

УДК 517.984

Об обобщенной функции спектрального сдвига и связи формул следа Крейна и Гельфанда – Левитана.¹

В. А. Садовничий, В. Е. Подольский

В 1953 году в знаменитой работе И. М. Гельфанда и Б. М. Левитана [1] для оператора Штурма – Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \quad (1)$$

при дополнительном условии $\int_0^\pi q(x) dx = 0$ была получена формула регуляризованного следа

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\mu_n - \lambda_n) = \frac{1}{4} (q(0) + q(\pi)), \quad (2)$$

здесь μ_n — собственные числа оператора (1), а $\lambda_n = n^2$ — собственные числа такого же оператора с $q(x) \equiv 0$.

В том же 1953 году вышла работа М. Г. Крейна [2], в которой была строго доказана формула следа работы И. М. Лифшица [3]. М. Г. Крейн доказал, что для самосопряжённого оператора H и самосопряжённого ядерного возмущения T верна формула

$$\mathrm{Tr} (\Phi(H + T) - \Phi(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda) \xi(\lambda) d\lambda, \quad (3)$$

где функция спектрального сдвига $\xi(\lambda) \equiv \xi(\lambda, H, H + T)$ зависит только от пары операторов H и T , для неё М. Г. Крейном было найдено представление

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \arg D_{(H+T)/H}(\lambda + i\varepsilon) \quad (4)$$

¹ Докл. РАН, 2005, т. 402, №3, с. 311 – 312.

почти всюду на \mathbb{R} , здесь $D_{(H+T)/H}(z)$ — определитель возмущения, для $\xi(\lambda)$ верна оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\xi(\lambda)| d\lambda \leq \|T\|_1 \quad (5)$$

и равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \xi(\lambda) d\lambda = \text{Tr } T, \quad (6)$$

функция $\Phi(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ имеет вид

$$\Phi(\lambda) = \int_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{d\mu(z)}{\lambda - z}, \quad \text{где} \quad \int_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{|d\mu(z)|}{|\text{Im } z|^k} < \infty, \quad k = 1, 2$$

здесь $\mu(z)$ — вполне аддитивная комплекснозначная функция на ограниченных борелевских множествах из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. За формулой (3) в дальнейшем закрепилось название формулы следа Крейна, она обобщалась многими авторами на более широкие классы пар операторов и классы функций $\Phi(\lambda)$, см. [4].

В настоящей работе мы остановимся на вопросе, впервые поставленном И. М. Гельфандом в 1956 году [5]: установить прямую связь формул следа типа Крейна и типа Гельфанда – Левитана. Поясним, о чем идет речь.

В формуле Крейна из двух операторов H и $H + T$ конструируется **один ядерный** оператор $\Phi(H + T) - \Phi(H)$ и далее находится выражение для его следа, ценность которого в четком разделении вклада исходной пары операторов, определяемого их функцией спектрального сдвига $\xi(\lambda)$, и вклада самой конструкции этого ядерного оператора, определяемой функцией $\Phi(\lambda)$.

В формуле типа Гельфанда – Левитана речь всегда идет о двух операторах, никакой ядерности разности операторов не предполагается по самому смыслу задачи, а находится явное выражение для некоторой числовой характеристики — суммы разностей собственных чисел (при необходимости дополнительно регуляризованной).

Мы для дискретных операторов предлагаем обобщение понятия функции спектрального сдвига и соответствующее обобщение формулы Крейна, которое естественно включит в себя формулу Гельфанда – Левитана. Мы увидим, что обсуждаемая связь формул с одной стороны, обладает определенным единством для операторов с произвольной природой спектра, но с другой стороны, есть существенные различия в зависимости от того, являются рассматриваемые операторы дискретными или нет.

