

УДК 517.925.44

О границах изменения собственного значения при изменении потенциала¹

В. А. Винокуров, В. А. Садовнический

§ 1. Введение.

Рассматривается *первая краевая задача* на отрезке $[0, \pi]$, состоящая из дифференциального уравнения

$$y'' + (\lambda - q(x))y = 0 \quad (1.1)$$

и граничных условий

$$y(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$y(\pi) = 0. \quad (1.3)$$

Функция q , называемая потенциалом, вещественнозначная и суммируемая по Лебегу на $[0, \pi]$, т.е. принадлежит банахову пространству $L_1[0, \pi]$. Требуется найти решение краевой задачи (1.1)-(1.3), т.е. пару $(\lambda, y) \in \mathbb{C} \times W_1^{(2)}[0, \pi]$, такую, что выполнены соотношения (1.1)-(1.3) и равенство $\int_0^\pi y^2(x) dx = 1$. Решение дифференциального уравнения (1.1) понимается в интегральном смысле, т.е. как решение соответствующего интегрального уравнения

$$y'(x) - y'(0) + \int_0^x (\lambda - q(\xi))y(\xi) d\xi = 0, \quad x \in [0, \pi]$$

Известно, (см. [1]), что при сформулированных условиях при любой фиксированной функции $q \in L_1[0, \pi]$ первая краевая задача имеет бесконечную последовательность решений $\{(\lambda_n, y_n(x))\}_{n=1}^\infty$. Здесь числовая последовательность *собственных значений* $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ вещественна и строго возрастает к $+\infty$, каждая функция $y_n(x)$ имеет ровно

¹ Доклады РАН, 2003, том 392, № 5, с. 592-597.

$n - 1$ нулей на открытом интервале $]0, \pi[$ и последовательность нормированных в $L_2[0, \pi]$ собственных функций $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $L_2[0, \pi]$. Таким образом, n -ное собственное значение λ_n является функцией элемента $q \in L_1[0, \pi]$, $\lambda_n = \lambda_n(q)$, причём при любых изменениях $q \in L_1[0, \pi]$ сохраняются строгие неравенства $\lambda_{n-1}(q) < \lambda_n(q) < \lambda_{n+1}(q)$ при $n = 2, 3, \dots$

В случае $q = 0$ собственное значение $\lambda_n(q) = n^2 \equiv \lambda_{n,0}$ и собственная функция $y_n(q, x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx) \equiv y_{n,0}$, $n \in \mathbf{N}$. Нас интересует вопрос: насколько сильно можно изменить (увеличить или уменьшить) собственное значение, если элемент q меняется в пределах некоторого подмножества $Q \subset L_1[0, \pi]$. А именно, в данной работе мы исследуем случай, когда множество $Q = U_p[t] \equiv \{q \in L_p[0, \pi] \mid \|q\|_p \leq t\}$ есть замкнутый шар радиуса $t \geq 0$ с центром в нуле банахова пространства $L_p[0, \pi]$, $p \in [1, +\infty]$.

§ 2. Постановка задачи.

Итак, пусть $n \in \mathbf{N}$, $p \in [1, +\infty]$, $t \in [0, \infty[$. Введём следующие величины: $\bar{\lambda}_{n,p}(t) \equiv \sup_{q \in U_p[t]} \lambda_n(q)$ — точную верхнюю грань собственного значения на множестве $U_p[t]$; $\underline{\lambda}_{n,p}(t) \equiv \inf_{q \in U_p[t]} \lambda_n(q)$ — точную нижнюю грань собственного значения на множестве $U_p[t]$; $v_{n,p}(t) \equiv \bar{\lambda}_{n,p}(t) - \lambda_{n,0}$ — верхний сдвиг собственного значения на множестве $U_p[t]$; $w_{n,p}(t) \equiv \lambda_{n,0} - \underline{\lambda}_{n,p}(t)$ — нижний сдвиг собственного значения на множестве $U_p[t]$. Так как шар $U_p[t]$ содержит нулевой элемент, то $v_{n,p}(t) \geq 0$ и $w_{n,p}(t) \geq 0$.

На банаховом пространстве $L_p = L_p[0, \pi]$ суммируемых со степенью p функций мы определим норму $\|q\|_p \equiv \left(\frac{\int_0^\pi |q(x)|^p dx}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}}$. На банаховом пространстве $L_\infty \equiv L_\infty[0, \pi]$ норма $\|q\|_\infty \equiv \operatorname{vrai} \sup_{x \in [0, \pi]} |q(x)|$.

