

УДК 517.925.44

Аналитическая зависимость собственного значения и собственной функции задачи Штурма-Лиувилля от интегрируемого потенциала¹

В. А. Винокуров, В. А. Садовничий

§ 1. Введение

Краевая задача Штурма-Лиувилля на отрезке $[0, \ell]$ состоит из линейного дифференциального уравнения второго порядка в форме Лиувилля

$$y''(x) + (\lambda - q(x))y(x) = 0 \quad (1.1)$$

и граничных условий

$$\cos(\alpha)y(0) - \sin(\alpha)y'(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\cos(\beta)y(\ell) - \sin(\beta)y'(\ell) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $q : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$ — заданная вещественная интегрируемая по Лебегу функция $q \in L_1[0, \ell]$, называемая потенциалом; $\alpha \in \mathbf{R}$ и $\beta \in \mathbf{R}$ — заданные вещественные параметры; y — искомая функция класса $W_1^{(2)}[0, \ell]$, т.е. имеющая вторую интегрируемую производную; $\lambda \in \mathbf{R}$ — искомое число. Решением краевой задачи называется пара $(\lambda, y) \in \mathbf{R} \times W_1^{(2)}[0, \ell]$, для которой выполнены равенства (1.1-1.3), причём $y \neq 0$.

При сформулированных условиях краевая задача Штурма-Лиувилля имеет счётную последовательность собственных значений кратности единица $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно возрастающую к бесконечности, и соответствующую счётную последовательность собственных функций $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см. [1, гл. 8]). При фиксированных граничных условиях n -ное

¹ Доклады РАН, 2005, том 400, № 4, с. 439-443.

собственное значение λ_n однозначно определено как функция потенциала $q \in L_1[0, \ell]$, т.е. определено отображение $\lambda_n: L_1[0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$. Накладывая на собственную функцию некоторое дополнительное условие нормировки, например, вида

$$\begin{pmatrix} y_n(0) \\ y'_n(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

или

$$\int_0^\ell y_n^2(x) dx = 1, \quad (1.5)$$

мы добиваемся также однозначной зависимости собственной функции $y_n \in C[0, \ell]$ от потенциала $q \in L_1[0, \ell]$, т.е. фиксируем отображение $y_n: L_1[0, \ell] \rightarrow C[0, \ell]$.

В данной работе мы покажем, что отображения $\lambda_n: L_1[0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}$ и $y_n: L_1[0, \ell] \rightarrow C[0, \ell]$ аналитичны на всём банаховом пространстве $L_1[0, \ell]$ и вычислим производные $\frac{d\lambda_n}{dq}$ и $\frac{dy_n}{dq}$ этих отображений.

Через $L_1(A, B)$ мы обозначаем банахово пространство интегрируемых по Лебегу отображений метрического компакта A в банахово пространство B , а через $C(A, B)$ — банахово пространство непрерывных отображений метрического компакта A в банахово пространство B . Для частного случая, когда метрический компакт $A = [0, \ell]$, а банахово пространство $B = \mathbf{R}$ мы используем сокращённые обозначения $L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \equiv L_1[0, \ell]$, $C([0, \ell], \mathbf{R}) \equiv C[0, \ell]$. В терминологии банаховых пространств и интегрируемости мы следуем [2], в терминологии аналитических функций — [3]. Производная собственного значения по интегрируемому потенциалу была вычислена в нашей работе [4] и использована в этой же работе для получения обобщённой формулы регуляризованного следа и в работе [5] для определения границ изменения собственного значения как функции потенциала на шаре пространства $L_p[0, \ell]$. Здесь мы впервые приводим полное доказательство формулы для производной $\frac{d\lambda_n}{dq}$.

