

УДК 517.925.44

Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего δ -функции¹

В. А. Винокуров, В. А. Садовничий

Рассматривается первая краевая задача на отрезке $[0, \ell]$, состоящая из дифференциального уравнения

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0 \quad (0.1)$$

и краевых условий

$$y(0) = 0, \quad (0.2)$$

$$y(\ell) = 0. \quad (0.3)$$

Для случая вещественнозначной, суммируемой на $[0, \ell]$ функции $q(x)$ в нашей предыдущей работе [1] построены при любых $n = 1, 2, 3, \dots$ и $m = 0, 1, 2, \dots$ приближенные формулы вида

$$\lambda_n = \lambda_{n,m}(q) + \theta_{n,m}, \quad (0.4)$$

$$s_n = s_{n,m}(q) + \psi_{n,m}, \quad (0.5)$$

$$y_n(x) = y_{n,m}(q, x) + \Delta y_{n,m}(x). \quad (0.6)$$

Здесь λ_n – n -ное собственное значение; $s_n \equiv \sqrt{\lambda_n}$; $y_n(x)$ – n -ная нормированная собственная функция; $\lambda_{n,m}(q)$, $s_{n,m}(q)$, $y_{n,m}(q, x)$ – явно строящиеся через функцию $q(x)$ величины. В частности, $\lambda_{n,0} \equiv \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$ – собственные значения вырожденной задачи, $y_{n,0}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$ – нормированные собственные функции вырожденной задачи, $s_{n,0} \equiv \mu_n = \frac{n\pi}{\ell}$. Величины $\theta_{n,m}$, $\psi_{n,m}$, $\Delta y_{n,m}(x)$ удовлетворяют неравенствам:

$$|\theta_{n,m}| \leq C_{1,m} \cdot \frac{b}{\ell^2} (\gamma_n)^m, \quad (0.7)$$

¹Дифференциальные уравнения. 2002. Т.38. № 6. С. 735-751.

$$|\psi_{n,m}| \leq C_{2,m} \cdot \frac{1}{\ell} (\gamma_n)^{m+1}, \quad (0.8)$$

$$|\Delta y_{n,m}(x)| \leq C_{3,m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\ell}} (\gamma_n)^{m+1}, \quad (0.9)$$

где $\{C_{1,m}\}_{m=0}^{\infty}$ $\{C_{2,m}\}_{m=0}^{\infty}$ $\{C_{3,m}\}_{m=0}^{\infty}$ — предъявленные последовательности констант, число $b \equiv \ell \cdot \int_0^{\ell} |q(x)| dx$, числа $\gamma_n \equiv \frac{b}{n\pi - \frac{1}{4}}$.

Использование асимптотической формулы (0.4) с $m = 2$, позволило нам ранее в работе [4] обобщить формулу регуляризованного следа для случая суммируемых потенциалов в форме следующего равенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \left(\lambda_{n,0} - \int_0^{\ell} y_{n,0}^2(x) q(x) dx \right) \right) = 0 \quad (0.10)$$

со сходящимся рядом в левой части.

Оценки (0.7), (0.8), (0.9) ошибок аппроксимации приближенных формул (0.4, 0.5, 0.6) обладают тем свойством, что зависят лишь от нормы $\|q\|_1 \equiv \int_0^{\ell} |q(x)| dx$ функции q в пространстве $L_1[0, \ell]$. Рассматривая δ -функцию как предел последовательности "ступенек" с постоянным значением интеграла, мы можем перейти в приближенных формулах (0.4, 0.5, 0.6) к пределу с сохранением оценок типа (0.7, 0.8, 0.9) для ошибки аппроксимации. Исходя из данного замечания, мы в настоящей работе строим для случая $m = 2$ приближенные формулы типа (0.4, 0.5, 0.6) и обобщаем формулу регуляризованного следа типа (0.10) на класс потенциалов $q(x)$, которые могут содержать слагаемые в виде δ -функций.

§ 1. Постановка задачи

Введем следующие классы заданных на сегменте $[0, \ell]$ действительных функций: банахово пространство $C[0, \ell]$ непрерывных функций $y(x)$ с нормой $\|y\|_c \equiv \sup_{x \in [0, \ell]} |y(x)|$; банахово пространство $L_p[0, \ell]$, $p \in [1, \infty]$ суммируемых по Лебегу в p -той степени функции $q(x)$ с нормой $\|q\|_p \equiv \left(\int_0^{\ell} |q(x)|^p dx \right)^{1/p}$; линейное пространство $BV[0, \ell]$ функций

ограниченной вариаций $\sigma(x)$ с преднормой $\|\sigma\|_v$, равной полной вариации функции $\sigma(x)$ на $[0, \ell]$; линейное подпространство $BV_c[0, \ell] \subset BV[0, \ell]$, состоящее из всех функций ограниченной вариации $\sigma(x)$, которые непрерывны справа в любой точке $x \in [0, \ell]$ и непрерывны в точках $x = 0$ и $x = \ell$. Для функции $\sigma \in BV[0, \ell]$ введем величину

$$b = b(\sigma) \equiv \ell \cdot \|\sigma\|_v. \quad (1.1)$$

Перейдем теперь от краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения (0.1) и краевых условий (0.2, 0.3), к следующей краевой задаче, состоящей из интегрального уравнения

$$z(x) = x - \int_0^{\ell} \nu(x-t) z(t) d(\sigma(t) + \lambda t), \quad x \in [0, \ell] \quad (1.2)$$

и краевого условия

$$z(\ell) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\sigma \in BV[0, \ell]$ – заданная функция, функция $\nu(\xi) \equiv \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0, \end{cases}$ и требуется найти такое $\lambda \in \mathbf{C}$ и такую функцию $z \in C[0, \ell]$, чтобы выполнялись соотношения (1.2, 1.3). В случае, когда потенциал $q(x)$ – непрерывная функция и функция $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(t) dt$, каждое собственное значение краевой задачи (1.2, 1.3), является собственным значением краевой задачи (0.1, 0.2, 0.3) с собственной функцией $z(x)$ класса $C^{(2)}[0, \ell]$, удовлетворяющей условию $z'(0) = 1$. Тогда функция $y(x) = \frac{z(x)}{\|z\|_2}$ будет нормированной собственной функцией краевой задачи (0.1, 0.2, 0.3). Справедливо и обратное утверждение: если $y(x)$ собственная функция класса $C^{(2)}[0, \ell]$ краевой задачи (0.1, 0.2, 0.3) с собственным значением $\lambda \in \mathbf{C}$, удовлетворяющая условию $y'(0) = 1$, то $y(x)$ собственная функция краевой задачи (1.2, 1.3).

Далее, следуя ([5], глава 12), мы рассматриваем краевую задачу (1.2, 1.3) с функцией $\sigma(x)$ из пространства $BV_c[0, \ell]$. Аткинсоном установлено, что в этом случае краевая задача (1.2, 1.3) при любом $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ сохраняет следующие известные свойства краевой задачи (0.1, 0.2, 0.3) с непрерывным потенциалом $q(x)$. Все собственные значения краевой задачи (1.2, 1.3) вещественны, имеют кратность 1 и образуют монотонно возрастающую к бесконечности последовательность $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$. Соответствующая непрерывная

собственная функция $z_n(x)$ имеет ровно $n - 1$ нулей внутри интервала $]0, \ell[$. Последовательность нормированных собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, образует полную ортонормированную систему в $L_2[0, \ell]$. Аткинсоном получены асимптотические формулы вида (0.4, 0.5, 0.6) для $m = 0$. Мы будем использовать следующий результат Аткинсона.

ТЕОРЕМА 1. ([5], теоремы 12.8.1, 12.9.1.) Если $n > \frac{8b}{\pi}$, то на сегменте $[\mu_n - \frac{3}{4\ell}, \mu_n + \frac{3}{4\ell}]$, существует единственное значение спектрального параметра s_n краевой задачи (1.2, 1.3). Для соответствующей собственной функции $z_n(x)$ справедливо неравенство

$$\left| z_n(x) - \frac{1}{s_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \right| \leq \frac{21b}{s_n n \pi}.$$

§ 2. Формулировка основных результатов

Рассматривается задача на собственные значения (1.2, 1.3) при $\sigma \in BV_c[0, \ell]$. Введем следующие интегралы Радона от непрерывных функций

$$L_n(\sigma) \equiv \int_0^{\ell} y_{n,0}^2(x) d\sigma(x), \quad (2.1)$$

$$B_n(\sigma) \equiv \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (2.2)$$

Здесь $Q \equiv [0, \ell] \times [0, \ell]$ – квадрат, $k_n(\xi_1, \xi_2)$ – непрерывная в квадрате Q функция вида

$$\begin{aligned} k_n(\xi_1, \xi_2) \equiv & \frac{1}{4\pi n} [(1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) \cdot \frac{2}{\pi} \theta\left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_2\right) + \\ & + (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1) \cdot \frac{2}{\pi} \theta\left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_1\right) + \\ & + \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) ((1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) - \\ & - (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1))] , \end{aligned} \quad (2.3)$$