В силу неравенства Гёльдера (см. [3]) так определённая норма монотонна, т.е. если $q \in L_{p_2}$, $p_2 \in [1, +\infty]$ и $p_1 \in [1, p_2[$, то $\|q\|_{p_1} \leq \|q\|_{p_2}$, причём если функция q не является почти всюду постоянной, то имеет место строгое неравенство $\|q\|_{p_1} < \|q\|_{p_2}$ (см. [3, с.169]).

Числовые функции $\bar{\lambda}_{n,p}(t)$, $\underline{\lambda}_{n,p}(t)$, $v_{n,p}(t)$, $w_{n,p}(t)$ дифференцируе-

мы в нуле, в силу дифференцируемости функции $\lambda_n(q)$ на банаховом пространстве L_1 (см. [2]). Для существования этих функций при всех $t > 0$ нам ещё следует доказать ограниченность функции $\lambda_n(q)$ на шаре $U_1[t]$ при любом $t > 0$.

Так как $\lambda_n(q) < \lambda_{n+1}(q)$ для любого $q \in L_1$, то при любом $n \in \mathbf{N}$, любом $p \in [1, +\infty]$ и любом $t \geq 0$ справедливы неравенства

$$\bar{\lambda}_{n,p}(t) \leq \bar{\lambda}_{n+1,p}(t), \quad \underline{\lambda}_{n,p}(t) \leq \underline{\lambda}_{n+1,p}(t).$$

Если $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq +\infty$, то $U_{p_2} \subset U_{p_1}$, поэтому при любом $n \in \mathbf{N}$ и любом $t \geq 0$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{n,p_1}(t) &\geq \bar{\lambda}_{n,p_2}(t), & \underline{\lambda}_{n,p_1}(t) &\leq \underline{\lambda}_{n,p_2}(t), \\ v_{n,p_1}(t) &\geq v_{n,p_2}(t), & w_{n,p_1}(t) &\geq w_{n,p_2}(t). \end{aligned}$$

В частности, при $n \in \mathbf{N}, t \in [0, +\infty[, p \in [1, +\infty]$ верны неравенства

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_{n,1}(t) &\geq \bar{\lambda}_{n,p}(t) \geq \bar{\lambda}_{n,\infty}(t), & \underline{\lambda}_{n,1}(t) &\leq \underline{\lambda}_{n,p}(t) \leq \underline{\lambda}_{n,\infty}(t), \\ v_{n,1}(t) &\geq v_{n,p}(t) \geq v_{n,\infty}(t), & w_{n,1}(t) &\geq w_{n,p}(t) \geq w_{n,\infty}(t). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Таким образом, оценки функций $\bar{\lambda}_{n,1}(t), \bar{\lambda}_{n,\infty}(t)$ и $\underline{\lambda}_{n,1}(t), \underline{\lambda}_{n,\infty}(t)$ согласны неравенствам (2.1) дают и оценки функций $\bar{\lambda}_{n,p}(t)$ и $\underline{\lambda}_{n,p}(t)$ с $p \in]1, \infty[$.

§ 3. Оценки сдвига собственного значения на шаре $U_\infty[t]$ банахова пространства L_∞ .

Собственное значение $\lambda_n(q)$ как функция потенциала q обладает следующими двумя свойствами:

1) свойством *линейности по константам*: если $q \in L_1$ и C — константа, то $\lambda_n(q + C) = \lambda_n(q) + C$, вытекающим непосредственно из вида дифференциального уравнения (1.1);

2) свойством *монотонности* (см. [2]): если $q_1 \in L_1, q_2 \in L_1$ и $q_1(x) \leq q_2(x)$ для почти всех $x \in [0, \pi]$, то $\lambda_n(q_1) \leq \lambda_n(q_2)$.

Из этих двух свойств вытекает, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in [0, \infty[\quad \left| \begin{array}{l} v_{n,\infty}(t) = w_{n,\infty}(t) = t, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

причём максимум (минимум) собственного значения на шаре $U_\infty[t]$ достигается на постоянном потенциале $q(x) = \text{Const} = t$. Итак, согласно

неравенствам (2.1) мы получили оценку снизу верхнего и нижнего сдвига собственного значения на шаре для всех L_p , $p \in [1, \infty]$. Для получения оценки сверху рассмотрим сначала согласно (2.1) случай $p = 1$.

