

УДК 517.925.44

Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье¹

В. А. Винокуров, В. А. Садовнический

В данной работе, опираясь на равномерную асимптотику собственных функций первой краевой задачи, полученную в наших предыдущих работах [1, 2], показывается, что сходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи не зависит от поведения потенциала. А именно, разность частных сумм рядов Фурье по собственным функциям возмущённой и невозмущённой краевых задач равномерно на всем отрезке стремится к нулю при возрастании номера частной суммы (теорема 1).

§ 1.

Следуя Аткинсону ([3, гл. 12]), перейдём от классической формы первой краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения $y'' + (\lambda + q(x))y = 0$ на отрезке $[0, \pi]$ и краевых условий $y(0) = 0$ и $y(\pi) = 0$ на концах отрезка, к обобщенной краевой задаче, состоящей из интегрального уравнения

$$z(x) = x - \int_0^{\pi} \nu(x-t)z(t) d(\sigma(t) + \lambda t), \quad x \in [0, \pi] \quad (1.1)$$

и краевого условия

$$z(\pi) = 0. \quad (1.2)$$

¹ Доклады РАН, 2001, том 380, № 6, с. 731-735.

В уравнениях (1.1–1.2) функция $\nu(\xi) \equiv \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0 \end{cases}$, $\sigma(x)$ — заданная вещественная функция ограниченной вариации, $z(t)$ — искомая непрерывная функция и $\lambda \in \mathbf{C}$ — искомое число. Если функция $q(x)$ непрерывна и вещественна и $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(\xi) d\xi$, то каждое непрерывное решение краевой задачи (1.1, 1.2) является собственной функцией классической краевой задачи, имеющей вторую непрерывную производную, и наоборот — каждая классическая собственная функция $y(x)$ первой краевой задачи, нормированная условием $y'(0) = 1$, является и решением краевой задачи (1.1–1.2) при том же значении числа λ . Далее здесь мы рассматриваем обобщенную краевую задачу (1.1–1.2).

Введем следующие классы вещественных функций, определенных на сегменте $[0, \pi]$: банахово пространство $C[0, \pi]$ непрерывных функций $y(x)$ с нормой $\|y\|_c \equiv \sup_{x \in [0, \pi]} |y(x)|$; банахово пространство $L_p[0, \pi]$, $p \in [1, \infty[$ суммируемых по Лебегу в p -той степени функций $q(x)$ с нормой $\|q\|_p \equiv (\int_0^\pi |q(x)|^p dx)^{1/p}$; линейное пространство $BV[0, \pi]$ функций ограниченной вариаций $\sigma(x)$ с преднормой $\|\sigma\|_v$, равной полной вариации функции $\sigma(x)$ на $[0, \pi]$; линейное подпространство $BV_c[0, \pi] \subset BV[0, \pi]$, состоящее из всех функций ограниченной вариации $\sigma(x)$, которые непрерывны справа в любой точке $x \in [0, \pi]$ и непрерывны в точках $x = 0$ и $x = \pi$.

В случае $\sigma(x) \in BV_c[0, \pi]$ Аткинсоном [3, гл. 12] было показано, что при любом $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ все собственные значения краевой задачи (1.1, 1.2) образуют последовательность вещественных чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, $n \in \mathbf{N}$, неограниченно возрастающую к бесконечности, каждое собственное значение λ_n имеет кратность 1 и соответствующая последовательность нормированных в $L_2[0, \pi]$ непрерывных собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$ образует полную ортонормированную систему в $L_2[0, \pi]$. Всюду далее в тексте предполагается, что $\sigma \in BV_c[0, \pi]$. В частном случае невозмущенной краевой задачи, т.е. когда $\sigma(x) \equiv 0$ на $[0, \pi]$, собственные значения и собственные функции известны и мы обозначаем их через $\lambda_{n,0} \equiv n^2$ и $y_{n,0}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$, $n \in \mathbf{N}$, соответственно. Цель данной статьи — доказательство равносходимости рядов Фурье по двум полным ортонормированным системам функций $\{y_{n,0}(x)\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n(x)\}_{n=1}^\infty$.

