

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ РАЗВИТИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ЛАНДАУ

Основной результат данной главы содержится в разделе 3 и состоит в следующем. Предлагается новая модельная краевая задача, в которой, как и в известном примере Хопфа (см. [153]), при уменьшении некоторого параметра реализуется каскад бифуркаций (0.1) устойчивых инвариантных торов T_N , $N \geq 1$, с квазипериодической обмоткой на каждом из них. Однако в отличие от примера Хопфа в нашем случае удастся не только смоделировать цепочку (0.1), но и изучить так называемую *развитую турбулентность* — аттрактор, появляющийся по прошествии всех бифуркаций.

Другие результаты главы 2, представленные в разделах 4–7, иллюстрируют реализуемость сценариев Ландау и Ландау–Селла в конкретных математических моделях из различных областей естествознания. При этом теоретический анализ сочетается с численными экспериментами.

3. Базовая модель турбулентности по Ландау

3.1. Пример Хопфа. В работе [153] Э. Хопфу удалось построить достаточно простой пример динамической системы, в которой наблюдается описанный в [89] каскад бифуркаций инвариантных торов. Он предположил, что одномерное течение в замкнутом контуре моделируется параболической краевой задачей вида

$$\begin{aligned} u_t &= -v \circ \bar{v} - u \circ 1 + \mu u_{xx}, \quad v_t = v \circ \bar{u} + v \circ \bar{f}(x) + \mu v_{xx}, \\ u(t, x + 2\pi) &\equiv u(t, x), \quad v(t, x + 2\pi) \equiv v(t, x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $\mu > 0$ — бифуркационный параметр ($1/\mu$ представляет собой аналог числа Рейнольдса), $u(t, x)$, $v(t, x)$ — комплекснозначные функции, черта означает комплексное сопряжение, оператор \circ , определенный для любых двух 2π -периодических функций $f_1(x)$, $f_2(x)$ посредством равенства

$$f_1 \circ f_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(x+y) f_2(y) dy, \quad (3.2)$$

характеризует нелинейное взаимодействие между различными возмущениями, а поле внешней силы $f(x)$ представляет собой четную

2 π -периодическую комплекснозначную функцию класса $L_2(-\pi, \pi)$, допускающую разложение Фурье вида

$$f(x) = a_0 + ib_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) \cos nx, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 0. \quad (3.3)$$

Отдельно остановимся на ограничениях, накладываемых на фигурирующие в (3.3) коэффициенты $a_n, b_n, n \geq 0$. Несколько усиливая предположения работы [153], будем считать, что

$$a_0 < 0, \quad a_1 > a_2/4 > \dots > a_n/n^2 > a_{n+1}/(n+1)^2 > \dots > 0 \quad (3.4)$$

(напомним, что в статье [153] требовалось лишь выполнение условия $a_0 < 0$, а также неравенств $a_n > 0$ для бесконечно большого числа номеров n). Что же касается коэффициентов $b_n, n \geq 1$, то, как и в [153], предполагаем, что любое их конечное семейство линейно независимо над полем рациональных чисел.

При сформулированных условиях будем рассматривать краевую задачу (3.1) как динамическую систему в фазовом пространстве $(u, v) \in V \times V$, где V — гильбертово пространство четных 2π -периодических комплекснозначных функций класса $L_2(-\pi, \pi)$. Скалярное произведение в этом пространстве определим следующим образом. Фиксируем произвольно две функции $u(x), v(x)$ из V и разложим их в ряды Фурье:

$$u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \exp(inx), \quad v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \exp(inx), \quad (3.5)$$

$$u_n = u_{-n}, \quad v_n = v_{-n}, \quad n \geq 1$$

(последние два равенства — следствие четности $u(x), v(x)$). Тогда по определению

$$(u, v)_V = u_0 \bar{v}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n \bar{v}_n,$$

$$((u_1, v_1), (u_2, v_2))_{V \times V} = (u_1, u_2)_V + (v_1, v_2)_V \quad \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V \times V. \quad (3.6)$$

Анализ динамики по параметру μ краевой задачи (3.1) в пространстве $V \times V$ не вызывает затруднений. Действительно, подставим в (3.1) равенство (3.3) вместе с разложениями (3.5) и учтем вытекающие из (3.2) соотношения

$$v \circ \bar{v} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |v_n|^2 \exp(inx), \quad v \circ \bar{u} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_n \bar{u}_n \exp(inx).$$

В результате для определения $u_n = u_n(t), v_n = v_n(t), n \geq 0$, приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая распадается на двумерные блоки вида

$$\dot{u}_0 = -|v_0|^2 - u_0, \quad \dot{v}_0 = v_0 \bar{u}_0 + (a_0 - ib_0)v_0, \quad (3.7)$$

$$\dot{u}_n = -|v_n|^2 - n^2 \mu u_n, \quad \dot{v}_n = v_n \bar{u}_n + (a_n - i b_n) v_n - n^2 \mu v_n, \quad n \geq 1. \quad (3.8)$$

В первую очередь обратимся к системе (3.7) и заметим, что из очевидного соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_0|^2 + |v_0|^2) = -(|u_0|^2 - a_0 |v_0|^2)$$

и из условия $a_0 < 0$ (см. (3.4)) вытекает стремление к нулю всех ее решений при $t \rightarrow +\infty$. Далее, фиксируем произвольно номер $n \geq 1$ и предположим сначала, что $\mu > \mu_n = a_n/n^2$. Тогда, как нетрудно увидеть,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_n|^2 + |v_n|^2) = -(n^2 \mu |u_n|^2 + (n^2 \mu - a_n) |v_n|^2) < 0,$$

а значит, аналогичное поведение решений наблюдается и в соответствующей системе (3.8).

Предположим теперь, что параметр μ в (3.8) удовлетворяет условию $0 < \mu < \mu_n$. В этом случае, как показывает непосредственная проверка, у рассматриваемой системы появляется экспоненциально орбитально устойчивый гармонический по форме цикл

$$u_n = n^2 \mu - a_n, \quad v_n = \sqrt{n^2 \mu (a_n - n^2 \mu)} \exp(i\varphi), \quad \dot{\varphi} = -b_n. \quad (3.9)$$

Более детальный анализ приводит к следующему утверждению [153].

Теорема 3.1. При любом $\mu \in (0, \mu_n)$ область притяжения \mathcal{U} автомодельного цикла (3.9) системы (3.8) задается равенством

$$\mathcal{U} = \{(u_n, v_n) \in \mathbb{C}^2 : v_n \neq 0\}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Для начала выполним в системе (3.8) замены переменных $u_n = q + ip$, $q, p \in \mathbb{R}$, и $v_n = r \exp(i\varphi)$, $r \geq 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$, в результате которых она преобразуется к виду

$$\dot{q} = -r^2 - n^2 \mu q, \quad \dot{p} = -n^2 \mu p, \quad \dot{r} = (q + a_n - n^2 \mu) r, \quad \dot{\varphi} = -b_n - p. \quad (3.11)$$

Далее заметим, что для компонент p и φ получившейся системы (3.11) при $t \rightarrow +\infty$ имеют место предельные равенства $p \rightarrow 0$, $\dot{\varphi} \rightarrow -b_n$. А отсюда следует, что интересующая нас проблема сводится к анализу двумерной системы

$$\dot{q} = -r^2 - n^2 \mu q, \quad \dot{r} = (q + a_n - n^2 \mu) r. \quad (3.12)$$

Точнее говоря, в силу (3.9) нам нужно доказать, что любая ее траектория, для которой $r|_{t=0} > 0$, при $t \rightarrow +\infty$ стремится к экспоненциально устойчивому состоянию равновесия $(q, r) = (n^2 \mu - a_n, \sqrt{n^2 \mu (a_n - n^2 \mu)})$.

Поскольку условие $r|_{t=0} > 0$ влечет выполнение неравенства $r(t) > 0$ при всех t , то мы имеем право сделать в системе (3.12) замену $r^2 = \exp(Q)$, приводящую ее к виду

$$\dot{q} = -\exp(Q) - n^2 \mu q, \quad \dot{Q} = 2(q + a_n - n^2 \mu). \quad (3.13)$$

После этого выразим q из второго уравнения системы (3.13) и результат подставим в первое уравнение. В итоге приходим к выводу, что Q — решение скалярного уравнения второго порядка

$$\ddot{Q} + n^2 \mu \dot{Q} = -H'(Q), \quad (3.14)$$

где

$$H(Q) = 2(\exp(Q) - \exp(Q_0) - (Q - Q_0)\exp(Q_0)), \quad (3.15)$$

$$Q_0 = \ln(n^2 \mu(a_n - n^2 \mu)).$$

Для того чтобы убедиться, что область притяжения цикла (3.9) имеет вид (3.10), осталось показать, что любое решение $Q(t)$ уравнения (3.14) обладает свойствами: $Q(t) \rightarrow Q_0$, $\dot{Q}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Для их проверки введем в рассмотрение функцию $w(t) = (\dot{Q}(t))^2/2 + H(Q(t))$. Заметим, далее, что в силу вытекающих из (3.15) соотношений

$$H(Q_0) = H'(Q_0) = 0, \quad H(Q) > 0 \text{ при } \forall Q \neq Q_0, \quad (3.16)$$

$$H(Q) \rightarrow +\infty \text{ при } |Q| \rightarrow +\infty, \quad \dot{w}(t) = -n^2 \mu (\dot{Q}(t))^2 \leq 0$$

для функции $w(t)$ при тех $t \geq 0$, для которых она в принципе определена, справедливы априорные оценки $0 \leq w(t) \leq w(0)$. А отсюда автоматически следует, что на самом деле $w(t)$ существует на полуоси $t \geq 0$ и при $t \rightarrow +\infty$ имеет конечный предел $w_* \geq 0$.

На завершающем этапе доказательства на плоскости (Q, \dot{Q}) рассмотрим траекторию $(Q(t), \dot{Q}(t))$ и обозначим через Λ ее ω -предельное множество. Из установленных выше свойств функции $w(t)$ заключаем, что $\Lambda \subset \{(Q, \dot{Q}) : \dot{Q}^2/2 + H(Q) = w_*\}$. Следовательно, для любой траектории $(Q_*(t), \dot{Q}_*(t)) \in \Lambda$ выполняется тождество $(\dot{Q}_*(t))^2/2 + H(Q_*(t)) \equiv w_*$, дифференцируя которое по t , приходим к выводу (см. последнее равенство из (3.16)), что $\dot{Q}_*(t) \equiv 0$.

Итак, установлено, что в множество Λ могут входить только состояния равновесия $(Q_*(t), \dot{Q}_*(t)) \equiv (\text{const}, 0)$ уравнения (3.14). Остается заметить, что это уравнение допускает единственное состояние равновесия $(Q_0, 0)$, где величина Q_0 определена в (3.15). Теорема 3.1 доказана.

Суммируя проделанные построения, приходим к выводу, что исходная система (3.1) имеет по параметру μ следующую динамику. Пусть сначала $\mu > \mu_1$. Тогда в силу (3.4) будут выполняться и неравенства $\mu > \mu_n$ при $n \geq 2$. А отсюда и из свойств систем (3.7), (3.8) заключаем, что в этом случае нулевое состояние равновесия краевой задачи (3.1)

глобально экспоненциально устойчиво в пространстве $V \times V$ (в метрике, порожденной скалярным произведением из (3.6)).

Пусть теперь $\mu_{n+1} < \mu < \mu_n$ при некотором $n \geq 1$. Тогда в первых n системах семейства (3.8) наблюдаются устойчивые циклы вида (3.9), а в остальных по-прежнему глобально устойчиво нулевое решение. В терминах исходной задачи (3.1) это означает, что в пространстве $V \times V$ у нее существует экспоненциально орбитально устойчивый n -мерный инвариантный тор:

$$\begin{aligned} u &= 2 \sum_{k=1}^n (k^2 \mu - a_k) \cos kx, \\ T_n: \quad v &= 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k^2 \mu (a_k - k^2 \mu)} \exp(i\varphi_k) \cos kx, \\ \dot{\varphi}_k &= -b_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, $k = 1, \dots, n$, — отвечающие этому тору циклические координаты. Заметим, далее, что в силу наложенных на b_k , $k = 1, \dots, n$, ограничений движения на торе (3.17) являются квазипериодическими. Кроме того, как следует из теоремы 3.1, при $\mu_{n+1} < \mu < \mu_n$ он оказывается единственным аттрактором системы (3.1), притягивающим любые ее траектории с начальными условиями

$$(u(0, x), v(0, x)) \in V \times V: \int_0^{2\pi} v(0, x) \cos kx \, dx \neq 0, \quad k = 1, \dots, n.$$

При дальнейшем уменьшении параметра μ и при прохождении его через критическое значение $\mu = \mu_{n+1}$ тор (3.17) теряет устойчивость и порождает аналогичный устойчивый тор T_{n+1} на единицу большей размерности. Таким образом, имеем бесконечную последовательность бифуркационных значений $\mu_n \searrow 0$, $n \rightarrow \infty$, и инвариантных торов T_n , $n \geq 1$, с квазипериодической обмоткой. А это, собственно, и означает, что при $\mu \rightarrow 0$ в рамках краевой задачи (3.1) реализуется сценарий Л. Д. Ландау.

3.2. Описание и общие свойства новой модели. Разобранный выше пример Хопфа имеет по крайней мере два существенных недостатка. Во-первых, хотя при $\mu \rightarrow 0$ количество мод $\exp(\pm inx)$, $n \geq 1$, вовлеченных в нелинейное взаимодействие, неограниченно растет, но само это взаимодействие носит блочный характер (см. (3.7), (3.8)). На наш взгляд, более адекватным проблеме было бы взаимодействие мод по типу среднего поля. Во-вторых, при $\mu = 0$, т. е. в случае нулевой вязкости, когда аттрактор, в принципе, должен стать бесконечномерным (развитая турбулентность), в системе (3.1) происходит его вырождение в состояние равновесия $u = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, $v = 0$, что непосредственно вытекает из формул (3.17). Следует отметить, впрочем, что сценарий Ландау относится к возникновению турбулентности, а не

к развитой турбулентности. Последняя же описывается асимптотиками решений уравнения Навье–Стокса, когда вязкость стремится к нулю. Тем не менее, было бы интересно скорректировать модель Хопфа таким образом, чтобы объединить эти два феномена. Один из возможных способов ее модификации предлагается в настоящем разделе.

Как и в [153], рассмотрим одномерное течение в замкнутом контуре, но теперь будем считать, что оно описывается одной вещественной скалярной функцией $u(t, x)$, удовлетворяющей следующей краевой задаче:

$$u_t - \nu u_{xx} = \mathcal{L}_0 u + F(u), \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad M(u) \equiv 0. \quad (3.18)$$

Здесь $\nu \geq 0$ — бифуркационный параметр, характеризующий вязкость среды, а операторы \mathcal{L}_0 и F действуют на произвольную 2π -периодическую функцию $u(x)$ по правилам:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 u &= f(x) * u(x), \quad F(u) = (1 - M(u^2))u(x) - u(x) * u(x) * u(-x), \\ M(u) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x) dx, \\ u_1(x) * u_2(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_1(x-y)u_2(y) dy \quad \forall u_1(x), u_2(x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Что же касается поля внешней силы $f(x)$, то в данном случае оно задается некоторым формальным рядом вида

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} i\sigma_n \exp(inx) - i\sigma_n \exp(-inx), \quad (3.20)$$

где $\sigma_n > 0$, $n \geq 1$, — произвольно фиксированная числовая последовательность, удовлетворяющая двум условиям: $\sigma_n \nearrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и при любом $n \geq 1$ семейство σ_k , $1 \leq k \leq n$, линейно независимо над полем рациональных чисел.

В качестве фазового пространства задачи (3.18) возьмем банахово пространство E_0 , состоящее из вещественных скалярных 2π -периодических функций $u(x)$ класса $L_2(-\pi, \pi)$ с нулевым средним значением. Норму в E_0 определим формулой

$$\|u\| = \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \right)^{1/2}, \quad (3.21)$$

где $z_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, — коэффициенты разложения Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} z_n \exp(inx) + \bar{z}_n \exp(-inx). \quad (3.22)$$

Далее заметим, что равенства (3.21), (3.22) осуществляют естественный изоморфизм между E_0 и линейным пространством Z_0 , состоящим из бесконечномерных векторов

$$z = (z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_n, \bar{z}_n, \dots), \quad z_n \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1, \quad (3.23)$$

для которых конечна норма (3.21). Подчеркнем, что пространство Z_0 следует рассматривать над полем действительных чисел, так как только в этом случае при умножении его элементов на скаляры снова будут получаться векторы вида (3.23).

На следующем этапе введем понятие решения краевой задачи (3.18). Для этого нам потребуется линейный оператор $\mathcal{L}_\nu = \mathcal{L}_0 + \nu d^2/dx^2$, $\nu \geq 0$. Привлекая равенство (3.20), а также справедливую для любых двух функций $u(x)$, $v(x)$ из E_0 формулу

$$u(x) * v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n \exp(inx) + \bar{u}_n \bar{v}_n \exp(-inx), \quad (3.24)$$

где

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n \neq 0} u_n \exp(inx), \quad v(x) = \sum_{n \neq 0} v_n \exp(inx), \\ u_{-n} &= \bar{u}_n, \quad v_{-n} = \bar{v}_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

нетрудно убедиться, что \mathcal{L}_ν представляет собой замкнутый неограниченный линейный оператор с плотной в E_0 областью определения, действующий на произвольную функцию (3.22) по правилу

$$\mathcal{L}_\nu u = \sum_{n=1}^{\infty} (i\sigma_n - n^2\nu) z_n \exp(inx) + (-i\sigma_n - n^2\nu) \bar{z}_n \exp(-inx). \quad (3.26)$$

А отсюда немедленно следует, что он порождает в E_0 сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу $\exp(\mathcal{L}_\nu t)$ линейных ограниченных операторов, для которой справедлива аналогичная (3.26) формула

$$\begin{aligned} \exp(\mathcal{L}_\nu t) u &= \sum_{n=1}^{\infty} z_n \exp[i(\sigma_n t + nx) - n^2 \nu t] + \\ &+ \bar{z}_n \exp[-i(\sigma_n t + nx) - n^2 \nu t]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Проделанные предварительные построения позволяют определить обобщенные решения задачи (3.18) следующим образом. Дополним (3.18) произвольным начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \in E_0$ и с помощью полугруппы (3.27) перейдем к соответствующему интегральному уравнению

$$u(t, x) = \exp(\mathcal{L}_\nu t) u_0(x) + \int_0^t \exp(\mathcal{L}_\nu(t - \tau)) F(u(\tau, x)) d\tau. \quad (3.28)$$

Под обобщенным решением смешанной задачи для (3.18) с выбранным начальным условием будем понимать непрерывное по t в метрике пространства E_0 решение $u = u(t, x)$ этого интегрального уравнения.