§ 4. Оценки сдвига собственного значения в пространстве L_1 .

ТЕОРЕМА 1. Для любых $n \in \mathbf{N}$ и $t \in [0, \infty[$ верно неравенство

$$v_{n,1}(t) \leq t + \frac{\lambda_{n,0}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4t}{\lambda_{n,0}}} - 1 \right). \quad (4.1)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Функции $\bar{\lambda}_{n,p}(t)$ и $v_{n,p}(t)$ определены и конечны при всех $n \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty]$, $t \in [0, \infty[$.

СЛЕДСТВИЕ 2.

$$\forall n \in \mathbf{N} \forall p \in [1, \infty] \forall t \in [0, \infty[\quad \left| t \leq v_{n,p}(t) \leq 2t, \quad (4.2) \right.$$

ибо $\alpha \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2t}{\alpha}} - 1 \right) \leq t$ при всех $t \in [0, \infty[$ и $\alpha > 0$.

Таким образом, специальным выбором потенциала $q \in U_p[t]$ можно увеличить сдвиг вверх собственного значения не более, чем в 2 раза по сравнению со случаем потенциала-константы той же нормы.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $n \in \mathbf{N}$ и $t \in [0, \frac{\lambda_{n,0}}{4}[$ верно неравенство

$$w_{n,1}(t) \leq t + \frac{\lambda_{n,0}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4t}{\lambda_{n,0}}} \right). \quad (4.3)$$

Из теоремы 2 существование функций $\underline{\lambda}_{n,p}(t)$ и $w_{n,p}(t)$ вытекает только при достаточно малых t , поэтому для доказательства существования этих функций при всех $t \in [0, \infty[$ мы оценим нижний сдвиг первого собственного значения.

§ 5. Свойства первого собственного значения.

ТЕОРЕМА 3. Первое собственное значение $\lambda_1(q)$ есть вогнутая слабо полунепрерывная сверху функция на банаховом пространстве L_1 .

В нашей работе [2] показано, что каждое собственное значение $\lambda_n(q)$ является дифференцируемой на банаховом пространстве L_1 функцией и его производная $\lambda'_n(q)$ действует на элемент $h \in L_1$ по правилу

$$\lambda'_n(q)(h) = \int_0^\pi y_n^2(q, x) h(x) dx, \quad (5.1)$$

где $y_n(q, x)$ — n -ная нормированная собственная функция для потенциала q . Тогда вогнутость функции $\lambda_1(q)$ влечёт для любых $q_1 \in L_1$, $q_2 \in L_1$ следующее неравенство

$$\lambda_1(q_2) \leq \lambda_1(q_1) + \int_0^\pi y_1^2(q_1, x)(q_2(x) - q_1(x)) dx. \quad (5.2)$$

В частности, при $q_1 = 0$, $q_2 = q$ мы получаем неравенство

$$\lambda_1(q) \leq \lambda_{1,0} + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) q(x) dx \quad (5.3)$$

для любой функции $q \in L_1$.

ТЕОРЕМА 4. Для любого $q \in L_1$ справедливо неравенство

$$\lambda_1(q) \geq -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|q\|_1^2. \quad (5.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если рассмотреть обобщённую первую краевую задачу с потенциалом $q_t(x) \equiv -t\pi\delta(x - \frac{\pi}{2})$, $t \in \mathbf{R}_+$, в виде δ -функции с носителем в точке $x = \frac{\pi}{2}$, то соответствующее первое собственное значение $\lambda_1(q_t) \geq \underline{\lambda}_{1,1}(t)$ в силу построений работы [4]. В частности, при $t = (\frac{2}{\pi})^2$ получаем $\lambda_1(q_t) = 0$, а при $t > (\frac{2}{\pi})^2$, величина $\lambda_1(q_t) < 0$ и величина $\nu \equiv \sqrt{-\lambda_1(q_t)}$ есть корень уравнения $\nu = t \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \text{th}(\nu \cdot \frac{\pi}{2})$, откуда следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\lambda_1(q_t)}{t^2 \frac{\pi^2}{4}} = 1$, следовательно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\underline{\lambda}_{1,1}(t)}{t^2 \frac{\pi^2}{4}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{w_{1,1}(t)}{t^2 \frac{\pi^2}{4}} = 1.$$

СЛЕДСТВИЕ 3. При всех $n \in \mathbf{N}$, $p \in [1, \infty]$ функции $\lambda_{n,p}(t)$ и $w_{n,p}(t)$ определены и конечны при всех $t \in [0, \infty[$.