Для построения решения линейного дифференциального уравнения второго порядка (1.1) мы переведём его в векторную форму, т.е. запишем его в виде системы двух линейных дифференциальных уравнений с двумя неизвестными. Предварительно напомним некоторые факты о свойствах систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 2. Резольвента и общее решение системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть $M(2 \times 2)$ — банахова алгебра квадратных матриц 2×2 над полем действительных чисел \mathbf{R} и $A : [0, \ell] \rightarrow M(2 \times 2)$ — интегрируемое по Лебегу отображение, т.е. $A \in L_1([0, \ell], M(2 \times 2))$. Пусть $Y : [0, \ell] \rightarrow \mathbf{R}^2$ — непрерывное отображение, т.е. $Y \in C([0, \ell], \mathbf{R}^2)$. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d}{dx}Y(x) = A(x)Y(x) \quad (2.1)$$

на отрезке $[0, \ell]$ с начальным условием в точке $x_0 \in [0, \ell]$ вида

$$Y(x_0) = Y_0, \quad (2.2)$$

где $Y_0 \in \mathbf{R}^2$. Решение начальной задачи (2.1-2.2) мы понимаем в интегральном смысле, т.е. как непрерывное решение интегрального уравнения

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^x A(\xi)Y(\xi) d\xi. \quad (2.3)$$

Решение интегрального уравнения (2.3) в классе функций $Y \in C([0, \ell], \mathbf{R}^2)$ существует, единственно и представляется в виде

$$Y(x) = W(x, x_0)Y_0, \quad (2.4)$$

где отображение $W \in C([0, \ell]^2, M(2 \times 2))$, называемое *резольвентой*, определяется как непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx}W(x, x_0) = A(x)W(x, x_0), \quad (2.5)$$

удовлетворяющее начальному условию

$$W(x_0, x_0) = E, \quad (2.6)$$

где $E \in M(2 \times 2)$ — единичная матрица.

Свойства резольвенты W для случая интегрируемого отображения A подробно исследованы в монографии [6], в частности, установлены существование и единственность резольвенты для каждого элемента $A \in L_1([0, \ell], M(2 \times 2))$. Таким образом, однозначно определено отображение $F : L_1([0, \ell], M(2 \times 2)) \rightarrow C([0, \ell]^2, M(2 \times 2))$. В нашей

работе [7] установлено, что это отображение аналитично на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], M(2 \times 2))$ и его производная в точке $A \in L_1([0, \ell], M(2 \times 2))$ имеет вид

$$\begin{aligned} \forall H \in L_1([0, \ell], M(2 \times 2)) \quad & \left| \frac{dF}{dA}(A)(H)(x, x_0) = \right. \\ & \left. = \int_{x_0}^x W(x, \xi) H(\xi) W(\xi, x_0) d\xi, \right. \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $W = F(A)$.

§ 3. Векторная форма дифференциального уравнения (1.1)

Введём вектор-функцию $Y(x) \equiv \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$ и запишем вместо одного линейного дифференциального уравнения (1.1) второго порядка с одной неизвестной функцией $y(x)$ систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка для двух неизвестных функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вида (2.1) с матричной функцией

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q(x) - \lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Введём следующие обозначения. Если A — матрица $n \times m$, то A^\top — транспонированная матрица $m \times n$. Если $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 1)$ есть столбец с двумя элементами, то $a_\perp \equiv \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$ есть ортогональный столбец $a_\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a$. Аналогично, если $b = (b_1, b_2) \in M(1 \times 2)$ есть строка с двумя элементами, то $b_\perp \equiv (-b_2, b_1) \in M(1 \times 2)$ есть ортогональная строка $b_\perp = b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Через $N(\alpha) \equiv \begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ обозначим единичный столбец $N(\alpha) \in M(2 \times 1)$.

С помощью введенных обозначений краевые условия (1.2-1.3) переходят, соответственно, в краевые условия

$$N_\perp^\top(\alpha) Y(0) = 0 \quad (3.2)$$

и

$$N_{\perp}^{\top}(\beta)Y(\ell) = 0. \quad (3.3)$$

Мы перешли от краевой задачи (1.1-1.3) к векторной краевой задаче (2.1,3.2,3.3) с матричной функцией A вида (3.1).