$\theta(t)$ – заданная на $[0, 2\pi]$ функция $\theta(t) \equiv \frac{1}{2}(\pi - t)$, $n \in \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. Если $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ и выполнено неравенство $n > \frac{1}{\pi} \left(\frac{681}{64}b + 1/4 \right)$, то справедливы представления

$$s_n(\sigma) = \mu_n - \frac{1}{2\mu_n}(L_n(\sigma) + B_n(\sigma)) + \psi'_{n,2}(\sigma), \quad (2.4)$$

$$\lambda_n(\sigma) = \lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma) + \nu'_{n,2}(\sigma) \quad (2.5)$$

и верны неравенства

$$|\psi'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{b^2(1 + 222b + b^2)}{\ell(n\pi - 1/4)^3}, \quad (2.6)$$

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{b^2(4,4 + 467b + 2b^2)}{\ell^2(n\pi - 1/4)^2}. \quad (2.7)$$

ТЕОРЕМА 3. Если $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ и выполнено неравенство $n \geq \frac{1}{\pi} (125b + 1/4)$, то для нормированной собственной функции справедливо при $x \in [0, \ell]$ представление

$$y_n(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2\pi n} y_{n,1,0}(x) + \Delta y_n(x), \quad (2.8)$$

где $y_{n,1,0}(x) \equiv$

$$\begin{aligned} & \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left\{ \cos(\mu_n x) \left[l \int_0^x (1 - \cos(2\mu_n \xi)) d\sigma(\xi) - x \int_0^l (1 - \cos(2\mu_n \xi)) d\sigma(\xi) \right] - \right. \\ & \quad \left. - \sin(\mu_n x) \left[\int_0^l \xi \sin(2\mu_n \xi) d\sigma(\xi) - l \int_x^l \sin(2\mu_n \xi) d\sigma(\xi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

и верно неравенство

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1b + 256,5b^2)}{(n\pi - 1/4)^2}. \quad (2.10)$$

Каждая функция ограниченной вариации $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ может иметь на $[0, \ell]$ не более счетного числа точек разрыва $x_i \in]0, \ell[$, $i \in I$, внутри интервала $]0, \ell[$, в которых существуют правый предел $\sigma(x_i + 0)$ и левый предел $\sigma(x_i - 0)$ и определена величина скачка $c_i \equiv \sigma(x_i + 0) - \sigma(x_i - 0)$. В силу ограниченности полной вариации функции σ ряд $\sum_{i \in I} |c_i|$ сходится (см. [6], с. 191, 192).

Справедлива следующая формула регуляризованного следа.

ТЕОРЕМА 4. Пусть функция $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ и $\{x_i\}_{i \in I} \subset]0, \ell[$ – множество её точек разрыва, а $c_i, i \in I$ – соответствующее значение её скачка в точке разрыва x_i , тогда следующие ряды сходятся и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma))) = -\frac{1}{8} \sum_{i \in I} c_i^2. \quad (2.11)$$

Причем в случае непрерывной функции $\sigma(x)$ множество $I = \emptyset$ и по определению полагается $\sum_{i \in \emptyset} c_i^2 \equiv 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Функция $\sigma(x)$ класса $BV_c[0, \ell]$ непрерывна на сегменте $[0, \ell]$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma))) = 0. \quad (2.12)$$

§ 3. Свойства интегрального оператора A_g

Для каждой вещественной функции $\varphi(x)$, заданной на сегменте $[0, \ell]$ определим величину

$$\text{lip}(\varphi) \equiv \sup_{\substack{\{x_1, x_2 \in [0, \ell], \\ x_1 < x_2\}}} \frac{|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)|}{x_2 - x_1}.$$

Если $L = \text{lip}(\varphi) < +\infty$, то функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на $[0, \ell]$ условию Липшица с константой L .

Фиксируем функцию $g \in BV[0, \ell]$ и введем линейный интегральный оператор на пространстве $C[0, \ell]$ непрерывных функций $\varphi(x)$ вида

$$(A_g \varphi)(x) \equiv \int_0^{\ell} \nu(x-t) \varphi(t) dg(t). \quad (3.1)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для любой функции $g \in BV[0, \ell]$ и любой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ верно неравенство

$$\text{lip}(A_g \varphi) \leq \|g\|_v \cdot \|\varphi\|_c. \quad (3.2)$$

Доказательство. Если $0 \leq x_1 < x_2 \leq \ell$, то

$$(A_g \varphi)(x_2) - (A_g \varphi)(x_1) = \int_0^{\ell} (\nu(x_2 - t) - \nu(x_1 - t)) \varphi(t) dg(t).$$

Так как $\text{lip}(\nu) \leq 1$, то для интеграла Стильтьеса имеем

$$\begin{aligned} |(A_g \varphi)(x_2) - (A_g \varphi)(x_1)| &\leq \left| \int_0^{\ell} (\nu(x_2 - t) - \nu(x_1 - t)) \varphi(t) dg(t) \right| \leq \\ &\leq |x_2 - x_1| \cdot \|\varphi\|_c \cdot \|g\|_v \cdot \diamond \end{aligned}$$

Поскольку для любой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ согласно определяющей формуле (3.1) верно $(A_g \varphi)(0) = 0$, то из неравенства (3.2) получаем следствие.

Следствие 2. Для любой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ верно неравенство

$$\|A_g \varphi\|_c \leq \ell \|g\|_v \cdot \|\varphi\|_c. \quad (3.3)$$

Поэтому формула (3.1) задает линейный непрерывный оператор $A_g : C[0, \ell] \rightarrow C[0, \ell]$ с нормой $\|A_g\| \leq \ell \cdot \|g\|_v \equiv b(g)$.

Напомним (см. [6], с. 77) следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in BV[0, \ell]$ существенно сходится к функции $g \in BV[0, \ell]$, если существует всюду плотное подмножество $X \subset [0, \ell]$, что во всякой точке $x \in X$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$ и существует число $M > 0$, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \left| \|g_n\|_v \leq M. \quad (3.4) \right.$$

Если последовательность $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in BV[0, \ell]$ сходится существенно к функции $g \in BV[0, \ell]$, то по теореме Хелли ([6], с. 75) для любой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ верно равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\ell} \varphi(x) dg_n(x) = \int_0^{\ell} \varphi(x) dg(x).$$

Применяя это свойство, мы приходим к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Если последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, $g_n \in BV[0, \ell]$ сходится существенно к функции $g \in BV[0, \ell]$, то для любой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ последовательность функций $\{A_{g_n} \varphi\}_{n=1}^{\infty} \subset C[0, \ell]$ сходится равномерно к функции $A_g \varphi \in C[0, \ell]$.

Доказательство. Так как последовательность $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset BV[0, \ell]$, сходится существенно к функции $g \in BV[0, \ell]$, то для $\varphi \in C[0, \ell]$ при каждом $x \in [0, \ell]$ последовательность интегралов $(A_{g_n}\varphi)(x)$ сходится к $(A_g\varphi)(x)$. В силу утверждения 1 последовательность функций $\{A_{g_n}\varphi\}_{n=1}^\infty \subset C[0, \ell]$ равномерно непрерывна. Но для равномерно непрерывного семейства функций из поточечной сходимости следует равномерная сходимость на компакте $[0, \ell]$ (см. [7], с. 306). \diamond

Из утверждения 2 получается следующая лемма.

ЛЕММА 1. Если последовательность функций $\{g_n\}_{n=1}^\infty \subset BV[0, \ell]$ существенно сходится к функции $g \in BV[0, \ell]$, а последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset C[0, \ell]$ равномерно сходится к функции $\varphi \in C[0, \ell]$, то последовательность функций $\{A_{g_n}\varphi_n\}_{n=1}^\infty \subset C[0, \ell]$ равномерно сходится к функции $A_g\varphi \in C[0, \ell]$.

Доказательство. В силу линейности интегрального оператора A_g верно равенство

$$A_{g_n}\varphi_n = A_{g_n}\varphi + A_{g_n}(\varphi_n - \varphi). \quad (3.5)$$

Согласно следствию 2 и неравенству (3.4) верны неравенства

$$\|A_g(\varphi_n - \varphi)\| \leq l\|g_n\|_v\|\varphi_n - \varphi\|_c \leq \ell \cdot M \cdot \|\varphi_n - \varphi\|_c,$$

т.е. последовательность функций $\{A_{g_n}(\varphi_n - \varphi)\}_{n=1}^\infty \subset C[0, \ell]$ равномерно сходится к нулю. Согласно утверждению 2 последовательность функций $\{A_{g_n}\varphi\}_{n=1}^\infty \subset C[0, \ell]$ равномерно сходится к функции $A_g\varphi \in C[0, \ell]$. Из представления (3.5) теперь следует утверждение леммы 1. \diamond

Рассмотрим при фиксированной функции $g \in BV[0, \ell]$ уравнение относительно функции $z \in C[0, \ell]$ вида

$$z = A_g z. \quad (3.6)$$

ЛЕММА 2. Для любой функции $g \in BV[0, \ell]$ уравнение (3.6) в пространстве непрерывных функций $z \in C[0, \ell]$ имеет лишь нулевое решение.