Поскольку

$$\underline{\lambda}_{1,p}(t) = \inf_{q \in U_p[t]} \lambda_1(q) = \inf_{q \in U_p[1]} \lambda_1(tq),$$

то из теорем 3,4 и теоремы 111 о выпуклых функциях из [3] вытекает следствие.

СЛЕДСТВИЕ 4. При любом $p \in [1, \infty]$ функция $\lambda_{1,p}(t)$ вогнутая и непрерывная, а функция $w_{1,p}(t) = \lambda_{1,0} - \lambda_{1,p}(t)$ выпуклая и непрерывная по аргументу $t \in [0, \infty[$.

Теорема 4 оценивает снизу первое собственное значение, но даёт только качественную оценку высших собственных значений. Для получения точных оценок мы перейдём к пространствам L_p с $1 < p < \infty$. Но сначала отметим следующее важное свойство собственного значения.

§ 6. Слабая непрерывность собственного значения.

ТЕОРЕМА 5. Для любого номера $n \in \mathbb{N}$ и любого слабо компактно го множества $G \subset L_1$ сужение $\lambda_n|_G$ есть слабо непрерывная функция.

СЛЕДСТВИЕ 5. На любом слабо компактном подмножестве G банахова пространства L_1 собственное значение $\lambda_n(q)$ принимает максимальное и минимальное значения.

Поскольку замкнутый шар $U_p[t]$ банахова пространства L_p при $1 < p < \infty$ слабо компактен, то и его образ при тождественном вложении в банахово пространство L_1 слабо компактен. Т.е. верно следствие.

СЛЕДСТВИЕ 6. При любых $n \in \mathbb{N}$, $p \in]1, \infty[$, $t \in [0, \infty[$ собственное значение $\lambda_n(q)$ принимает на множестве $U_p[t]$ своё максимальное и минимальное значения.

В дальнейшем нам полезно следующее свойство непрерывности.

ТЕОРЕМА 6. При любых фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [0, \infty[$ величины $\bar{\lambda}_{n,p}(t)$ и $\lambda_{n,p}(t)$ непрерывны как функции параметра $p \in [1, \infty[$.

Таким образом, вычислив значения $\bar{\lambda}_{n,p}(t)$ и $\lambda_{n,p}(t)$ при $p > 1$, мы можем получить величины $\bar{\lambda}_{n,1}(t)$ и $\lambda_{n,1}(t)$ как пределы

$$\bar{\lambda}_{n,1}(t) = \lim_{p \rightarrow 1+0} \bar{\lambda}_{n,p}(t), \quad \lambda_{n,1}(t) = \lim_{p \rightarrow 1+0} \lambda_{n,p}(t).$$

§ 7. Описание точек максимума и минимума собственного значения на шаре банахова пространства $L_p, p \in]1, \infty[$.

Так как собственное значение $\lambda_n(q)$ и норма $\|q\|_p$ — дифференцируемые функции на банаховом пространстве L_p , то применяя метод множителей Лагранжа, мы приходим к следующему описанию точек максимума и минимума.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $q \in U_p[t], p \in]1, \infty[$ точка максимума (минимума) собственного значения $\lambda_n(q)$ на множестве $U_p[t]$ и $y_n(x)$ — соответствующая нормированная собственная функция. Тогда $\|q\|_p = t$ и существует число $\gamma > 0$, что

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \left| q(x) = \sigma \cdot \gamma^{-\frac{2}{p-1}} \cdot \pi^{\frac{1}{p-1}} \cdot t \cdot |y_n(x)|^{\frac{2}{p-1}}, \right. \quad (7.1)$$

где $\sigma = +1$ в точке максимума и $\sigma = -1$ в точке минимума и число γ зависит от числа σ .

