

УДК 517.51

О рекурсивных разложениях по цепочке систем¹

Т. П. Лукашенко, В. А. Садовничий

1. Введение

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем \mathbb{R} или \mathbb{C} . Рассмотрим рекурсивные разложения элементов H по цепочке систем.

Пусть $\{\varphi_k\}_k$ такая конечная или счетная система в H , что для любого $f \in H$

$$f = \sum_k (f, \varphi_k) \varphi_k. \quad (1)$$

Такая система $\{\varphi_k\}_k$ называется *ортоподобной* системой или *фреймом Парсеваля* в H (или из H), см. [1]. В частности, ей может быть полная ортонормированная в H система. Из равенства (1) следует, что для любого $f \in H$

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_k (f, \varphi_k) \overline{(f, \varphi_k)} = \sum_k |(f, \varphi_k)|^2, \quad (2)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Определение 1. Будем называть сумму $\sum_k (f, \varphi_k) \varphi_k$ *приближением элемента* $f \in H$ по ортоподобной системе $\{\varphi_k\}_k$ из M — подпространства H , а $r = f - \sum_k (f, \varphi_k) \varphi_k$ — *остатком приближения*.

Определение 2. *Рекурсивное разложение* элемента $f \in H$ определяется следующим образом: 1) пусть $r_0 = f$; 2) если задан остаток

¹ Доклады РАН, т. 425, №6, с. 1-6.

приближения r_{m-1} , $m \in \mathbb{N}$, и ортоподобная система $\{\varphi_k^m\}_k$ из подпространства $H_m \subset H$, то полагаем

$$\hat{f}_k^m = (r_{m-1}, \varphi_k^m) \text{ для всех } k \text{ и } r_m = r_{m-1} - \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m. \quad (3)$$

Из формулы (2) и [2], с. 171-173, следует, что выполняется равенство

$$\|r_{m-1}\|^2 = \|r_{m-1} - r_m\|^2 + \|r_m\|^2 = \sum_k |\hat{f}_k^m|^2 + \|r_m\|^2. \quad (4)$$

Назовем \hat{f}_k^m *рекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по m -ой системе $\{\varphi_k^m\}_k$ из подпространства H_m .

В соответствии со схемой рекурсивных разложений начиная с $r_0 = f$ будем приближать получаемый остаток r_{m-1} суммами по m -ой системе $\sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m$ и, получив следующий остаток r_m , будем приближать уже его суммами по следующей $m+1$ -ой системе и т.д., до бесконечности или останавливая процесс приближения в некоторый момент.

В рекурсивных разложениях имеются две существенно различающиеся схемы разложений. Можно после получения остатка r_{m-1} выбирать следующую ортоподобную систему $\{\varphi_k^m\}_k$ в зависимости от достигнутого результата (т.е. в зависимости от предыдущих шагов и остатка r_{m-1}) или системы и их порядок заранее фиксированы и не меняются в процессе разложения. В первой схеме имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но отсутствует линейность разложения. Вторая схема привлекательна линейностью разложения и отсутствием усложняющего разложение алгоритма оптимизации (выбора следующей системы).

В простейшем случае системы $\{\varphi_k^m\}_k$ могут состоять из одного элемента, тогда подпространства H_m имеют размерность 1. В этом случае реализацией первой схемы разложения являются так называемые “жадные” алгоритмы, когда следующая одноэлементная система выбирается из некоторого множества элементов как дающая наилучшее приближение имеющегося остатка. Одной из первых работ с рекурсивным разложением является [3], хотя ее авторов больше интересовало доказательство аналога равенства Парсеваля. В этой работе для каждого элемента пространства $L^2[0, 1]$ рекурсивно строилась своя система разложения из функций, принимающих значения ± 1 . Подробнее о “жадных” алгоритмах см. [4, 5]. Реализация второй схемы в случае, когда каждая система цепочки состоит из одного элемента, была рассмотрена в [6]. Некоторое ее обобщение изучалось в

[7]. Отметим также, что если φ_k^m нормированы и при несовпадающих индексах ортогональны, то $\hat{f}_k^m = (f, \varphi_k^m)$ и рекурсивное разложение является обычным разложением по ортонормированной системе.

