}| |St_{n,1}(x)| |D_0| + |\alpha_{n,1,t}| |St_{n,1}(x) - St_{n,1,a}(x)| |D_0| \leq \\ &\leq \frac{16,77b^2 + 4b}{(\ell\mu_n)^2} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \exp(\eta_n) + 1,004 \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{1}{2} \eta_n^2 \exp(\eta_n) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{16,77b^2 + 4b + 2,008b^2}{(\ell\mu_n)^2} \exp(\eta_n) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{18,778b^2 + 4b}{(\ell\mu_n)^2} \exp(\eta_n). \end{aligned} \quad (12.22)$$

Согласно теореме 11.1 верно неравенство

$$|y_n(x) - y_{n,1}(x)| \leq 6 \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{161342}{4096} \gamma_n^2 = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{484026}{2048} \frac{b^2}{(\ell\mu_n - \frac{1}{4})^2}. \quad (12.23)$$

Из неравенств (12.22, 12.23), учитывая, что $n \geq d(0,008)$ получаем

$$|y_n(x) - y_{n,1,a}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(18,778 \cdot 1,017 + \frac{484026}{2048}) b^2 + 4 \cdot 1,017b}{(\ell\mu_n - \frac{1}{4})^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2 \cdot 255,4381b^2 + 4,068b}{\ell (\ell\mu_n - \frac{1}{4})^2}}.$$

Неравенство (12.4) теоремы 12.1 доказано. \diamond

6. Выделим из функции $y_{n,1,a}(x)$ нормированную собственную функцию вырожденной задачи $y_{n,0}(x)$.

Так как $Th_{n,0}(x) \equiv 0$ по определению, то

$$St_{n,0}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x\mu_n K_1) F$$

и

$$y_{n,0}(x) = St_{n,0}(x) D_0. \quad (12.24)$$

Выделим в равенствах (12.2) и (12.3) основные члены, т. е. положим $St_{n,1,a}(x) = St_{n,0}(x) + \Delta St_{n,1,a}(x)$, где

$$\Delta St_{n,1,a}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} B_1 \exp(x\mu_n K_1) Th_{n,1}(x) F \quad (12.25)$$

и $\alpha_{n,1,t} = 1 + \Delta\alpha_{n,1,t}$, где

$$\Delta\alpha_{n,1,t} \equiv -\frac{\sigma(D_0)}{2\ell\mu_n} \int_0^\ell (\ell - x) q(x) \sin(2x\mu_n) dx. \quad (12.26)$$

При этом согласно лемме 12.1 верны неравенства

$$|\Delta St_{n,1,a}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \eta_n \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \eta_n, \quad |\Delta\alpha_{n,1,t}| \leq \frac{1}{2\ell\mu_n} \ell v = \frac{1}{4} \eta_n. \quad (12.27)$$

С помощью введённых обозначений функция $y_{n,1,a}(x)$ может быть представлена в виде

$$y_{n,1,a}(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2\ell\mu_n} y_{n,1,0}(x) + \text{rey}_{n,1,a}(x), \quad (12.28)$$

где

$$y_{n,1,0}(x) \equiv 2\ell\mu_n (\Delta\alpha_{n,1,t} St_{n,0}(x) D_0 + \Delta St_{n,1,a}(x) D_0), \quad (12.29)$$

$$\text{rey}_{n,1,a}(x) \equiv \Delta\alpha_{n,1,t} \Delta St_{n,1,a}(x) D_0. \quad (12.30)$$

Причём согласно (12.27) при всех $n \in \mathbf{N}$ и всех $x \in [0, \ell]$ справедливо неравенство

$$|rey_{n,1,a}(x)| \leq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \eta_n^2. \quad (12.31)$$

Отбрасывая в формуле (12.28) последний член в правой части, введём следующую аппроксимацию собственной функции

$$y_{n,1,b}(x) \equiv y_{n,0}(x) + \frac{1}{2\ell\mu_n} y_{n,1,0}(x). \quad (12.32)$$

Введём матричную функцию

$$St_{n,1,0}(x) \equiv 2\ell\mu_n(\Delta\alpha_{n,1,t}St_{n,0}(x) + \Delta St_{n,1,a}(x)),$$

тогда справедливо представление $y_{n,1,0}(x) = St_{n,1,0}(x)D_0$.

На основании неравенства (12.31) справедлива следующая модификация теоремы 12.1.

ТЕОРЕМА 12.2. При $n \geq d(0,008)$ и $x \in [0, \ell]$ справедливо неравенство

$$|y_n(x) - y_{n,1,b}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{256,5b^2 + 4,1b}{(\ell\mu_n - \frac{1}{4})^2}, \quad (12.33)$$

где $y_n(x)$ – нормированная собственная функция задачи Штурма – Лиувилля с суммируемым потенциалом и граничными условиями первого или второго рода на каждом конце, а функция $y_{n,1,b}(x)$ задана формулами (12.24, 12.25, 12.26, 12.29, 12.32).