Переходя от нормированной в L_2 собственной функции $y_n(x)$ к функции

$$z(x) \equiv \frac{\sqrt{\pi}}{\gamma} \cdot y_n(x), \quad (7.2)$$

и подставляя равенство (7.1) в дифференциальное уравнение (1.1), мы приходим к следующему дифференциальному уравнению

$$z'' + \left(\lambda - \xi |z|^{\frac{2}{p-1}} \right) z = 0, \quad (7.3)$$

для функции $z(x)$, где $\xi \equiv \sigma t$. Граничные условия (1.2, 1.3) переходят в граничные условия

$$z(0) = 0, \quad (7.4)$$

$$z(\pi) = 0. \quad (7.5)$$

Условие нормировки $\|q\|_p = t$ переходит в условие

$$\|z\|_\kappa = 1, \quad (7.6)$$

где $\kappa \equiv \frac{2p}{p-1}$, а условие нормировки $\|y_n\|_2$ переходит в условие

$$\|z\|_2 = \frac{1}{\gamma}. \quad (7.7)$$

Таким образом, при заданном числе $\xi \in \mathbf{R}$ из дифференциального уравнения (7.3), граничных условий (7.4, 7.5) и условия нормировки (7.6) мы определяем функцию $z(x)$ и вещественный параметр λ , а затем вычисляем по формуле (7.7) параметр γ , нормированную в L_2 собственную функцию $y_n(x)$ по формуле (7.2) и потенциал в точке экстремума по формуле (7.1). При этом ищется функция $z(x)$, имеющая $n - 1$ нулей внутри интервала $]0, \pi[$.

§ 8. Колебательные решения дифференциального уравнения (7.3).

Дифференциальное уравнение (7.3) с точки зрения механики описывает движение материальной точки единичной массы в потенциальном поле сил с потенциальной энергией $u(z) = \frac{\lambda}{2}z^2 - \frac{\xi}{\kappa}|z|^\kappa$, с начальным положением $z(0) = 0$ и законом сохранения

$$\frac{(z'(x))^2}{2} + u(z) = \frac{\nu^2}{2}, \quad \nu \in \mathbf{R}_+. \quad (8.1)$$

Нас интересуют колебательные решения, начинающиеся при $x = 0$ в нуле и заканчивающиеся при $x = \pi$ в нуле, причём совершающие n полупериодов колебаний для получения экстремума n -ного собственного значения.

Назовём тройку $(\xi, \lambda, z) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times C^{(2)}[0, \pi]$ решением n -ной экстремальной задачи, если выполнены соотношения (7.3-7.6). Решение n -ной экстремальной задачи сводится к решению первой экстремальной задачи в силу следующей леммы.

ЛЕММА 1. Если тройка (ξ, λ, z) — решение n -ной экстремальной задачи, $n \in \mathbf{N}$, то тройка $(\frac{\xi}{n^2}, \frac{\lambda}{n^2}, \tilde{z})$ — решение первой экстремальной задачи, если функция $\tilde{z}(x) = z(\frac{x}{n})$ для любого $x \in [0, \pi]$.

СЛЕДСТВИЕ 7. Пусть $p \in]1, \infty]$, $n \in \mathbf{N}$, $t \in [0, \infty[$, тогда

$$\bar{\lambda}_{n,p}(t) = n^2 \bar{\lambda}_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right), \quad \underline{\lambda}_{n,p}(t) = n^2 \underline{\lambda}_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right),$$

$$v_{n,p}(t) = n^2 v_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right), \quad w_{n,p}(t) = n^2 w_{1,p}\left(\frac{t}{n^2}\right).$$

§ 9. Решение первой экстремальной задачи.

Итак, далее мы рассматриваем первую экстремальную задачу. Обозначим через $a > 0$ наименьший положительный корень уравнения

$$u(a) = \frac{\nu^2}{2}. \quad (9.1)$$

Для существования колебательного решения существование такого корня необходимо и достаточно. Интегрируя закон сохранения (8.1), мы переводим условия (7.5) и (7.6) в уравнения

$$\int_0^a \frac{dz}{\sqrt{\nu^2 - \lambda z^2 + \frac{2}{\kappa} \xi z^\kappa}} = \frac{\pi}{2}, \quad (9.2)$$

$$\int_0^a \frac{z^\kappa dz}{\sqrt{\nu^2 - \lambda z^2 + \frac{2}{\kappa} \xi z^\kappa}} = \frac{\pi}{2}. \quad (9.3)$$

Введём новую нормированную величину

$$\delta = a^{2-\kappa} \quad (9.4)$$

и проведём в интегралах (9.2,9.3) замену переменных $z = a \sin(\varphi)$. Уравнения (9.2,9.3) перейдут в уравнения

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\lambda - \frac{\xi}{\delta} f_\kappa(\varphi)}} - 1 = 0, \quad (9.5)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^\kappa(\varphi) d\varphi}{\sqrt{\lambda - \frac{\xi}{\delta} f_\kappa(\varphi)}} - \delta^p = 0, \quad (9.6)$$

где функция

$$f_\kappa(\varphi) \equiv \frac{2}{\kappa} \cdot \frac{1 - \sin^\kappa(\varphi)}{1 - \sin^2(\varphi)}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (9.7)$$

Из соотношений (9.5,9.6) следует, что параметр $\delta \in]0, 1[$. При заданной величине ξ мы из системы 2 уравнений (9.5,9.6) находим 2 величины $\lambda(\xi)$ и $\delta(\xi)$.

