УДК 517.926
ББК 22.161.6
М 73

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12-01-07106*

Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. **Многоликий хаос.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. — 432 с. — ISBN 978-5-9221-1423-3.

В монографии рассматривается ряд фундаментальных вопросов, связанных с нелинейной динамикой и хаосом. В частности, даны новые определения инвариантного хаотического множества динамической системы и хаотического аттрактора. Предлагаемые здесь определения позволяют обнаружить новый тип хаотического поведения, реализующийся в некомпактном и бесконечномерном случае, — так называемый турбулентный хаос. Содержательность указанного феномена иллюстрируется на конкретном примере, допускающем строгий математический анализ.

Среди других тем, затронутых в данной книге, следует отметить вопрос о математических аспектах теории развития турбулентности по Ландау. А именно, реализуемость сценария Ландау в обобщенном его варианте иллюстрируется на ряде конкретных примеров из различных областей естествознания. Изучаются также некоторые другие типовые ситуации, когда при изменении управляющего параметра в системе возникает хаотический аттрактор или сосуществует достаточно много различных хаотических аттракторов (хаотическая буферность). Например, предлагается новый способ учета редких катастрофических событий в системах со сложным поведением, а также новый подход к проектированию генераторов хаотических колебаний.

Для студентов старших курсов, аспирантов математических и физических факультетов университетов, специалистов по прикладной математике, теории колебаний, нелинейной динамике и хаосу.

ISBN 978-5-9221-1423-3

# ОГЛАВЛЕНИЕ


Введение . . . . . . . . . . 7

Глава 1. **Определение хаоса** . . . . . . . . . . 15

1. О некоторых базовых определениях и понятиях, связанных с хаотической динамикой . . . . . . . . . . 15

1.1. Хаотичность по Девани и Кнудсену . . . . . . . . . . 15

1.2. Новое определение хаоса . . . . . . . . . . 17

1.3. Об объеме понятия «странный аттрактор» . . . . . . . . . . 21

1.4. Примеры аттракторов, состоящих из неустойчивых по Ляпунову периодических или квазипериодических траекторий . . . 25

1.5. Эргодический и энтропийный подходы к определению сложности . . . . . . . . . . 30

2. Базовая модель турбулентного хаоса . . . . . . . . . . 36

2.1. Общие свойства рассматриваемой системы . . . . . . . . . . 36

2.2. Структура турбулентного аттрактора . . . . . . . . . . 39

2.3. Регуляризация турбулентного хаоса . . . . . . . . . . 55

Глава 2. **Математические аспекты теории развития турбулентности по Ландау** . . . . . . . . . . 61

3. Базовая модель турбулентности по Ландау . . . . . . . . . . 61

3.1. Пример Хопфа . . . . . . . . . . 61

3.2. Описание и общие свойства новой модели . . . . . . . . . . 65

3.3. Нормальная форма и ее аттракторы . . . . . . . . . . 68

3.4. Итоговые выводы . . . . . . . . . . 70

4. Турбулентные структуры на поверхности мелкой воды . . . . . . . . . . 78

4.1. Разрешимость начально-краевой задачи . . . . . . . . . . 78

4.2. Существование и устойчивость инвариантных торов . . . . . . 84

4.3. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 89

5. Турбулентная экономическая динамика . . . . . . . . . . 94

5.1. Вывод математической модели . . . . . . . . . . 94

5.2. Общие свойства рассматриваемой краевой задачи . . . . . . . . 96

5.3. Основной результат . . . . . . . . . . 98

5.4. Развитая турбулентность . . . . . . . . . . 102

6. Турбулентная буферность и ее математические модели . . . . . . . . 106
6.1. Физическая постановка проблемы . . . . . . . . 106
6.2. Существование и устойчивость инвариантных торов . . . . . . 109
6.3. О других моделях турбулентной буферности . . . . . . . . . . 114
7. О реализуемости сценария Ландау–Селла . . . . . . . . . . 116
7.1. Общая постановка проблемы . . . . . . . . . . 116
7.2. Нелокальная разрешимость начально-краевой задачи . . . . . . 117
7.3. Анализ локальных аттракторов . . . . . . . . . . 124
7.4. Нелокальный случай . . . . . . . . . . 125