Выпишем теперь конкретный вид аппроксимаций $y_{n,1,b}(x)$ для собственных функций первой и второй краевых задач.

7. Первая краевая задача.

В этом случае $\mu_n = n\frac{\pi}{\ell}$, $D_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $y_{n,0}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(n\frac{\pi}{\ell}x)$,
 $\sigma(D_0) = -1$, $2\ell\mu_n r_{n,1} = -\int_0^\ell q(x) (1 - \cos(2n\frac{\pi}{\ell}x)) dx$, $y_{n,1,0}(x) =$
 $= \left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos(n\frac{\pi}{\ell}x) \right) \left[\ell \int_0^x q(t) dt - x \int_0^\ell q(t) dt + x \int_0^\ell q(t) \cos(2n\frac{\pi}{\ell}t) dt - \right.$
 $\left. - \ell \int_0^x q(t) \cos(2n\frac{\pi}{\ell}t) dt \right] - \left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(n\frac{\pi}{\ell}x) \right) \left[\ell \int_0^x q(t) \sin(2n\frac{\pi}{\ell}t) dt - \right.$

$$- \int_0^{\ell} (\ell - t) q(t) \sin \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) dt \Big]. \quad (12.34)$$

Аппроксимация собственной функции

$$y_{n,1,b}(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2n\pi} y_{n,1,0}(x). \quad (12.35)$$

Ошибка аппроксимации оценивается неравенством (12.33).

8. Вторая краевая задача.

В этом случае $\mu_n = n \frac{\pi}{\ell}$, $D_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y_{n,0}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \left(n \frac{\pi}{\ell} x \right)$,

$$\sigma(D_0) = 1, \quad 2\ell \mu_n r_{n,1} = - \int_0^{\ell} q(t) \left(1 + \cos \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) \right) dt,$$

$$\begin{aligned} y_{n,1,0}(x) = & \left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos \left(n \frac{\pi}{\ell} x \right) \right) \times \\ & \times \left[\ell \int_0^x q(t) \sin \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) dt - \int_0^{\ell} (\ell - t) q(t) \sin \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) dt \right] - \\ & - \left(\sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin \left(n \frac{\pi}{\ell} x \right) \right) \left[\ell \int_0^x q(t) dt - x \int_0^{\ell} q(t) dt - x \int_0^{\ell} q(t) \cos \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) dt + \right. \\ & \left. + \ell \int_0^x q(t) \cos \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right) dt \right]. \end{aligned} \quad (12.36)$$

Аппроксимация собственной функции имеет вид (12.35).

В случае, если функция $q(t)$ имеет ограниченную первую производную, интегралы в (12.36), содержащие $\cos \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right)$ и $\sin \left(2n \frac{\pi}{\ell} t \right)$ в подинтегральном выражении имеют порядок $O \left(\frac{1}{n} \right)$, поэтому получаем в случае $\ell = \pi$ следующее известное асимптотическое представление для собственной функции

$$\begin{aligned} y_n(x) = & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(nx) - \\ & - \frac{1}{2n\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \left[\pi \int_0^x q(t) dt - x \int_0^{\pi} q(t) dt \right] + O \left(\frac{1}{n^2} \right) \end{aligned} \quad (12.37)$$

на $[0, \pi]$, где $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ – равномерно по $x \in [0, \pi]$. Представление (12.37) имеется в монографии [5] на странице 23.

Литература

1. Винокуров В. А. Логарифм решения линейного дифференциального уравнения, формула Хаусдорфа и законы сохранения// Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. N 4. С. 792-797.
2. Садовничий В. А. Теория операторов. М. : Изд-во МГУ, 1986.
3. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М. : Наука, 1968.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М. : Наука, 1971.
5. Левитан Б. М., Саргсян И. С. Введение в спектральную теорию. М. : Наука, 1970.
6. Марченко В. А. Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения. Киев : 1977.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М. : Наука, 1974.
8. Ким Г., Хушев А. В. Метод Штурма – Лиувилля и проблема квазисвязанных состояний// Известия РАН. Серия физическая. 1996. N 5. С. 123-125.
9. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М. : Наука, 1967.
10. Рудин У. Функциональный анализ. М. : Мир, 1975.
11. Хорн Р., Джонсон И. Матричный анализ. М. : Мир, 1989.
12. Шварц Л. Анализ. Т. 1. М. : Мир, 1972.
13. Винокуров В. А. Явное решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения и основное свойство экспоненты// Дифференциальные уравнения. 1997. Т. 33. N 3. С.302-308.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. : Наука, 1968.