Доказательство. В случае $\|g\|_v = 0$ утверждение леммы очевидно, поэтому далее предполагаем, что $\|g\|_v > 0$. Пусть $z \in C[0, \ell]$ является непрерывным решением уравнения (3.6). Тогда $z(0) = 0$, ибо $\nu(x-t) = 0$ при $t \geq x$. Итак, существует непустой сегмент $[0, a] \subset [0, \ell]$ (возможно $a = 0$ и множество $[0, a] = \{0\}$ состоит из одной точки), что $z(t) = 0$ при $t \in [0, a]$.

Докажем следующее вспомогательное утверждение: если непрерывное решение $z(t)$ уравнения (3.6) обращается в нуль на сегменте $[0, a] \subset [0, \ell]$, то оно обращается в нуль на сегменте $[0, a + \delta] \cap [0, \ell]$, где $\delta = \frac{1}{2\|g\|_v}$.

В самом деле, если $x \in [0, a + \delta] \cap [0, \ell]$, то

$$\begin{aligned} |(A_g z)(x)| &= \left| \int_0^x \nu(x-t)z(t) dg(t) \right| = \left| \int_a^x \nu(x-t)z(t) dg(t) \right| \\ &\leq \delta \cdot \left(\sup_{t \in [0, a+\delta] \cap [0, \ell]} |z|(t) \right) \cdot \|g\|_v. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\left(\sup_{t \in [0, a+\delta] \cap [0, \ell]} |z|(t) \right) \leq \frac{1}{2} \left(\sup_{t \in [0, a+\delta] \cap [0, \ell]} |z|(t) \right)$$

и следовательно $z(x) = 0$ при всех $x \in [0, a + \delta] \cap [0, \ell]$. Вспомогательное утверждение доказано.

Применяя вспомогательное утверждение с $a = 0$, мы получаем, что $x(t) \equiv 0$ на множестве $[0, \delta] \cap [0, \ell]$. Применяя конечное число раз вспомогательное утверждение с $a = 0$, $a = \delta$, $a = 2\delta$, ..., мы убеждаемся, что $x(t) \equiv 0$ на $[0, \ell]$. \diamond

§ 4. Усреднение функции ограниченной вариации

Пусть $h(t)$ бесконечно дифференцируемая неотрицательная четная функция, заданная на действительной оси \mathbf{R} , равная нулю вне интервала $] -1, 1[$ и такая, что $\int_{\mathbf{R}} h(t) dt = 1$ (примеры таких функций см. [9], с.105). Для каждого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ определим функцию $h_\varepsilon(t) \equiv \frac{1}{\varepsilon} h(\frac{t}{\varepsilon})$. Каждую функцию ограниченной вариации $\sigma \in BV[0, \ell]$, заданную на $[0, \ell]$, продолжим до функции ограниченной вариации $\bar{\sigma}$, заданной на \mathbf{R} , положив $\bar{\sigma}(x) = \sigma(0)$ при $x < 0$ и $\sigma(l)$ при $x > l$. При каком продолжении полная вариация функции $\bar{\sigma}$ равна полной вариации функции σ . Определим для каждой функции $\sigma \in BV[0, \ell]$ и числа $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ функцию $\bar{\sigma}_\varepsilon(x) \equiv \int h_\varepsilon(t-x)\bar{\sigma}(t) dt$, $x \in \mathbf{R}$. Функция $\bar{\sigma}_\varepsilon(x)$ бесконечно дифференцируема на \mathbf{R} (см. [8], с.40). Сужение функции

$\bar{\sigma}_\varepsilon(x)$ на $[0, \ell]$ будем обозначать $\sigma_\varepsilon(x)$ и называть ε -усреднением функции $\sigma(x)$. По построению $\sigma_\varepsilon(x) \in BV_c[0, \ell]$.

Для данной функции $\sigma(x) \in BV[0, \ell]$ семейство функций $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \subset BV[0, \ell]$, обладает следующими свойствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Для любой функции $\sigma \in BV[0, \ell]$ и любого числа $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ верно неравенство $\|\sigma_\varepsilon\|_v \leq \|\sigma\|_v$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. Если $\sigma \in BV[0, \ell]$ и $x \in [0, \ell]$ — точка непрерывности функции $\sigma(x)$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon(x) = \sigma(x)$.

Утверждение 4 доказывается стандартными рассуждениями (см., например, [9], с. 110).

Доказательство утверждения 3. Пусть задано $n+1$ число $0 \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots x_n \leq \ell$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon(x_i) - \sigma_\varepsilon(x_{i-1}) &= \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(t - x_i) \bar{\sigma}(t) dt - \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(t - x_{i-1}) \bar{\sigma}(t) dt = \\ &= \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) \bar{\sigma}(\xi + x_i) d\xi - \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) \bar{\sigma}(\xi + x_{i-1}) d\xi = \\ &= \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) (\bar{\sigma}(\xi + x_i) - \bar{\sigma}(\xi + x_{i-1})) d\xi. \end{aligned}$$

В силу неотрицательности ядра $h_\varepsilon(\xi)$ для модуля разности получаем

$$|\sigma_\varepsilon(x_i) - \sigma_\varepsilon(x_{i-1})| \leq \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) |\bar{\sigma}(\xi + x_i) - \bar{\sigma}(\xi + x_{i-1})| d\xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\sigma_\varepsilon(x_i) - \sigma_\varepsilon(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) |\bar{\sigma}(\xi + x_i) - \bar{\sigma}(\xi + x_{i-1})| d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) \left(\sum_{i=1}^n |\bar{\sigma}(\xi + x_i) - \bar{\sigma}(\xi + x_{i-1})| \right) d\xi \leq \int_{\mathbf{R}} h_\varepsilon(\xi) \|\sigma\|_v d\xi = \|\sigma\|_v. \end{aligned}$$

◇

В дальнейшем мы будем опираться на следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть функция $q(x)$ класса $L_1[0, \ell]$ и функция $\sigma(x)$ имеет вид $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(\xi) d\xi, x \in [0, \ell]$. Тогда верно равенство $\|g\|_1 = \|\sigma\|_v$ (см. [15], с.240).

Вспоминая определение существенной сходимости последовательности функции ограниченной вариации из п. 3, мы извлекаем из утверждений 3 и 4 следующую лемму.

ЛЕММА 3. Для любой функции $\sigma \in BV[0, \ell]$ семейство усредненных функций $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существенно сходится к функции σ .

§ 5. Симметризация двойных интегралов

Пусть $Q \equiv [0, \ell] \times [0, \ell]$ квадрат с топологией произведения и $p: Q \rightarrow Q$ – отображение перестановки аргументов $p(\xi_1, \xi_2) \equiv (\xi_2, \xi_1)$. Тогда отображение $p: Q \rightarrow Q$ гомеоморфизм и $p(p(\xi_1, \xi_2)) = (\xi_1, \xi_2)$, т.е. суперпозиция $p \circ p \equiv i$ есть тождественное отображение квадрата Q на себя. Пусть $F(Q)$ линейное пространство вещественно-значных отображений $\varphi: Q \rightarrow \mathbf{R}$. Тогда отображение $p: Q \rightarrow Q$ порождает линейное отображение $P: F(Q) \rightarrow F(Q)$ по правилу: если $\psi = P(\varphi)$, то $\psi(\xi_1, \xi_2) \equiv \varphi(p(\xi_2, \xi_1))$. Отображение P назовем оператором перестановки аргументов. Так как $p \circ p = i$ то $PP = E$ – тождественное отображение. Сужение P_c линейного оператора P на линейное пространство $C(Q) \subset F(Q)$ непрерывных функций является линейным изометрическим изоморфизмом банахова пространства $C(Q)$ на себя. Пусть $D \subset C(Q)$ линейное подпространство всех непрерывных функций $f(\xi_1, \xi_2)$ вида

$$f(\xi_1, \xi_2) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(\xi_1) \psi_k(\xi_2), \quad (5.1)$$

то есть представимых в виде линейных комбинаций произведений $\varphi_k(\xi_1) \psi_k(\xi_2)$ непрерывных функций $\varphi_k \in C[0, \ell]$, $\psi_k \in C[0, \ell]$ с коэффициентами $c_k \in \mathbf{R}$. Линейное подпространство D всюду плотно в банаховом пространстве $C(Q)$ (см. [11], с.70). Линейное отображение P_c обладает свойством $P_c(D) = D$.

Пусть теперь задана функция ограниченной вариации $\sigma \in BV[0, \ell]$.