Глава 3. **Диффузионный хаос** . . . . . . . . . . 130
8. Диффузионный хаос и его конечномерные модели . . . . . . . . . . 130
8.1. Концепция диффузионного хаоса . . . . . . . . . . 130
8.2. Конечномерная модель фазовой турбулентности . . . . . . . . . . 137
8.3. Дискретный аналог уравнения Хатчинсона с диффузией . . . . 139
8.4. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 148
9. Диффузионный хаос в математической модели реакции Белоусова 149
9.1. Математическая модель и ее релаксационные свойства . . . . . 149
9.2. О некоторых свойствах предельного отображения . . . . . . . . 162
9.3. Результаты численных экспериментов по выявлению диффузионного хаоса . . . . . . . . . . 166
9.4. Заключение . . . . . . . . . . 170
10. Хаотическая буферность и ее математические модели . . . . . . . . 171
10.1. Постановка задачи . . . . . . . . . . 171
10.2. Основной результат . . . . . . . . . . 173
10.3. Случай граничных условий Неймана . . . . . . . . . . 176
10.4. Случай однонаправленно связанных осцилляторов . . . . . . . . 181
10.5. Существование бесконечномерного хаотического аттрактора 187
10.6. Заключение . . . . . . . . . . 188

Глава 4. **Жизнь на кромке хаоса** . . . . . . . . . . 191
11. Аттракторы типа жесткой турбулентности . . . . . . . . . . 192
11.1. Описание объекта исследования . . . . . . . . . . 192
11.2. Характер поведения траекторий . . . . . . . . . . 195
11.3. Описание результатов . . . . . . . . . . 206
11.4. «Охота на хаос» . . . . . . . . . . 209
12. Режимы типа переключающей перемежаемости . . . . . . . . . . 211
12.1. Описание ограничений . . . . . . . . . . 211
12.2. Описание результатов . . . . . . . . . . 213
12.3. О реализуемости условий 12.1–12.7 . . . . . . . . . . 221
12.4. Заключительные замечания . . . . . . . . . . 223

Глава 5. **Хаотические колебания в резонансных системах** . . . . . . 226

13. Явления хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов . . . . . . . . . . 227
  13.1. Локальная постановка проблемы . . . . . . . . 227
  13.2. Нелокальные случаи . . . . . . . . 231
  13.3. Заключение . . . . . . . . 237
14. Механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом 1 : 2 . . . . . . . . 239
  14.1. Общая постановка проблемы . . . . . . . . 239
  14.2. Локальная постановка задачи . . . . . . . . 240
  14.3. Исследование автомодельных циклов . . . . . . . . 245
  14.4. Результаты численного анализа . . . . . . . . 248
  14.5. Заключение . . . . . . . . 253
15. Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем . . . . . . . . 260
  15.1. Общие свойства рассматриваемого класса уравнений . . . . . 260
  15.2. Основная бифуркационная теорема . . . . . . . . 262
  15.3. Анализ радиофизического примера . . . . . . . . 268
  15.4. Взаимодействие резонансов 1 : 1 и 1 : 2 . . . . . . . . 269
  15.5. Квазистационарная динамика . . . . . . . . 272
  15.6. Результаты численного анализа нормальной формы в случае взаимодействия резонансов . . . . . . . . 276
  15.7. Однонаправленное взаимодействие флаттерных систем . . . . 277
16. Аттракторы уравнения Sin-Гордона в поле квазипериодической внешней силы . . . . . . . . 285
  16.1. Общие сведения о многочастотном резонансе . . . . . . . . 285
  16.2. Основные результаты . . . . . . . . 291
  16.3. Численный анализ . . . . . . . . 301

Глава 6. **Аттракторы дискретных волновых уравнений** . . . . . . . . 306

17. Эффекты дискретизации в пространственно одномерном случае. . . 307
  17.1. Базовая модель и ее свойства . . . . . . . . 307
  17.2. Анализ дискретной модели для отрезка . . . . . . . . 312
  17.3. Кольцевая дискретная модель . . . . . . . . 318
  17.4. Дискретное уравнение Гинзбурга–Ландау . . . . . . . . 324
18. Аттракторы дискретного волнового уравнения в пространственно двумерном случае . . . . . . . . 330
  18.1. Физическая постановка задачи . . . . . . . . 330
  18.2. Случай свободной границы . . . . . . . . 332
  18.3. Случай граничных условий Дирихле . . . . . . . . 346
  18.4. Анализ непрерывных моделей . . . . . . . . 352
  18.5. Итоговые замечания . . . . . . . . 356