Отметим, что введенное таким способом понятие решения корректно в том смысле, что для него справедливы свойства локального существования и единственности. Действительно, опираясь на факт ограниченности и гладкости по Фреше оператора $F: E_0 \rightarrow E_0$ (см. (3.19)), несложно проверить, что оператор, порожденный в пространстве $C([0, t_0]; E_0)$ правой частью уравнения (3.28), при подходящем уменьшении $t_0 > 0$ преобразует в себя некоторый замкнутый шар этого пространства и является сжимающим. А отсюда и из принципа сжимающих отображений вытекает существование при $0 \leq t \leq t_0$ единственного обобщенного решения задачи (3.18) с рассматриваемым начальным условием.

Добавим еще, что при $\nu > 0$ краевая задача (3.18) является параболической и в силу известных свойств параболических уравнений (см., например, [42, 87]) мы можем утверждать, что в этом случае любое ее обобщенное решение автоматически оказывается классическим. Точнее говоря, при $t > 0$ оно имеет любое фиксированное число непрерывных производных по t, x и обращает уравнение из (3.18) в тождество. В случае же $\nu = 0$, т. е. при нулевой вязкости, сглаживания решений по x при $t > 0$ не происходит и подавляющее большинство из них так и остаются обобщенными.

3.3. Нормальная форма и ее аттракторы. Для удобства последующего анализа сначала перейдем от краевой задачи (3.18) к эквивалентной системе в пространстве Z_0 . Опираясь на изоморфизм (3.22) и используя формулы (3.24)–(3.26), нетрудно увидеть, что для компонент $z_n = z_n(t)$, $n \geq 1$, вектора (3.23) на этом пути выходит система

$$\dot{z}_n = \left[1 + i\sigma_n - \nu n^2 - 3|z_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |z_k|^2 \right] z_n, \quad n \geq 1, \quad (3.29)$$

которая в отличие от (3.7), (3.8) уже не распадается ни на какие конечномерные блоки. Тем самым, здесь реализуется требуемое взаимодействие мод по принципу среднего поля.

Далее, полагая в (3.29)

$$z_n = \sqrt{\rho_n} \exp(i\varphi_n), \quad \rho_n \geq 0, \quad \varphi_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1, \quad (3.30)$$

убеждаемся, что переменные ρ_n, φ_n в свою очередь удовлетворяют системе

$$\dot{\rho}_n = 2 \left[1 - \nu n^2 - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \rho_k \right] \rho_n, \quad \dot{\varphi}_n = \sigma_n, \quad n \geq 1. \quad (3.31)$$

И наконец, рассмотрим отщепляющуюся от (3.31) систему для амплитудных переменных ρ_n , $n \geq 1$, которая после замены $2t \rightarrow t$ принимает вид

$$\dot{\rho}_n = \left[1 - \nu n^2 - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1. \quad (3.32)$$

Ясно, что в конечном итоге именно она и отвечает за возможные аттракторы исходной задачи (3.18). В связи с этим в дальнейшем за ней закрепим термин «нормальная форма».

Обратим внимание, что система (3.32) представляет собой частный случай уже изученной нами системы (2.66) при $\kappa = 3/2$, $\lambda_n = n^2$, $n \geq 1$ (точнее говоря, она приобретает вид (2.66) после замен $2\rho_n \rightarrow \rho_n$, $n \geq 1$). Тем самым, полупоток φ^t , порожденный ее траекториями в конусе $K \subset l$ векторов $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n, \dots)$ с неотрицательными координатами, при $\nu > 0$ имеет глобальный аттрактор A_ν , задающийся аналогичным (2.67) равенством

$$A_\nu = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \left\{ \rho \in K : \|\rho\| = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < 3/4 \right\}, \quad (3.33)$$

а при $\nu = 0$ — глобальный аттрактор A , определяющийся посредством аналогичного (2.16) равенства

$$A = \bigcap_{t \geq 0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \{ \rho \in K : c_1 < \|\rho\| < c_2 \}, \quad c_1 \in (0, 1/3), \quad c_2 > 1/2. \quad (3.34)$$

Напомним, далее, что аттрактор (3.34) является турбулентным (в смысле определения 1.6), а аттрактор (3.33) при каждом $\nu > 0$, $\nu \neq \bar{\nu}_N$, $N \geq 1$, где (см. (2.68))

$$\bar{\nu}_N = 3/(N(4N^2 - 1)), \quad N \geq 1, \quad (3.35)$$

содержит устойчивое состояние равновесия. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение, вытекающее из леммы 2.8.

Теорема 3.2. *Предположим, что параметр ν удовлетворяет условиям*

$$\bar{\nu}_{N+1} < \nu < \bar{\nu}_N \quad (3.36)$$

при некотором $N \geq 1$. Тогда система (3.32) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_N с координатами

$$\rho_n = \frac{1}{2N+1} + \frac{\nu}{3} (N(N+1) - 3n^2), \quad n = 1, \dots, N; \quad (3.37)$$

$$\rho_n = 0 \quad \text{при } n \geq N+1.$$

Все же остальные возможные состояния равновесия этой системы экспоненциально неустойчивы.

3.4. Итоговые выводы. Все результаты, установленные выше для нормальной формы, без труда переносятся на исходную краевую задачу (3.18). Действительно, обозначим через

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n(t) \exp(inx) + \bar{z}_n(t) \exp(-inx) \quad (3.38)$$

произвольное ее решение с начальным условием

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n^0 \exp(inx) + \bar{z}_n^0 \exp(-inx) \in E_0, \quad (3.39)$$

заданным при $t = 0$. Из установленного выше факта нелокальной продолжимости траекторий $\rho(t) = (\rho_1(t), \rho_2(t), \dots, \rho_n(t), \dots) \in K$ системы (3.32) на полуось $t \geq 0$ и из соотношений (3.30), связывающих компоненты $z_n(t)$ и $\rho_n(t)$, $n \geq 1$, автоматически следует, что, во-первых, решение (3.38) также существует при всех $t \geq 0$; во-вторых, равенство

$$G^t(u(x)) = u(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.40)$$

определяет в пространстве E_0 нелинейный полупоток, обладающий теми же общими свойствами, что и полупоток φ^t , порожденный траекториями нормальной формы (3.32).

В самом деле, проделанный выше анализ позволяет утверждать, что полупоток (3.40) при всех $\nu \geq 0$ имеет глобальный аттрактор \tilde{A}_ν , связанный с аттрактором (3.33) полупотока φ^t следующим образом: любой точке $\rho_0 = (\rho_1^0, \dots, \rho_n^0, \dots) \in A_\nu$ отвечает семейство функций $u(x) \in \tilde{A}_\nu$, задающееся равенством (3.39), в котором $z_n^0 = \sqrt{\rho_n^0} \exp(i\varphi_n^0)$, $n \geq 1$, а вещественные параметры φ_n^0 , $n \geq 1$, независимо друг от друга пробегают отрезок $[0, 2\pi]$.

Из отмеченного способа соответствия между точками множеств \tilde{A}_ν , A_ν и из теоремы 3.2 вытекает, что в случае, когда параметр ν при некотором натуральном N удовлетворяет неравенствам (3.36), аттрактор \tilde{A}_ν содержит экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$T_N : u = \sum_{n=1}^N 2\sqrt{\rho_n} \cos(nx + \varphi_n), \quad \dot{\varphi}_n = \sigma_n, \quad n = 1, \dots, N, \quad (3.41)$$

отвечающий состоянию равновесия O_N системы (3.32). Здесь ρ_n — амплитуды из (3.37), а частоты σ_n заимствованы из (3.20). Добавим еще, что в силу условий, наложенных на последовательность σ_n , $n \geq 1$, при любом N движения на торе (3.41) являются квазипериодическими.

При нарушении неравенств (3.36) тор (3.41) повторяет судьбу состояния равновесия O_N . А именно, при уменьшении параметра ν и при прохождении его через критическое значение $\nu = \bar{\nu}_{N+1}$ рассматриваемый тор теряет устойчивость, отдавая ее бифурцирующему из него инвариантному тору T_{N+1} . Таким образом, как и в краевой задаче (3.1),

имеем бесконечную последовательность (0.1) бифуркаций инвариантных торов с квазипериодической обмоткой на каждом из них. А это означает, что при $\nu \rightarrow 0$ в предложенной нами модификации примера Хопфа сохраняется сценарий перехода к турбулентности по Ландау.

Следует особо подчеркнуть, что главное преимущество нашего примера, из-за которого, собственно, он и был рассмотрен, состоит в том, что в отличие от задачи (3.1), где цепочка бифуркаций (0.1) не приводит ни к какому результату, в рамках краевой задачи (3.18) по прошествии всех этих бифуркаций, т.е. при $\nu = 0$, возникает аттрактор \tilde{A} , являющийся турбулентным в смысле определения 1.6.

Суммируя проделанные построения, выделим пять основных свойств турбулентного аттрактора \tilde{A} , вытекающих из аналогичных свойств аттрактора A (см. (3.34)).

1. Бесконечномерность. Хаусдорфова размерность множества \tilde{A} заведомо бесконечна, так как оно содержит счетное число неустойчивых инвариантных торов сколь угодно высоких размерностей. Эти торы имеют вид

$$T: u = \frac{2}{\sqrt{2k+1}} \sum_{j=1}^k \cos(n_j x + \varphi_j), \quad \dot{\varphi}_j = \sigma_{n_j}, \quad j = 1, \dots, k, \quad (3.42)$$

где $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ — произвольно фиксированный конечный набор натуральных чисел.

2. Некомпактность. Множество \tilde{A} оказывается некомпактным (по тем же причинам, что и A). Более того, для любого решения (3.38) краевой задачи (3.18) с начальным условием $u(0, x) = u(x) \in \tilde{A}$, содержащим бесконечное число ненулевых компонент z_n^0 (см. (3.39)), в силу леммы 2.5 справедливы предельные равенства:

$$\max_{n \geq 1} |z_n(t)| \rightarrow 0, \quad S(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n(t)|^2 \rightarrow 1/2 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (3.43)$$

Свойства (3.43), в свою очередь, гарантируют пустоту множества частичных пределов в пространстве E_0 у функции $u(t, x)$ при $t \rightarrow +\infty$.

3. Пространственная изрезанность. Следует отметить, что из соотношений (3.43) вытекает еще одно интересное свойство, которое можно сформулировать так: при $t \rightarrow +\infty$ неограниченно возрастает степень «изрезанности» функции $u(t, x)$ по пространственной переменной. Для придания этому свойству строгого смысла рассмотрим такую целочисленную функцию $N_*(t)$, $N_*(t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, что

$$\sum_{n=1}^{N_*(t)} |z_n(t)| \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty$$

(в силу (3.43) существование требуемой функции $N_*(t)$ очевидно). В результате имеем

$$u(t, x) = \sum_{n=N_*(t)}^{\infty} [z_n(t) \exp(inx) + \bar{z}_n(t) \exp(-inx)] + R(t, x), \quad (3.44)$$

где в соответствии с выбором $N_*(t)$ остаток $R(t, x)$ удовлетворяет оценке

$$|R(t, x)| \leq 2 \sum_{n=1}^{N_*(t)} |z_n(t)| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, при $t \rightarrow +\infty$ пространственное поведение функции $u(t, x)$ определяется первым слагаемым из (3.44), в котором с ростом t остаются все более и более высокие моды $\exp(\pm inx)$, $n \geq N_*(t)$.

4. Жесткая турбулентность. Термин «жесткая турбулентность» возник в связи с проблемой описания редких катастрофических событий в системах со сложным поведением, например, крупных ураганов и тайфунов в системе атмосфера–океан, экономических кризисов, различных крупномасштабных возмущений социальной среды, революций и т. д. Базовой математической моделью подобного рода явлений следует считать известное уравнение Гинзбурга–Ландау:

$$w_t = (c_1 + ic_2)\Delta w + w - (1 + ic_3)|w|^2 w \quad (3.45)$$

($w(t, x)$ — комплекснозначная функция, $c_1 > 0$, c_2, c_3 — вещественные параметры любого знака), так как именно в нем в случае двух и трех пространственных переменных при больших c_2, c_3 была обнаружена жесткая турбулентность — автоколебательный режим с редкими, но исключительно высокими выбросами на общем турбулентном фоне [138]. Впоследствии такого типа режим удалось выявить и в пространственно одномерном случае, но для уравнения, получающегося из (3.45) при замене $|w|^2$ на $|w|^4$ (см. [155]).

Один из возможных подходов к изучению жесткой турбулентности заключается в построении и анализе различных ее феноменологических моделей. Например, в монографии [92] в качестве соответствующей упрощенной модели бралось некоторое трехмерное отображение. Ниже в главе 4 исследуется иной класс моделей — сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной быстрой и n ($n \geq 3$) медленными переменными. Что же касается введенной нами краевой задачи (3.18), то ее можно рассматривать как еще одну, но уже бесконечномерную феноменологическую модель явления жесткой турбулентности.

Для пояснения сути дела рассмотрим принадлежащую тору (3.41) произвольную начальную функцию

$$u_N(x, \nu, \varphi^0) = 2 \sum_{n=1}^N \sqrt{\rho_n} \cos(nx + \varphi_n^0), \quad (3.46)$$

где ρ_n — амплитуды (3.37), $\nu \in (\bar{\nu}_{N+1}, \bar{\nu}_N)$, $\varphi^0 = (\varphi_1^0, \dots, \varphi_N^0)$ — начальный фазовый вектор. Рассмотрим, далее, траекторию

$$u_N(x, \nu, \varphi^t) = 2 \sum_{n=1}^N \sqrt{\rho_n} \cos(nx + \varphi_n^t), \quad (3.47)$$

$$\varphi_n^t = \varphi_n^0 + \sigma_n t, \quad t \geq 0,$$

на торе T_N с начальным условием (3.46). Как оказывается, при $t = 0$ и при $\varphi_n^0 = 0$, $n = 1, \dots, N$, функция (3.47) имеет пик жесткой турбулентности. Связано это с тем, что последовательность $u_N(x, \nu, 0)$, $N \geq 1$, является δ -образной. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Равномерно по $\nu \in (\bar{\nu}_{N+1}, \bar{\nu}_N)$ при $N \rightarrow \infty$ имеем*

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |u_N(x, \nu, 0)| = O(\sqrt{N}),$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_N(x, \nu, 0)|^2 dx \leq 1/2. \quad (3.48)$$

Для доказательства первого свойства (3.48) достаточно обратиться к очевидному равенству

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |u_N(x, \nu, 0)| = u_N(0, \nu, 0) = 2 \sum_{n=1}^N \sqrt{\rho_n}$$

и заметить, что

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{\rho_n} \leq N \sqrt{\rho_1},$$

$$\sum_{n=1}^N \sqrt{\rho_n} \geq \sum_{n=1}^{[N/2]} \sqrt{\rho_n} \geq \sum_{n=1}^{[N/2]} \frac{1}{\sqrt{2N+1}} = \frac{[N/2]}{\sqrt{2N+1}},$$

так как в силу (3.37) $\max_n \rho_n = \rho_1$ и $\rho_n \geq 1/(2N+1)$ при $n \leq [N/2]$ ($[*]$ — целая часть). Второе же из этих свойств проверяется непосредственно:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_N(x, \nu, 0)|^2 dx = 2 \sum_{n=1}^N \rho_n =$$

$$= \frac{2N}{2N+1} \left(1 - \frac{\nu}{6} (N+1)(2N+1) \right) \leq \frac{2N}{2N+1} \leq \frac{1}{2}.$$

Наглядное представление о поведении функции $u_N(x, \nu, 0)$ при больших N дает рис.3.1, где изображен ее график на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ при $N = 300$ и при $\nu = (\bar{\nu}_N + \bar{\nu}_{N+1})/2$. Из этого рисунка видно, что наблюдается картина, характерная для жесткой турбулент-

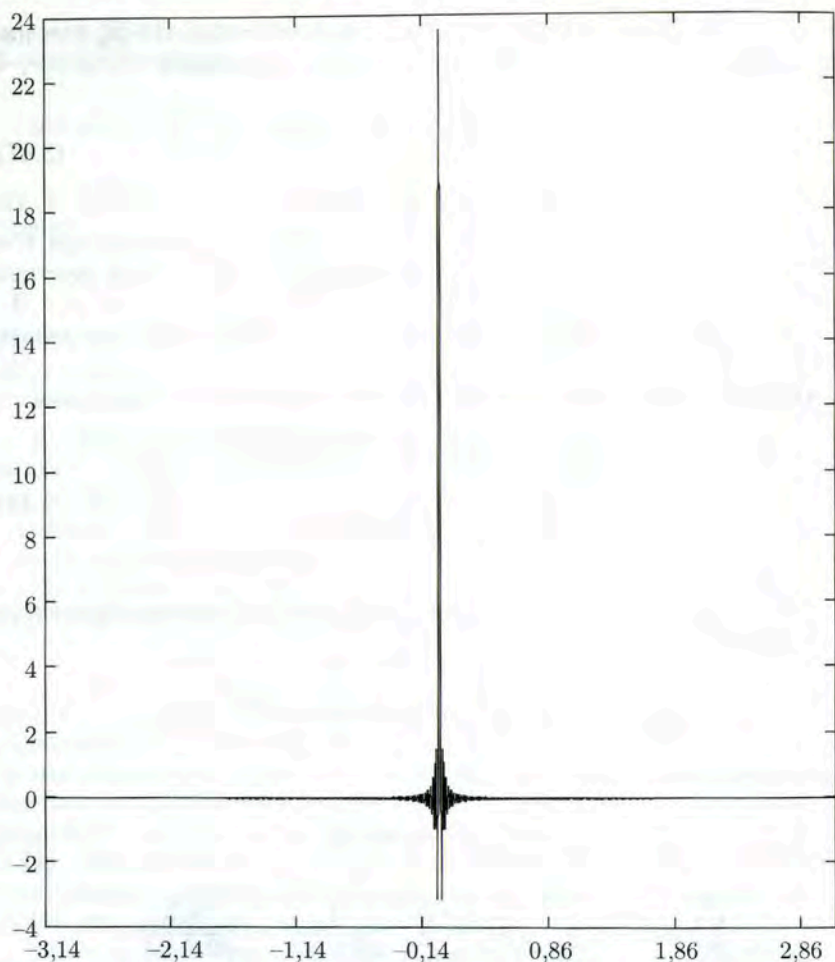


Рис. 3.1

ности — асимптотически высокий всплеск на общем спокойном турбулентном фоне.