Пусть функция $f \in L_1[0, \pi]$, тогда для неё определены коэффи-

циенты Фурье $f_n \equiv \int_0^\pi f(x)y_n(x) dx$ и $f_{n,0} \equiv \int_0^\pi f(x)y_{n,0}(x) dx$ и частные суммы $S_m(f, x) \equiv \sum_{n=1}^m f_n y_n(x)$ и $S_{m,0}(f, x) \equiv \sum_{n=1}^m f_{n,0} y_{n,0}(x)$ двух рядов Фурье. Так как собственные функции $y_n(x)$ и $y_{n,0}(x)$ непрерывны, то и частные суммы $S_m(f, x)$ и $S_{m,0}(f, x)$ — непрерывные на $[0, \pi]$ функции. Справедлива следующая теорема о равносходимости рядов Фурье.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ и любой функции $f \in L_1[0, \pi]$ предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m(f, x) - S_{m,0}(f, x)\|_c = 0. \quad (1.3)$$

Функцию $f \in L_1[0, \pi]$ продолжим нечетно на интервал $] - \pi, 0[$, положив $f(x) = -f(-x)$ при $x \in] - \pi, 0[$, и затем определённую таким образом на $] - \pi, \pi]$ функцию продолжим до 2π -периодической функции $\bar{f}(x)$, определённой на всей вещественной прямой \mathbf{R} . Для так построенной 2π -периодической функции $\bar{f}(x)$ её тригонометрическая сумма Фурье равна

$$S_{m,t}(\bar{f}, x) \equiv \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(nx) = \quad (1.4)$$

$$\sum_{n=1}^m \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(nx) = \sum_{n=1}^m \left(\int_0^\pi f(\xi) y_{n,0}(\xi) d\xi \right) y_{n,0}(x)$$

и на сегменте $[0, \pi]$ совпадает с суммой Фурье $S_{m,0}(f, x)$, т.е.

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \left| S_{m,t}(\bar{f}, x) - S_{m,0}(f, x) \right| = 0. \quad (1.5)$$

Из равенства (1.5) и теоремы 1 вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ и любой функции $f \in L_1[0, \pi]$ предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m(f, x) - S_{m,t}(\bar{f}, x)\|_c = 0. \quad (1.6)$$

Соотношение (1.6) сводит вопрос о сходимости рядов по собственным функциям первой краевой задачи к соответствующим вопросам сходимости тригонометрического ряда Фурье. Отсюда, в частности, следует, что неулучшаемое достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье функции $f \in C[0, \pi]$ в терминах модуля непрерывности $\omega(\delta)$ функции $f(x)$ есть соотношение $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \ln(\delta) = 0$ при выполнении необходимого условия равномерной сходимости $f(0) = f(\pi) = 0$ (см. [4, теорема 10.3 и гл. 8, §2]).

§ 2. К истории вопроса.

Для случая классической первой краевой задачи с непрерывно дифференцируемой функцией $q(x)$ теорема 1 имеется в книге [5, теорема 9.1]. Равносходимость спектрального разложения на компактах, лежащих внутри интервала $]0, \pi[$, для функции $q(x) \in L_1[0, \pi]$ при различном виде краевых условий доказана В.А. Ильиным (см. [6, 7]). В.В. Жиковым в работе [8] получена асимптотика собственных функций с ошибкой $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ для обобщенного потенциала и краевых условий вида $y'(0) + hy(0) = 0$ и $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$, $h \in \mathbf{R}$, $H \in \mathbf{R}$ и сделано на основании этого замечание о равносходимости [8, стр. 971]. К сожалению, ввиду наличия арифметических ошибок при вычислении асимптотики собственных значений использование этой работы затруднено.

§ 3. Равномерная сходимость частных сумм

$S_m(y_n, x)$ и $S_{m,0}(y_n, x)$.