Глава 7. **Дискретные автоволны в системах с запаздыванием** . . . . 359
19. О некоторых модификациях уравнения Хатчинсона . . . . . . . . . . 359
19.1. Постановка проблемы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 359
19.2. Теорема о существовании и устойчивости цикла . . . . . . . . 362
19.3. Доказательство существования релаксационного цикла . . . 363
19.4. Анализ свойств устойчивости . . . . . . . . . . . . . . . . 369
20. Теорема о $C^1$-сходимости для билокальной модели . . . . . . . . 371
20.1. Основные теоремы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 371
20.2. Обоснование $C$-сходимости . . . . . . . . . . . . . . . . . 376
20.3. Доказательство $C^1$-сходимости . . . . . . . . . . . . . . . 388
21. Дискретные автоволны . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 392
21.1. Базовая теорема . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 392
21.2. Анализ предельного отображения . . . . . . . . . . . . . . 394
21.3. Итоговые замечания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 410
Заключение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 413
Список литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 420

# Введение

Имеющуюся к настоящему времени монографическую литературу, затрагивающую так или иначе тему сложной динамики и хаоса, с некоторой долей условности можно разделить на два класса. К первому из них отнесем совокупность книг «физической» направленности. В этих книгах, как правило, описывается ряд эвристических или полуэвристических критериев существования хаоса, связанных с наличием положительного ляпуновского показателя, с непрерывностью спектра, дробностью какой-либо размерности, убыванием корреляций, наличием бесконечной серии бифуркаций удвоения периода и т. д. Рассматриваются также конкретные примеры динамических систем, для которых на основании одного из перечисленных или какого-либо иного критерия делается вывод о существовании странного аттрактора.

Типичными представителями физической литературы по хаосу являются книги [3, 13, 38–41, 84, 88, 90, 104, 105, 135] и обзор [91]. Разумеется, этот список далеко не полон. Обширную библиографию работ такого рода можно найти в монографиях [88, 105].

Наряду с физическими критериями хаотичности существует и ряд строгих математических разработок на эту тему. Однако соответствующие результаты весьма абстрактны и относятся к аттракторам, которые в той или иной степени обладают свойством гиперболичности (равномерной, сингулярной, частичной и т. д.) или же каким-либо из свойств перемешивания. Принимая во внимание данные обстоятельства, будем считать, что второй класс книг по хаосу состоит из математической литературы, посвященной теории бифуркаций, теории динамических систем с гиперболическим поведением и эргодической теории.

Никоим образом не претендуя на полноту, среди математической литературы по хаосу отметим монографии [4, 5, 32, 44, 83, 109, 112, 134, 150, 157, 165] и обзорные статьи [7, 124].

Настоящая книга в рамках описанной выше условной классификации занимает промежуточное место. Данный факт отнюдь не случаен, поскольку на наш взгляд подход к развитию теории хаоса на стыке «физической» и «математической» парадигм нелинейной динамики является весьма плодотворным. Доказательством тому может служить предлагаемая читателю монография, в которую, руководствуясь сформулированным принципом, мы включили как строгие математические результаты, так и ряд естественнонаучных положений, проверяющихся с помощью численных экспериментов.

Монография состоит из семи глав. В главе 1, базирующейся на работах [76, 77], дается новое определение хаотического инвариантного множества для непрерывного полупотока в метрическом пространстве. Предлагаемое нами определение обобщает известное определение Девани и позволяет обнаружить принципиально новый тип хаотического поведения, реализующийся в некомпактном и бесконечномерном случае, — так называемый турбулентный хаос. Содержательность этого феномена иллюстрируется на конкретном примере, допускающем строгий математический анализ. А именно, исследуется некоторая бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая аттрактор, хаотический в смысле нового определения, но не являющийся таковым по Девани или Кнудсену.