Тогда интеграл Стильеса $\int_0^\ell \varphi(\xi) d\sigma(\xi)$ определен на каждой функции $\varphi \in C[0, \ell]$ и задает непрерывное линейное отображение $\mu_\sigma : C[0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$, т.е. меру (см. [11], с. 21). Эта мера может быть продолжена с класса непрерывных функций $C[0, \ell]$ на более широкий класс функций $L_{1, \mu_\sigma}[0, \ell]$, интегрируемых по Лебегу-Стильесу. Если заданы две функции $\sigma_1 \in BV[0, \ell]$ и $\sigma_2 \in BV[0, \ell]$, то по мерам $\mu_1 \equiv \mu_{\sigma_1}$ и $\mu_2 \equiv \mu_{\sigma_2}$ однозначно определяется мера-произведение $\mu : C[0, \ell] \times C[0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$ (см. [11], с.72), которую мы будем записывать для функции $f \in C(Q)$ в виде $\iint_Q f(\xi_1, \xi_2) d\sigma_1(\xi_1) d\sigma_2(\xi_2)$. По построению меры-произведения для любой функции $f \in D$, т.е. непрерывной функции $f(\xi_1, \xi_2)$ вида (5.1) верно равенство

$$\begin{aligned} \iint_Q \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(\xi_1) \psi_k(\xi_2) d\sigma_1(\xi_1) d\sigma_2(\xi_2) = \\ = \sum_{k=1}^n c_k \left(\int_0^\ell \varphi_k(\xi_1) d\sigma_1(\xi_1) \right) \left(\int_0^\ell \psi_k(\xi_2) d\sigma_2(\xi_2) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ и мера $\mu : C(Q) \rightarrow \mathbf{R}$ есть произведение меры μ_σ на себя. В этом случае для функции $f \in D$ вида (5.1) действие оператора перестановки аргументов имеет вид

$$P \left(\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(\xi_1) \psi_k(\xi_2) \right) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(\xi_2) \psi_k(\xi_1).$$

Поэтому согласно формуле (5.2) при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ для $f \in D$ получаем

$$\iint_Q f d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = \sum_{k=1}^n c_k \left(\int_0^\ell \varphi_k(\xi_1) d\sigma(\xi_1) \right) \left(\int_0^\ell \psi_k(\xi_2) d\sigma(\xi_2) \right)$$

и

$$\iint_Q Pf d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = \sum_{k=1}^n c_k \left(\int_0^\ell \psi_k(\xi_1) d\sigma(\xi_1) \right) \left(\int_0^\ell \varphi_k(\xi_2) d\sigma(\xi_2) \right),$$

т.е. для любой функции $f \in D$ равны интегралы

$$\iint_Q (Pf) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = \iint_Q f d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (5.3)$$

Поскольку линейное пространство D всюду плотно в банаховом пространстве $C(Q)$, то равенство (5.3) продолжается по непрерывности и на все функции $f \in C(Q)$. Но если мера μ , равная произведению мер μ_σ на μ_ρ , и мера μ_p , действующая на $f \in C(Q)$ по правилу $\mu_p(f) = \mu(Pf)$, совпадают на пространстве непрерывных функций $C(Q)$, то совпадают и их продолжения на класс суммируемых функций. Итак, равенство (5.3) верно для любой функции $f \in L_{1,\mu}(Q)$ и оператор линейного изоморфизма $P_c : C(Q) \rightarrow C(Q)$ продолжается до оператора линейного изоморфизма $\bar{P}_c : L_{1,\mu}(Q) \rightarrow L_{1,\mu}(Q)$ банахова пространства $L_{1,\mu}(Q)$ на себя.

Введем оператор симметризации $S = \frac{1}{2}(E + P)$. Тогда в силу проведенных рассуждений верна лемма.

ЛЕММА 4. Если существует интеграл $\iint_Q f(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2)$, то существует и интеграл $\iint_Q (Sf)(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2)$ и они равны.

Заданную на квадрате Q вещественную функцию f назовем *симметричной*, если $Pf = f$ и *антисимметричной*, если $Pf = -f$.

Нам потребуется также следующее свойство двойных интегралов.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Пусть последовательности функций $\{\sigma_{1,n}\}_{n=1}^\infty \subset BV[0, \ell]$ и $\{\sigma_{2,n}\}_{n=1}^\infty \subset BV[0, \ell]$ существенно сходятся к функциям $\sigma_1 \in BV[0, \ell]$ и $\sigma_2 \in BV[0, \ell]$ соответственно. Тогда для любой непрерывной функции $f \in C(Q)$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_Q f(\xi_1, \xi_2) d\sigma_{1,n}(\xi_1) d\sigma_{2,n}(\xi_2) = \iint_Q f(\xi_1, \xi_2) d\sigma_1(\xi_1) d\sigma_2(\xi_2).$$

Данное утверждение следует из широкой непрерывности меры произведения μ относительно мер μ_{σ_1} и μ_{σ_2} на ограниченных подмножествах мер (см. [11], с.78).

§ 6. Существование пределов $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_n(\sigma_\varepsilon)$ и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_n(\sigma_\varepsilon)$

Возьмем функцию $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ и номер n такой, чтобы выполнялось неравенство

$$n > \frac{8b(\sigma)}{\pi}, \quad (6.1)$$

где $b(\sigma)$ задаётся формулой (1.1). Тогда для любого $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ верно $b(\sigma_\varepsilon) \leq b(\sigma)$ по утверждению 3, поэтому выполнено и неравенство $n > \frac{8b(\sigma_\varepsilon)}{\pi}$. Согласно теореме 0 Аткинсона для функций σ и σ_ε существуют единственные значения спектрального параметра $s_n(\sigma)$ и $s_n(\sigma_\varepsilon)$ на интервале $I_n \equiv [\mu_n - \frac{3}{4\ell}, \mu_n + \frac{3}{4\ell}]$. Соответствующие собственные функции обозначим $z_n(\sigma) \in C[0, \ell]$ и $z_n(\sigma_\varepsilon) \in C[0, \ell]$. Из включений $s_n(\sigma) \in I_n$ и $s_n(\sigma_\varepsilon) \in I_n$ следует, что собственные значения удовлетворяют неравенствам $\lambda_n(\sigma) \leq (\mu_n + \frac{3}{4\ell})^2$, $\lambda_n(\sigma_\varepsilon) \leq (\mu_n + \frac{3}{4\ell})^2$. Тогда для функций $g(t) \equiv \sigma(t) + \lambda_n(\sigma)t$ и $g_\varepsilon(t) \equiv \sigma_\varepsilon(t) + \lambda_n(\sigma_\varepsilon)t$ верны неравенства $\|g\|_v \leq q_n$, $\|g_\varepsilon\|_v \leq q_n$, где положительные числа $q_n \equiv \|\sigma\|_v + (\mu_n + \frac{3}{4\ell})^2 \ell$. Тогда для решений $z_n(\sigma)$ и $z_n(\sigma_\varepsilon)$ краевой задачи (1.2, 1.3) согласно теореме 0 справедливы неравенства $\|z_n(\sigma)\|_c \leq p_n$, $\|z_n(\sigma_\varepsilon)\|_c \leq p_n$, где положительные числа

$$p_n \equiv \left(1 + \frac{21b(\sigma)}{n\pi}\right) / \left(\mu_n - \frac{3}{4\ell}\right).$$

Функции $z_n(\sigma_\varepsilon)$ и $z_n(\sigma)$ – решения интегрального уравнения (1.2), поэтому по утверждению 1 верны неравенства

$$\text{lip}(z_n(\sigma_\varepsilon)) \leq 1 + \text{lip}(A_{g_\varepsilon} z_n(\sigma_\varepsilon)) \leq 1 + \|g_\varepsilon\|_v \|z_n(\sigma_\varepsilon)\|_c \leq 1 + q_n p_n$$

и

$$\text{lip}(z_n(\sigma)) \leq 1 + q_n p_n.$$

Введем в банаховом пространстве непрерывных функций $C[0, \ell]$ следующее подмножество

$$K_n \equiv \{z \in C[0, \ell] \mid (\|z\|_c \leq p_n) \wedge (\text{lip}(z) \leq 1 + q_n p_n)\}.$$

По теореме Арцела подмножество $K_n \subset C[0, \ell]$ есть компакт (см. [10], с.106).

Пользуясь тем, что при $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ величина $s_n(\sigma_\varepsilon)$ лежит в компакте I_n , а величина $z_n(\sigma_\varepsilon)$ лежит в компакте K_n , мы теперь докажем следующую лемму.

ЛЕММА 5. Если выполнено неравенство (6.1), то существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |s_n(\sigma_\varepsilon) - s_n(\sigma)| = 0, \quad (6.2)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|z_n(\sigma_\varepsilon) - z_n(\sigma)\|_c = 0. \quad (6.3)$$

Доказательство. Рассмотрим произведение компактов $I_n \times K_n$ и введем на этом произведении расстояние

$$\rho((a_1, z_1), (a_2, z_2)) = |a_1 - a_2| + \|z_1 - z_2\|_c,$$

если $a_1, a_2 \in I_n$ и $z_1, z_2 \in K_n$. Предположим противное к заключению леммы 4, тогда предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho((s_n(\sigma_\varepsilon), z_n(\sigma_\varepsilon)), ((s_n(\sigma), z_n(\sigma))))$ не существует или не равен нулю. Тогда найдутся число $\delta > 0$ и последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к нулю, такие что

$$\forall k \in \mathbf{N} \quad \left| \rho((s_n(\sigma_{\varepsilon_k}), z_n(\sigma_{\varepsilon_k})), ((s_n(\sigma), z_n(\sigma)))) \right| \geq \delta.$$

Так как при любом $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ величина $(s_n(\sigma_{\varepsilon_k}), z_n(\sigma_{\varepsilon_k}))$ принадлежит компакту $I_n \times K_n$, то из последовательности $\{(s_n(\sigma_{\varepsilon_k}), z_n(\sigma_{\varepsilon_k}))\}_{k=1}^\infty \subset I_n \times K_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Итак, существует последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, сходящаяся к нулю, что верно

$$\forall m \in \mathbf{N} \quad \left| \rho((s_n(\sigma_{\varepsilon_m}), z_n(\sigma_{\varepsilon_m})), ((s_n(\sigma), z_n(\sigma)))) \right| \geq \delta \quad (6.4)$$