При последующем увеличении t пик жесткой турбулентности, естественно, размывается (см. рис. 3.2, где приведен график функции (3.47) на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ при $N = 300$, $t = 1$, $\varphi_n^0 = 0$, $\sigma_n = n^3 + \exp(-n)$, $n = 1, \dots, N$, и при том же значении ν). Однако в силу квазипериодичности движений на торе (3.41) мы можем утверждать, что для любого начального фазового вектора φ^0 заведомо найдется такая последовательность моментов времени t_k , $k \geq 1$: $t_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, что функция $u_N(x, \nu, \varphi^{t_k})$ будет иметь на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ асимптотически высокий всплеск, аналогичный показанному на рис. 3.1.

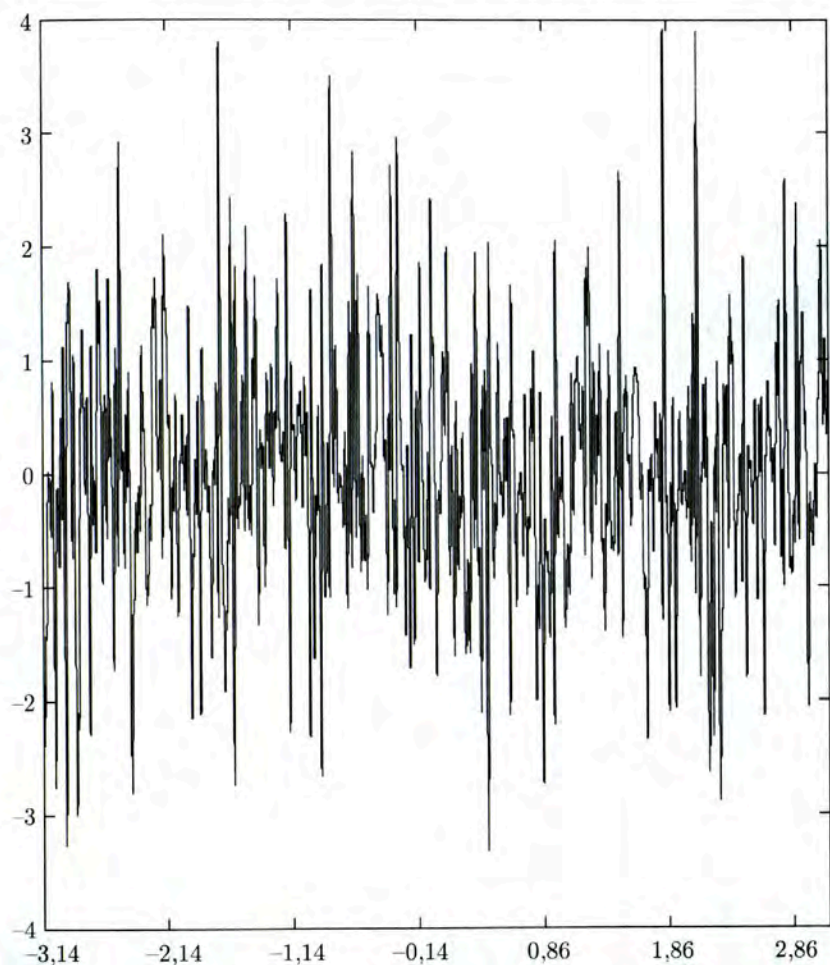


Рис. 3.2

Возвращаясь к турбулентному аттрактору \tilde{A} , заметим, что он содержит траектории, у которых с ростом t возникают пики высоты, большей любого наперед заданного конечного значения. Таковыми являются, например, траектории, принадлежащие инвариантным торам (3.42).

5. Фрактальность. Как уже отмечалось в п. 2.2, описание данного свойства в общем случае возможно лишь на эвристическом уровне строгости, поскольку не существует универсального математического определения фрактальности. Однако для аттрактора \tilde{A} удастся придать строгий смысл понятию самоподобия. Делается это тем же способом, что и для аттрактора A системы (2.1) (см. (2.62)–(2.64)).

Действительно, пусть $\mathbb{N}_0 \subset \mathbb{N}$ — любое подмножество натуральных чисел, состоящее из бесконечной последовательности номеров $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$. Обозначим, далее, через $E_{0,0}$ подпространство фазового пространства E_0 , элементами которого являются функции (3.22) при $z_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$. Нетрудно увидеть, что во-первых, $\Pi(E_{0,0}) = E_0$, где изоморфизм Π действует по правилу

$$\Pi(u(x)) = \sum_{k=1}^{\infty} z_{n_k} \exp(in_k x) + \bar{z}_{n_k} \exp(-in_k x) \quad \forall u(x) \in E_{0,0};$$

во-вторых, подпространство $E_{0,0}$ инвариантно для решений краевой задачи (3.18) (данный факт вытекает из структуры уравнений системы (3.29)). Остается заметить, что если при $\nu = 0$ положить в (3.32) $\rho_n = 0, n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_0$, то получится система, с точностью до обозначений совпадающая с исходной. Таким образом, приходим к аналогичному (2.64) равенству

$$\Pi(\tilde{A}_0) = \tilde{A}, \quad (3.49)$$

где \tilde{A}_0, \tilde{A} — аттракторы задачи (3.18) при $\nu = 0$ в пространствах $E_{0,0}$ и E_0 соответственно.

Свойство самоподобия (3.49) свидетельствует о том, что в аттракторе \tilde{A} существуют пространственно-временные структуры сколь угодно малых масштабов. Отметим, что ранее такого типа эффект был обнаружен в разностных уравнениях с непрерывным временем [133] и получил специальное название — сухая турбулентность.

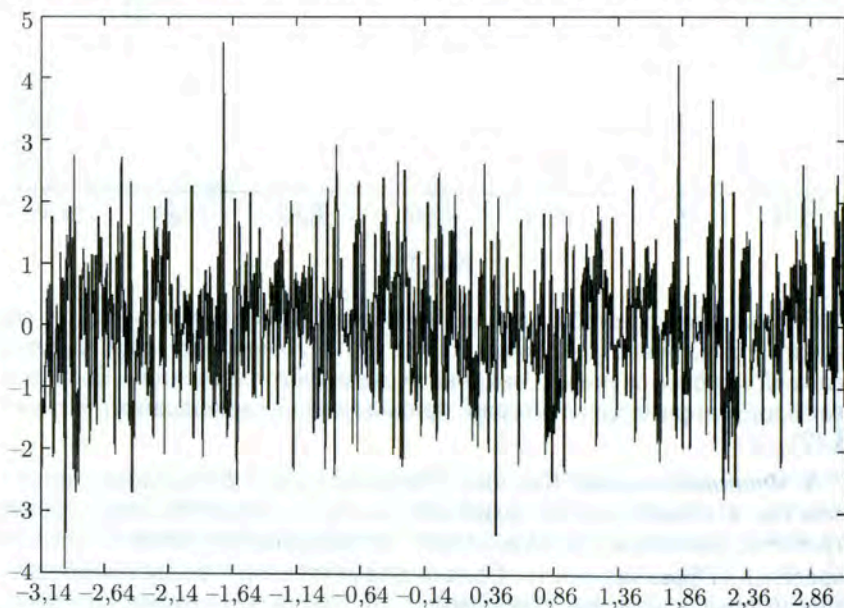


Рис. 3.3

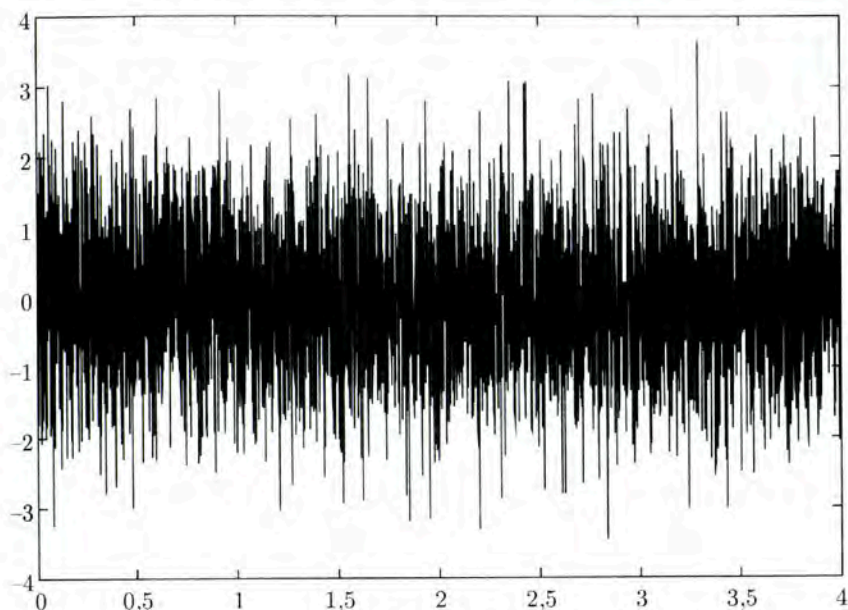


Рис. 3.4

Перейдем теперь к случаю $\nu > 0$. Из проделанного анализа следует, что здесь хотя строгое самоподобие (3.49) и не выполняется, но с уменьшением вязкости ν происходит неограниченное возрастание степени «изрезанности» по t и x устойчивых стационарных режимов краевой задачи (3.18). Наглядное представление об этом эффекте дают рисунки 3.3 и 3.4. На первом из них изображен график функции (3.46) на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$ при $N = 500$, $\nu = (\bar{\nu}_{N+1} + \bar{\nu}_N)/2$, $\varphi_n^0 = n^3 + \exp(-n)$, $n = 1, \dots, N$, а на втором — график функции (3.47) на промежутке $0 \leq t \leq 4$ при $x = 0.1$, $\varphi_n^0 = 0$, $\sigma_n = n^3 + \exp(-n)$, $n = 1, \dots, N$, и при тех же значениях N, ν .

Подводя итог, отметим, что предпринятое в данном разделе рассмотрение модельного примера (3.18) оказалось полезным по следующим двум причинам. Во-первых, как и в примере Хопфа, в нашем случае полностью прослежена вся счетная последовательность бифуркаций (0.1) и получены явные выражения как для критических значений параметра ν , так и для возникающих инвариантных торов (см. (3.35), (3.41)). Во-вторых, и это самое главное, для краевой задачи (3.18) при $\nu = 0$ удалось дать строгое математическое описание турбулентного аттрактора \tilde{A} и выявить некоторые весьма тонкие его свойства. К сожалению, в более реалистичных физических примерах, которые рассматриваются ниже, исследовать проблему развития турбулентности с такой полнотой не представляется возможным.

4. Турбулентные структуры на поверхности мелкой воды

4.1. Разрешимость начально-краевой задачи. В настоящем разделе изучается краевая задача вида

$$u_t + u_{xxx} + \sqrt{\varepsilon} uu_x = \varepsilon \nu u_{xx} + \varepsilon u + \varepsilon g(u), \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x). \quad (4.1)$$

Здесь $u(t, x)$ — вещественная скалярная функция, имеющая нулевое среднее значение по x ; оператор g действует по правилу

$$g: u(x) \rightarrow -M(u^2)u(x) - u(x) * u(x) * u(-x), \quad (4.2)$$

где, как и в (3.19), M — среднее значение, $*$ — свертка, а параметры ε и ν таковы, что $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu = \text{const} > 0$. С физической точки зрения эту задачу можно рассматривать как феноменологическую модель возникновения турбулентных структур на поверхности мелкой воды, поскольку уравнение из (4.1) является возмущением известного уравнения Кортевега-де Фриза (КдФ)

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0.$$

Точнее говоря, оно получается из КдФ в результате нормировки $u/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow u$ и последующего дописывания недостающих слагаемых.

Как будет установлено ниже, при согласованном стремлении к нулю параметров ε и ν в краевой задаче (4.1) возникают устойчивые инвариантные торы сколь угодно высоких размерностей, т. е. происходит развитие турбулентности по Ландау. Более того, оказывается, что за ее динамику по параметру ν отвечает уже изученная модельная система (3.32). Однако в отличие от краевой задачи (3.18), которая в точности сводится к этой системе, здесь из-за наличия характерного для уравнения КдФ слагаемого $\sqrt{\varepsilon} uu_x$ такое сведение осуществляется лишь приближенно (с точностью до асимптотически малых по ε слагаемых).

Причину, по которой краевые задачи (3.18) и (4.1) имеют одинаковые динамические свойства, отчасти проясняет следующее обстоятельство: при отбрасывании в (4.1) упомянутого выше слагаемого $\sqrt{\varepsilon} uu_x$ и при $\varepsilon = 1$ приходим к задаче (3.18) с полем внешней силы, задающимся равенством (3.20) в случае $\sigma_n = n^3$, $n \geq 1$.

Еще одна трудность, с которой сталкиваемся при исследовании краевой задачи (4.1), также связана с присутствием слагаемого $\sqrt{\varepsilon} uu_x$. А именно, усложняется проблема разрешимости для (4.1) смешанной задачи с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$ из подходящего функционального пространства. Один из возможных способов решения этой проблемы предлагается в настоящем пункте.

Наряду с введенным в п. 3.1 пространством E_0 в дальнейшем нам потребуются пространства E_k , $k \in \mathbb{N}$. Элементами E_k являются вещественные 2π -периодические функции $u(x)$ класса $W_2^k[-\pi, \pi]$ с нулевым

средним значением. Нормы в этих пространствах зададим посредством равенств

$$\|u\|_{E_k} = \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^{2k} |z_n|^2 \right)^{1/2}, \quad (4.3)$$

где, как и в (3.21), z_n — коэффициенты разложения (3.22).

Введенные выше пространства позволяют определить понятия классического и обобщенного решений краевой задачи (4.1). Для того чтобы сделать это, будем рассматривать $u(t, x)$ как абстрактную функцию $u(t)$ со значениями в E_1 . Тогда и сама задача (4.1) записывается в виде следующего абстрактного дифференциального уравнения в пространстве E_1 :

$$\dot{u} = L(\varepsilon)u + \sqrt{\varepsilon} \Psi(u, u) + \varepsilon g(u), \quad (4.4)$$

где $L(\varepsilon) = -d^3/dx^3 + \varepsilon \nu d^2/dx^2 + \varepsilon$: $E_1 \rightarrow E_1$ — замкнутый линейный оператор с плотной в E_1 областью определения $D_L = E_4$, а действующий из $E_{k+1} \times E_{k+1}$ в E_k билинейный ограниченный оператор Ψ определен равенством

$$\Psi(u_1, u_2) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u_1(x)u_2(x)) \quad \forall u_1(x), u_2(x) \in E_k. \quad (4.5)$$

Классическим решением уравнения (4.4) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ назовем непрерывно дифференцируемую (в метрике пространства E_1) функцию $u(t)$ со значениями в D_L , удовлетворяющую при каждом $t \in [0, \bar{t}]$ этому уравнению. Обобщенным решением рассматриваемого уравнения с начальным условием $u(0) = u_0 \in E_1$ будем называть непрерывное по $t \in [0, \bar{t}]$ решение интегрального уравнения

$$u(t) = \exp(L(\varepsilon)t)u_0 + \int_0^t \exp(L(\varepsilon)(t-\tau)) \left[\sqrt{\varepsilon} \Psi(u(\tau), u(\tau)) + \varepsilon g(u(\tau)) \right] d\tau. \quad (4.6)$$

Здесь $\exp(L(\varepsilon)t)$, $t \geq 0$, — аналитическая полугруппа линейных ограниченных операторов в пространстве E_1 , определяющаяся на любой функции $u(x)$ вида (3.22) с помощью аналогичного (3.27) равенства

$$\exp(L(\varepsilon)t)u = \exp(\varepsilon t) \sum_{n=1}^{\infty} z_n \exp[i(n^3 t + nx) - \varepsilon \nu n^2 t] + \bar{z}_n \exp[-i(n^3 t + nx) - \varepsilon \nu n^2 t]. \quad (4.7)$$

В формулируемом ниже утверждении через B_r обозначен замкнутый шар пространства E_1 радиуса $r > 0$ с центром в нуле.

Теорема 4.1. Для любых фиксированных \bar{t} , $r > 0$ существует такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\bar{t}, r) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при каждом $u_0 \in B_r$ уравнение (4.4) имеет на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ единственное обобщенное решение $u(t, \varepsilon)$ с начальным условием

$u(0, \varepsilon) = u_0$. Кроме того, в случае $u_0 \in B_r \cap D_L$ это решение оказывается классическим.