Определение 3. Рекурсивным рядом Фурье элемента $f \in H$ по цепочке систем $\{\{\varphi_k^n\}_k\}_{n=1}^N$, $\{\varphi_k^n\}_k \subset H_n \subset H$, где N — натуральное число или $+\infty$, будем называть ряд

$$\sum_{n=1}^N \sum_k \hat{f}_k^n \varphi_k^n.$$

Утверждение 1. Для любого $f \in H$ и любого натурального $n \leq N$

$$f = \sum_{m=1}^n (r_{m-1} - r_m) + r_n = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m + r_n \quad (5)$$

и

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^n \|r_{m-1} - r_m\|^2 + \|r_n\|^2 = \sum_{m=1}^n \sum_k \left| \hat{f}_k^m \right|^2 + \|r_n\|^2. \quad (6)$$

Это следует из (3) и (4).

Определение 4. Частичной суммой рекурсивного ряда Фурье с номером n , натуральное $n \leq N$, назовем сумму

$$S_n(f) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1} - r_m) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m.$$

Теорема 1 (тождество Бесселя). Для любого элемента $f \in H$ имеем равенство $f - S_n(f) = r_n(f)$ и выполняется аналог известного тождества Бесселя

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n \sum_k \left| \hat{f}_k^m \right|^2. \quad (7)$$

Утверждения теоремы следуют из формул (6) и (5).

Из тождества Бесселя имеем ряд следствий.

Следствие 1 (неравенство Бесселя). Для любого элемента $f \in H$ верно неравенство Бесселя

$$\sum_{m=1}^N \sum_k \left| \hat{f}_k^m \right|^2 \leq \|f\|^2.$$

Действительно, $\|f\|^2 - \sum_{m=1}^n \sum_k \left| \hat{f}_k^m \right|^2 = \|f - S_n(f)\|^2 \geq 0$ по тождеству Бесселя. Полагая $n = N$ в случае конечного N или устремляя n к $+\infty$ в случае бесконечного N , получаем неравенство Бесселя.

Следствие 2. Сумма рекурсивного ряда Фурье $S_N(f)$ равна f тогда и только тогда, когда выполняется аналог равенства Парсеваля

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^N \|r_{m-1} - r_m\|^2 = \sum_{m=1}^N \sum_k \left| \hat{f}_k^m \right|^2.$$

В случае конечного N это следствие тождества Бесселя (7). В случае бесконечного N устремим в (7) n к бесконечности и получим утверждение следствия.

Теорема 2 (равенство Парсеваля). Если рекурсивный ряд Фурье элемента $f \in H$ по цепочке систем сходится к f , а рекурсивный ряд Фурье элемента $g \in H$ по той же цепочке систем сходится к g , то выполняется равенство Парсеваля

$$(f, g) = \sum_{n=1}^N \sum_k \hat{f}_k^n \overline{\hat{g}_k^n}.$$

Доказательство. Оператор из H в l^2 $T: f \rightarrow \{\hat{f}_k^n\}$ для фиксированной цепочки систем линеен и, поскольку рекурсивный ряд Фурье линейной комбинации $\alpha f + \beta g$ сходится к ней, то по следствию 2 оператор T при сужении на линейную оболочку элементов f и g является изометрическим (сохраняющим метрику), а значит, унитарным (сохраняющим скалярное произведение), ведь скалярное произведение определяется метрикой. Так если H — гильбертово пространство над полем \mathbb{R} , то для любых элементов $u, v \in H$ $(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$, а если H — гильбертово пространство над полем \mathbb{C} , то для любых элементов $u, v \in H$ $(u, v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2)$.

Замечание 1. В рекурсивных разложениях могут быть интересны не только ортоподобные, а и другие системы из H_m , позволяющие разложить любой элемент H_m в ряд по элементам этой системы (базисы, фреймы и т.п.). При этом если приближая остаток r_{m-1} , $m \in \mathbb{N}$, системой $\{\varphi_k^m\}_k \subset H_m$ разлагаем в ряд по элементам этой системы $P_m(r_{m-1})$ — ортогональную проекцию r_{m-1} на H_m и полагаем $r_m = r_{m-1} - P_m(r_{m-1}) \in H_m^\perp$, где H_m^\perp — ортогональное дополнение H_m в H , то для любого $f \in H$ и любого натурального $n \leq N$

$f = \sum_{m=1}^n (r_{m-1} - r_m) + r_n$, $\|f\|^2 = \sum_{m=1}^n \|r_{m-1} - r_m\|^2 + \|r_n\|^2$, и выполняется аналог тождества Бесселя