и последовательность $(s_n(\sigma_{\varepsilon_m}), z_n(\sigma_{\varepsilon_m}))_{m=1}^\infty \subset I_n \times K_n$ сходятся в компакте $I_n \times K_n$ к некоторой точке $(\tilde{s}_n, \tilde{z}_n) \in I_n \times K_n$. Так как последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$ сходится к нулю, последовательность функций $\{\sigma_{\varepsilon_m}\}_{m=1}^\infty \subset BV[0, \ell]$ по лемме 3 существенно сходится к функции $\sigma \in BV[0, \ell]$. Так как предел $\lim_{m \rightarrow \infty} s_n(\sigma_{\varepsilon_m}) = \tilde{s}_n$, то $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda(\sigma_{\varepsilon_m}) = \tilde{s}_n^2 = \tilde{\lambda}_n$. Таким образом последовательность функций ограниченной вариации $g_m(t) \equiv \sigma_{\varepsilon_m}(t) + \lambda_n(\sigma_{\varepsilon_m})t$, $m \in \mathbf{N}$ существенно сходится к функции $\tilde{g}(t) \equiv \sigma(t) + \tilde{\lambda}_n t$.

При каждом $m \in \mathbf{N}$ выполнено уравнение (1.2), т.е.

$$z_n(\sigma_{\varepsilon_m})(x) = x - (A_{g_m} z_n(\sigma_{\varepsilon_m}))(x), \quad x \in [0, \ell]. \quad (6.5)$$

По лемме 1 существует предел в пространстве $C[0, \ell]$ вида

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|A_{g_m} z_n(\sigma_{\varepsilon_m}) - A_{\tilde{g}} \tilde{z}_n\|_c = 0.$$

По построению существует предел в пространстве $C[0, \ell]$ вида

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|z_n(\sigma_{\varepsilon_m}) - \tilde{z}_n\|_c = 0.$$

Таким образом, переходя к пределу в уравнении (6.5), мы получаем уравнение $\tilde{z}_n(x) = x - (A_{\tilde{g}} \tilde{z}_n)(x)$. Поскольку по условию $z_n(\sigma_{\varepsilon_m})(\ell) = 0$,

$m \in \mathbf{N}$, то и для предельной функции верно равенство $\tilde{z}_n(\ell) = 0$. Итак, \tilde{s}_n – собственное значение спектрального параметра, а \tilde{z}_n – собственная функция задачи. Но согласно теореме 0 на отрезке I_n существует лишь одно значение спектрального параметра $s_n(\sigma)$, поэтому $\tilde{s}_n = s_n(\sigma)$.

Итак, выполняются уравнения

$$z_n(\sigma)(x) = x - \int_0^{\ell} \nu(x-t) z_n(\sigma)(t) d(\sigma(t) + \lambda_n(\sigma) \cdot t), \quad (6.6)$$

$$\tilde{z}_n(x) = x - \int_0^{\ell} \nu(x-t) \tilde{z}_n(t) d(\sigma(t) + \lambda_n(\sigma) \cdot t) \quad (6.7)$$

при $x \in [0, \ell]$. Вычитая уравнения (6.6, 6.7), получаем линейное уравнение

$$(\tilde{z}_n - z_n(\sigma))(x) = \int_0^{\ell} \nu(x-t) (\tilde{z}_n - z_n(\sigma))(t) d(-(\sigma(t) + \lambda_n(\sigma) \cdot t)), \quad x \in [0, \ell].$$

Из леммы 2 тогда следует, что $\tilde{z}_n = z_n(\sigma)$. С другой стороны, из соотношения (6.4) следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho((s_n(\sigma_{\varepsilon_m}), z_n(\sigma_{\varepsilon_m})), (s_n(\sigma), z_n(\sigma))) = \\ = \rho((\tilde{s}_n, \tilde{z}_n), (s_n(\sigma), z_n(\sigma))) \geq \delta, \end{aligned}$$

в противоречии с равенствами $\tilde{s}_n = s_n(\sigma)$ и $\tilde{z}_n = z_n(\sigma)$. Полученное противоречие доказывает лемму 4. \diamond

СЛЕДСТВИЕ 3. Если выполнено неравенство (6.1), то существуют пределы собственных значений $\lambda_n(\sigma_\varepsilon)$ и нормированных собственных функций $y_n(\sigma_\varepsilon)$ вида

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |\lambda_n(\sigma_\varepsilon) - \lambda_n(\sigma)| = 0, \quad (6.8)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|y_n(\sigma_\varepsilon) - y_n(\sigma)\|_c = 0. \quad (6.9)$$

§ 7. Приближенные формулы второго порядка для собственных значений

Рассмотрим сначала случай суммируемого потенциала, то есть $q \in L_1[0, \ell]$ и $\sigma(x) = \int_0^x q(t) dt$ — абсолютно непрерывная функция. В предположении, что

$$n > \frac{1}{\pi} \left(\frac{681}{64} b + \frac{1}{4} \right) \quad (7.1)$$

на сегменте I_n существует согласно теореме 0 единственное значение спектрального параметра s_n и для него в наших работах [1], [3] были получены приближенные формулы, из которых, в частности, следуют представления

$$s_n = \mu_n - \frac{1}{2\mu_n} (L_n + B_n) + \psi'_{n,2}, \quad (7.2)$$

$$\lambda_n = \lambda_{n,0} - (L_n + B_n) + \nu'_{n,2}. \quad (7.3)$$

Здесь величины L_n и B_n по определению равны

$$L_n \equiv \int_0^\ell y_{n,0}^2(x) q(x) dx, \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} B_n \equiv & \frac{1}{2\mu_n \ell} \left(\left(\frac{1}{\ell} \int_0^\ell (1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) q(\xi_1) d\xi_1 \right) \times \right. \\ & \times \left(\int_0^\ell (\ell - 2\xi_2) \sin(2\mu_n \xi_2) q(\xi_2) d\xi_2 \right) + \\ & \left. + \int_0^\ell \int_0^\ell \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) (1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right), \quad (7.5) \end{aligned}$$

а для величин $\psi'_{n,2}$ и $\nu'_{n,2}$ справедливы оценки

$$|\psi'_{n,2}| \leq \frac{b^2}{\ell \left(n\pi - \frac{1}{4} \right)^3} (1 + 222b + b^2), \quad (7.6)$$

$$|\nu'_{n,2}| \leq \frac{b^2 (4,4 + 467b + 2b^2)}{\ell^2 (n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (7.7)$$

Теперь наша задача – преобразовать формулу (7.3) к виду, допускающему переход от абсолютно непрерывной функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ к произвольной функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$. Для этого мы предварительно запишем выражения L_n и B_n как интегралы Стильтьеса от непрерывных функций.

Введем функцию $\theta(t)$, определенную и непрерывную на $[0, 2\pi]$, вида $\theta(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Введем определенную на всей прямой \mathbf{R} 2π -периодическую функцию $\theta_0(t)$, представимую сходящимся в каждой точке $t \in \mathbf{R}$ рядом

$$\theta_0(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}. \quad (7.8)$$

Функция

$$\theta_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - t), & t \in]0, 2\pi[, \\ 0, & t = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad (7.9)$$

(см. [12], с. 10). Частные суммы ряда (7.8) равномерно ограничены, т.е. существует число $M > 0$, что

$$\forall t \in \mathbf{R} \quad \forall m \in \mathbf{N} \quad \left| \sum_{n=1}^m \frac{\sin nt}{n} \right| \leq M. \quad (7.10)$$

На интервале $]0, 2\pi[$ функция $\theta_0(t)$ совпадает с непрерывной функцией $\theta(t)$, но в точке $t = 0$ функция $\theta_0(0) = 0$, а функция $\theta(0) = \frac{\pi}{2}$.

Во введенных обозначениях при $\xi_2 \in [0, \ell]$ верно равенство $\ell - 2\xi_2 = \frac{2\ell}{\pi} \cdot \frac{1}{2} (\pi - 2\frac{\pi}{\ell}\xi_2) = \frac{2\ell}{\pi} \theta(2\frac{\pi}{\ell}\xi_2)$.

Вернемся к формуле (7.5) и запишем величину B_n в виде двойного интеграла

$$\iint_Q k'_n(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.11)$$

с ядром

$$k'_n(\xi_1, \xi_2) \equiv \frac{1}{2\pi n} \left[(1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) \frac{2}{\pi} \theta\left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_2\right) + \right. \\ \left. (1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) \operatorname{sign}(\xi_2 - \xi_1) \right]. \quad (7.12)$$

Так как функция $\text{sign}(\xi_2 - \xi_1)$ разрывна на диагонали квадрата Q , то функция $k'_n(\xi_1, \xi_2)$ также разрывна на диагонали квадрата Q . Воспользуемся леммой 4 о симметризации, согласно которой интеграл (7.11) равен интегралу

$$B_n = \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \quad (7.13)$$

с непрерывным ядром

$$\begin{aligned} k_n(\xi_1, \xi_2) &\equiv \frac{1}{2}(k'_n(\xi_1, \xi_2) + k'_n(\xi_2, \xi_1)) = \\ &= \frac{1}{4n\pi} \left[(1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1) \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_1 \right) \right] \\ &\quad + \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) ((1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) - (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1)). \end{aligned} \quad (7.14)$$

Так как функция $q \in L_1[0, \ell]$, а функция $y_{n,0} \in C[0, \ell]$, интеграл Лебега (7.4) может быть записан как интеграл Стильтьеса

$$L_n(\sigma) = \int_0^\ell y_{n,0}^2(x) d\sigma(x) \quad (7.15)$$

по абсолютно непрерывной функции ограниченной вариации $\sigma(x) = \int_0^x q(\xi) d\xi$ (см. [15], с. 249).