Доказательство. Основная идея обоснования заключается в построении корректной замены переменных, убивающей слагаемое порядка $\sqrt{\varepsilon}$ в правой части уравнения (4.4). Интересующую нас замену будем искать в виде

$$u = v + \sqrt{\varepsilon} h_2(v, v), \quad (4.8)$$

где $h_2(*, *) : E_k \times E_k \rightarrow E_k$ — симметричный билинейный ограниченный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$L(\varepsilon)h_2(v, v) - h_2(L(\varepsilon)v, v) - h_2(v, L(\varepsilon)v) = vv_x. \quad (4.9)$$

Вопрос о разрешимости уравнения (4.9) исследован в статье [107]. Как показано в этой работе, соответствующий анализ существенно упрощается при переходе к координатам Фурье. Действительно, для любых двух элементов

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} u_n \exp(inx), & v &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} v_n \exp(inx), \\ u_{-n} &= \bar{u}_n, & v_{-n} &= \bar{v}_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4.10)$$

из пространства E_k имеем

$$L(\varepsilon)u = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \lambda_n(\varepsilon) u_n \exp(inx), \quad \lambda_n(\varepsilon) = in^3 - \varepsilon n^2 + \varepsilon; \quad (4.11)$$

$$vv_x = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{in}{2} \left(\sum_{p+q=n} v_p v_q \right) \exp(inx); \quad (4.12)$$

$$h_2(u, v) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} h_{n,2} \exp(inx), \quad h_{n,2} = \sum_{p,q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} h_{p,q}^{n,2} u_p v_q. \quad (4.13)$$

Далее, подставляя разложения (4.10)–(4.13) в (4.9), без труда убеждаемся, что для фигурирующих в (4.13) коэффициентов $h_{p,q}^{n,2}$ выходят равенства

$$h_{p,q}^{n,2} = \begin{cases} \frac{in}{2} (\lambda_n - \lambda_p - \lambda_q)^{-1} & \text{при } p+q=n, \\ 0 & \text{при } p+q \neq n. \end{cases} \quad (4.14)$$

Итак, установлено, что билинейный оператор, определяющийся с помощью соотношений (4.13), (4.14), является формальным решением уравнения (4.9). Однако возникает вопрос о корректности данного определения. Ответ на него содержится в следующем утверждении.

Лемма 4.1. Для каждого $k = 0, 1, \dots$ оператор (4.13), (4.14) действует из $E_k \times E_k$ в E_{k+1} и непрерывен.

Доказательство. Прежде всего необходимо проверить, что в случае $p + q = n$, $p \neq 0, n$, выполнено неравенство $\lambda_n - \lambda_p - \lambda_q \neq 0$. Но это действительно так, поскольку

$$|\lambda_n - \lambda_p - \lambda_q| \geq |n^3 - p^3 - q^3| = 3|np(p - n)| \geq 3n^2/2. \quad (4.15)$$

Далее, введем в рассмотрение аналогичные (4.10) функции

$$\tilde{u} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |u_n| \exp(inx), \quad \tilde{v} = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |v_n| \exp(inx)$$

и заметим, что из способа задания нормы в пространстве E_k (см. (4.3)) вытекают свойства

$$\|\tilde{u}\|_{E_k} = \|u\|_{E_k}, \quad \|\tilde{v}\|_{E_k} = \|v\|_{E_k}, \quad \|uv\|_{E_k} \leq c_k \|u\|_{E_k} \cdot \|v\|_{E_k},$$

где $c_k > 0$ — некоторые универсальные константы. С учетом этих фактов и уже установленной оценки (4.15) приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned} \|h_2(u, v)\|_{E_{k+1}} &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (|n| + 1)^{2k+2} \left| \sum_{p+q=n} h_{p,q}^{n,2} u_p v_q \right|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left(1 + \frac{1}{|n|}\right)^2 (|n| + 1)^{2k} \left(\sum_{p+q=n} |u_p| \cdot |v_q| \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2}{3} \|\tilde{u}\tilde{v}\|_{E_k} \leq \frac{2}{3} c_k \|\tilde{u}\|_{E_k} \cdot \|\tilde{v}\|_{E_k} = \frac{2}{3} c_k \|u\|_{E_k} \cdot \|v\|_{E_k}. \end{aligned}$$

Лемма 4.1 доказана.

Непосредственная проверка показывает, что построенная выше замена (4.8) приводит исходное уравнение (4.4) к требуемому виду

$$\dot{v} = L(\varepsilon)v + \varepsilon H(v, \varepsilon), \quad (4.16)$$

где

$$H = \left(I + \sqrt{\varepsilon} \Upsilon(v) \right)^{-1} \{ 2\Psi(v, h_2(v, v)) + \sqrt{\varepsilon} \Psi(h_2(v, v), h_2(v, v)) + g(v + \sqrt{\varepsilon} h_2(v, v)) \}, \quad (4.17)$$

Ψ — билинейный оператор (4.5), а линейный ограниченный оператор $\Upsilon(v)$ действует из E_k в E_{k+1} при любом $k \geq 0$ по правилу

$$\Upsilon(v)u = 2h_2(v, u) \quad \forall u \in E_k. \quad (4.18)$$

Возвращаясь к доказательству теоремы 4.1, фиксируем произвольно элемент $u_0 \in B_r$ и обозначим через $v_0 \in E_1$ решение уравнения

$$v + \sqrt{\varepsilon} h_2(v, v) = u_0, \quad (4.19)$$

которое в силу малости ε и свойств оператора $h_2(v, v)$ (лемма 4.1) определяется однозначно. После этого дополним уравнение (4.16) на-

чальным условием $v|_{t=0} = v_0$ и перейдем к аналогичному (4.6) интегральному уравнению

$$v(t) = \exp(L(\varepsilon)t)v_0 + \varepsilon \int_0^t \exp(L(\varepsilon)(t-\tau))H(v(\tau), \varepsilon)d\tau \quad (4.20)$$

для нахождения соответствующего обобщенного решения.

Анализ получившегося уравнения требует некоторых дополнительных построений. В первую очередь фиксируем произвольно $\bar{t} > 0$ и обозначим через $C = C([0, \bar{t}]; E_1)$ банахово пространство непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ вектор-функций $v(t) \in E_1$ с нормой

$$\|v(t)\|_C = \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|v(t)\|_{E_1}. \quad (4.21)$$

Далее, введем в рассмотрение множество

$$\Sigma_0 = \{v(t) \in C : \|v(t) - \exp(L(\varepsilon)t)v_0\|_C \leq \bar{r}\}, \quad (4.22)$$

где постоянная $\bar{r} > 0$ также произвольно фиксирована. И наконец, обозначим через $\Pi(v(t))$ — оператор, порождаемый правой частью уравнения (4.20).

Убедимся, что оператор Π действует из Σ_0 в Σ_0 и является сжимающим. В связи с этим сначала проверим, что при любом $t > 0$ линейный оператор $\exp(L(\varepsilon)t)$ переводит E_0 в E_1 . Действительно, привлекая разложение (4.7), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \exp(-\varepsilon t) \|\exp(L(\varepsilon)t)u\|_{E_1} &= \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)^2 |z_n|^2 \exp(-2\varepsilon \nu n^2 t)\right)^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \nu t}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 (n\sqrt{\varepsilon \nu t} \exp(-n^2 \varepsilon \nu t))^2 |z_n|^2\right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{c_*}{\sqrt{\varepsilon \nu t}} \|u\|_{E_0}, \quad (4.23) \end{aligned}$$

где $c_* = 2 \max_{\sigma \geq 0} (\sqrt{\sigma} \exp(-\sigma))$.

Остановимся, далее, на некоторых свойствах фигурирующего в (4.16) оператора $H(*, \varepsilon): E_{k+1} \rightarrow E_k$. Из формул (4.17), (4.18) и из явного выражения для $g(u)$ (см. (4.2)) вытекает существование для любых целых $k \geq 0$, $m \geq 1$ и произвольного ограниченного множества $\Omega \subset E_{k+1}$ такого $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(k, m, \Omega) > 0$, что при всех $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ рассматриваемый оператор действует из Ω в E_k , а его производные Фреше $H_v^{(s)}(v, \varepsilon)$, $s = 0, \dots, m$, непрерывны и ограничены по совокупности переменных $(v, \varepsilon) \in \Omega \times [0, \bar{\varepsilon}]$.

Из перечисленных свойств оператора $H(v, \varepsilon)$ следует, в частности, существование универсальных (независящих от ε) постоянных Δ_0 ,

$\Delta_1 > 0$, таких что

$$\begin{aligned} \|H(v(t), \varepsilon)\|_{E_0} &\leq \Delta_0, \\ \|H'_v(v(t), \varepsilon)\|_{E_1 \rightarrow E_0} &\leq \Delta_1 \quad \forall v(t) \in \Sigma_0, \quad \forall t \in [0, \bar{t}]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Далее, объединяя (4.24) с неравенством (4.23), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \|\Pi(v(t)) - \exp(L(\varepsilon)t)v_0\|_{E_1} &\leq \varepsilon c_* \int_0^t \frac{\exp(\varepsilon(t-\tau))}{\sqrt{\varepsilon\nu(t-\tau)}} \|H(v(\tau), \varepsilon)\|_{E_0} d\tau \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} c_* \Delta_0 \int_0^t \frac{\exp(\varepsilon s)}{\sqrt{s}} ds \quad \forall v(t) \in \Sigma_0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} \|\Pi(v_1(t)) - \Pi(v_2(t))\|_{E_1} &\leq \\ &\leq \varepsilon c_* \int_0^t \frac{\exp(\varepsilon(t-\tau))}{\sqrt{\varepsilon\nu(t-\tau)}} \|H(v_1(\tau), \varepsilon) - H(v_2(\tau), \varepsilon)\|_{E_0} d\tau \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{\varepsilon}{\nu}} c_* \Delta_1 \int_0^t \frac{\exp(\varepsilon s)}{\sqrt{s}} ds \cdot \|v_1 - v_2\|_C \quad \forall v_1(t), v_2(t) \in \Sigma_0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Полученные неравенства (4.25), (4.26) свидетельствуют о том, что при подходящем уменьшении ε интересующий нас оператор Π переводит множество (4.22) в себя и оказывается сжимающим (с константой сжатия порядка $\sqrt{\varepsilon/\nu}$). А отсюда и из принципа сжимающих отображений вытекает существование на отрезке $[0, \bar{t}]$ единственного обобщенного решения $v(t, \varepsilon)$, $v(0, \varepsilon) = v_0$ уравнения (4.16).

На следующем этапе доказательства убедимся, что в случае $v_0 \in D_L$ построенное выше решение $v(t, \varepsilon)$ является классическим. С этой целью введем в рассмотрение банахово пространство $C^1 = C([0, \bar{t}]; E_4) \cap C^1([0, \bar{t}]; E_1)$ с нормой

$$\|v(t)\|_{C^1} = \|v(t)\|_C + \|L(\varepsilon)v(t)\|_C + \|\dot{v}(t)\|_C,$$

где $\|\cdot\|_C$ — норма (4.21). Рассмотрим также аналогичное (4.22) множество

$$\Sigma_1 = \{v(t) \in C^1: \|v(t) - \exp(L(\varepsilon)t)v_0\|_{C^1} \leq \bar{r}\}, \quad (4.27)$$

где, как и ранее, постоянная $\bar{r} > 0$ произвольно фиксирована. Заметим, что при условии $v_0 \in D_L = E_4$ автоматически $\exp(L(\varepsilon)t)v_0 \in C^1$, поскольку в этом случае

$$\frac{d}{dt}(\exp(L(\varepsilon)t)v_0) = L(\varepsilon)\exp(L(\varepsilon)t)v_0 = \exp(L(\varepsilon)t)L(\varepsilon)v_0. \quad (4.28)$$

Для проверки включения $\Pi\Sigma_1 \subset \Sigma_1$ и факта сжимаемости оператора Π фиксируем произвольно функцию $v(t) \in \Sigma_1$ и положим

$w(t) = \Pi(v(t))$. Из соотношений (4.20), (4.28) вытекает, что

$$L(\varepsilon)w(t) = \exp(L(\varepsilon)t)L(\varepsilon)v_0 + \varepsilon \int_0^t \exp(L(\varepsilon)(t-\tau))L(\varepsilon)H(v(\tau), \varepsilon) d\tau \in C, \quad (4.29)$$

$$\dot{w}(t) = \exp(L(\varepsilon)t)[L(\varepsilon)v_0 + \varepsilon H(v_0, \varepsilon)] + \varepsilon \int_0^t \exp(L(\varepsilon)(t-\tau))H'_v(v(\tau), \varepsilon)\dot{v}(\tau) d\tau \in C \quad (4.30)$$

(при выводе второго из этих равенств проводилось интегрирование по частям).

Действительно, непрерывность функции (4.30) очевидна, а в случае функции (4.29) она устанавливается с использованием оценки (4.23) и вполне понятных свойств ограниченности и гладкости оператора $L(\varepsilon)H(*, \varepsilon): E_4 \rightarrow E_0$. Более того, из структуры правых частей равенств (4.29), (4.30) следует (см. аналогичное место выше), что оператор Π заведомо обладает требуемыми свойствами, т.е. переводит множество (4.27) в себя и оказывается сжимающим. Тем самым, он имеет в Σ_1 единственную неподвижную точку $v(t, \varepsilon)$, которая служит одновременно и классическим решением уравнения (4.16).

Подводя итог, отметим, что все интересующие нас обобщенные решения исходного уравнения (4.4) с начальными условиями $u_0 \in B_r$ задаются соотношением

$$u(t, \varepsilon) = v(t, \varepsilon) + \sqrt{\varepsilon} h_2(v(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon)), \quad (4.31)$$

где $v(t, \varepsilon)$ — любое из построенных выше решений уравнения (4.16). Если же имеет место включение $u_0 \in B_r \cap D_L$, то и начальное условие v_0 , определяющееся из уравнения (4.19), будет принадлежать пространству D_L . Поэтому в данном случае классическими являются как решение $v(t, \varepsilon)$, $v(0, \varepsilon) = v_0$, уравнения (4.16), так и отвечающее ему решение (4.31). Теорема 4.1 доказана.

4.2. Существование и устойчивость инвариантных торov. Для того чтобы разобраться с аттракторами уравнения (4.16), попытаемся его немного упростить. А именно, с помощью некоторой замены приведем его к нормальной форме Пуанкаре–Дюлака до кубических слагаемых включительно.

Построение требуемой замены осуществляется в несколько этапов. Сначала выявим ряд необходимых в последующем свойств оператора $H(v, \varepsilon)$. Из формул (4.17), (4.18) очевидным образом следует, что он допускает представление

$$H(v, \varepsilon) = H_1(v) + \sqrt{\varepsilon} H_2(v, \varepsilon), \quad (4.32)$$

где $H_1: E_{k+1} \rightarrow E_k$ — ограниченная трилинейная форма, задающаяся равенством

$$H_1(v) = 2\Psi(v, h_2(v, v)) + g(v), \quad (4.33)$$

а оператор $H_2(*, \varepsilon): E_{k+1} \rightarrow E_k$ обладает теми же общими свойствами ограниченности и гладкости, что и исходный оператор $H(v, \varepsilon)$. Кроме того, его тейлоровское разложение в точке $v = 0$ начинается с членов четвертого порядка.

В дальнейшем нам потребуется координатное представление оператора $H_1(v)$. Для его получения подставим в формулу (4.33) разложение Фурье функции v (см. (4.10)). На этом пути с учетом равенств (4.13), (4.14) и (4.2) приходим к соотношениям вида

$$\begin{aligned} H_1(v) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_n \exp(inx), \\ f_n &= \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = n} f_{p_1, p_2, p_3}^n v_{p_1} v_{p_2} v_{p_3}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Равенства (4.34) позволяют выделить из $H_1(v)$ резонансное и нерезонансное слагаемые. Для того чтобы сделать это, запишем f_n в виде $f_n^1 + f_n^2$, где в случае f_n^2 суммирование ведется по всем индексам $p_1 + p_2 + p_3 = n$, $p_j \neq n$, $j = 1, 2, 3$. В результате имеем

$$\begin{aligned} H_1(v) &= H_1^1(v) + H_1^2(v), \\ H_1^j(v) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} f_n^j \exp(inx), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Что же касается интересующей нас проблемы нормализации, то она заключается в нахождении замены переменной, убивающей нерезонансное слагаемое $\varepsilon H_1^2(v)$ в правой части уравнения (4.16).

Нормализующую замену будем искать в виде

$$v = w + \varepsilon h_3(w, w, w), \quad (4.36)$$

где $h_3(*, *, *) : E_k \times E_k \times E_k \rightarrow E_k$ — симметричный трилинейный ограниченный оператор, удовлетворяющий уравнению

$$\begin{aligned} L(\varepsilon)h_3(w, w, w) - h_3(L(\varepsilon)w, w, w) - h_3(w, L(\varepsilon)w, w) - \\ - h_3(w, w, L(\varepsilon)w) = -H_1^2(w) \end{aligned} \quad (4.37)$$

и допускающий в координатах Фурье представление

$$\begin{aligned} h_3(u, v, w) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} h_{n,3} \exp(inx), \\ h_{n,3} &= \sum_{p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} h_{p_1, p_2, p_3}^{n,3} u_{p_1} v_{p_2} w_{p_3}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Здесь u, v, w — произвольные элементы из E_k , а $u_{p_1}, v_{p_2}, w_{p_3}$ — соответствующие коэффициенты их рядов Фурье (см., например, (4.10)).

При анализе уравнения (4.37) существенным оказывается то обстоятельство, что в силу (4.2), (4.13), (4.14), (4.33) компоненты f_n^2 нерезонансного слагаемого $H_1^2(w)$ из (4.35) имеют вид

$$f_n^2 = -i n \sum_{\substack{p_1+p_2+p_3=n \\ p_j \neq 0, n}} h_{p_2, p_3}^{p_2+p_3, 2} w_{p_1} w_{p_2} w_{p_3}, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (4.39)$$

Действительно, из соотношений (4.39) и из структуры самого уравнения (4.37) автоматически следует, что фигурирующие в (4.38) комплексные коэффициенты $h_{p_1, p_2, p_3}^{n, 3}$ должны задаваться равенствами

$$h_{p_1, p_2, p_3}^{n, 3} = \begin{cases} i n h_{p_2, p_3}^{p_2+p_3, 2} \cdot [\lambda_n(\varepsilon) - \lambda_{p_1}(\varepsilon) - \lambda_{p_2}(\varepsilon) - \lambda_{p_3}(\varepsilon)]^{-1} & \text{при } p_1 + p_2 + p_3 = n, \quad p_j \neq 0, n, \quad j = 1, 2, 3; \\ 0 & \text{во всех остальных ситуациях.} \end{cases} \quad (4.40)$$

Но при этом, как и в случае уравнения (4.9), возникает проблема корректности построенного таким способом оператора $h_3(u, v, w)$. Решение указанной проблемы содержится в следующем утверждении.