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n \|r_{m-1} - r_m\|^2.$$

2. Рекурсивное разложение по расширяющимся подпространствам

Рассмотрим частный случай рекурсивного разложения, когда $H_n \subset H_{n+1}$ для всех n , $1 \leq n < N$, и $\bigcup_{n=1}^N H_n$ всюду плотно в H (в случае конечного N это означает, что $H_N = H$). Тогда для любого элемента $f \in H$ и любого натурального $m \leq N$

$$S_m(f) = P_m(f) = \sum_k (f, \varphi_k^m) \varphi_k^m,$$

где P_m — оператор ортогонального проектирования на H_m ,

$$\sum_k \widehat{f}_k^m \varphi_k^m = S_m(f) - S_{m-1}(f) = P_m(f) - P_{m-1}(f)$$

— ортогональная проекция f на ортогональное дополнение H_{m-1}^\perp в H_m , а $f - S_m(f) = f - P_m(f)$ — ортогональная проекция f на H_m^\perp — ортогональное дополнение H_m в H . Так как $\bigcup_{n=1}^N H_n$ всюду плотно в H , то $S_N(f) = f$ при конечном N , а при бесконечном N частичные суммы $S_m(f)$ стремятся к f при $m \rightarrow \infty$, т.е.

$$f = S_N(f) \quad \text{и} \quad \|f\|^2 = \sum_{m=1}^N \sum_k \left| \widehat{f}_k^m \right|^2. \quad (8)$$

Замечание 2. Если в рекурсивном разложении по расширяющимся подпространствам используются не ортоподобные, а другие системы из H_m , позволяющие разложить любой элемент H_m в ряд по элементам этой системы, и если приближая остаток r_{m-1} , $m \in \mathbb{N}$, системой $\{\varphi_k^m\}_k \subset H_m$ разлагаем в ряд по ней $P_m(r_{m-1})$ — ортогональную проекцию r_{m-1} на H_m и полагаем $r_m = r_{m-1} - P_m(r_{m-1}) \in H_m^\perp$ (где H_m^\perp — ортогональное дополнение H_m в H), то также $f = S_N(f)$ и

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^N \|r_{m-1} - r_m\|^2 = \sum_{n=1}^N \|S_m(f) - S_{m-1}(f)\|^2.$$

Так как $\varphi_k^{n-1} \in H_n$, то $\varphi_k^{n-1} = \sum_j c_j^n(\varphi_k^{n-1}) \varphi_j^n$, где $c_j^n(\varphi_k^{n-1})$ могут быть равными $(\varphi_k^{n-1}, \varphi_j^n)$ (ведь система $\{\varphi_j^n\}_j$ ортоподобна в H_n), но могут быть и другими (в случае, если система $\{\varphi_j^n\}_j$ переполнена). Тогда для любого $f \in H$ будут верны равенства

$$(f, \varphi_k^{n-1}) = \sum_j c_j^n(\varphi_k^{n-1})(f, \varphi_j^n)$$

и

$$S_{n-1}(f) = \sum_k (f, \varphi_k^{n-1}) \varphi_k^{n-1} = \sum_k \sum_j \sum_l c_j^n(\varphi_k^{n-1}) \overline{c_l^n(\varphi_k^{n-1})} (f, \varphi_l^n) \varphi_j^n,$$

причем суммирование по j и l можно производить в любом порядке.

Так как для любого натурального $n \leq N$ и любого k имеем

$$\widehat{f}_k^n = (f - S_{n-1}(f), \varphi_k^n) = (f, \varphi_k^n) - \sum_j (f, \varphi_j^{n-1}) (\varphi_j^{n-1}, \varphi_k^n),$$

то

$$\begin{aligned} S_n(f) - S_{n-1}(f) &= \sum_k \widehat{f}_k^n \varphi_k^n = \\ &= \sum_k (f, \varphi_k^n) \varphi_k^n - \sum_k \sum_j (f, \varphi_j^{n-1}) (\varphi_j^{n-1}, \varphi_k^n) \varphi_k^n. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } S_n(f) - S_{n-1}(f) = \sum_k \left((f, \varphi_k^n) - \sum_j (f, \varphi_j^{n-1}) (\varphi_j^{n-1}, \varphi_k^n) \right) \varphi_k^n.$$

3. Свойства некоторых рекурсивных разложений

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, где Ω — множество, Σ — σ -алгебра его подмножеств, а μ — σ -аддитивная (неотрицательная) мера на Σ ; $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, где $1 \leq p < \infty$, — пространство Лебега всех μ -измеримых действительныхзначных (или комплекснозначных) функций f определенных почти всюду на Ω и таких, что $|f|^p$ интегрируема по Лебегу на Ω . В дальнейшем для краткости будем писать просто $L^p(\Omega)$ и нормой элемента f этого пространства будем считать величину $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p}$.