По построению частной суммы $S_m(f, x)$ ряда Фурье по ортонормированной системе $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ верно следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любого номера $n \in \mathbf{N}$ верно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_n(x) - S_m(y_n, x)\|_c = 0. \quad (3.1)$$

В самом деле, при $m \geq n$ верно $S_m(y_n, x) = y_n(x)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Для любого номера $n \in \mathbf{N}$ верно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|y_n(x) - S_{m,0}(y_n, x)\|_c = 0. \quad (3.2)$$

Доказательство утверждения 2. Если функция $z_n(x) \in C[0, \pi]$ решение интегрального уравнения (1.1), то она удовлетворяет на сегменте $[0, \pi]$ условию Липшица. Нормированная функция $y_n(x) = \frac{z_n(x)}{\|z_n\|_2}$ также удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[0, \pi]$. Так как функция $y_n(x)$ обращается в нуль в точках $x = 0$ и $x = \pi$, то её нечётное 2π -периодическое продолжение $\tilde{y}_n(x)$ есть функция, удовлетворяющая условию Липшица на всей действительной прямой \mathbf{R} . По признаку Дини-Липшица частные суммы тригонометрического ряда Фурье $S_{m,t}(\tilde{y}_n, x)$ сходятся равномерно к функции $\tilde{y}_n(x)$ на $[-\pi, \pi]$. Но при $x \in [0, \pi]$ верно $\tilde{y}_n(x) = y_n(x)$ и $S_{m,t}(\tilde{y}_n, x) = S_{m,0}(y_n, x)$. \diamond

Введём линейное подпространство непрерывных функций $\text{Lin}(\sigma) \subset C[0, \pi]$, состоящее из всех конечных линейных комбинаций собственных функций y_n , $n \in \mathbf{N}$. Введём отображение $B_m : L_1[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$, $m \in \mathbf{N}$, сопоставляющее каждой суммируемой функции $f \in L_1[0, \pi]$ разность двух сумм Фурье

$$B_m(f) \equiv S_m(f, x) - S_{m,0}(f, x). \quad (3.3)$$

Отображение B_m , $m \in \mathbf{N}$, по построению линейно.

Из утверждений 1 и 2 вытекает справедливость леммы.

ЛЕММА 1. Для всякой функции $f \in \text{Lin}(\sigma)$ верно

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|B_m(f)\|_c = 0. \quad (3.4)$$

§ 4. Приближенные формулы для собственных функций.

При данной функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ определим при каждом номере $n \in \mathbf{N}$ функцию

$$v_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cos(nx) \left[\pi \int_0^x (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) - x \int_0^\pi (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) \right] - \sin(nx) \left[\int_0^\pi \xi \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) - \pi \int_x^\pi \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) \right] \right\}. \quad (4.1)$$

Каждая функция $v_n(x)$ определена и непрерывна на $[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям $v_n(0) = v_n(\pi) = 0$. Введём функцию

$$w_n(x) \equiv n^2 \left(y_n(x) - \left(y_{n,0}(x) + \frac{1}{n} v_n(x) \right) \right). \quad (4.2)$$

Она также непрерывна на $[0, \pi]$ и удовлетворяет краевым условиям $w_n(0) = w_n(\pi) = 0$.

В нашей предыдущей работе [1, теорема 2] установлена справедливость следующего неравенства

$$\|w_n\|_c \leq n^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{(4,1b + 256,5b^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}}. \quad (4.3)$$

при $n \geq \frac{1}{\pi}(125b + \frac{1}{4})$, где $b \equiv \pi \|\sigma\|_v$. Из неравенства (4.3) следует, что существует число $C_1 > 0$, что верно утверждение

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \left| \|w_n\|_c \leq C_1. \right. \quad (4.4)$$

Из определяющей формулы (4.1) для функции $v_n(x)$ вытекает неравенство

$$\|v_n\|_c \leq 3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \|\sigma\|_v. \quad (4.5)$$

Для функции $y_{n,0}(x)$ верно неравенство

$$\|y_{n,0}\|_c \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \quad (4.6)$$