Лемма 4.2. При каждом $k = 0, 1, \dots$ формулы (4.38), (4.40) задают ограниченный трилинейный оператор, действующий из $E_k \times E_k \times E_k$ в E_k .

Доказательство. Как и при обосновании леммы 4.1, убедимся сначала, что отличны от нуля знаменатели $\lambda_n - \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} - \lambda_{p_3}$ в (4.40). Следуя работе [107], покажем, что при $p_1 + p_2 + p_3 = n$, $p_j \neq 0, n$, $j = 1, 2, 3$, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \lambda_n - \sum_{j=1}^3 \lambda_{p_j} \right| &\geq |n^3 - p_1^3 - p_2^3 - p_3^3| = \\ &= 3|p_1 + p_2| \cdot |n - p_1| \cdot |n - p_2| \geq 3|n|. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Точнее говоря, в проверке нуждается только второе из неравенств (4.41) и только при $n \geq 2$ (при $|n| = 1$ оно очевидно, а случай $n \leq -2$ сводится к указанному посредством замен $p_j \rightarrow -p_j$, $j = 1, 2$).

Предположим сначала, что $0 < p_1 + p_2 < n/2$.

Если дополнительно $p_1, p_2 > 0$, то $p_1 + p_2 \geq 2$, $|n - p_1| > n/2$, $|n - p_2| > n/2$ и, следовательно, требуемая оценка выполняется.

Если же $p_1 p_2 < 0$, то либо $|n - p_1| > n$, либо $|n - p_2| > n$ и снова убеждаемся в справедливости нужного неравенства. Случай $-n/2 < p_1 + p_2 < 0$ разбирается аналогично.

Предположим теперь, что выполняется неравенство $|p_1 + p_2| \geq n/2$. Если при этом $|n - p_1| \cdot |n - p_2| \geq 2$, то интересующая нас оценка доказана.

Если же одновременно $|n - p_1| = |n - p_2| = 1$, то требуемый факт по-прежнему имеет место, поскольку тогда $|p_1 + p_2| \geq 2n - 2 \geq n$.

Объединяя установленные неравенства (4.41) с уже известной оценкой (4.15) и учитывая явные формулы (4.14), (4.40), приходим к выводу, что

$$|h_{p_1, p_2, p_3}^{n, 3}| \leq \frac{1}{3} |h_{p_2, p_3}^{p_2 + p_3, 2}| \leq \frac{1}{9 |p_2 + p_3|} \leq \frac{1}{9}.$$

А отсюда очевидным образом имеем (см. аналогичное место в доказательстве леммы 4.1)

$$\begin{aligned} \|h_3(u, v, w)\|_{E_k} &= \\ &= \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (|n| + 1)^{2k} \left| \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = n} h_{p_1, p_2, p_3}^{n, 3} u_{p_1} v_{p_2} w_{p_3} \right|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{9} \|\tilde{u} \tilde{v} \tilde{w}\|_{E_k} \leq \frac{c_k^2}{9} \|\tilde{u}\|_{E_k} \cdot \|\tilde{v}\|_{E_k} \cdot \|\tilde{w}\|_{E_k} = \frac{c_k^2}{9} \|u\|_{E_k} \cdot \|v\|_{E_k} \cdot \|w\|_{E_k}. \end{aligned}$$

Лемма 4.2 доказана.

Из способа построения замены (4.36) следует, что результатом ее применения к уравнению (4.16) является уравнение вида

$$\dot{w} = L(\varepsilon)w + \varepsilon H_1^1(w) + \varepsilon^{3/2} \tilde{H}(w, \varepsilon), \quad (4.42)$$

где, напомним, $H_1^1(w)$ — резонансное слагаемое из (4.35), а свойства оператора $\tilde{H}(*, \varepsilon): E_{k+1} \rightarrow E_k$ идентичны отмеченным выше свойствам оператора $H_2(v, \varepsilon)$ из (4.32). Далее, наряду с (4.42) введем в рассмотрение вспомогательное уравнение

$$\dot{w} = L(\varepsilon)w + \varepsilon H_1^1(w), \quad (4.43)$$

которое будем называть укороченной нормальной формой.

Как оказывается, инвариантные торы уравнения (4.43) могут быть найдены в явном виде. Для того чтобы убедиться в этом, перейдем в нем к координатной форме записи, полагая

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w_n \exp(inx) + \bar{w}_n \exp(-inx). \quad (4.44)$$

В результате с учетом вытекающих из (4.13), (4.14), (4.33) формул

$$f_n^1 = -w_n \sum_{k=1}^{\infty} d_{n,k}(\varepsilon) |w_k|^2, \quad d_{n,k}(\varepsilon) = 2 + 2in(h_{n,k}^{n+k,2} + h_{n,-k}^{n-k,2}) \quad (4.45)$$

$$\text{при } n \neq k, \quad d_{n,n}(\varepsilon) = 3 + in h_{n,n}^{2n,2}, \quad f_n^1 = \overline{f_n^1}, \quad n \geq 1,$$

для компонент w_n , $n \geq 1$, из (4.44) выходит счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{w}_n = \left[\lambda_n(\varepsilon) - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} d_{n,k}(\varepsilon) |w_k|^2 \right] w_n, \quad n \geq 1. \quad (4.46)$$

В дальнейшем вместо укороченной нормальной формы (4.43) будем работать с эквивалентной ей системой

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_n &= 2\varepsilon \left[1 - \nu n^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k \right] \rho_n, \\ \dot{\varphi}_n &= n^3 - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Im} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k, \quad n \geq 1,\end{aligned}\tag{4.47}$$

получающейся из (4.46) после выполнения аналогичных (3.30) замен:

$$w_n = \sqrt{\rho_n} \exp(i\varphi_n), \quad \rho_n \geq 0, \quad \varphi_n \in \mathbb{R}, \quad n \geq 1.\tag{4.48}$$

Точнее говоря, в первую очередь нам потребуется отщепляющаяся от (4.47) система для ρ_n , $n \geq 1$, которая после замены $2\varepsilon t \rightarrow t$ приобретает вид

$$\dot{\rho}_n = \left[1 - \nu n^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1,\tag{4.49}$$

и которую следует рассматривать в пространстве l_1 , состоящем из векторов

$$\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n, \dots) : \quad \|\rho\| = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\rho_n| < \infty.$$

Именно она, как и система (3.32) в аналогичной ситуации, отвечает в конечном итоге за возможные аттракторы укороченной нормальной формы в фазовом пространстве E_1 . Более того, при $\varepsilon = 0$ система (4.49) переходит в (3.32), так как в силу (4.45), (4.14) имеем

$$\operatorname{Re} d_{n,k}(0) = 2 \text{ при } n \neq k, \quad \operatorname{Re} d_{n,n}(0) = 3.\tag{4.50}$$

Равенства (4.50) позволяют при отыскании состояний равновесия системы (4.49) воспользоваться результатами из раздела 3. Действительно, фиксируем произвольно натуральное N и предположим, что параметр ν удовлетворяет условиям (3.36). Рассмотрим, далее, линейную алгебраическую систему

$$1 - \nu n^2 = \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k, \quad n = 1, \dots, N.\tag{4.51}$$

Из сделанного в п. 3.3 анализа следует, что, во-первых, при указанных значениях ν и при всех достаточно малых ε система (4.51) допускает единственное решение:

$$\rho_n = \rho_n(\varepsilon), \quad \rho_n(0) = \rho_{n,0}, \quad n = 1, \dots, N,\tag{4.52}$$

где $\rho_{n,0}$ — координаты (3.37); во-вторых, решению (4.52) отвечает экспоненциально устойчивое (в метрике пространства l_1) состояние равновесия $O_N(\varepsilon)$ системы (4.49) с компонентами

$$\rho_n = \rho_n(\varepsilon), \quad n = 1, \dots, N; \quad \rho_n = 0 \text{ при } n \geq N+1.\tag{4.53}$$

Возвращаясь к системе (4.43), заметим, что при условиях (3.36) на параметр ν ее аттрактором является экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\begin{aligned} \tilde{T}_N(\varepsilon) : \quad w &= \sum_{k=1}^N 2\sqrt{\rho_k(\varepsilon)} \cos(kx + \varphi_k), \\ \dot{\varphi}_n &= n^3 - \varepsilon \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k(\varepsilon), \quad n = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.54)$$

получающийся в результате подстановки соотношений (4.53) в формулы (4.44), (4.48) и в уравнения для φ_n из (4.47). Далее, при переходе от укороченной нормальной формы к полной системе (4.42) тор (4.54) в силу его грубости, естественно, сохраняется и переходит в асимптотически близкий к нему тор $T_N(\varepsilon)$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.2. Пусть при некотором натуральном N параметр ν удовлетворяет условиям (3.36). Тогда по любому натуральному m можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, \nu, N) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в фазовом пространстве E_1 уравнения (4.42) существует экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\begin{aligned} T_N(\varepsilon) : \quad w &= \sum_{k=1}^N 2\sqrt{\rho_k(\varepsilon)} \cos(kx + \varphi_k) + \varepsilon^{3/2} W_*(\varphi, \varepsilon), \\ \dot{\varphi} &= \omega(\varepsilon) + \varepsilon^{3/2} \Phi_*(\varphi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Здесь $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\omega(\varepsilon) = \operatorname{colon}(\omega_1(\varepsilon), \dots, \omega_N(\varepsilon))$,

$$\omega_n(\varepsilon) = n^3 - \varepsilon \sum_{k=1}^N \operatorname{Im} d_{n,k}(\varepsilon) \rho_k(\varepsilon), \quad n = 1, \dots, N,$$

а 2π -периодические по векторному аргументу φ функции $W_* \in E_1$, $\Phi_* \in \mathbb{R}^N$ и их всевозможные частные производные по φ до порядка m включительно ограничены равномерно по φ, ε в метрике пространств E_1 и \mathbb{R}^N соответственно.

Сформулированная теорема представляет собой частный случай установленного в [73] общего результата о бифуркации инвариантных торов в абстрактных нелинейных системах. Отметим, что в монографии [73] реализован геометрический подход к проблеме существования и устойчивости инвариантных торов, основанный на исследовании динамических свойств оператора сдвига по траекториям рассматриваемой системы за фиксированное конечное время $t_0 > 0$. Что же касается уравнения (4.42), то для него ввести такого рода оператор позволяет полученная выше теорема 4.1.

4.3. Заключительные замечания. Из теоремы 4.2 следует, что в исходной краевой задаче (4.1) при согласованном стремлении к нулю

параметров ν и ε происходят перестройки вида (0.1), приводящие к последовательности устойчивых инвариантных торов T_k , $k \geq 1$. Однако динамика на них, вообще говоря, может и не быть квазипериодической. Кроме того, в отличие от модельного примера (3.18) здесь удастся отследить хотя и сколь угодно большое, но конечное число таких бифуркаций. В первую очередь это связано с тем, что мы не можем допустить независимого изменения параметров ε и ν , так как, например, при обосновании теоремы 4.1 требуется малость величины $\sqrt{\varepsilon/\nu}$. По той же причине при $\nu = 0$, $\varepsilon > 0$ остаются открытыми как вопрос о разрешимости для (4.1) смешанной задачи с начальным условием $u(0, x) = u_0(x) \in E_1$, так и проблема существования турбулентного аттрактора.

Перейдем к возможным обобщениям полученных результатов.

Нетрудно заметить, что разработанная в пп. 4.1, 4.2 методика заведомо применима в случае, когда в качестве оператора $g(u)$ в (4.1) взята произвольная кубическая нелинейность вида $g(u) = \tilde{g}(u, u, u)$, где $\tilde{g}(*, *, *): E_1 \times E_1 \times E_1 \rightarrow E_0$ — непрерывный симметричный трilinearный оператор, допускающий аналогичное (4.38) координатное представление

$$\begin{aligned} \tilde{g}(u, v, w) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} g_n \exp(inx), \\ g_n &= \sum_{p_1 + p_2 + p_3 = n} g_{p_1, p_2, p_3}^n u_{p_1} v_{p_2} w_{p_3}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Существенным здесь является то обстоятельство, что в сумме для g_n из (4.56) присутствуют только мономы $u_{p_1} v_{p_2} w_{p_3}$ с номерами $p_1 + p_2 + p_3 = n$. Данный факт гарантирует возможность приведения задачи (4.1) к нормальной форме вида (4.42), резонансное слагаемое $\varepsilon H_1^1(w)$ в которой по-прежнему имеет структуру

$$\begin{aligned} H_1^1(w) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^1 \exp(inx) + \overline{f_n^1} \exp(-inx), \\ f_n^1 &= -w_n \sum_{k=1}^{\infty} d_{n,k}(\varepsilon) |w_k|^2. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Что же касается фигурирующих в (4.57) коэффициентов $d_{n,k}(\varepsilon)$, то теперь они задаются аналогичными (4.45), но уже другими равенствами:

$$\begin{aligned} d_{n,k}(\varepsilon) &= -6 g_{n,k,-k}^n + 2 i n (h_{n,k}^{n+k,2} + h_{n,-k}^{n-k,2}) \quad \text{при } n \neq k; \\ d_{n,n}(\varepsilon) &= -3 g_{n,n,-n}^n + i n h_{n,n}^{2n,2}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Очевидно, что в случае произвольной нелинейности $g(u)$ из описанного выше класса цепочка бифуркаций (0.1) в краевой задаче (4.1) при $\nu \rightarrow 0$, вообще говоря, не сохраняется. Однако остается в силе некоторый условный аналог теоремы 4.2, справедливость которого также вытекает из общих утверждений монографии [73].

Для формулировки соответствующего результата рассмотрим систему

$$\dot{\rho}_n = \left[1 - \nu n^2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1, \quad (4.59)$$

где $a_{nk} = -6 \operatorname{Re} g_{n,k,-k}^n$, $n \neq k$, $a_{nn} = -3 \operatorname{Re} g_{n,n,-n}^n$, получающуюся из (4.49) при учете равенств (4.58) и при $\varepsilon = 0$. Предположим, далее, что при некотором $\nu > 0$ эта система допускает экспоненциально устойчивое или дихотомичное (в метрике пространства l_1) состояние равновесия O с компонентами вида

$$\rho_{n_j} = \eta_j^0 > 0, \quad j = 1, \dots, k; \quad \rho_n = 0 \quad \text{при } \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{n_j\}, \quad (4.60)$$

где $n_1 < \dots < n_k$ — произвольный конечный набор натуральных чисел. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 4.3. *Введенному выше состоянию равновесия (4.60) системы (4.59) в исходной краевой задаче (4.1) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует k -мерный инвариантный тор $T_k(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Указанный тор записывается в аналогичном (4.55) параметрическом виде:*

$$T_k(\varepsilon): \quad u = \sum_{j=1}^k 2 \sqrt{\rho_j(\varepsilon)} \cos(n_j x + \varphi_j) + \sqrt{\varepsilon} U_*(\varphi, \varepsilon), \quad (4.61)$$

$$\dot{\varphi} = \omega(\varepsilon) + \varepsilon^{3/2} \Phi_*(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$, $\omega(\varepsilon) = \operatorname{colon}(\omega_1(\varepsilon), \dots, \omega_k(\varepsilon))$,

$$\omega_j(\varepsilon) = n_j^3 - \varepsilon \sum_{s=1}^k \operatorname{Im} d_{n_j, n_s}(\varepsilon) \rho_s(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, k,$$

амплитуды $\rho_j(\varepsilon)$, $\rho_j(0) = \eta_j^0$ определяются из системы

$$1 - \nu n_j^2 = \sum_{s=1}^k \operatorname{Re} d_{n_j, n_s}(\varepsilon) \rho_s, \quad j = 1, \dots, k,$$

а 2π -периодические по φ вектор-функции $U_*(\varphi, \varepsilon)$, $\Phi_*(\varphi, \varepsilon)$ со значениями в E_1 и \mathbb{R}^k соответственно обладают теми же свойствами ограниченности и гладкости, что и аналогичные функции W_* , Φ_* из (4.55).

Обратим внимание, что в качестве коэффициентов

$$g_{p_1, p_2, p_3}^n, \quad g_{p_1, p_2, p_3}^{-n} = \overline{g_{p_1, p_2, p_3}^n}$$

из (4.56) можно брать любую последовательность комплексных чисел, не меняющуюся при перестановках индексов p_1, p_2, p_3 : $p_1 + p_2 + p_3 = n$ (например, $g_{p_1, p_3, p_2}^n = g_{p_1, p_2, p_3}^n$) и допускающую оценку вида $|g_{p_1, p_2, p_3}^n| \leq c|n|$ с некоторой универсальной (независящей от n, p_1, p_2, p_3) постоянной $c > 0$. Действительно, нетрудно проверить, что по-

строенный по таким коэффициентам оператор \tilde{g} будет обладать всеми требуемыми свойствами. А отсюда и из (4.58) следует, что за счет выбора нелинейности $g(u)$ из рассматриваемого класса можно реализовать в системе (4.59) любые значения коэффициентов a_{nk} . Единственное требование, которому должны удовлетворять эти коэффициенты, состоит в выполнении неравенства

$$\sup_{n,k \in \mathbb{N}} \frac{|a_{nk}|}{n} < \infty. \quad (4.62)$$

Простейшим примером нелинейности, для которой справедливы все перечисленные требования, служит $g(u) = M(u^3) - u^3$, где, напомним, $M(*)$ — среднее значение по x . В этом случае, как нетрудно увидеть,

$$a_{nn} = 3 \text{ при } n \geq 1, \quad a_{nk} = 6 \quad \forall n, k, \quad n \neq k, \quad (4.63)$$

а значит, условие (4.62) автоматически выполняется. Что же касается системы (4.59) с коэффициентами (4.63), то при любом фиксированном $n \geq 1$ и при $\nu \in (1, 1/(2n^2 - 1))$ она имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_n с компонентами

$$\rho_n = (1 - \nu n^2)/3, \quad \rho_m = 0 \quad \forall m \neq n. \quad (4.64)$$

Ясно также, что при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих состояний равновесия (4.64) неограниченно растет. Поэтому в силу теоремы 4.3 при указанном способе выбора $g(u)$ в краевой задаче (4.1) реализуется хорошо известное явление буферности (см., например, [103]).