Глава 2, написанная по результатам статей [30, 75], посвящена некоторым математическим аспектам сценария возникновения турбулентности по Ландау. Для того чтобы ввести читателя в курс дела, дадим небольшую историческую справку. Напомним, что динамическая теория развития турбулентности берет свое начало с классических работ Л. Д. Ландау [89] и Э. Хопфа [153]. В первой из этих работ была выдвинута гипотеза о том, что возникновение турбулентности связано с последовательным усложнением динамики за счет появления устойчивых инвариантных торов все более высоких размерностей с квазипериодической обмоткой. Во второй работе построен достаточно простой пример динамической системы, в которой наблюдается описанный в [89] каскад бифуркаций инвариантных торов.

Гипотеза Ландау сыграла большую роль в процессе осознания природы турбулентности. В частности, развитые Л. Д. Ландау представления легли в основу известных гипотез А. Н. Колмогорова о росте размерности аттракторов уравнений Навье–Стокса при увеличении числа Рейнольдса (точные формулировки этих гипотез приведены, например, в работе [8]). Однако современные представления о турбулентности сложились во многом благодаря открытию феномена динамического хаоса [161]. К настоящему времени выработано несколько различных эвристических сценариев перехода к турбулентности, среди которых следует отметить разрушение квазипериодических движений [163, 170] (точнее говоря, в указанных работах Рюэль и Такенс предложили сценарий, когда инвариантные торы превращаются после конечного числа шагов в гиперболические аттракторы), перемежаемость [13] и бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода [144]. Что же касается сценария Ландау, то его нельзя отнести к числу основных, поскольку аттрактор в виде незамкнутой плотной намотки на многомерном торе структурно неустойчив, т. е. он разрушается при малом изменении параметров системы. Тем не менее, усложнение динамики по Ландау все же реализуется в некоторых специальных случаях. В качестве примера сошлемся на статью [111], где рассматривалась цепочка однонаправленно связанных ротаторов.

Итак, достаточно ясно, что ставить вопрос о реализуемости механизма развития турбулентности по Ландау в его первоначальном варианте не имеет смысла. В связи с этим мы, следуя идеям

Дж. Селла [175], под *сценарием Ландау* будем понимать каскад бифуркаций

$$T_1 \to T_2 \to \ldots \to T_N \to T_{N+1} \to \ldots \tag{0.1}$$

устойчивых инвариантных торов $T_N$, $\dim T_N = N$, при отказе от требования квазипериодичности движений на каждом из них. Очевидно, что в таком расширенном варианте данный сценарий уже не является экзотическим. Более того, его можно увязать с концепцией динамического хаоса, если в цепочке (0.1) каждый инвариантный тор $T_N$, начиная с некоторого номера $N_0$, заменить хаотическим аттрактором $A_N$ и предположить, что $d_L(A_N) \to \infty$ при $N \to \infty$, где $d_L$ — ляпуновская размерность. А так как при этом не исключен случай $A_N \subset T_N$, $N \geqslant N_0$, то получившуюся в результате последовательность бифуркаций уместно назвать *сценарием Ландау–Селла*.

Дополнительным аргументом в пользу введенного термина служит тот факт, что принципиальная возможность сохранения хаотического аттрактора при бифуркации $T_N \to T_{N+1}$ была установлена в уже упоминавшейся статье Селла [175].

В главе 2 мы иллюстрируем реализуемость сценариев Ландау и Ландау–Селла на ряде конкретных примеров динамических систем из различных областей естествознания, аттракторами которых при подходящем изменении параметров оказываются инвариантные торы сколь угодно высоких размерностей. Анализ этих примеров позволяет в некоторых случаях обнаружить и так называемый турбулентный аттрактор, определение которого было дано ранее в главе 1.

В главе 3, включающей в себя результаты работ [26, 29, 31, 59], изучается частный случай сценария Ландау–Селла, характерный для параболических систем типа реакция–диффузия и получивший специальное название — *диффузионный хаос*. Суть данного феномена заключается в следующем: при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах в указанных системах возникает хаотический аттрактор, размерность которого неограниченно растет. В качестве примеров рассматриваются комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау, математическая модель реакции Белоусова, а также ряд конечномерных моделей диффузионного хаоса, представляющих собой как цепочки связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, так и аналогичные цепочки дискретных отображений. Приводятся результаты численного анализа, свидетельствующие о наличии в указанных моделях при подходящем выборе параметров хаотических аттракторов сколь угодно высоких размерностей.