§ 10. Вычисление производных в нуле функций $\bar{\lambda}_{1,p}(t)$ и $\lambda_{1,p}(t)$.

При $\xi = 0$ система уравнений (9.5, 9.6) имеет единственное решение

$$\lambda(0) = 1 \equiv \lambda_0, \quad \delta(0) = \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\kappa(\varphi) d\varphi \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{\Gamma(\frac{\kappa+1}{2})}{\Gamma(\frac{\kappa}{2} + 1) \Gamma(\frac{1}{2})} \right)^{\frac{1}{p}} \equiv \delta_0, \quad (10.1)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Якобиан системы уравнений (9.5)–(9.6) в точке $(\lambda, \delta, \xi) = (\lambda_0, \delta_0, 0)$, не равен нулю, поэтому в некоторой окрестности точки $(\lambda_0, \delta_0, 0)$ система уравнений (9.5, 9.6) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $\lambda = \lambda(\xi)$, $\delta = \delta(\xi)$, такое что $\delta(0) = \delta_0$. Дифференцируя уравнение (9.5) по ξ в точке $\xi = 0$, мы получаем следующее выражение для производной

$$\left. \frac{d\lambda}{d\xi}(\xi) \right|_{\xi=0} = 2 \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2(\varphi))^{\frac{p}{p-1}} d\varphi \right)^{\frac{p-1}{p}} \equiv 2s(p). \quad (10.2)$$

Возвращаясь по формулам (9.4) к переменным λ и ξ , получаем $\frac{d\lambda}{d\xi} = \frac{d\lambda}{d\xi}$. Отсюда следует, что $\left. \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_{1,p}(t) \right|_{t=0} = - \left. \frac{d}{dt} \lambda_{1,p}(t) \right|_{t=0} = 2s(p)$, где величина $s(p)$ есть норма функции $y = \sin^2(\varphi)$, определённой на $[0, \frac{\pi}{2}]$, в банаховом пространстве $L_{\frac{p}{p-1}}[0, \frac{\pi}{2}]$. Поэтому, когда величина p меняется от 1 до $+\infty$, величина $2s(p)$ непрерывно и монотонно меняется от значения 2 до значения 1. Итак, $\left. \frac{d}{dt} \bar{\lambda}_{1,1}(t) \right|_{t=0} = - \left. \frac{d}{dt} \lambda_{1,1}(t) \right|_{t=0} = 2$. Производные мажорантных функций теорем 1, 2 в нуле также

$$\begin{aligned} & \left. \frac{d}{dt} \left(t + \frac{\lambda_{n,0}}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4t}{\lambda_{n,0}}} - 1 \right) \right) \right|_{t=0} = \\ & = \left. \frac{d}{dt} \left(t + \frac{\lambda_{n,0}}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4t}{\lambda_{n,0}}} \right) \right) \right|_{t=0} = 2. \end{aligned}$$

§ 11. Границы изменения знака первого собственного значения.

В частном случае $\lambda = 0$, разрешая уравнения (9.5,9.6) относительно ξ , мы получаем следующее выражение для величины t :

$$t = b_0(p) \equiv \frac{4}{\pi \kappa^2} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{2})} \right)^2 \cdot \frac{\frac{\kappa}{2}}{(1 + \frac{\kappa}{2})^{1 - \frac{2}{\kappa}}}. \quad (11.1)$$

(здесь $\kappa \equiv \frac{2p}{p-1}$). Частные значения величины $b_0(p)$ в точках $p = 1$, $p = 2$, $p = \infty$ равны: $b_0(1) = \frac{4}{\pi^2}$, $b_0(2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \right)^2$, $b_0(\infty) = 1$.

Литература

1. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир. 1968.
2. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма-Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала. Доклады Академии наук. 1999. Т. 365. № 3. С. 295-297.
3. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: Государственное издательство иностранной литературы. 1948.
4. Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции. Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735-751.