Как уже отмечалось во введении, что о феномене буферности принято говорить, если в фазовом пространстве некоторой системы за счет подходящего выбора параметров можно добиться сосуществования любого наперед заданного конечного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.). В рассмотренном выше случае буферность заведомо имеет место, так как при согласованном уменьшении параметров ε и ν неограниченно растет количество сосуществующих устойчивых периодических движений задачи (4.1), отвечающих состояниям равновесия (4.64).

Несколько более сложная ситуация наблюдается, когда

$$\begin{aligned} a_{nn} &= 2, \quad n \geq 1; \quad a_{nk} = 1 \text{ при } n \neq k, \quad |n - k| \leq m_0; \\ a_{nk} &= 3 \text{ при } n \neq k, \quad |n - k| > m_0, \end{aligned} \quad (4.65)$$

где m_0 — некоторое фиксированное натуральное число. Непосредственная проверка показывает, что при условиях (4.65) и при $\nu = 0$ система (4.59) имеет счетное число экспоненциально устойчивых состояний равновесия O_n , $n \geq 1$, с координатами

$$\begin{aligned} \rho_{n+s} &= 1/(2 + m_0), \quad s = 0, \dots, m_0; \\ \rho_m &= 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \setminus \{n + s : s = 0, \dots, m_0\}. \end{aligned}$$

А отсюда и из теоремы 4.3 заключаем, что в данном случае при $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$ в фазовом пространстве E_1 краевой задачи (4.1) происходит неограниченное накапливание экспоненциально орбитально устойчивых $(m_0 + 1)$ -мерных инвариантных торов.

Подводя итог, отметим, что аналоги теорем 4.1, 4.2 сохраняются для краевой задачи (4.1), (4.2) и при отказе от условия $M(u) = 0$. Для пояснения сути дела приведем в этом случае уравнение из (4.1) к более удобному для последующего анализа виду, полагая $u = u_0 + u_1$, где $u_0 = M(u)$, $u_1 = u - M(u)$.

Далее, в получившейся системе для u_0, u_1 выполним замену $u_1 = v_0 + \sqrt{\varepsilon} h_2(v_0, v_0)$, где h_2 — оператор (4.13), (4.14). В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{u}_0 &= \varepsilon u_0 + \varepsilon \mathcal{F}_1(u_0, v_0, \varepsilon), \\ \dot{v}_0 &= L(\varepsilon)v_0 - \sqrt{\varepsilon} u_0 \mathcal{D}_0 v_0 + \varepsilon \mathcal{F}_2(u_0, v_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (4.66)$$

где $\mathcal{D}_0 = d/dx: E_1 \rightarrow E_0$, а операторы

$$\mathcal{F}_1(*, *, \varepsilon): \mathbb{R} \times E_k \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}_2(*, *, \varepsilon): \mathbb{R} \times E_{k+1} \rightarrow E_k$$

обладают теми же общими свойствами ограниченности и гладкости, что и оператор $H(v, \varepsilon)$ из (4.16).

Проверим сначала, что в рассматриваемом случае справедлив аналог теоремы 4.1. В связи с этим дополним систему (4.66) произвольными начальными условиями

$$u_0|_{t=0} = u_0^0 \in \mathbb{R}, \quad v_0|_{t=0} = v_0^0 \in E_1 \quad (4.67)$$

и перейдем к эквивалентной системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} u_0(t) &= u_0^0 + \varepsilon \Pi^t(u_0, v_0), \\ v_0(t) &= \exp(\tilde{L}(\varepsilon)t) v_0^0 + \varepsilon \int_0^t \exp(\tilde{L}(\varepsilon)(t - \tau)) \times \\ &\quad \times \left[\mathcal{F}_2(u_0^0 + \varepsilon \Pi^\tau(u_0, v_0), v_0(\tau), \varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} \Pi^\tau(u_0, v_0) \mathcal{D}_0 v_0(\tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (4.68)$$

где

$$\Pi^t(u_0, v_0) = \int_0^t (u_0(s) + \mathcal{F}_1(u_0(s), v_0(s), \varepsilon)) ds, \quad \tilde{L}(\varepsilon) = L(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} u_0^0 \mathcal{D}_0.$$

Заметим, далее, что оператор $\tilde{L}(\varepsilon)$, как и исходный оператор $L(\varepsilon)$, порождает в пространстве E_1 аналитическую полугруппу $\exp(\tilde{L}(\varepsilon)t)$, $t \geq 0$, для которой, в частности, сохраняется оценка (4.23). Поэтому анализ системы (4.68) идентичен описанному выше анализу интегрального уравнения (4.20), а значит, остаются в силе следующие факты. Во-первых, при подходящем уменьшении ε задача Коши (4.66), (4.67) имеет единственное обобщенное решение на любом фиксированном

отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$; во-вторых, в случае $v_0^0 \in D_L$ это решение будет классическим.

Исследование аттракторов системы (4.66) сводится к аналогичному вопросу для ее укороченной нормальной формы. Проводя соответствующий подсчет (см. также аналогичные построения в [107]), убеждаемся, что здесь вместо (4.46) получается система вида

$$\dot{w}_n = \left[\lambda_n(\varepsilon) - \sqrt{\varepsilon} i n w_0 - \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k}(\varepsilon) |w_k|^2 \right] w_n, \quad n \geq 0,$$

где $w_0 \in \mathbb{R}$, $w_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$. Что же касается амплитудных переменных $\rho_n = |w_n|^2$, $n \geq 0$, то для них после замены $2\varepsilon t \rightarrow t$ и последующего предельного перехода при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем систему

$$\dot{\rho}_0 = \left[1 - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k \right] \rho_0, \quad \dot{\rho}_n = \left[1 - \nu n^2 - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \rho_k - \rho_0 \right] \rho_n, \quad n \geq 1. \quad (4.69)$$

Введем в рассмотрение аналогичную (3.35) последовательность

$$\bar{\nu}_N = 6/(N(N+1)(4N-1)), \quad N \geq 1, \quad (4.70)$$

критических значений параметра ν . Непосредственная проверка показывает, что при всех $0 < \nu < \bar{\nu}_N$ система (4.69) имеет состояние равновесия O_N с координатами

$$\rho_0 = \frac{1}{N+1} + \frac{\nu}{6} N(2N+1), \quad \rho_n = \rho_0 - \nu n^2, \quad n = 1, \dots, N; \quad (4.71)$$

$$\rho_n = 0 \quad \text{при } n \geq N+1.$$

Далее, нетрудно убедиться, что состояние равновесия (4.71) экспоненциально устойчиво при $\nu \in (\bar{\nu}_{N+1}, \bar{\nu}_N)$, а при уменьшении параметра ν и при прохождении его через критическое значение $\nu = \bar{\nu}_{N+1}$ (см. (4.70)) происходит бифуркация вида $O_N \rightarrow O_{N+1}$, т. е. устойчивым становится очередное состояние равновесия O_{N+1} . Таким образом, при $\nu \rightarrow 0$ имеем цепочку бифуркаций вида (2.79), которой в исходной краевой задаче (4.1) соответствует последовательность (0.1) бифуркаций устойчивых инвариантных торов. Точнее говоря, при подходящем уменьшении ε мы можем гарантировать реализуемость любого конечного числа переходов вида $T_k \rightarrow T_{k+1}$.

5. Турбулентная экономическая динамика

5.1. Вывод математической модели. Рассматриваемая ниже математическая модель экономических процессов базируется на идеях, изложенных в монографиях [37, 117]. Следуя [117], обозначим через $Y(t)$ национальный доход, а через $I(t)$ — индуцированные инвестиции.

Скорости изменения этих величин определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = I - aY, \quad \dot{I} = b\dot{Y} - I, \quad a, b = \text{const} > 0, \quad (5.1)$$

которая известна в литературе, посвященной математическому моделированию макроэкономических процессов, под названием мультипликатор-акселератор (см., например, [37, 117]). Далее, согласно соображениям Хикса [152] о «нижнем пороге» сокращения капиталовложений дополним модель (5.1) нелинейным слагаемым

$$F = -c(\dot{Y})^3, \quad c = \text{const} > 0, \quad (5.2)$$

а точнее говоря, перейдем к системе

$$\dot{Y} = I - aY, \quad \dot{I} = b\dot{Y} - I + F. \quad (5.3)$$

После этого исключим стандартным образом из (5.3) переменную I . В итоге получается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{Y} + (a + 1 - b)\dot{Y} + aY = F, \quad (5.4)$$

которое уместно назвать точечной экономической моделью.

На следующем этапе перейдем от (5.4) к соответствующей распределенной модели. В связи с этим фиксируем некоторый экономический регион, представляющий собой ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, и попытаемся учесть, например, такие факторы, как межрегиональная торговля и неравномерное экономическое развитие различных районов области Ω . Тем самым, теперь $Y = Y(t, x, y)$, $I = I(t, x, y)$, $(x, y) \in \Omega$. Пусть также $T = T(t, x, y)$ — активное торговое сальдо. Согласно [117] в пространственно неоднородном случае вместо (5.3) имеем систему

$$\dot{Y} = I - aY + T + d_1\Delta Y, \quad \dot{I} = b\dot{Y} - I + F, \quad \dot{T} = d_2\Delta Y - T, \quad (5.5)$$

где точка — частная производная по t , Δ — оператор Лапласа, d_1, d_2 — положительные постоянные.

Обращаем внимание, что в [117] система (5.5) рассматривалась только при $d_1 = 0$. Это означает, что учитывалось лишь межрегиональное взаимодействие, происходящее за счет торговли. В то же время ясно, что существуют и другие формы такого взаимодействия. К ним можно отнести, например, дотации из одного региона в другой. За это и отвечает слагаемое $d_1\Delta Y$ в первом уравнении из (5.5). Кроме того, будем рассматривать следующую модификацию нелинейности (5.2):

$$F = -c\dot{Y} \int_{\Omega} (\dot{Y})^2 dx dy, \quad c = \text{const} > 0. \quad (5.6)$$

Смысл перехода к новой нелинейности (5.6) состоит в том, что теперь замедление инвестиций зависит не только от \dot{Y} , но и от интегрального роста доходов во всем регионе Ω .

Для удобства последующего анализа исключим из системы (5.5) переменные I , T . С этой целью продифференцируем по t первое уравнение из (5.5) и в правой части получившегося равенства заменим \dot{I} , \dot{T} правыми частями двух других уравнений данной системы. В итоге убеждаемся, что

$$\dot{Y} = (b-a)\dot{Y} + d_1\Delta\dot{Y} + d_2\Delta Y + F - (I+T). \quad (5.7)$$

Подставляя, далее, в (5.7) формулу (5.6), а также вытекающее из первого уравнения (5.5) соотношение $I+T = \dot{Y} + aY - d_1\Delta Y$, приходим к выводу, что Y — решение уравнения

$$\ddot{Y} + (a+1-b)\dot{Y} + aY - d_1\Delta\dot{Y} = (d_1+d_2)\Delta Y - c\dot{Y} \int_{\Omega} (\dot{Y})^2 dx dy. \quad (5.8)$$

Получившееся уравнение необходимо дополнить каким-либо экономически осмысленным граничным условием. В качестве такового ниже будем рассматривать равенство

$$Y|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.9)$$

означающее постоянство дохода на границе области Ω , или соотношение

$$\frac{\partial Y}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \vec{n} - \text{внешняя нормаль}, \quad (5.10)$$

характеризующее замкнутость экономического региона (отсутствие утечки доходов через границу области).

Обратимся сначала к краевой задаче (5.8), (5.9) и выполним в ней замену времени $\sqrt{a} t \rightarrow t$. Предполагая, далее, что

$$\frac{b-a-1}{\sqrt{a}} = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1; \quad \frac{d_1}{\sqrt{a}} = \varepsilon\nu, \quad \nu = \text{const} \geq 0; \quad \sigma = \sqrt{\frac{d_1+d_2}{a}} \sim 1, \quad (5.11)$$

для функции $u = a^{1/4}c^{1/2}Y/\sqrt{\varepsilon}$ приходим к задаче

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon\nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u = \sigma^2 \Delta u - \varepsilon u_t \cdot \int_{\Omega} (u_t)^2 dx dy, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (5.12)$$

которая и является основным объектом исследования в настоящем разделе.

5.2. Общие свойства рассматриваемой краевой задачи. В качестве фазового пространства краевой задачи (5.12) возьмем $(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$, где, как обычно, через $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ обозначено замыкание в метрике пространства $W_2^1(\Omega)$ линейала гладких функций, удовлетворяющих условию $u|_{\partial\Omega} = 0$. Для того чтобы определить понятие обобщенного решения задачи (5.12) с начальными условиями из указанного пространства, положим $w_1 = \mathcal{D}u$, $w_2 = u_t$, где $\mathcal{D} : \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ — арифметический квадратный корень из оператора $I - \sigma^2 \Delta$, I — еди-

ничный оператор. В итоге в пространстве $E = L_2(\Omega; \mathbb{R}^2)$, состоящем из вектор-функций

$$w = \text{colon}(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in L_2(\Omega), \|w\|_E = \left(\int \int_{\Omega} (w_1^2 + w_2^2) dx dy \right)^{1/2},$$

получаем абстрактное дифференциальное уравнение вида

$$\dot{w} = L(\varepsilon)w + \varepsilon F(w), \quad (5.13)$$

где $L(\varepsilon) = \mathcal{V}_0 D - \varepsilon \mathcal{V}_1 D^2 + \varepsilon \mathcal{V}_2$,

$$\mathcal{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu/\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + \nu/\sigma^2 \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

$$F(w) = \text{colon}\left(0, -w_2 \int \int_{\Omega} (w_2)^2 dx dy\right).$$

Убедимся, далее, что оператор $L(\varepsilon)$ порождает в E сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу линейных ограниченных операторов $\exp(L(\varepsilon)t)$. Для этого обозначим через $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора $-\Delta$ с нулевым граничным условием Дирихле, а через $e_k(x, y)$, $\int \int_{\Omega} e_k^2(x, y) dx dy = 1$, $k \geq 1$, — отвечающую им систему собственных функций. Из очевидных равенств

$$Dw = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k w_k e_k(x, y), \quad \omega_k = \sqrt{1 + \sigma^2 \lambda_k}, \quad k \geq 1, \quad (5.15)$$

где

$$w(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k e_k(x, y), \quad w_k = \int \int_{\Omega} w(x, y) e_k(x, y) dx dy, \quad k \geq 1,$$

и из явного выражения для $L(\varepsilon)$ вытекает, что интересующая нас полугруппа действует на любой элемент $w \in E$ по правилу

$$\exp(L(\varepsilon)t)w = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[(\omega_k \mathcal{V}_0 - \varepsilon \omega_k^2 \mathcal{V}_1 + \varepsilon \mathcal{V}_2)t] w_k e_k(x, y). \quad (5.16)$$

Полученная формула (5.16) позволяет ввести понятие обобщенного решения уравнения (5.13) тем же способом, как это было сделано в п. 4.1. А именно, в данном случае под обобщенным решением с начальным условием $w(0) = w_0 \in E$ будем понимать непрерывную вектор-функцию $w(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$w(t) = \exp(L(\varepsilon)t)w_0 + \varepsilon \int_0^t \exp(L(\varepsilon)(t - \tau))F(w(\tau))d\tau. \quad (5.17)$$

Аналогом теоремы 4.1 здесь является следующее утверждение, справедливое в отличие от предыдущего случая и при $\nu = 0$.

Теорема 5.1. При любых фиксированных \bar{t} , $r > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\bar{t}, r) > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и при $\forall w_0 \in B_r = \{w \in E : \|w\|_E \leq r\}$ уравнение (5.13) имеет на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ единственное обобщенное решение $w = w(t, \varepsilon)$, $w(0, \varepsilon) = w_0$.

Доказательство сформулированной теоремы базируется на следующих двух фактах. Во-первых, из разложения (5.16) и из явного вида матриц V_j , $j = 0, 1, 2$ (см. (5.14)), заключаем, что

$$\|\exp(L(\varepsilon)t)\|_{E \rightarrow E} \leq c_1 \exp(\varepsilon c_2 t) \text{ при } \forall t \geq 0,$$

где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые универсальные (независящие от ε, t) постоянные. Во-вторых, оператор $F(w)$ из (5.14) представляет собой непрерывную кубическую форму, действующую из E в E .

Действительно, опираясь на перечисленные свойства, нетрудно убедиться (см. соответствующее место в доказательстве теоремы 4.1), что оператор $\Pi(w(t))$, порождаемый правой частью уравнения (5.17), переводит аналогичное (4.22) множество из пространства $C([0, \bar{t}]; E)$ в себя и является сжимающим (с константой сжатия порядка ε). А отсюда справедливость теоремы 5.1 вытекает уже очевидным образом.