Из неравенств (4.4–4.6) вытекает справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 2. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ существует число $A > 0$, что для любого номера $n \in \mathbf{N}$ для функций $y_{n,0}(x)$, $v_n(x)$, $w_n(x)$ верны неравенства

$$\|y_{n,0}\|_c \leq A, \quad \|v_n\|_c \leq A, \quad \|w_n\|_c \leq A \quad (4.7)$$

и при $x \in [0, \pi]$ справедливо представление вида

$$y_n(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{n}v_n(x) + \frac{1}{n^2}w_n(x). \quad (4.8)$$

§ 5. Оценки некоторых тригонометрических сумм.

Известна следующая оценка сумм $\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nx)}{n}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. ([9, упражнение 1.4]) Для любого номера $n \in \mathbf{N}$ и любого числа $x \in \mathbf{R}$ верно неравенство

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin(nx)}{n} \right| \leq (\pi + 1). \quad (5.1)$$

ЛЕММА 3. Для любого числа $m \in \mathbf{N}$ и любых вещественных чисел α, β, γ справедливы неравенства

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\alpha) \cos(n\beta)}{n} \right| \leq (\pi + 1), \quad (5.2)$$

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\alpha) \cos(n\beta) \cos(n\gamma)}{n} \right| \leq (\pi + 1), \quad (5.3)$$

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\alpha) \sin(n\beta) \sin(n\gamma)}{n} \right| \leq (\pi + 1). \quad (5.4)$$

Справедливость леммы 3 вытекает из неравенства (5.1) и тригонометрических тождеств, выражающих произведения тригонометрических функций через суммы.

§ 6. Оценки нормы операторов B_m .

Согласно определяющей формуле (3.3) для линейного отображения $B_m : L_1[0, \pi] \rightarrow C[0, \pi]$ справедливо следующее интегральное представление

$$B_m(f)(x) = \sum_{n=1}^m \left(\int_0^\pi y_n(t) f(t) dt y_n(x) - \int_0^\pi y_{n,0}(t) f(t) dt y_{n,0}(x) \right). \quad (6.1)$$

Ядро интегрального оператора B_m

$$k_m(x, t) \equiv \sum_{n=1}^m (y_n(t) y_n(x) - y_{n,0}(t) y_{n,0}(x)) \quad (6.2)$$

является непрерывной в квадрате $[0, \pi] \times [0, \pi]$ функцией.

ТЕОРЕМА 2. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ существует число $C > 0$, что для любого $m \in \mathbf{N}$ и любых $x \in [0, \pi]$ и $t \in [0, \pi]$ верно неравенство

$$|k_m(x, t)| \leq C. \quad (6.3)$$

Доказательство теоремы 2. Согласно лемме 2 функция $k_m(x, t)$ может быть записана в виде:

$$k_m(x, t) = \sum_{n=1}^m \left(\left(y_{n,0}(t) + \frac{1}{n} v_n(t) + \frac{1}{n^2} w_n(t) \right) \left(y_{n,0}(x) + \frac{1}{n} v_n(x) + \frac{1}{n^2} w_n(x) \right) - y_{n,0}(t) y_{n,0}(x) \right). \quad (6.4)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 k_m(x, t) &= \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} y_{n,0}(t) v_n(x) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} y_{n,0}(x) v_n(t) \\
 &+ \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} (y_{n,0}(t) w_n(x) + v_n(t) v_n(x) + w_n(t) y_{n,0}(x)) \\
 &+ \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^3} (v_n(t) w_n(x) + w_n(t) v_n(x)) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} w_n(t) w_n(x).
 \end{aligned} \quad (6.5)$$

В силу леммы 2 справедливы неравенства:

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2} (y_{n,0}(t) w_n(x) + v_n(t) v_n(x) + w_n(t) y_{n,0}(x)) \right| \leq 3A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 6A^2, \quad (6.6)$$