Пусть $H = L^2(\Omega)$ — гильбертово пространство, χ_k^m , $m, k \in \mathbb{N}$, — нормированные характеристические функции измеримых множеств E_k^m конечной строго положительной меры ($\|\chi_k^m\| \equiv 1$ и, значит,

$\chi_k^m(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^m)}}$ при $t \in E_k^m$ и $\chi_k^m(t) = 0$ при $t \notin E_k^m$, множества E_k^m и E_l^m при $k \neq l$ не пересекаются, а если $E_k^m \cap E_l^n \neq \emptyset$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$. Пусть H_m — замыкание линейной оболочки системы $\{\chi_k^m\}_k$ в H . В соответствии с определением 2 можно рассматривать рекурсивные разложения функций из H по цепочке систем $\{\chi_k^m\}_k$. Но для приведенных систем можно рассматривать и более общие рекурсивные разложения.

Если функция f интегрируема по Лебегу на любых измеримых множествах конечной меры, то определим ее рекурсивное разложение аналогично определению 2: 1) пусть $r_0 = f$; 2) если для натурального $n \leq N$ задан остаток приближения r_{m-1} и система $\{\chi_k^m\}_k$, то полагаем $\hat{f}_k^m = \int_{\Omega} r_{m-1} \chi_k^m d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^m)}} \int_{E_k^m} r_{m-1} d\mu$ для всех допустимых k и полагаем $r_m = r_{m-1} - \sum_k \hat{f}_k^m \chi_k^m$. Коэффициенты \hat{f}_k^m — рекурсивные коэффициенты Фурье функции f по цепочке систем $\{\chi_k^m\}_k$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 3. Для любой функции f , интегрируемой по Лебегу на измеримых множествах конечной меры, частичная сумма рекурсивного ряда Фурье по системам $\{\chi_k^m\}_k$

$$S_n(f) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1} - r_m) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \chi_k^m$$

имеет вид

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если не существует } E_k^m \ni x, m \leq n, \\ \frac{1}{\mu(E_k^m)} \int_{E_k^m} f d\mu, & \text{где } E_k^m \text{ — последнее } E_k^m \ni x, m \leq n. \end{cases}$$

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение верно, так как если $x \in E_k^1$, то $S_1(x) = \hat{f}_k^1 \chi_k^1(x) = \frac{1}{\mu(E_k^1)} \int_{E_k^1} f d\mu$, а если $x \notin \bigcup_k E_k^1$, то

$$S_1(x) = 0.$$

Предположим, что утверждение верно для $n = p$ и докажем его для $n = p + 1$. Если $x \in E_k^{p+1}$, то

$$\begin{aligned} S_{p+1}(x) &= S_p(x) + \hat{f}_k^{p+1} \chi_k^{p+1}(x) = \\ &= S_p(x) + \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^{p+1})}} \int_{E_k^{p+1}} r_p d\mu \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^{p+1})}} = \end{aligned}$$

$$= S_p(x) + \frac{1}{\mu(E_k^{p+1})} \int_{E_k^{p+1}} (f - S_p) d\mu,$$

а так как S_p постоянна на E_k^{p+1} , то $S_{p+1}(x) = \frac{1}{\mu(E_k^{p+1})} \int_{E_k^{p+1}} f d\mu$. Если $x \notin \bigcup_k E_k^{p+1}$, то $S_{p+1}(x) = S_p(x)$ и утверждение верно по предположению.

Замечание 3. Если для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$ (что влечет вложение $H_m \subset H_{m+1}$), то

$$S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если не существует } E_k^n \ni x, \\ \frac{1}{\mu(E_k^n)} \int_{E_k^n} f d\mu, & \text{где } x \in E_k^n. \end{cases} \quad (9)$$

Определение 5. Последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, натуральных $m \leq N$, обладает свойством *аппроксимации*, если для любого измеримого множества D конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой конечный набор множеств $E_{k_p}^m$ (попарно непересекающихся), $p = 1, \dots, P$, из одной системы, что $\mu\left(D \Delta \bigcup_{p=1}^P E_{k_p}^m\right) < \varepsilon$, где Δ обозначает симметрическую разность множеств (см. [1], с. 19).

Теорема 4. Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, натуральное $m \leq N$, обладает свойством аппроксимации и если для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, то для любой функции $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, частичные суммы рекурсивного ряда Фурье по системам $\{\chi_k^m\}_k$ $S_n(f) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \chi_k^m$ стремятся к f по метрике пространства $L^p(\Omega)$.