По теореме Фубини (см. [11], с. 107) интеграл (7.13) может быть записан в виде повторного

$$B_n = \int_0^\ell \left(\int_0^\ell k_n(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) d\xi_1 \right) q(\xi_2) d\xi_2. \quad (7.16)$$

Так как ядро $k_n(\xi_1, \xi_2)$ непрерывно в квадрате Q , для любого $\xi_2 \in [0, \ell]$ верно равенство интегралов Лебега и Стильтьеса

$$h(\xi_2) \equiv \int_0^\ell k_n(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) d\xi_1 = \int_0^\ell k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1), \quad (7.17)$$

причем функция $h(\xi_2)$ непрерывна на $[0, \ell]$ (см. [11], с. 106).

Тогда

$$B_n = \int_0^\ell h(\xi_2) q(\xi_2) d\xi_2 = \int_0^\ell h(\xi_2) d\sigma(\xi_2). \quad (7.18)$$

Итак, из (7.16, 7.17, 7.18) получаем представление

$$B_n(\sigma) = \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) \quad (7.19)$$

величины B_n как двойного интеграла Радона от непрерывной функции $k_n(\xi_1, \xi_2)$ по произведению мер Радона.

Итак, в случае если функция $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ абсолютно непрерывна, и выполнено неравенство (7.1), справедливо следующее представление собственного значения

$$\lambda_n(\sigma) = \lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma) + \nu'_{n,2}(\sigma), \quad (7.20)$$

где $L_n(\sigma)$ задается формулой (7.15), $B_n(\sigma)$ – формулой (7.19), а величины $\nu'_{n,2}(\sigma)$ удовлетворяют неравенству (7.7).

Пусть теперь $\sigma(x)$ – функция класса $BV_c[0, \ell]$, такая, что выполнено неравенство (7.1). Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ функция $\sigma_\varepsilon(x)$ абсолютно непрерывна и согласно утверждению 3 удовлетворяет неравенству

$$b(\sigma_\varepsilon) \equiv \ell \cdot \|\sigma_\varepsilon\|_v \leq \ell \cdot \|\sigma\|_v \equiv b(\sigma) = b. \quad (7.21)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ верно представление

$$\lambda_n(\sigma_\varepsilon) = \lambda_{n,0} - L_n(\sigma_\varepsilon) - B_n(\sigma_\varepsilon) + \nu'_{n,2}(\sigma_\varepsilon), \quad (7.22)$$

где

$$|\nu'_{n,2}(\sigma_\varepsilon)| \leq \frac{b^2(4,4 + 467b + 2b^2)}{\ell^2(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (7.23)$$

Согласно следствию 3 существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_n(\sigma_\varepsilon) = \lambda_n(\sigma)$. Согласно лемме 3 при $\varepsilon \rightarrow 0$ семейство функций $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \subset BV_c[0, \ell]$ сходится существенно к функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$. Тогда по теореме Хелли (см. [6], с. 75) существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_n(\sigma_\varepsilon) = L_n(\sigma) \quad (7.24)$$

и по утверждению 5 существует предел

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_n(\sigma_\varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma_\varepsilon(\xi_1) d\sigma_\varepsilon(\xi_2) = \\ &= \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = B_n(\sigma). \end{aligned} \quad (7.25)$$

В силу представления (7.22) тогда существует и предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nu'_{n,2}(\sigma_\varepsilon) \equiv \nu'_{n,2}(\sigma)$, причем в силу неравенства (7.23) сохраняется неравенство

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{b^2(4,4 + 467b + 2b^2)}{\ell^2(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (7.26)$$

Итак, мы получили представление (7.20) и неравенство (7.26) для случая, когда $\sigma \in BV_c[0, \ell]$.

Аналогичным рассуждением представление (7.2) переносится с класса абсолютно непрерывных функций $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ на произвольную функцию класса $BV_c[0, \ell]$.

Таким образом доказана теорема 2.

§ 8. Приближенные формулы для нормированных собственных функций

В случае $q \in L_1[0, \ell]$ и $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(t) dt$ для нормированной собственной функции $y_n(x)$ в работе [3] было получено при номерах

$$n \geq \frac{1}{n} \left(125b(\sigma) + \frac{1}{4} \right) \quad (8.1)$$

следующее представление

$$y_n(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2n\pi} y_{n,1,0}(x) + \Delta y_n(x). \quad (8.2)$$

Здесь

$$y_{n,1,0}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left\{ \cos\left(n\frac{\pi}{\ell}x\right) \left[\ell \int_0^x q(t) dt - x \int_0^\ell q(t) dt \right] \right. \quad (8.3)$$

$$\left. \begin{aligned} & + x \int_0^{\ell} q(t) \cos(2n \frac{\pi}{\ell} t) dt - \ell \int_0^x q(t) \cos(2n \frac{\pi}{\ell} t) dt \Bigg] \\ & - \sin(n \frac{\pi}{\ell} x) \left[\ell \int_0^x q(t) \sin(2n \frac{\pi}{\ell} t) dt - \int_0^{\ell} (\ell - t) q(t) \sin(2n \frac{\pi}{\ell} t) dt \right] \Bigg\} \end{aligned}$$

и величина $\Delta y_n(x)$ удовлетворяет при любом $x \in [0, \ell]$ неравенству

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1b + 256,5b^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (8.4)$$

Через функцию $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(t) dt$ выразим функцию

$$\begin{aligned} y_{n,1,0}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos(\mu_n x) \times \\ &\times \left[\ell \int_0^x (1 - \cos(2\mu_n t)) d\sigma(t) - x \int_0^{\ell} (1 - \cos(2\mu_n t)) d\sigma(t) \right] - \\ &- \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(\mu_n x) \left[\int_0^{\ell} t \sin(2\mu_n t) d\sigma(t) - \ell \int_x^{\ell} \sin(2\mu_n t) d\sigma(t) \right]. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Пусть теперь $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенству (8.1). Тогда при любом $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ функция-усреднение $\sigma_{\varepsilon}(x) \in C^{(\infty)}[0, \ell]$ и верно неравенство (7.21).

Подставляя в равенство (8.5) вместо функции $\sigma(x)$ функцию $\sigma_{\varepsilon}(x)$, определим функцию $y_{n,1,0}(\sigma_{\varepsilon}, x)$. Через $y_n(\sigma_{\varepsilon}, x)$ обозначим нормированную собственную функцию краевой задачи, где $\sigma(x)$ заменено на $\sigma_{\varepsilon}(x)$.

Тогда формула (8.2), примененная к потенциалу $q_{\varepsilon}(x) \equiv \frac{d}{dx} \sigma_{\varepsilon}(x)$, принимает вид

$$y_n(\sigma_{\varepsilon}, x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2n\pi} y_{n,1,0}(\sigma_{\varepsilon}, x) + \Delta y_n(\sigma_{\varepsilon}, x),$$

где $\forall x \in [0, \ell]$

$$|\Delta y_n(\sigma_{\varepsilon}, x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1b_{\varepsilon} + 256,5b_{\varepsilon}^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2} \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1b + 256,5b^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (8.6)$$

По следствию 3 существует предел в пространстве $C[0, \ell]$ семейства $y_n(\sigma_\varepsilon, x)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В частности, для любого $x \in [0, \ell]$ верно $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_n(\sigma_\varepsilon, x) = y_n(\sigma, x)$. По теореме Хелли о существенной сходимости интегралов Стильтьеса существует для любого $x \in [0, \ell]$ предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y_{n,1,0}(\sigma_\varepsilon, x) = y_{n,1,0}(\sigma, x)$.

Тогда для любого $x \in [0, \ell]$ существует

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(y_n(\sigma_\varepsilon, x) - \left(y_{n,0}(x) + \frac{1}{2n\pi} y_{n,1,0}(\sigma_\varepsilon, x) \right) \right) = \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta y_n(\sigma_\varepsilon, x) \equiv \Delta y_n(\sigma, x) \end{aligned}$$

и в силу (8.6) верно неравенство (8.4).

Итак, мы показали, что для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$, удовлетворяющей неравенству (8.1), нормированная собственная функция $y_n(x)$ допускает представление (8.2), где функция $y_{n,1,0}(x)$ задается формулой (8.5), а функция $\Delta y_n(x)$ удовлетворяет неравенству (8.4).