§ 4. Построение решения векторной краевой задачи

Введём вектор-функцию $Y_{\alpha}(x)$ вида

$$Y_{\alpha}(x) \equiv W(x, 0)N(\alpha). \quad (4.1)$$

Согласно пункту 2 общее решение дифференциального уравнения (2.1), удовлетворяющее краевому условию (3.2), имеет вид

$$Y_g(x) = \gamma \cdot Y_{\alpha}(x), \quad (4.2)$$

где $\gamma \in \mathbf{R}$ — произвольная константа. Нам осталось ещё удовлетворить правому краевому условию (3.3) за счёт выбора значения параметра λ , входящего в выражение (3.1) матричной функции A .

Введём отображение $\Phi : L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \rightarrow L_1([0, \ell], M(2 \times 2))$, определённое правилом

$$\Phi(f)(x) \equiv f(x)E_{21} + E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(x) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

где матрица $E_{21} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, матрица $E_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Отображение Φ — непрерывный полином первой степени, поэтому суперпозиция отображений $G \equiv F \circ \Phi$ будет отображением аналитическим на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$. Во введённых обозначениях $W(x, x_0) = G(q - \lambda)(x, x_0)$. Подставляя решение (4.1) в правое граничное условие (3.3), мы получаем уравнение вида

$$\chi(q, \lambda) = 0 \quad (4.4)$$

для определения значения параметра $\lambda \in \mathbf{R}$ при заданном элементе $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$. Здесь отображение $\chi : L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, сопоставляющее паре $(q, \lambda) \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ число

$$\chi(q, \lambda) \equiv N_{\perp}^{\top}(\beta)G(q - \lambda)(\ell, 0)N(\alpha), \quad (4.5)$$

будет аналитично на всём произведении банаховых пространств $L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \times \mathbf{R}$.

Итак, мы получили характеристическое уравнение (4.4) для определения собственного значения λ с аналитической функцией χ . Теперь изучим более подробно функцию $\chi(q, \lambda)$, входящую в это уравнение, и её частные производные $\frac{\partial \chi}{\partial q}$ и $\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}$.

§ 5. Основная теорема

Введём следующие величины: функцию-строку

$$S(x) \equiv (w_{11}(x, 0), w_{12}(x, 0))$$

— первую строку матрицы $W(x, 0)$;
 скалярную функцию $y_\alpha(x) \equiv S(x)N(\alpha)$;
 скалярную функцию $y_s(x) \equiv S(x)N_\perp(\alpha)$;
 скалярную величину $\Delta \equiv N_\perp^\top(\beta)W(\ell, 0)N_\perp(\alpha)$;
 скалярную величину $\chi \equiv N_\perp^\top(\beta)W(\ell, 0)N(\alpha)$.

В сформулированных обозначениях справедливы следующие утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть элемент $f \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ и $W = G(f)$, тогда справедливо равенство

$$N_\perp^\top(\beta)W(\ell, \xi)E_{21}W(\xi, 0)N(\alpha) = \Delta \cdot y_\alpha^2(\xi) - \chi \cdot y_s(\xi)y_\alpha(\xi). \quad (5.1)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть потенциал $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, вещественное число λ есть собственное значение, соответствующее потенциалу q , и элемент $W = G(q - \lambda)$. Тогда верно равенство

$$\chi(q, \lambda) = N_\perp^\top(\beta)W(\ell, 0)N(\alpha) = 0. \quad (5.2)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть потенциал $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, вещественное число λ есть собственное значение, соответствующее потенциалу q , и элемент $W = G(q - \lambda)$. Тогда верно неравенство

$$\Delta(q, \lambda) = N_\perp^\top(\beta)W(\ell, 0)N_\perp(\alpha) \neq 0. \quad (5.3)$$

Из утверждений 1-2 вытекает справедливость следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть потенциал $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, вещественное число λ есть собственное значение, соответствующее потенциалу q , и элемент

$W = G(q - \lambda)$. Тогда частные производные функции $\chi(q, \lambda)$ в точке (q, λ) равны

$$\forall h \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \quad \left| \frac{\partial \chi}{\partial q}(q, \lambda)(h) = \Delta \cdot \int_0^\ell h(\xi) y_\alpha^2(\xi) d\xi, \right. \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(q, \lambda) = -\Delta \cdot \int_0^\ell y_\alpha^2(\xi) d\xi. \quad (5.5)$$

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать следующую основную теорему.