Заканчивая обсуждение общих свойств краевой задачи (5.12), отметим еще одну характерную ее особенность. Непосредственная проверка с учетом равенств (5.14), (5.15) показывает, что спектр оператора $L(\varepsilon)$ определяется из уравнений

$$\lambda^2 + \varepsilon(\nu \omega_k^2 / \sigma^2 - 1 - \nu / \sigma^2) \lambda + \omega_k^2 = 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (5.18)$$

где, напомним, ω_k , $k \geq 1$, — собственные значения оператора \mathcal{D} (см. (5.15)). Далее, нетрудно увидеть, что в случае $\nu > 0$ корни уравнений (5.18) распадаются на две ветви — параболическую $\{\lambda_k(\varepsilon) : \tilde{\lambda}_k(\varepsilon) / \omega_k^2 \rightarrow -\varepsilon \nu / \sigma^2 \text{ при } k \rightarrow \infty\}$ и гиперболическую $\{\tilde{\lambda}_k(\varepsilon) : \tilde{\lambda}_k(\varepsilon) \rightarrow -\sigma^2 / (\varepsilon \nu), k \rightarrow \infty\}$.

Из отмеченного характера поведения спектра и из формулы (5.16) следует, что при $\nu > 0$ полугруппа $\exp(L(\varepsilon)t)$ является аналитической. А отсюда автоматически вытекает бесконечная дифференцируемость по t при $t > 0$ обобщенных решений, о которых говорится в теореме 5.1. Но в то же время из-за наличия гиперболической ветви в спектре оператора $L(\varepsilon)$ гладкость по пространственным переменным решений краевой задачи (5.12) при $t > 0$ не увеличивается, оставаясь такой, как и при $t = 0$.

5.3. Основной результат. Для получения информации о существовании и устойчивости инвариантных торов краевой задачи (5.12) воспользуемся предложенным Ю. С. Колесовым бесконечномерным аналогом известного асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского [15], который, следуя установившейся традиции,

будем называть методом квазинормальных форм. В связи с этим сначала, привлекая разложение Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) e_n(x, y), \quad (5.19)$$

перейдем от (5.12) к соответствующей счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(\nu\lambda_n - 1)\dot{u}_n + \omega_n^2 u_n = -\varepsilon \dot{u}_n \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{u}_k)^2, \quad n \geq 1, \quad (5.20)$$

где, напомним, λ_n и ω_n — собственные значения операторов $-\Delta$ и \mathcal{D} .

Суть упомянутого метода состоит в том, что возможные автоколебательные режимы системы (5.20) ищутся в виде

$$u_n = u_{n,0}(t, \tau) + \varepsilon u_{n,1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad n \geq 1, \quad (5.21)$$

где

$$u_{n,0} = z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t), \quad (5.22)$$

а подлежащие определению комплексные амплитуды $z_n(\tau)$, $n \geq 1$, таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (в этом случае после подстановки соотношений (5.22) вместо коэффициентов u_n в ряд (5.19) получается функция класса $\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}$ по переменным x, y). Что же касается поправок порядка ε из (5.21), то фигурирующие в них функции $u_{n,1}(t, \tau)$ будем искать в классе формальных тригонометрических рядов переменных $\omega_k t$, $k \geq 1$.

Итак, подставим в систему (5.20) разложения (5.21) и приравняем коэффициенты при ε . В результате приходим к счетной системе линейных неоднородных дифференциальных уравнений

$$\ddot{u}_{n,1} + \omega_n^2 u_{n,1} = f_n(t, \tau), \quad n \geq 1, \quad (5.23)$$

где, как обычно, точкой обозначена производная по t , переменная τ считается параметром, а функции $f_n(t, \tau)$ имеют вид:

$$f_n = f_n^0 \exp(i\omega_n t) + \bar{f}_n^0 \exp(-i\omega_n t) - \dot{u}_{n,0} \sum_{k=1}^{\infty} (\dot{u}_{k,0})^2, \quad (5.24)$$

$$f_n^0 = i\omega_n(1 - \nu\lambda_n)z_n - 2i\omega_n \frac{dz_n}{d\tau}.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости уравнений (5.23) в интересующем нас классе функций является отсутствие в их правых частях (5.24) гармоник $\exp(\pm i\omega_n t)$. Добиться равенства нулю коэффициентов при указанных гармониках удастся за счет имеющихся в запасе комплексных амплитуд z_n , для которых на этом пути получается некоторая счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений — так называемая квазинормальная форма.

Наиболее просто упомянутая система для $z_n(\tau)$, $n \geq 1$, записывается в случае, когда собственные значения λ_n , $n \geq 1$, оператора $-\Delta$ являются попарно различными, т. е.

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots \quad (5.25)$$

Действительно, непосредственная проверка показывает, что при условиях (5.25), которые всюду ниже считаем выполненными, переменные $\xi_n = \omega_n z_n$, $n \geq 1$, удовлетворяют уравнениям

$$2 \frac{d\xi_n}{d\tau} = \left[1 - \nu \lambda_n - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1. \quad (5.26)$$

Завершая описание алгоритмической части нашего метода, отметим, что система (5.26) обладает теми же общими свойствами, что и аналогичная ей система (3.29). А именно, она представляет собой абстрактную полулинейную параболическую систему в пространстве последовательностей Z_0 (см. п. 3.2) и, в частности, любое ее решение $\{\xi_n(\tau), n \geq 1\}$ с начальным условием

$$(\xi_1(0), \bar{\xi}_1(0), \dots, \xi_n(0), \bar{\xi}_n(0), \dots) = (\xi_1^0, \bar{\xi}_1^0, \dots, \xi_n^0, \bar{\xi}_n^0, \dots) \in Z_0$$

определено на полуоси $\tau \geq 0$. Поэтому если мы фиксируем какое-либо из таких решений и подставим соотношения $z_n(\tau) = \xi_n(\tau)/\omega_n$, $n \geq 1$, в (5.24), то все уравнения (5.23) станут разрешимыми в классе тригонометрических рядов, а их решения примут вид:

$$u_{n,1} = -\frac{i}{8\omega_n^2} \left(\xi_n^3 \exp(3i\omega_n t) - \bar{\xi}_n^3 \exp(-3i\omega_n t) \right) + i\xi_n u_{n,1}^0 - i\bar{\xi}_n \bar{u}_{n,1}^0, \\ u_{n,1}^0 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{4\omega_k} \left(\frac{\bar{\xi}_k^2}{\omega_n - \omega_k} \exp[i(\omega_n - 2\omega_k)t] - \frac{\xi_k^2}{\omega_n + \omega_k} \exp[i(\omega_n + 2\omega_k)t] \right). \quad (5.27)$$

Для придания изложенным формальным построениям необходимой строгости перейдем от (5.26) к аналогичной (2.66) системе:

$$\frac{d\rho_n}{d\tau} = \left[1 - \nu \lambda_n - 3\rho_n - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \rho_k \right] \rho_n, \quad n \geq 1, \quad (5.28)$$

где $\rho_n = |\xi_n|^2$, $n \geq 1$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.2. Любому состоянию равновесия системы (5.28) с конечным числом ненулевых координат $\rho_{n_j} = \rho_{n_j}^0 > 0$, $j = 1, \dots, k$, экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной краевой задаче (5.12) при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало, соот-

ветствует k -мерный инвариантный тор T_k с теми же свойствами устойчивости. Указанный тор допускает представление вида

$$T_k: \begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^k \left(\frac{2}{\omega_{n_j}} \sqrt{\rho_{n_j}^0} \cos \varphi_j + \varepsilon U_j(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) \right) e_{n_j}(x, y), \\ \dot{\varphi}_j &= \omega_{n_j} + \varepsilon^2 \Phi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где U_j, Φ_j — некоторые 2π -периодические по $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ функции, имеющие при подходящем уменьшении ε_0 любую конечную гладкость по совокупности переменных $(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon) \in [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_0]$.

Справедливость сформулированной теоремы, как и аналогичных ей теорем 4.2, 4.3, вытекает из общих результатов монографии [73]. Впрочем, в данном случае в силу специфики нелинейности (5.6) проблема существования инвариантного тора (5.29) решается отдельно и сводится к конечномерной задаче. Действительно, нетрудно заметить, что система (5.20) имеет инвариантное подпространство $\{u_n = 0, n \neq n_j, j = 1, \dots, k\}$, на котором она принимает вид

$$\ddot{u}_{n_j} + \varepsilon(\nu \lambda_{n_j} - 1)\dot{u}_{n_j} + \omega_{n_j}^2 u_{n_j} = -\varepsilon \dot{u}_{n_j} \sum_{s=1}^k (\dot{u}_{n_s})^2, \quad j = 1, \dots, k. \quad (5.30)$$

Далее, применяя к (5.30) описанный выше асимптотический метод, приходим к аналогичной (5.28) амплитудной системе:

$$\frac{d\rho_{n_j}}{d\tau} = \left[1 - \nu \lambda_{n_j} - 3\rho_{n_j} - 2 \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq j}}^k \rho_{n_s} \right] \rho_{n_j}, \quad j = 1, \dots, k,$$

которая в силу условий теоремы допускает гиперболическое состояние равновесия $(\rho_{n_1}^0, \dots, \rho_{n_k}^0)$. А отсюда и из известных результатов о бифуркации инвариантных торов в обыкновенных дифференциальных уравнениях (см., например, [14, 15]) заключаем, что интересующая нас система (5.30) имеет k -мерный инвариантный тор

$$\tilde{T}_k: u_{n_j} = \frac{2}{\omega_{n_j}} \sqrt{\rho_{n_j}^0} \cos \varphi_j + \varepsilon U_j(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon),$$

$$\dot{\varphi}_j = \omega_{n_j} + \varepsilon^2 \Phi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, k,$$

где функции U_j, Φ_j обладают всеми перечисленными в теореме свойствами. Остается добавить, что тору T_k в исходной краевой задаче (5.12) соответствует искомый тор (5.29).

Обратим внимание, что система (5.28) приводится к виду (2.66) при $\varkappa = 3/2$ после замен $\rho_n = \eta_n/2$, $n \geq 1$. Тем самым, ее динамика по параметру ν уже изучена (см. п. 2.3). А именно, при выполнении неравенств (2.69), в которых критические значения $\bar{\nu}_N, \bar{\nu}_{N+1}$ теперь задаются формулами

$$\bar{\nu}_N = \left[2 \left(N \lambda_N - \sum_{k=1}^N \lambda_k \right) + \lambda_N \right]^{-1}, \quad N \geq 1,$$

она допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия O_N с координатами

$$\rho_n = \frac{1}{2N+1} + \frac{2\nu}{2N+1} \sum_{k=1}^N \lambda_k - \nu \lambda_n, \quad (5.31)$$

$$n = 1, \dots, N; \quad \rho_n = 0 \quad \text{при } n \geq N+1.$$

Далее, при уменьшении параметра ν и при прохождении его через значение $\bar{\nu}_{N+1}$ состояние равновесия (5.31) теряет устойчивость и от него ответвляется очередное устойчивое состояние равновесия O_{N+1} . А это значит, что при $\nu \rightarrow 0$ наблюдается цепочка бифуркаций вида (2.79).

Из теоремы 5.2 и отмеченных динамических свойств системы (5.28) следует, что при $\nu \rightarrow 0$ в краевой задаче (5.12) происходит развитие турбулентности по Ландау. Однако, как и в случае возмущенного уравнения КдФ (см. (4.1)), мы можем доказать наличие хотя и любого наперед заданного, но конечного числа бифуркаций вида $T_N \rightarrow T_{N+1}$. Вопрос же о том, реализуется ли в рамках рассматриваемой модели при $\nu \rightarrow 0$ и при фиксированном $\varepsilon > 0$ бесконечный каскад бифуркаций (0.1), остается открытым.

5.4. Развитая турбулентность. Одна из особенностей краевой задачи (5.12), выгодно отличающая ее от задачи (4.1), состоит в том, что здесь при $\nu = 0$, $\varepsilon > 0$ удается доказать наличие бесконечномерного аттрактора, свойства которого близки к описанным в п. 3.4. Причина, по которой это можно сделать, заключается в существовании при $\nu = 0$ и при дополнительном ограничении

$$\inf_{\substack{n, k \in \mathbb{N} \\ n \neq k}} |\lambda_n - \lambda_k| = \delta_0 > 0 \quad (5.32)$$

на собственные значения оператора $-\Delta$ корректной замены переменных, приводящей исходную задачу (5.12) в пространстве последовательностей Z_0 к системе вида

$$\dot{\xi} = \Lambda_0 \xi + \varepsilon \Lambda_1(\xi) + \varepsilon^2 \Lambda_*(\xi, \varepsilon). \quad (5.33)$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_n, \bar{\xi}_n, \dots) \in Z_0$,

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \text{diag} \{i\omega_1, -i\omega_1, \dots, i\omega_n, -i\omega_n, \dots\}, \\ \Lambda_1(\xi) &= (\Lambda_{1,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{1,1}(\xi), \dots, \Lambda_{n,1}(\xi), \bar{\Lambda}_{n,1}(\xi), \dots), \\ \Lambda_{n,1}(\xi) &= \frac{1}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

а оператор $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ обладает следующим свойством: для любого натурального m и произвольного ограниченного подмножества $B \subset Z_0$ найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(m, B) > 0$, что при каждом $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ он действует из B в Z_0 и все его производные Фреше по ξ до порядка m

включительно непрерывны и ограничены по совокупности переменных $(\xi, \varepsilon) \in B \times [0, \varepsilon_0]$.

Действительно, предположим, что нужная замена переменных уже построена и задача (5.12) преобразована к виду (5.33). Рассмотрим, далее, отвечающую (5.33) укороченную систему

$$\dot{\xi}_n = i\omega_n \xi_n + \frac{\varepsilon}{2} \left[1 - 3|\xi_n|^2 - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 \right] \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (5.35)$$

и выполним в ней последовательно замены $\xi_n \exp(-i\omega_n t) \rightarrow \xi_n$, $n \geq 1$, $\varepsilon t \rightarrow t$. В результате для $\rho_n = |\xi_n|^2$, $n \geq 1$, получим в точности систему (3.32) при $\nu = 0$, имеющую турбулентный аттрактор A . Тем самым, аналогичный аттрактор \tilde{A} существует и у системы (5.35). А именно, любой точке $\rho_0 = (\rho_1^0, \dots, \rho_n^0, \dots) \in A$ отвечает совокупность векторов $\xi \in \tilde{A}$ с компонентами $\xi_n = \sqrt{\rho_n^0} \exp(i\varphi_n)$, $n \geq 1$, где вещественные параметры $\varphi_n \in [0, 2\pi]$ меняются независимо друг от друга.

Возвращаясь к полной системе (5.33) и учитывая описанные выше свойства оператора $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$, нетрудно проверить, что для ее траекторий оказывается инвариантным шар

$$B = \left\{ \xi \in Z_0 : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq 1 \right\}. \quad (5.36)$$

Для этого достаточно взять функцию Ляпунова $V(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2$ и убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial V}{\partial \xi_n} \dot{\xi}_n + \frac{\partial V}{\partial \varepsilon} \dot{\varepsilon} = -\varepsilon - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^4 + O(\varepsilon^2)$$

$$\text{равномерно по } \xi : \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 = 1.$$

А отсюда очевидным образом следует, что в множестве (5.36) система (5.33) имеет аттрактор $\tilde{A}(\varepsilon)$, асимптотически близкий к \tilde{A} .

Вопрос о том, будет ли аттрактор $\tilde{A}(\varepsilon)$ турбулентным в смысле определения 1.6, остается открытым. Мы можем лишь утверждать, что он обладает некоторыми чертами турбулентности. Например, множество \tilde{A} заведомо ограничено, некомпактно, имеет бесконечную хаусдорфову размерность и, как уже отмечалось выше, асимптотически близко к турбулентному аттрактору. Такого типа аттракторы в дальнейшем будем называть предтурбулентными.

Итак, проблема существования предтурбулентного аттрактора $\tilde{A}(\varepsilon)$ свелась к отысканию упомянутой выше замены переменных. При построении этой замены удобнее работать не с самой краевой задачей (5.12), а с эквивалентным ей уравнением (5.13), которое при $\nu = 0$ приобретает вид

$$\dot{w} = L_0 w + \varepsilon L_1 w + \varepsilon F(w), \quad (5.37)$$

где $L_0 = \mathcal{V}_0 \mathcal{D}$, $L_1 = \text{diag}\{0, 1\}$.

Покажем, что для уравнения (5.37) интересующая нас замена задается равенством

$$w = \Theta_0 \xi + \varepsilon \Theta_1(\xi), \quad \xi \in Z_0, \quad (5.38)$$

где линейный и нелинейный операторы Θ_0 и Θ_1 действуют из Z_0 в E по правилам

$$\Theta_0 \xi = \sum_{n=1}^{\infty} \text{colon}(\xi_n + \bar{\xi}_n, i\xi_n - i\bar{\xi}_n) e_n(x, y), \quad (5.39)$$

$$\Theta_1(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{colon}(\theta_{n,1}(\xi), \theta_{n,2}(\xi)) e_n(x, y), \quad (5.40)$$

а коэффициенты $\theta_{n,1}$, $\theta_{n,2}$ определяются следующим образом. Обратимся к равенствам (5.27) для $u_{n,1}(t, \tau)$, $n \geq 1$ и будем считать, что вместо $\xi_n(\tau)$, $\xi_k(\tau)$, $k \neq n$, в них подставлены координаты ξ_n , ξ_k , $k \neq n$ произвольного независимого от τ вектора $\xi \in Z_0$. В результате получаются формальные тригонометрические ряды, которые обозначим через $u_{n,1}(t, \xi)$, $n \geq 1$, подчеркивая их зависимость от ξ . Используя эти ряды, положим

$$\theta_{n,1}(\xi) = \omega_n u_{n,1}(0, \xi), \quad \theta_{n,2}(\xi) = \frac{\partial u_{n,1}}{\partial t}(0, \xi), \quad n \geq 1. \quad (5.41)$$

Корректность приведенной замены (5.38) устанавливается достаточно просто. Действительно, в силу (5.39) линейный оператор Θ_0 является ограниченным вместе со своим обратным. Что же касается нелинейного слагаемого из (5.38), то, как нетрудно увидеть, равенства (5.40), (5.41) задают ограниченную кубическую форму, действующую из Z_0 в E .