Таким образом, теорема 3 доказана. \diamond

ЛЕММА 6. Для любой функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ функция $y_{n,1,0}(x)$ вида (8.5) непрерывна на $[0, \ell]$ и $y_{n,1,0}(0) = y_{n,1,0}(\ell) = 0$.

Доказательство. Требуется проверить лишь непрерывность функции

$$w_n(x) \equiv \cos(\mu_n x) \cdot \int_0^x (1 - \cos(2\mu_n t)) d\sigma(t) + \sin(\mu_n x) \cdot \int_x^\ell \sin(2\mu_n t) d\sigma(t). \quad (8.7)$$

В точке $x \in]0, \ell[$ разность

$$\begin{aligned} w_n(x+0) - w_n(x-0) &= \cos(\mu_n x) \cdot (1 - \cos(2\mu_n x)) \cdot (\sigma(x+0) - \sigma(x-0)) - \\ &\quad - \sin(\mu_n x) \cdot \sin(2\mu_n x) \cdot (\sigma(x+0) - \sigma(x-0)) = \\ &= [\cos(\mu_n x) - (\cos(\mu_n x) \cdot \cos(2\mu_n x) + \sin(\mu_n x) \cdot \sin(2\mu_n x))] \times \\ &\quad \times (\sigma(x+0) - \sigma(x-0)) = 0. \end{aligned}$$

Обращение в нуль функции $y_{n,1,0}(x)$ вида (8.5) в точках $x = 0$ и $x = \ell$ проверяется непосредственно. Непрерывность в точках $x = 0$ и $x = \ell$ вытекает из непрерывности функции $\sigma(x)$ в этих точках. Ибо непрерывность $\sigma(x)$ влечет непрерывность её полного изменения в этих точках, что влечет непрерывность входящих в формулу (8.7) интегралов как функций пределов. \diamond

§ 9. Сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$

Пусть в этом пункте $\sigma \in BV[0, \ell]$, рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n, \quad (9.1)$$

где величины B_n задаются формулами (7.19, 7.14). Найдем сумму этого ряда.

Частная сумма ряда (9.1) имеет вид

$$\sum_{n=1}^m B_n = \iint_Q \left(\sum_{n=1}^m k_n(\xi_1, \xi_2) \right) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2), \quad (9.2)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m k_n(\xi_1, \xi_2) = & \frac{1}{4\pi} \left\{ \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(\frac{n2\pi\xi_2}{\ell})}{n} \right) \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi\xi_2}{\ell} \right) + \right. \\ & + \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi\xi_1}{\ell})}{n} \right) \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi\xi_1}{\ell} \right) - \\ & - \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi(\xi_1+\xi_2)}{\ell})}{n} \right) \frac{1}{\pi} \left(\theta \left(\frac{2\pi\xi_1}{\ell} \right) + \theta \left(\frac{2\pi\xi_2}{\ell} \right) \right) - \\ & - \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi(\xi_2-\xi_1)}{\ell})}{n} \right) \frac{1}{\pi} \left(\theta \left(\frac{2\pi\xi_2}{\ell} \right) - \theta \left(\frac{2\pi\xi_1}{\ell} \right) \right) + \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) \times \\ & \times \left[\left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi\xi_2}{\ell})}{n} \right) - \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi\xi_1}{\ell})}{n} \right) - \left(\sum_{n=1}^m \frac{\sin(n\frac{2\pi(\xi_2-\xi_1)}{\ell})}{n} \right) \right] \Big\}. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Так как функция $k_n(\xi_1, \xi_2)$ непрерывна в Q , то и сумма (9.3) непрерывна в Q . Так как частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n}$ ограничены – неравенство (7.10), то из (9.3) и (7.10) получим

$$\sum_{n=1}^m k_n(\xi_1, \xi_2) \leq \frac{1}{4\pi} \{M + M + M + M + 3M\} = \frac{7M}{4\pi}. \quad (9.4)$$

В каждой точке $(\xi_1, \xi_2) \in Q$ ряд (9.3) сходится к функции

$$\begin{aligned}
 j(\xi_1, \xi_2) \equiv & \frac{1}{4\pi} \left\{ \theta_0 \left(\frac{2\pi\xi_2}{\ell} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi\xi_2}{\ell} \right) + \theta_0 \left(\frac{2\pi\xi_1}{\ell} \right) \cdot \frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi\xi_1}{\ell} \right) \right. \\
 & - \theta_0 \left(\frac{2\pi}{\ell}(\xi_1 + \xi_2) \right) \cdot \frac{1}{\pi} \left(\theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) + \theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) \right) \\
 & - \theta_0 \left(\frac{2\pi}{\ell}(\xi_2 - \xi_1) \right) \cdot \frac{1}{\pi} \left(\theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) - \theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) \right) \\
 & \left. + \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) \left[\left(\theta_0 \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) - \theta_0 \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) \right) - \theta_0 \left(\frac{2\pi}{\ell}(\xi_2 - \xi_1) \right) \right] \right\}. \quad (9.5)
 \end{aligned}$$

Определяемая выражением (9.5) функция $j(\xi_1, \xi_2)$ может иметь разрывы лишь на сторонах и диагоналях квадрата Q . Введем следующую функцию, определенную в квадрате Q и отличную от нуля лишь на сторонах и главной диагонали $\xi_1 = \xi_2$ квадрата Q ,

$$\begin{aligned}
 \beta(\xi_1, \xi_2) \equiv & \frac{1}{8} \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) + \frac{1}{8} (\chi_{2,(0,0)}(\xi_1, \xi_2) + \chi_{2,(\ell,\ell)}(\xi_1, \xi_2)) + \\
 & \frac{1}{8} \left[\left(\chi_{1,2\pi} \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) - \chi_{1,0} \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_1 \right) - \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) \right) \right. \\
 & \left. + \left(\chi_{1,2\pi} \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) - \chi_{1,0} \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) \right) \left(\frac{2}{\pi} \theta \left(\frac{2\pi}{\ell}\xi_2 \right) - \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) \right) \right]. \quad (9.6)
 \end{aligned}$$

В этом выражении функции $\chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2)$, $\chi_{2,(0,0)}(\xi_1, \xi_2)$, $\chi_{2,(\ell,\ell)}(\xi_1, \xi_2)$ определены на квадрате Q и являются, соответственно, характеристическими функциями главной диагонали квадрата Q , точки $(0, 0)$ и точки (ℓ, ℓ) , а функции $\chi_{1,0}(t)$ и $\chi_{1,2\pi}(t)$ определены на всей действительной прямой $t \in \mathbf{R}$ и являются, соответственно, характеристическими функциями точек 0 и 2π .

Прямой проверкой устанавливается справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 7. Функция

$$p(\xi_1, \xi_2) \equiv j(\xi_1, \xi_2) - \beta(\xi_1, \xi_2) \quad (9.7)$$

непрерывна в квадрате Q .

Вернемся теперь к ряду (9.1). Каждая функция $\sum_{n=1}^m k_n(\xi_1, \xi_2)$ непрерывна, выполняется неравенство (9.4) и в каждой точке $(\xi_1, \xi_2) \in Q$ ряд (9.3) сходится к функции $j(\xi_1, \xi_2)$. Поэтому по теореме Лебега о мажорированной сходимости функция $j(\xi_1, \xi_2)$ суммируема, ряд (9.1) сходится и верно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \iint_Q j(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2), \quad (9.8)$$

где интеграл справа понимается как интеграл по мере Радона на Q , порожденной произведением мер на $[0, \ell]$.

Доказана следующая лемма.

ЛЕММА 8. Для $\sigma \in BV[0, \ell]$ ряд (9.1) сходится и для его суммы справедливо представление (9.8), где определен интеграл Радона (9.8) от суммируемой в квадрате Q функции $j(\xi_1, \xi_2)$ вида (9.5).

Рассмотрим теперь сумму ряда (9.1) при дополнительном предположении, что функция $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ абсолютно непрерывна и $\sigma(x) = \int_0^x q(\xi) d\xi$, где $q \in L_1[0, \ell]$. Тогда для B_n верно представление (7.13) и по теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} B_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \\ &= \iint_Q j(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

В силу леммы 7 функция $j(\xi_1, \xi_2)$ отличается от непрерывной функции $p(\xi_1, \xi_2)$ лишь на множестве меры Лебега нуль. Поэтому для абсолютно непрерывной функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ верно

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n = \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Применим теперь теорему Фубини

$$\iint_Q p(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \int_0^{\ell} \left(\int_0^{\ell} p(\xi_1, \xi_2) q(\xi_2) d\xi_2 \right) q(\xi_1) d\xi_1.$$

Так как функция $p(\xi_1, \xi_2)$ непрерывна, то для любого $\xi_1 \in [0, \ell]$

$$h(\xi_1) \equiv \int_0^\ell p(\xi_1, \xi_2) q(\xi_2) d\xi_2 = \int_0^\ell p(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_2)$$

(см. [15], с. 249), причем функция $h(\xi_1)$ непрерывна (см. [11], с. 71) и поэтому

$$\int_0^\ell h(\xi_1) q(\xi_1) d\xi_1 = \int_0^\ell h(\xi_1) d\sigma(\xi_1).$$

Мы убедились в справедливости леммы.

ЛЕММА 9. Если функция $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ абсолютно непрерывна т.е.