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^3} (v_n(t) w_n(x) + w_n(t) v_n(x)) \right| \leq 2A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq 4A^2, \quad (6.7)$$

$$\left| \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^4} w_n(t) w_n(x) \right| \leq A^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \leq 2A^2. \quad (6.8)$$

ибо $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Рассмотрим сумму

$$Q_m(x, t) \equiv \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} y_{n,0}(t) v_n(x). \quad (6.9)$$

Используя определяющую формулу (4.1) для функции $v_n(x)$, сумму (6.9) запишем в виде

$$\begin{aligned}
 Q_m(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} \left\{ \sin(nt) \cos(nx) \left[\pi \int_0^x (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. x \int_0^\pi (1 - \cos(2n\xi)) d\sigma(\xi) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \sin(nt) \sin(nx) \left[\int_0^\pi \xi \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) - \pi \int_x^\pi \sin(2n\xi) d\sigma(\xi) \right] \right\}. \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 Q_m(x, t) = & \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nt) \cos(nx)}{n} \right) \cdot \left(\frac{1}{\pi} \int_0^x d\sigma(\xi) - \frac{x}{\pi^2} \int_0^\pi d\sigma(\xi) \right) \\
 & - \frac{1}{\pi} \int_0^x \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nt) \cos(nx) \cos(2n\xi)}{n} \right) d\sigma(\xi) \\
 & + \frac{x}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nt) \cos(nx) \cos(2n\xi)}{n} \right) d\sigma(\xi) \\
 & - \frac{1}{\pi^2} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nt) \sin(nx) \sin(2n\xi)}{n} \right) \xi d\sigma(\xi) \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_x^\pi \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(nt) \sin(nx) \sin(2n\xi)}{n} \right) d\sigma(\xi). \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

Применяя лемму 3 и оценивая интегралы в (6.11) по модулю, получаем неравенство

$$|Q_m(x, t)| \leq (\pi + 1) \frac{2\|\sigma\|_v}{\pi} + 4(\pi + 1) \frac{1}{\pi} \|\sigma\|_v = 6 \frac{(\pi + 1)}{\pi} \|\sigma\|_v. \quad (6.12)$$

Из неравенств (6.6–6.8), неравенства (6.12) и представления (6.5) получаем неравенство

$$|k_m(x, t)| \leq 12 \frac{(\pi + 1)}{\pi} \|\sigma\|_v + 12A^2, \quad (6.13)$$

доказывающее теорему 2 с константой $C \equiv 12 \left(\left(\frac{\pi+1}{\pi} \right) \|\sigma\|_v + A^2 \right)$. \diamond

§ 7. Доказательство теоремы 1.

Из теоремы 2 следует, что нормы линейных отображений B_m , $m \in \mathbf{N}$, ограничены в совокупности константой C . Так как система нормированных собственных функций $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ полна в $L_2[0, \pi]$ при любой функции $\sigma \in BV_c[0, \pi]$ (см. [3, теорема 12.10.2]), то линейное подпространство $\text{Lin}(\sigma)$ конечных линейных комбинаций собственных

функций всюду плотно в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$, а следовательно и в банаховом пространстве $L_1[0, \pi]$. Из леммы 1 и теоремы Банаха-Штейнхауса [10, с. 271] тогда вытекает, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|B_m(f)\|_c = 0$$

для любого элемента $f \in L_1[0, \pi]$.

Теорема 1 доказана. \diamond

Литература

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. // ДАН. 2001. Т. 376. № 4. С. 444-448.
2. Винокуров В.А., Садовничий В.А. // Известия АН. Серия математическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 47-108.
3. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
4. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1968. Т. 1.
5. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
6. Ильин В.А. // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21. № 3. С. 371-379.
7. Ильин В.А. Спектральная теория дифференциальных операторов. М.: Наука, 1991.
8. Жиков В.В. // Известия АН СССР. Серия математическая. 1967. Т. 31. С. 965-976.
9. Эдвардс Р. Ряды Фурье в современном изложении. М.: Мир, 1985. Т. 1.
10. Канторович Л.В. и Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.