Другой аспект хаотической динамики, вызванный диффузионным фактором, — это так называемая *хаотическая буферность*. Для пояснения введенного термина напомним сначала, что о феномене буферности принято говорить, если в фазовом пространстве некоторой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать сосуществование

вание любого наперед заданного фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.). Как показано в монографиях [73, 103], буферность представляет собой один из фундаментальных законов функционирования нелинейных систем из различных областей естествознания: радиофизики, экологии, биофизики, механики и т. д. Что же касается хаотической буферности, то о ней будем говорить в случае сосуществования произвольного числа хаотических аттракторов.

Феномен хаотической буферности удается обнаружить в различных цепочках диффузионно связанных осцилляторов. Общая идея конструирования таких цепочек состоит в следующем. Предположим, что в качестве парциальной системы выбрано некоторое эволюционное уравнение

$$\dot{v} = f(v, \lambda) \tag{0.2}$$

в вещественном банаховом пространстве $V$, правая часть которого зависит от вспомогательного параметра $\lambda$ произвольной природы, принимающего значения в множестве $\Sigma$. Предположим, далее, что в уравнении (0.2) реализуется феномен буферности: сосуществуют различные устойчивые циклы

$$\begin{gathered} v = v_{(m)}(\tau), \quad \tau = \omega_{(m)}t, \quad \omega_{(m)} > 0, \\ v_{(m)}(\tau + 2\pi) \equiv v_{(m)}(\tau), \quad m = 1, \ldots, m_0, \end{gathered} \tag{0.3}$$

количество $m_0 = m_0(\lambda)$ которых может быть сделано сколь угодно большим за счет подходящего выбора $\lambda \in \Sigma$. И наконец, рассмотрим цепочку диффузионно связанных осцилляторов (0.2), т. е. систему вида

$$\dot{v}_j = f(v_j, \lambda) + \mu A(v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, N, \tag{0.4}$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, $v_0 = v_1$, $v_{N+1} = v_N$, $A\colon V \to V$ — ограниченный линейный оператор.

При $\mu = 0$ система (0.4) имеет, очевидно, устойчивые $N$-мерные инвариантные торы

$$v_j = v_{(m)}(\tau_j), \quad \dot{\tau}_j = \omega_{(m)}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

составленные из одинаковых циклов (0.3). В случае малых $\mu > 0$ эти торы, естественно, сохраняются, а так как они близки к резонансным, то движения на них описываются некоторыми системами для разностей фаз $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$. Как показано в главе 3 на конкретных примерах, все эти системы могут одновременно иметь хаотические аттракторы и, более того, количество $m_0 = m_0(\lambda)$ самих инвариантных резонансных торов (носителей хаоса) за счет выбора $\lambda \in \Sigma$ может быть сделано сколь угодно большим или даже счетным. А это как раз и означает, что в системе (0.4) возможна хаотическая буферность.

Для описания результатов главы 4 сделаем небольшой экскурс в область синергетики. Как известно, к настоящему времени в нелинейной динамике разработаны две парадигмы, одну из которых можно условно назвать «порядком», а другую — «хаосом». В рамках первой из них показано, что сложные системы могут вести себя просто. А именно, было установлено, что в пространственно распределенных системах, потенциально обладающих бесконечным числом степеней свободы, при определенных условиях происходит самоорганизация — выделение небольшого числа переменных (так называемых параметров порядка), определяющих динамику всей системы. В результате возникают пространственно неоднородные устойчивые состояния равновесия, которые И. Р. Пригожин предложил называть *диссипативными структурами* (от латинского слова *dissipatio* — рассеяние). Или же возникают пространственно-временные колебания, которые в соответствии с предложенной Р. В. Хохловым терминологией называют *автоволновыми процессами*.