$\sigma = \int_0^x q(\xi) d\xi$, $q \in L_1[0, \ell]$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\sigma) = \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) q(\xi_1) q(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

где $p(\xi_1, \xi_2)$ непрерывная функция вида (9.7).

§ 10. Формула регуляризованного следа

Пусть $\sigma \in BV_c[0, \ell]$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - (\lambda_{n,0} - L_n - B_n)). \quad (10.1)$$

В силу теоремы 2 он абсолютно сходится. В силу сходимости ряда

$\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ и сходимости ряда (10.1) ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - (\lambda_{n,0} - L_n)) \quad (10.2)$$

также сходится. Наша задача в этом пункте – сосчитать его сумму.

Начнем со случая бесконечно-дифференцируемой финитной функции $q(x)$. В этом случае известно (см. [13], [14]), что ряд (10.2) сходится и его сумма равна нулю. Тогда из леммы 9 получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma))) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\sigma) = \int \int_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (10.3)$$

Рассмотрим теперь сумму (10.1) в случае $q \in L_1[0, \ell]$. Тогда L_n и B_n – непрерывные на пространстве $L_1[0, \ell]$ функционалы. Собственное значение λ_n как функция $q \in L_1[0, \ell]$ также непрерывный на L_1 функционал (см. [4]). Поэтому величина $(\lambda_n - (\lambda_{n,0} - L_n - B_n))$ – непрерывная на $L_1[0, \ell]$ функция $q \in L_1[0, \ell]$. В силу оценки (2.7) ряд (10.1) сходится равномерно в любом шаре пространства L_1 . Итак, сумма ряда (10.1) непрерывная на $L_1[0, \ell]$ функция аргумента $q \in L_1[0, \ell]$. Согласно лемме 8 сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ также непрерывная на $L_1[0, \ell]$ функция. Таким образом, и сумма ряда (10.2) – непрерывная на $L_1[0, \ell]$ функция. В пространстве $L_1[0, \ell]$ финитные бесконечно дифференцируемые функции всюду плотны (см. [9], с.113). Итак, по непрерывности для любого потенциала $q \in L_1[0, \ell]$ верно равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - (\lambda_{n,0} - L_n)) = 0.$$

Отсюда и из леммы 9 для любой функции $q \in L_1[0, \ell]$ следует равенство (10.3). Итак, при $q \in L_1[0, \ell]$ верно равенство (10.3).

Пусть теперь $\sigma \in BV_c[0, \ell]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ функции $q_\varepsilon(x) \equiv \frac{d}{d_n} \sigma_\varepsilon(x)$ из класса $L_1[0, \ell]$ и для нее верно равенство (10.3) т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma_\varepsilon) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma_\varepsilon) - B_n(\sigma_\varepsilon))) = \int \int_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma_\varepsilon(\xi_1) d\sigma_\varepsilon(\xi_2). \quad (10.4)$$

В силу утверждения 3 для любого числа $\varepsilon > 0$ верно неравенство $\|\sigma_\varepsilon\|_v \leq \|\sigma\|_v$. Тогда в силу неравенства (2.7) ряд в левой части (10.4) сходится равномерно по ε на множестве \mathbf{R}_+ .

В силу следствия 3 существует предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\sigma_\varepsilon) = \lambda(\sigma)$.

Семейство функций $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+} \subset BV_c[0, \ell]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ существенно сходится к функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ — лемма 3. Согласно п. 7 существуют пределы (7.24, 7.25).

Итак, при любом $n \in \mathbf{N}$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\lambda_n(\sigma_\varepsilon) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma_\varepsilon) - B_n(\sigma_\varepsilon))) = \lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma)). \quad (10.5)$$

Из равномерной сходимости ряда (10.4) по $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ и существования пределов (10.5) следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma)))$$

и равенство

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma))) = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma_\varepsilon) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma_\varepsilon) - B_n(\sigma_\varepsilon))) \end{aligned} \quad (10.6)$$

(см. [16], с.158). Но при любом $\varepsilon \in \mathbf{R}_+$ верно равенство (10.4). Так как функция $p(\xi_1, \xi_2)$ непрерывна, то из существенной сходимости семейства $\{\sigma_\varepsilon\}_{\varepsilon \in \mathbf{R}_+}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к функции $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ по утверждению 3 из п. 6 следует существование предела

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma_\varepsilon(\xi_1) d\sigma_\varepsilon(\xi_2) = \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (10.7)$$

Из (10.6, 10.7) получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma))) = \iint_Q p(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (10.8)$$

Поскольку сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ и верно равенство (9.8), то из (10.8) следует равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma))) = - \iint_Q \beta(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2).$$

Функция $\beta(\xi_1, \xi_2)$ вида (9.6) отлична от нуля лишь на сторонах и диагоналях квадрата Q . Но по условию $\sigma \in BV_c[0, \ell]$ функция σ непрерывна в точках 0 и ℓ , поэтому стороны квадрата имеют меру нуль и

$$\iint_Q \beta(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) = -\frac{1}{8} \iint_Q \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2).$$

Для всякого $\xi_2 \in [0, \ell]$ интеграл $\int_0^\ell \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1)$ равен нулю, если ξ_2 – точка непрерывности функции $\sigma(x)$ и равен величине скачка c_i , если точка $\xi_2 = x_i$ – точка разрыва функции $\sigma(x)$. Поэтому $\int_0^\ell \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 = \sum_{i \in I} c_i \chi_{1,i}(\xi_2)$, где $\{x_i\}_{i \in I} \subset]0, \ell[$ – не более чем счетное множество точек скачка функции $\sigma(x)$, а $\chi_{1,i}$ – характеристическая функция точки x_i . Интегрируя еще раз, по теореме Фубини получаем

$$\begin{aligned} \iint_Q \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2) &= \\ &= \int_0^\ell \left(\int_0^\ell \chi_{2,d}(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) \right) d\sigma(\xi_2) = \sum_{i \in I} c_i^2. \end{aligned}$$

Доказана теорема 4.

§ 11. Пример с δ -функцией

Пусть $q(x) = c\delta(x - x_0)$, $c \in \mathbf{R}$, $x_0 \in]0, \ell[$, т.е. $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0; \\ c, & x \geq x_0. \end{cases}$

Тогда согласно теореме 2 получаем следующее выражение для собственного значения

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - c \cdot y_{n,0}^2(x_0) - \\ &- \frac{c^2}{n\pi^2} \sin(2\mu_n x_0) \theta \left(\frac{2\pi x_0}{\ell} \right) (1 - \cos(2\mu_n x_0)) + \nu'_{n,2}(\sigma), \end{aligned} \quad (11.1)$$

где

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{c^2(4,4 + 467|c|\ell + 2c^2\ell^2)}{(n\pi - 1/4)^2}. \quad (11.2)$$

Согласно теореме 3 получаем следующее выражение для нормированной собственной функции

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \frac{c}{2n\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} ((\ell - x_0) \sin(2\mu_n x_0) \sin(\mu_n x) - \\ - (1 - \cos(2\mu_n x_0))x \cos(\mu_n x) - \\ - 2\ell \sin(\mu_n x_0) \eta(x - x_0) \sin(\mu_n(x - x_0))) + \Delta y_n(x),$$

где

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1|c|\ell + 256,5c^2\ell^2)}{(n\pi - 1/4)^2}.$$

Здесь функция скачка $\eta(x) \equiv \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$

Согласно теореме 4 формула следа (2.11) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_n - \left(\left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - c y_{n,0}^2(x_0) \right) \right) = -\frac{1}{8}c^2. \quad (11.3)$$

В частном случае $x_0 = \frac{\ell}{2}$ величина $B_n(\sigma) = 0$ и формула для собственного значения (11.1) принимает вид

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - c \frac{2}{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \nu'_{n,2}(\sigma). \quad (11.4)$$

В этом частном случае в силу (11.4, 11.2) ряд в левой части формулы следа (11.3) сходится абсолютно. Нормированная собственная функция в этом частном случае при n четном равна

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \Delta y_n(x),$$

а при n нечетном, $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$ равна

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(\mu_n x) - \frac{c}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos(\mu_n x) \cdot \left(x - \ell \cdot \eta\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \right) + \Delta y_n(x).$$

Литература

1. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. Доклады академии наук. 1998. Т.358. № 3. С. 298-301.

2. Винокуров В.А. Садовничий В.А. Об асимптотике решения однородного дифференциального уравнения второго порядка в нормальной форме Лиувилля. Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. № 8. С. 1137-1139.
3. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. № 10. С.1425-1427.
4. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала. Доклады Академии наук. 1999. Т.365. № 3. С. 295-297.
5. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.
6. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. — М.: Наука, 1967.
7. Келли Дж.Л. Общая топология. — М.: Наука, 1968.
8. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1969.
9. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
10. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968.
11. Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.
12. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1. — М.: Мир, 1965.
13. Дикий Л.А. Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля. Успехи математических наук. 1958. Т.13. Вып.3. С.111-143.
14. Дубровский В.В. Абстрактные формулы регуляризованных следов эллиптических гладких дифференциальных операторов, заданных на компактных многообразиях. Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27. № 12. С.2164-2166.
15. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
16. Шварц Л. Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.