ТЕОРЕМА 1. Пусть потенциал $q_b \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, вещественное число λ_b есть собственное значение, соответствующее потенциалу q_b , и элемент $y_b \in C[0, \ell]$ — соответствующая собственная функция, нормированная условием $\int_0^\ell y_b^2(\xi) d\xi = 1$. Тогда существуют открытая окрестность U точки $\lambda_b \in \mathbf{R}$ и открытая окрестность V точки $q_b \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, что для любого элемента $q \in V$ существует единственное число $\lambda \in U$, являющееся собственным значением задачи. Так определённая на окрестности V функция $\lambda = \lambda_b(q)$ аналитична. Производная функции λ_b в точке q_b имеет вид

$$\forall h \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \quad \left| \frac{d\lambda_b}{dq}(q_b)(h) = \int_0^\ell h(\xi) y_b^2(\xi) d\xi. \right. \quad (5.6)$$

Доказательство. Отображение $\chi : L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, определённое формулой (4.5), аналитично, как установлено в пункте 4. В силу леммы 1 и утверждения 3 частная производная $\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}(q_b, \lambda_b) \neq 0$. Применима теорема о неявной функции (см. [3, пункт 5.6.7]), из которой вытекает справедливость теоремы 1. \diamond

§ 6. Вектор-функция $Y_\alpha(x)$, собственная функция $y_\alpha(x)$ и нормированная в L_2 собственная функция $y_n(x)$

В пункте 2 мы построили решение векторной краевой задачи (2.1), (3.2), (3.3) в виде вектор-функции

$$Y_\alpha(x) = W(x, 0)N(\alpha), \quad (6.1)$$

где элемент $W = G(q - \lambda)$ и при заданном элементе $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ функция $\lambda = \lambda(q)$ выбрана как аналитическое решение уравнения

(4.4), существующее согласно теореме 1. Чтобы уточнить понимание выражения $G(q - \lambda)$ при $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ введём функцию $e \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, равную единице во всех точках $x \in [0, \ell]$, и в этом пункте будем писать $G(q - \lambda e)$, чтобы величины q и λe были элементами одного функционального пространства $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$.

Отображение, сопоставляющее каждому элементу $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ элемент $W = G(q - \lambda(q)e)$, будет аналитическим на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ как суперпозиция аналитических отображений вида: $q \mapsto (q, \lambda(q))$, $(q, \lambda) \mapsto q - \lambda e$, $f \mapsto G(f)$. Отображение сужения $V_0 : C([0, \ell]^2, M(2 \times 2)) \rightarrow C([0, \ell], M(2 \times 2))$, сопоставляющее непрерывной функции двух переменных $W(x, x_0)$ непрерывную функцию одной переменной $W(x, 0)$, линейно и непрерывно. Поэтому отображение $Q : L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \rightarrow C([0, \ell], M(2 \times 2))$ вида

$$Q(q) \equiv V_0(G(q - \lambda(q)e)) \quad (6.2)$$

аналитично на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$. Следовательно, решение $Y_\alpha \in C([0, \ell], \mathbf{R}^2)$ будет аналитической функцией потенциала q . Собственная функция $y_\alpha \in C[0, \ell]$ скалярной краевой задачи Штурма-Лиувилля (1.1-1.3) есть первая компонента векторной функции Y_α , т.е. получается умножением столбца $Y_\alpha(x)$ на постоянную строку $(1, 0)$, а именно

$$y_\alpha = (1, 0) \cdot Y_\alpha, \quad (6.3)$$

следовательно, также является аналитической функцией потенциала q при всех $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$.