В рамках второй парадигмы было обнаружено, что даже простые динамические системы, обладающие небольшим числом степеней свободы, могут вести себя сложно. Иными словами, был открыт так называемый *динамический хаос* — сложное непериодическое поведение в простейших детерминированных системах (т. е. в таких, где будущее однозначно определяется заданием начальных данных). Основной особенностью указанного типа поведения является свойство существенной зависимости от начальных условий, заключающееся в экспоненциальном разбегании двух бесконечно близких траекторий, принадлежащих *хаотическому аттрактору*. Из этого свойства вытекает, в частности, существование так называемого *горизонта прогноза* — конечного времени, через которое динамический прогноз поведения системы становится невозможен. Были также описаны некоторые универсальные сценарии перехода от порядка к хаосу при изменении внешнего параметра.

Ныне в процессе становления находится следующая, третья по счету парадигма, которую можно определить как «жизнь на кромке хаоса». Цель ее заключается в создании теории безопасности и риска для систем, потенциально склонных к катастрофам. Следует отметить, что такие системы в «штатных» и «кризисных» ситуациях могут описываться разными наборами параметров порядка, что, естественно, затрудняет поставленную задачу. Поэтому на первый план выходит проблема построения единой математической теории, охватывающей обе указанные ситуации.

Один из возможных подходов к решению данной проблемы изложен в главе 4, написанной по работам [69, 70, 72, 160]. Точнее говоря, в этой главе рассматриваются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной быстрой и $n$ ($n \geqslant 3$) медленными переменными, для которых удается сформулировать условия существования аттракторов типа жесткой турбулентности и переключающей перемежаемости. Заметим, что оба из упомянутых явления — жесткая турбулентность и переключающая перемежаемость — представляют собой частные случаи феномена «жизни на кромке хаоса» и характеризуются наличием редких, но весьма интенсивных всплесков на общем относительно спокойном турбулентном фоне. Добавим еще, что в главе 4 решается и так называемая проблема «охоты на хаос», т. е. показывается, что любая конечномерная система с хаосом может быть достроена до системы на единицу большей размерности, в которой реализуется жесткая турбулентность. Тем самым, предлагается один из возможных способом учета редких катастрофических событий в системах со сложным поведением.

Глава 5, базирующаяся на работах [27, 28, 60, 61], посвящена роли резонансов $1:1:1$, $1:2$ и $1:1$ в хаотической динамике. Точнее говоря, в ней описываются некоторые типовые ситуации, когда эти резонансы оказываются причиной появления хаотических колебаний. В частности, выявляется один из фундаментальных принципов построения генераторов хаоса, состоящий в следующем. Сначала берутся три так называемых парциальных генератора $S_j$, $j = 1, 2, 3$, каждый из которых моделируется некоторой нелинейной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным аттрактором — положением равновесия или циклом (предпочтительным является случай $S_1 = S_2 = S_3$, соответствующий резонансу $1:1:1$). Показывается, что будучи однонаправленно связанными в кольцо вида

$$\begin{tikzcd} & S_1 \arrow[dr, bend left] & \\ S_3 \arrow[ur, bend left] & & S_2 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

эти генераторы при подходящем выборе параметров могут демонстрировать совместное хаотическое поведение.

Другой результат главы 5 касается механизма жесткого возбуждения автоколебаний, обусловленного резонансом $1:2$. Соответствующая нелокальная ситуация моделируется посредством локальных методов, что позволяет выявить ряд характерных особенностей динамики. Например, с помощью численного анализа удается показать, что при определенных условиях устойчивое нулевое решение может сосуществовать с хаотическим аттрактором. Кроме того, для так называемых флаттерных систем рассматривается вопрос о появлении хаоса при взаимодействии резонансов $1:1$ и $1:2$.

Помимо уже отмеченных выше ситуаций, когда хаос вызван наличием резонансных соотношений, в главе 5 рассмотрен и так называемый основной многочастотный резонанс. Суть данного явления состоит в следующем. Предположим, что на некоторую нелинейную систему действует квазипериодическая внешняя сила с частотами $\omega_k$, $k = 1, \ldots, m$, причем каждая из этих частот находится в резонансе $1:1$ с некоторой собственной частотой исходной системы. Как оказывается, в такой системе возможно сосуществование регулярных и хаотических колебаний.

Явление многочастотного резонанса нетрудно реализовать в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы же изучим его в случае уравнения Sin-Гордона в поле квазипериодической внешней силы.