Итак, рассмотрим два самосопряженных дискретных оператора A_1 и A_2 с собственными числами $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ соответственно и с собственными векторами $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$, образующими два ортонормированных базиса. Тогда существует унитарный оператор U , определяемый действием на базисе $U\psi_n = \varphi_n$, такой что операторы A_1 и UA_2U^{-1} коммутируют. Так как спектр оператора является унитарным инвариантом, и так как для пары дискретных операторов функция спектрального сдвига есть разность считающих функций $N_i(\lambda)$, то для функций спектрального сдвига $\xi(\lambda, A_1, A_2)$ пары A_1 и A_2 и $\xi(\lambda, A_1, UA_2U^{-1})$ пары A_1 и UA_2U^{-1} очевидно верно равенство

$$\xi(\lambda, A_1, A_2) = \xi(\lambda, A_1, UA_2U^{-1}). \quad (7)$$

Это равенство позволяет для дискретных операторов сформулировать следующее обобщение формулы Крейна, которое мы сформулируем в виде определения, опирающегося на классические результаты: если для пары дискретных операторов $H + T$ и H существует унитарный оператор U такой, что для некоторого класса функций $\Phi(\lambda)$ оператор

$$\Phi(U(H + T)U^{-1}) - \Phi(H)$$

ядерный, то регуляризованным следом оператора $\Phi(H + T)$ относительно оператора $\Phi(H)$ называется величина

$$\text{Tr}(\Phi(U(H + T)U^{-1}) - \Phi(H)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'(\lambda)\xi(\lambda) d\lambda, \quad (8)$$

причем в силу (7) можно считать, что в интеграле стоит функция спектрального сдвига операторов $H + T$ и H . Применение к оператору Штурма – Лиувилля (1) тривиально: если (как и предполагали авторы [1]) среднее потенциала на отрезке равно нулю, то асимптотика собственных чисел $\mu_n = n^2 + O(1/n^2)$ ясно показывает (в силу абсолютной сходимости ряда из остаточных членов), что этот оператор унитарно эквивалентен оператору $-d^2/dx^2$ с теми же краевыми условиями, возмущенному ядерным оператором, и тогда формула (8) применима с функцией $\Phi(\lambda) = \lambda$, причем (в несколько вольных обозначениях)

$$\text{Tr} \left(U \left(-\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \right) U^{-1} + \frac{d^2}{dx^2} \right) = \sum (\mu_n - n^2).$$

Заметим, что способ вычисления левой части до окончательного ответа неочевиден, и хотя в данном случае его, по-видимому, можно найти

с помощью операторов преобразования, вряд ли он будет проще даже метода оригинальной работы [1].

Для операторов с непрерывным спектром это рассуждение не годится — хотя спектр и является унитарным инвариантом, однако функция спектрального сдвига в этом случае таковым не является: например, если оператор второго порядка на полуоси возмутить таким убывающим потенциалом, что дискретный спектр не появляется, то этот оператор унитарно эквивалентен невозмущенному, и равенство (7) не имеет места, а верно $\xi(\lambda, A_1, UA_2U^{-1}) = 0$. Однако хорошо известно, что среди осуществляющих эту унитарную эквивалентность операторов можно выделить два оператора $U^{(\pm)}$, называемых волновыми операторами

$$U^{(\pm)} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{iA_2t} e^{-iA_1t} \quad (9)$$

таких, что оператор рассеяния $S = U^{(+)*}U^{(-)}$ содержит всю информацию о функции спектрального сдвига, собственно, в этом и состоит основной результат работы [6] — знаменитая формула Бирмана — Крейна:

$$\det S(\lambda) = e^{-2i\pi\xi(\lambda)}. \quad (10)$$

Таким образом, в обоих случаях связь между двумя типами формул следов осуществляется с помощью правильно примененных унитарных преобразований, и любопытна возникающая при этом "зеркальность": в дискретном случае унитарный оператор полностью сохраняет нужную информацию в самих операторах, в непрерывном напротив, полностью уничтожает, забирая ее при этом в себя.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. ДАН СССР, т. 88, 1953, с. 593 — 596.
2. Крейн М. Г. О формуле следов в теории возмущений. Мат. сб., 1953, т. 33, вып. 3, с. 597 — 626.
3. Лифшиц И. М. Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой. УМН, 1952, т. 7, №1, с. 171 — 180.
4. Бирман М. Ш., Яфаев Д. Р. Функция спектрального сдвига. Работы М. Г. Крейна и их дальнейшее развитие. Алгебра и анализ, 1992, т. 4, вып. 5, с. 1 — 44.

5. Гельфанд И. М. О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка. УМН, 1956, т. 11, №1, с. 191 – 198.
6. Бирман М. Ш., Крейн М. Г. К теории волновых операторов и операторов рассеяния. ДАН СССР, 1962, т. 144, №3, с. 475 – 478.