Нормированная в гильбертовом пространстве L_2 собственная функция $y_n \in C[0, \ell]$ вида

$$y_n(x) = \gamma \cdot y_\alpha(x), \quad (6.4)$$

где

$$\gamma \equiv \left(\int_0^\ell y_\alpha^2(x) dx \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (6.5)$$

будет также аналитической функцией потенциала $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ на всём пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, ибо симметричная билинейная форма $\varphi : (C[0, \ell])^2 \rightarrow \mathbf{R}$ вида

$$\varphi(f_1, f_2) \equiv \int_0^\ell f_1(x) f_2(x) dx \equiv \langle f_1, f_2 \rangle \quad (6.6)$$

непрерывна и положительно определена, а функция $f(z) = z^{-\frac{1}{2}}$ при $z > 0$ аналитична.

ТЕОРЕМА 2. При каждом фиксированном номере $n \in \mathbf{N}$ отображение $\lambda_n: L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$, сопоставляющее потенциалу $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$, соответствующее n -ное собственное значение $\lambda_n \in \mathbf{R}$, аналитично на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$. Соответствующая векторная функция $Y_\alpha \in C([0, \ell], \mathbf{R}^2)$ вида (6.1), собственная функция $y_\alpha \in C[0, \ell]$ вида (6.3) и нормированная в L_2 собственная функция $y_n \in C[0, \ell]$ вида (6.4) также являются аналитическими функциями потенциала $q \in L_1([0, \ell], \mathbf{R})$ на всём банаховом пространстве $L_1([0, \ell], \mathbf{R})$.

§ 7. Вычисление производных

Производная $\frac{dY_\alpha}{dq}$ равна

$$\forall h \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \quad \forall x \in [0, \ell] \quad \left| \frac{dY_\alpha}{dq}(q)(h)(x) = \right. \quad (7.1)$$

$$W(x, 0) \int_0^x S_\perp^\top(\xi_2) \left(h(\xi_2) - \int_0^\ell y_n^2(\xi_1) h(\xi_1) d\xi_1 \right) y_\alpha(\xi_2) d\xi_2.$$

Тогда согласно формуле (6.3) производная $\frac{dy_\alpha}{dq}$ равна

$$\forall h \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \quad \forall x \in [0, \ell] \quad \left| \frac{dy_\alpha}{dq}(q)(h)(x) = \right. \quad (7.2)$$

$$\int_0^\ell g(x, \xi_2) \left(h(\xi_2) - \int_0^\ell y_n^2(\xi_1) h(\xi_1) d\xi_1 \right) y_\alpha(\xi_2) d\xi_2.$$

где отображение $g: [0, \ell]^2 \rightarrow \mathbf{R}$ определено следующей формулой

$$g(x, \xi) \equiv \begin{cases} S(x)S_\perp^\top(\xi), & 0 \leq \xi \leq x; \\ 0, & \xi > x. \end{cases} \quad (7.3)$$

Дифференцируя произведение (6.4), получаем производную $\frac{dy_n}{dq}$

$$\forall h \in L_1([0, \ell], \mathbf{R}) \quad \forall x \in [0, \ell] \quad \left| \frac{d}{dq} y_n(q)(h)(x) = \right.$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\ell g(x, \xi_2) \left(h(\xi_2) - \int_0^\ell y_n^2(\xi_1) h(\xi_1) d\xi_1 \right) y_n(\xi_2) d\xi_2 - \\ &- y_n(x) \int_0^\ell y_n(\xi_3) \int_0^\ell g(\xi_3, \xi_2) \left(h(\xi_2) - \int_0^\ell y_n^2(\xi_1) h(\xi_1) d\xi_1 \right) y_n(\xi_2) d\xi_2 d\xi_3. \end{aligned}$$

Литература

1. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи. — М.: Мир, 1968.
2. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1,2. — М.: Мир, 1972.
3. *Бурбаки Н.* Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. — М.: Мир, 1975.
4. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // Докл. АН. 1999. Т. 365. № 3. С. 295-297.
5. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // Докл. АН. 2003. Т. 392. № 5. С. 592-597.
6. *Винокуров В.А.* Частицы из среды. — <http://vinokur.narod.ru/vinbook.htm> : Интернет, 2002.
7. *Винокуров В.А.* // Докл. АН. 2005. Т. 402. № 2. С. 155-158.