Доказательство. Из (9) и неравенства Гельдера (см. [1], с. 60)

$$\int_{E_k^n} |S_n(f)|^p d\mu = \left| \int_{E_k^n} f d\mu \right|^p \cdot (\mu(E_k^n))^{1-p} \leq \int_{E_k^n} |f|^p d\mu, \text{ поэтому верна}$$

оценка $\int_{\Omega} |S_n(f)|^p d\mu \leq \int_{\Omega} |f|^p d\mu = \|f\|_p^p$.

Если для некоторого $m \in \mathbb{N}$ функция $f \in L^p$ принимает постоянные значения на множествах E_k^m и равна нулю вне их объединения $\bigcup_k E_k^m$, то согласно (9) при $n \geq m$ имеем $S_n(f) = f$ на Ω и для таких функций утверждение теоремы верно.

Если функция $f \in L^p$ принимает только одно ненулевое значение, то в силу свойства аппроксимации для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное m и функция $g \in L^p$, принимающая постоянные значения на множествах E_k^m и равная нулю вне их объединения $\bigsqcup_k E_k^m$, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Тогда в силу линейности орторекурсивного разложения при $n \geq m$ имеем

$$\begin{aligned}\|f - S_n(f)\|_p &= \|f - g - S_n(f - g)\|_p \\ &\leq \|f - g\|_p + \|S_n(f - g)\|_p \leq 2\|f - g\|_p < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Значит, утверждение теоремы верно для функции принимающей только одно ненулевое значение, а в силу линейности и для функций $f \in L^p$ принимающих конечное множество значений, которые всюду плотны в L^p ([8], с. 136). Для любой функции $f \in L^p$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция g , принимающая конечное множество значений, что $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_p &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - g - S_n(f - g)\|_p + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|g - S_n(g)\|_p \leq \\ &\leq \|f - g\|_p + \sup_n \|S_n(f - g)\|_p \leq 2\|f - g\|_p < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n(f)\|_p = 0$ и утверждение теоремы верно.

Теорема 5. Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$ такова, что для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является конечным объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, а система функций Λ содержит только такие функции, которые равномерно на Ω приближается линейными комбинациями функций из объединения систем $\{\chi_k^m\}_k$, то для любой функции $f \in \Lambda$ частичные суммы рекурсивного ряда Фурье по системам $\{\chi_k^m\}_k$ $S_n(f)$ равномерно на Ω стремятся к f .

Доказательство. Пусть $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f(x)|$. Из вида частичных сумм (10) следует, что $\|S_n(f)\|_\infty = \sup_\Omega |S_n(f)(x)| \leq \sup_\Omega |f(x)| = \|f\|_\infty$. По условию для любой $f \in \Lambda$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такая функция g являющаяся линейной комбинацией функций из объединения систем, что $\|f - g\|_\infty = \sup_\Omega |f(x) - g(x)| < \varepsilon$. Поскольку для всех натуральных $m < N$ любое множество E_k^m является конечным объединением множеств $E_j^{m+1} \subset E_k^m$, то можно считать, что все участвующие в линейной комбинации функции принадлежат одной системе $\{\chi_k^m\}_k$,

а тогда при $n \geq m$ для всех $x \in \Omega$ верно равенство $S_n(g)(x) = g(x)$. Поэтому при $n \geq m$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} \sup_{\Omega} |f(x) - S_n(f)(x)| &= \|f - S_n(f)\|_{\infty} = \|f - g - S_n(f - g)\|_{\infty} \leq \\ &\leq \|f - g\|_{\infty} + \|S_n(f - g)\|_{\infty} \leq 2\|f - g\|_{\infty} < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Утверждение теоремы верно.

Литература

1. Лукашенко Т.П. О фреймах и обобщенных фреймах // Чебышевский сборник. 2006. Т. 7, вып. 1. С. 246-256.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004, 570.
3. Стечкин Б.С., Стечкин С.Б. Среднее квадратическое и среднее арифметическое // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, №2. 287-290.
4. Temlyakov V.N. Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. 2000. V. 12. №2, 3. P. 213-227.
5. Temlyakov V.N. Greedy approximation in Banach spaces // Banach Spaces and their Application. P. 193-208.
6. Лукашенко Т.П. О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Моск. ун-та. Сер. I. Матем. Механ. 2001. №1. С. 6-10.
7. Галатенко В.В. Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов // Матем. сборник. 2004. Т. 195, №7. С. 21-36.
8. Федоров В.М. Курс функционального анализа. СПб, изд-во "Лань" 2005, 351.