

УДК 517.984

## О неединственности решения системы регуляризованных следов.<sup>1</sup>

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

В 1957 г. И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий [1] предложили использовать полную систему регуляризованных следов для приближенного вычисления первых собственных чисел. Они предположили, что всегда возможно, располагая полной системой регуляризованных следов оператора (в данном случае Штурма – Лиувилля)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^k - A_k(n)) = B(k), \quad k = 1, \dots, \infty \quad (1)$$

для заданного  $\varepsilon > 0$  найти такое  $N$ , что система

$$\sum_{n=1}^N (\mu_n^k - A_k(n)) = B(k), \quad k = 1, \dots, N \quad (2)$$

определяет первые собственные числа  $\{\mu_n\}_{n=1}^N$  с точностью  $\varepsilon$ .

В 1996 году С. А. Шкарин [2] доказал, что системы уравнений, подобные (1), имеют бесконечно много решений и в частности, в них можно заранее задавать любое конечное множество  $\{\mu_n\}$  и найдется соответствующее решение всей системы. Подобное обстоятельство делает рассмотрение систем типа (2) в общем случае просто бессмысленным. Тем не менее были найдены другие подходы к этой задаче. В нашей работе [3] введён специальный класс  $S$  операторов Штурма – Лиувилля, для которого подобная схема обоснована, а сам класс плотен среди операторов с потенциалом из  $L_2$ .

В этой заметке будет показано, как неединственность решения системы следов (1) для операторов более высокого порядка следует из

---

<sup>1</sup> Докл. РАН, 2005, т. 402, №4, с. 455 – 456.

результатов работы В. Б. Лидского и В. А. Садовниченко [4], в которой был дан общий метод нахождения регуляризованных сумм корней некоторого класса целых функций, включающий в себя характеристические определители широких классов обыкновенных дифференциальных операторов. Напомним необходимые нам определения и результаты этой работы.

Рассмотрим целую функцию  $f(z)$ , такую, что при некотором целом  $N$  она представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^n e^{\alpha_k z} P_{k,N}(z) \quad (3)$$

где  $\alpha_k \in \mathbb{C}$ , а

$$P_{k,N}(z) = z^{n_k} \sum_{l=0}^N \beta_l^{(k)} z^{-l} + o(z^{n_k-N}), \quad |z| \rightarrow \infty \quad (4)$$

причем комплексную плоскость можно покрыть конечным числом открытых секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых функции  $P_{k,N}(z)$  являются аналитическими при  $z > R$  для достаточно большого  $R$ . Такие целые функции  $f(z)$  называются функциями класса  $K$ . Мы далее будем считать, что разложение функций  $P_{k,N}(z)$  имеет место для любого  $N$  и индекс  $N$  будем опускать.

Рассмотрим на комплексной плоскости точки  $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_n$  (3), и их выпуклую оболочку обозначим через  $R$ . Это  $r$ -угольник,  $r \leq n$ , и без ограничения общности будем считать, что в вершинах  $R$  лежат числа  $\bar{\alpha}_0, \dots, \bar{\alpha}_{r-1}$ . Далее будем предполагать, что  $R$  не вырождается в отрезок.

В [4] доказано, что значения аналитического продолжения дзета-функции, ассоциированной с корнями  $f(z)$ , выражаются через коэффициенты асимптотического разложения

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha_j + \frac{P_j'(z)}{P_j(z)} + \underline{O}(e^{-\delta|z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_{\nu}^{(j)}}{z^{\nu}}$$

вдоль луча, на котором экспонента  $e^{\alpha_j z}$  имеет наибольший рост среди экспонент  $\{e^{\alpha_s z}\}_{s=0}^{s=r-1}$ . С другой стороны, относительно корней  $f(z)$  доказано, что их множество распадается на  $r$  серий

$$z_{n,s} = a_s n(1 + \bar{o}(1)), \quad a_s = \frac{2\pi i}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}, \quad s = 0, \dots, r-1,$$

в каждой серии асимптотическое разложение может быть уточнено, но все коэффициенты зависят только от коэффициентов асимптотик (4) при  $k = 0, \dots, r - 1$ .

Таким образом, из результатов работы [4] следует, что все коэффициенты в системе (1) как справа, так и слева зависят только от параметров суммы (3) при  $k = 0, \dots, r - 1$ . Рассмотрим семейство функций класса  $K$  вида  $f_a(z) = f(z) + ae^{\varepsilon z}$ , где  $\varepsilon$  выбрано лежащим во внутренности  $R$ . Тогда для любой функции этого семейства вся полная система следов в точности совпадет с системой следов функции  $f(z)$ , однако для любых двух  $a_1 \neq a_2$  множества корней функций  $f_{a_1}(z)$  и  $f_{a_2}(z)$  будут полностью различны, то есть в одну и ту же систему уравнений будет подходить континуум различных последовательностей. Далее, выберем произвольные комплексные числа  $\{z_j\}_{j=1}^{j=J}$  и подберем параметры  $\{a_j\}_{j=1}^{j=J}$  и  $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{j=J}$  так, чтобы функция  $F(z) = f(z) + \sum_{j=1}^J a_j e^{\varepsilon_j z}$  имела нули в точках  $\{z_j\}_{j=1}^{j=J}$  и при этом ее полная система следов по-прежнему совпадала с системой функции  $f(z)$ .

Запишем соответствующую систему:

$$\sum_{j=1}^J a_j e^{\varepsilon_j z_l} = -f(z_l), \quad l = 1, \dots, J. \quad (5)$$

Для того, чтобы не изменилась система следов, достаточно взять произвольные числа  $\{\varepsilon_j\}_{j=1}^{j=J}$  лежащие внутри любого из отрезков, соединяющего две вершины многоугольника  $R$ , и очевидно, что при этом их всегда можно выбрать так, чтобы определитель системы (5)  $\det(e^{\varepsilon_j z_l}) \neq 0$ . Тогда из системы (5) однозначно определяется набор  $\{a_j\}_{j=1}^{j=J}$  и искомая функция  $F(z)$  найдена.

## Литература

1. Дикий Л. А. Новый способ приближенного вычисления собственных чисел задачи Штурма-Лиувилля. ДАН СССР, 1957, т. 116, №1, с. 12 – 14.
2. Шкарин С. А. О способе Гельфанда-Дикого вычисления первых собственных значений оператора Штурма-Лиувилля. Вестник МГУ, сер. 1, 1996, №1, с. 39 – 44.

- 
3. Садовничий В. А., Подольский В. Е. Об одном классе операторов Штурма–Лиувилля и приближенном вычислении первых собственных значений. Мат. сборник, 1998, т. 189, №1, с. 133 – 148.
  4. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций. Функ.ан. и его прил., 1967, т. 1, №2, с. 52 – 59.