В главах 6 и 7, написанных на основе статей [62, 78–80], речь идет об уже упоминавшемся феномене буферности. Присутствие этих глав в данной книге мотивировано тем обстоятельством, что буферность представляет собой некую специфическую форму хаоса. В самом деле, если устойчивых режимов излишне много, то случайные малые возмущения начальных условий системы могут приводить к катастрофам: спонтанным переходам от одного устойчивого стационарного режима к другому (система как бы «скользит» по стационарным режимам, не задерживаясь ни на одном из них). Таким образом, в рассматриваемом случае имеем дело с флуктуационным хаосом, который, в свою очередь, представляет собой один из вариантов «жизни на кромке хаоса».

Реализуемость флуктуационного хаоса в простейших радиофизических устройствах была проверена экспериментально. Описание соответствующих экспериментов содержится в монографии [56] и обзорной статье [66].

Вернемся к результатам глав 6, 7. В главе 6 выявляется новый феномен, заключающийся в следующем. Как оказывается, аттракторы нелинейного волнового уравнения могут существенно отличаться от аттракторов его конечномерного аналога, получающегося в результате замены производных по пространственным переменным стандартными разностными операторами (вне зависимости от шага дискретизации). Например, краевая задача для телеграфного уравнения ван-дер-полевского типа с нулевыми условиями Неймана на концах единичного отрезка при некоторой общности положения допускает только устойчивые периодические по времени движения, причем таковых может быть достаточно много. При переходе же от нее к соответствующей аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений ситуация принципиально меняется: все периодические движения (за исключением одного или двух) становятся неустойчивыми, а вместо них появляются устойчивые двумерные инвариантные торы. Тем самым, буферность хотя и сохраняется, но приобретает новое качество. Показывается также, что аналогичный эффект имеет место и в пространственно двумерном случае.

В главе 7 дано развернутое изложение докладовской заметки [80]. Здесь рассматриваются цепочки диффузионно связанных скалярных нелинейных уравнений с запаздыванием из экологии. Устанавливается, что при подходящем выборе параметров в этих цепочках сосуществует любое наперед заданное число устойчивых циклов, которые по аналогии с пространственно непрерывным случаем будем называть *дискретными автоволнами*.

Подводя итог, отметим, что в настоящей монографии получили освещение следующие принципиальные вопросы.

а). Приведены новые определения хаотического множества и хаотического аттрактора. Эти определения представляют несомненный методический интерес вне зависимости от того, являются ли фигурирующие в них условия конструктивно проверяемыми или нет. Фактически, мы попытались дать ответ на вопрос о том, какие минимальные требования следует предъявлять к инвариантному множеству динамической системы для того, чтобы считать его хаотическим.

б). Отчасти реабилитирован известный сценарий развития турбулентности по Ландау, на наш взгляд, незаслуженно забытый. Показано, что при надлежащей модификации он реализуется в ряде конкретных динамических систем из различных областей естествознания.

в). Обнаружен и описан новый феномен нелинейной динамики — *хаотическая буферность*.

г). Предложен новый подход к учету редких катастрофических событий в системах со сложным поведением.

д). Пролит дополнительный свет на природу аттракторов гиперболических краевых задач. А именно, установлен следующий весьма неожиданный феномен. Как выяснилось, аттракторы нелинейного волнового уравнения могут существенно отличаться от аттракторов его конечномерного аналога, получающегося в результате замены производных по пространственным переменным соответствующими разностными операторами. Причем, что характерно, уменьшение шага дискретизации не только не устраняет, а напротив, усиливает это отличие.

е). Исследованы так называемые дискретные автоволны, реализующиеся при определенных условиях в дискретных цепочках диффузионно связанных уравнений с запаздыванием.

Пользуясь случаем, выражаем искреннюю благодарность С. Д. Глызину, которому принадлежит подавляющее большинство описанных в данной книге численных экспериментов. При проведении этих экспериментов применялся пакет прикладных программ tracer 3.70, разработанный Д. С. Глызиным и в настоящее время доступный на сайте www.nd.uniyar.ac.ru.

Будем благодарны читеталям за их замечания и пожелания, которые можно посылать по электронной почте Колесову Андрею Юрьевичу: andkolesov@mail.ru.