Для проверки этого факта привлечем соотношения (5.27), (5.41) и воспользуемся свойствами (5.25), (5.32) собственных значений λ_n , $n \geq 1$. В результате приходим к оценкам

$$\begin{aligned} |\theta_{n,1}(\xi)| &\leq \frac{1}{4\omega_n} |\xi_n|^3 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega_k} + \frac{1}{|\omega_n - \omega_k|} + \frac{1}{\omega_n + \omega_k} \right) |\xi_k|^2 |\xi_n| \leq \\ &\leq \left(\frac{5}{4\omega_1} + \frac{1}{2\delta_0} \right) |\xi_n| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \end{aligned}$$

и к аналогичному неравенству

$$|\theta_{n,2}(\xi)| \leq \left(\frac{5}{4\omega_1} + \frac{1}{2\delta_0} \right) |\xi_n| \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2.$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что

$$\|\Theta_1(\xi)\|_E = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\theta_{n,1}(\xi)|^2 + |\theta_{n,2}(\xi)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\frac{5}{4\omega_1} + \frac{1}{2\delta_0} \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \right)^{3/2}.$$

Убедимся, наконец, что замена (5.38) действительно преобразует уравнение (5.37) к требуемому виду (5.33). С этой целью подставим в (5.37) соотношение (5.38), считая, что переменная ξ дифференцируется по правилу (5.33). Приравняем затем в получившемся выражении коэффициенты при нулевой и первой степенях ε . В результате приходим к равенствам

$$\begin{aligned}\Theta_0 \Lambda_0 \xi &= L_0 \Theta_0 \xi, \\ \Theta'_1(\xi) \Lambda_0 \xi + \Theta_0 \Lambda_1(\xi) &= L_0 \Theta_1(\xi) + L_1 \Theta_0 \xi + F(\Theta_0 \xi),\end{aligned}\quad (5.42)$$

справедливость которых при любом ξ непосредственно следует из способа определения операторов Θ_j , Λ_j , $j = 0, 1$ (см. (5.34), (5.38)–(5.41)).

Тождества (5.42) гарантируют, что при выполнении замены (5.38) все «опасные» слагаемые, содержащие неограниченные операторы Λ_0 и L_0 , сокращаются, а для оператора $\Lambda_*(\xi, \varepsilon)$ в итоге получаем формулу

$$\begin{aligned}\Lambda_* = \left(\Theta_0 + \varepsilon \Theta'_1(\xi) \right)^{-1} \left\{ \varepsilon^{-1} [F(\Theta_0 \xi + \varepsilon \Theta_1(\xi)) - F(\Theta_0 \xi)] + \right. \\ \left. + L_1 \Theta_1(\xi) - \Theta'_1(\xi) \Lambda_1(\xi) \right\}.\end{aligned}\quad (5.43)$$

Остается заметить, что из представления (5.43) нужные свойства ограниченности и гладкости этого оператора вытекают очевидным образом.

В заключение отметим, что на основании проделанного выше анализа модели (5.12) можно сделать следующие общие выводы. Уменьшение параметра ν , отвечающего за социальный фактор в экономике и за ее государственное регулирование, приводит к развитию турбулентности. В реальности это означает, что экономические процессы становятся по существу непредсказуемыми. Если же наоборот, параметр ν излишне велик (жесткий контроль со стороны государства), то колебания отсутствуют, т. е. оказывается устойчивым нулевое состояние равновесия. И наконец, существует некий «средний» диапазон значений ν , соответствующий нормальному экономическому функционированию, в котором краевая задача (5.12) имеет, например, устойчивый цикл или инвариантный тор невысокой размерности.

Добавим еще, что все установленные в данном параграфе результаты без каких-либо изменений переносятся, например, на краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \Delta u + u = \sigma^2 \Delta u - \varepsilon u_t \cdot \iint_{\Omega} (u_t)^2 dx dy, \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{\partial \Omega} = 0,$$

получающуюся из (5.8), (5.10) при ограничениях (5.11). Более того, несомненное преимущество нелинейности (5.6) перед ее стандартным аналогом (5.2) заключается в том, что конкретный вид граничных условий, при которых рассматривается уравнение (5.8), на самом деле несущественен. Важно лишь, чтобы собственные значения оператора $-\Delta$ при выбранных краевых условиях были попарно различными.

Действительно, если это так, то система амплитудных уравнений, отвечающая за существование и устойчивость инвариантных торов, по-прежнему будет иметь вид (5.28).

6. Турбулентная буферность и ее математические модели

6.1. Физическая постановка проблемы. Будем говорить, что в некоторой динамической системе реализуется турбулентная буферность, если при изменении управляющих параметров происходит неограниченный рост как количества ее сосуществующих устойчивых инвариантных торов, так и размерностей всех этих торов. Данный феномен очевидным образом связан со сценарием перехода к турбулентности по Ландау и наблюдается, например, когда при уменьшении вязкости или какого-либо другого параметра возникают все новые и новые цепочки бифуркаций вида (0.1).

Простейшей физической системой, в которой возможна турбулентная буферность, является двумерный прямоугольный массив идентичных осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своими соседями. Следуя работам [173, 174], предположим, что рассматриваемый массив имеет размер $N_1 \times N_2$, где N_1, N_2 — пока произвольные натуральные числа, и состоит из одинаковых ячеек показанного на рис. 6.1 вида. Считаем, что центр O каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора C_0 , индуктивности L_0 и туннельного диода с вольт-амперной характеристикой $i = f(u)$. Сами же ячейки взаимодействуют между собой через параллельно подсоединенные индуктивности L и активные сопротивления R .

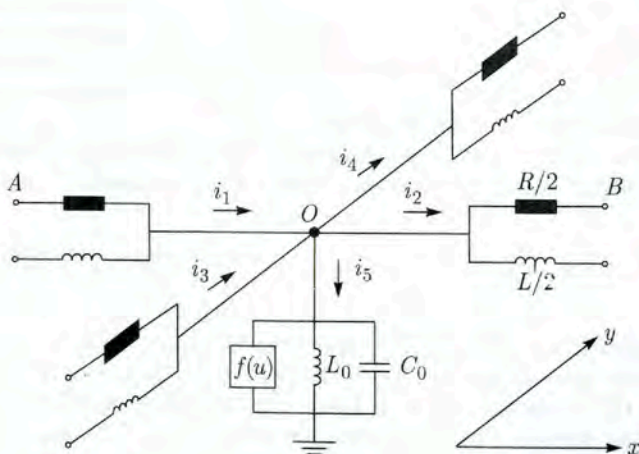


Рис. 6.1

Для вывода математической модели описанной системы фиксируем ячейку с номерами n, m и обозначим через $u_{n,m}(t)$ — напряжение в ее узле O . Первый закон Кирхгофа для этого узла приводит к равенству

$$i_1 + i_3 - i_2 - i_4 - i_5 = 0, \quad (6.1)$$

где $i_k, k = 1, \dots, 5$, — соответствующие токи (см. рис. 6.1). Далее, ток i_5 представляет собой сумму токов, текущих через конденсатор C_0 , индуктивность L_0 и туннельный диод, и вследствие этого записывается в виде

$$i_5 = C_0 \dot{u}_{n,m}(t) + f(u_{n,m}(t)) + \frac{1}{L_0} \int u_{n,m} dt. \quad (6.2)$$

Что же касается остальных токов, то они в силу закона Ома для участков цепи задаются равенствами

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m} - u_{n-1,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m} - u_{n-1,m}), \\ i_2 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n+1,m} - u_{n,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n+1,m} - u_{n,m}), \\ i_3 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m} - u_{n,m-1}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m} - u_{n,m-1}), \\ i_4 &= -\frac{1}{L} \int (u_{n,m+1} - u_{n,m}) dt - \frac{1}{R} (u_{n,m+1} - u_{n,m}). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Приведенные соотношения (6.1)–(6.3) позволяют выписать систему, связывающую напряжения $u_{n,m}(t)$, $n = 1, \dots, N_1$, $m = 1, \dots, N_2$, в узлах массива. Действительно, подставляя формулы (6.2), (6.3) в (6.1) и дифференцируя результат по t , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\frac{1}{L} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \frac{1}{L} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}) + \\ &+ \frac{1}{R} (\dot{u}_{n+1,m} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n-1,m}) + \frac{1}{R} (\dot{u}_{n,m+1} - 2\dot{u}_{n,m} + \dot{u}_{n,m-1}) = \\ &= C_0 \ddot{u}_{n,m} + \frac{d}{dt} f(u_{n,m}) + \frac{1}{L_0} u_{n,m}, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad m = 1, \dots, N_2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Получившуюся систему (6.4) следует дополнить какими-либо граничными условиями. В работе [173] рассматривалась ситуация, когда две смежные стороны граничного прямоугольника заземлены, а две другие — свободны. Далее, в [174] изучался случай трех заземленных сторон и одной свободной. Мы же, следуя [123], остановимся на простейшем варианте

$$u_{n+1,m} = u_{0,m} = 0, \quad m = 1, \dots, N_2; \quad u_{n,N_2+1} = u_{n,0} = 0, \quad n = 1, \dots, N_1, \quad (6.5)$$

означающем, что заземлены все граничные ячейки.

Всюду ниже предполагается, что каждая отдельно взятая ячейка массива имеет одинаковые линейные размеры по осям x, y и, в частно-

сти, расстояние между показанными на рис. 6.1 точками A и B равно h . Далее, как и в статьях [166, 173], будем считать, что

$$C_0 = C_{0,*} h^2, L_0 = L_{0,*} / h^2, R = R_*, L = L_*, f(u) = -h^2 G_*(u - u^3/3), \quad (6.6)$$

где электрические параметры $C_{0,*}$, $L_{0,*}$, R_* , L_* , G_* уже не зависят от h . И наконец, уточним правило выбора натуральных чисел N_1 , N_2 , а также способ введения координат x , y на плоскости, проходящей через центры всех ячеек. С этой целью фиксируем произвольно постоянные a_1 , $a_2 > 0$, затем положим

$$N_1 = [a_1/h], N_2 = [a_2/h], \text{ где } [*] — \text{целая часть}, \quad (6.7)$$

и будем считать, что узлу O ячейки с номерами n , m соответствует точка $(x, y) = (nh, mh)$.

Соотношения (6.6), (6.7) и указанный способ введения x , y позволяют перейти от (6.4), (6.5) к соответствующей распределенной модели. Для того чтобы сделать это, поделим каждое уравнение системы (6.4) на h^2 и устремим параметр h к нулю. В результате для распределенного напряжения $u = u(t, x, y)$ выходит краевая задача

$$C_{0,*} u_{tt} - G_*(1 - u^2) u_t + \frac{1}{L_{0,*}} u = \frac{1}{L_*} \Delta u + \frac{1}{R_*} \frac{\partial}{\partial t} \Delta u, \quad u|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad (6.8)$$

в области $\Omega_0 = \{(x, y): 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2\}$. В дальнейшем по чисто техническим причинам удобнее работать с задачей

$$u_{tt} - \varepsilon u_t - \varepsilon \nu \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{L} u + u = \mathcal{L} u - \varepsilon u^2 u_t, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.9)$$

где

$$\mathcal{L} = \sigma_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \sigma_2^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \varepsilon = G_* \sqrt{L_{0,*}/C_{0,*}}, \quad \nu = \sqrt{L_*/L_{0,*}} / (R_* G_*), \\ \sigma_j = \frac{1}{a_j} \sqrt{L_{0,*}/L_*}, \quad j = 1, 2; \quad \Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad (6.10)$$

получающейся из (6.8) в результате нормировок $t/\sqrt{L_{0,*}C_{0,*}} \rightarrow t$, $x/a_1 \rightarrow x$, $y/a_2 \rightarrow y$.

Следует отметить, что хотя краевая задача (6.9) выводится из простых физических соображений, но на самом деле она служит феноменологической моделью нелинейных процессов в системах из различных областей естествознания. К таковым согласно [123] относятся всевозможные триггерные системы, используемые в компьютерах в качестве запоминающего устройства; многомодовые лазеры, в которых несколько оптических мод конкурируют между собой с целью получения энергии от активной среды; взаимодействующие биологические виды с общим источником пищи; неокортекс человеческого мозга, в котором множество концепций соревнуются друг с другом в целях доминирования, и т. д.

Для нас же эта задача представляет интерес в первую очередь в связи с тем, что при некоторых условиях на параметры σ_1 , σ_2 из

(6.10) и при согласованном стремлении к нулю ε и ν в ней реализуется турбулентная буферность.

6.2. Существование и устойчивость инвариантных торов.

Нетрудно увидеть, что краевая задача (6.9), рассматриваемая как динамическая система в фазовом пространстве $(u, u_t) \in \dot{W}_2^2(\Omega) \times \dot{W}_2^1(\Omega)$, обладает теми же общими свойствами, что и изученная выше задача (5.12). В частности, при $\varepsilon = 0$ она допускает тригонометрические решения

$$u = \exp(\pm i\omega_{n,k} t) e_{n,k}(x, y), \quad e_{n,k}(x, y) = 2 \sin n\pi x \sin k\pi y, \quad (6.11)$$

$$\omega_{n,k} = \sqrt{1 + \pi^2(\sigma_1^2 n^2 + \sigma_2^2 k^2)}, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Для получения как можно более полного представления о динамике краевой задачи (6.9) по параметру ν воспользуемся тем же методом, что и в п. 5.3. В данном случае, обыгрывая существование тригонометрических решений (6.11), при условиях $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu = \text{const} > 0$ ее автоколебания будем искать в виде

$$u = u_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon u_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (6.12)$$

где

$$u_0 = \sum_{n,k=1}^{\infty} [z_{n,k}(\tau) \exp(i\omega_{n,k} t) + \bar{z}_{n,k}(\tau) \exp(-i\omega_{n,k} t)] e_{n,k}(x, y), \quad (6.13)$$

а пока неизвестные комплексные амплитуды $z_{n,k}$ таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_{n,k}^4 |z_{n,k}|^2$ (в этом случае $u_0 \in \dot{W}_2^2(\Omega)$).

Подставляя (6.12), (6.13) в (6.9) и приравнявая коэффициенты при ε , для u_1 получаем краевую задачу

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 - \mathcal{L}u_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[u_0 + \nu \mathcal{L}u_0 - u_0^3/3 - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right], \quad u_1|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6.14)$$

Распорядимся, далее, выбором параметров σ_1 и σ_2 таким образом, чтобы между собственными частотами $\omega_{n,k}$ из (6.11) отсутствовали всевозможные резонансные соотношения третьего порядка, т.е. чтобы было исключено одновременное выполнение равенств вида

$$\omega_{n_0, k_0} = m_1 \omega_{n_1, k_1} + m_2 \omega_{n_2, k_2} + m_3 \omega_{n_3, k_3},$$

$$n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3, \quad k_0 = \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3$$

для любого набора индексов (n_j, k_j) , $j = 0, \dots, 3$, для любого целочисленного вектора (m_1, m_2, m_3) : $|m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$ и при любой расстановке знаков во втором и третьем из этих соотношений (тождественные резонансы $\omega_{n,k} = \omega_{n,k} + \omega_{m,s} - \omega_{m,s}$ из рассмотрения, естественно, исключаются). Тогда функция u_1 может быть найдена в виде формального тригонометрического ряда в том и только том случае, если в неоднородности из (6.14) отсутствуют гармоники (6.11).

Поэтому приравняем коэффициенты при этих гармониках к нулю. В итоге для амплитуд $z_{n,k}$ приходим к системе

$$2 \frac{dz_{n,k}}{d\tau} = (1 - \nu(\omega_{n,k}^2 - 1)) z_{n,k} - \frac{9}{4} z_{n,k} |z_{n,k}|^2 - 3z_{n,k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |z_{m,k}|^2 - \\ - 3z_{n,k} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |z_{n,m}|^2 - 2z_{n,k} \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} |z_{m,r}|^2, \quad n, k \in \mathbb{N}.$$

Однако, как и в п. 5.3, в дальнейшем будем иметь дело с системой для $\rho_{n,k} = |z_{n,k}|^2$, записывающейся в виде

$$\frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} = \left(1 - \nu(\omega_{n,k}^2 - 1) - \frac{9}{4} \rho_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \rho_{n,m} - \right. \\ \left. - 3 \sum_{m \neq n} \rho_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \rho_{m,r} \right) \rho_{n,k}, \quad n, k \in \mathbb{N}. \quad (6.15)$$

Предположим, что система (6.15), рассматриваемая в пространстве последовательностей $\rho = \{\rho_{n,k}; n, k \in \mathbb{N}\}$ с нормой

$$\|\rho\| = \sum_{n,k=1}^{\infty} \omega_{n,k}^4 |\rho_{n,k}| < \infty,$$

имеет состояние равновесия с конечным числом ненулевых положительных координат

$$\rho_{n_1, k_1}, \dots, \rho_{n_p, k_p}, \quad p \geq 1. \quad (6.16)$$

Тогда оказывается справедливым следующее утверждение [73, 103].

Теорема 6.1. Любому состоянию равновесия системы (6.15) вида (6.16), экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной задаче (6.9) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует p -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами:

$$u = \sum_{j=1}^p 2\sqrt{\rho_{n_j, k_j}} \cos \varphi_j e_{n_j, k_j}(x, y) + \varepsilon U_*(\varphi, x, y, \varepsilon), \quad (6.17)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon^2 \Phi_*(\varphi, \varepsilon).$$

Здесь $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, $\omega = \text{colon}(\omega_{n_1, k_1}, \dots, \omega_{n_p, k_p})$, а 2π -периодические по φ функции U_* , Φ_* и любое фиксированное количество их производных по φ ограничены равномерно по φ , ε в метрике $\overset{\circ}{W}_2^2(\Omega)$ и \mathbb{R}^p соответственно.

Итак, вопрос о динамике краевой задачи (6.9) по параметру ν сводится к аналогичному вопросу для соответствующей амплитудной системы (6.15). В связи с этим обратим внимание на две ха-

рактерные особенности последней. Отметим, во-первых, что при любом фиксированном $\nu > 0$ за ее аттракторы в инвариантном конусе $K = \{\rho_{n,k} : \rho_{n,k} \geq 0\}$ отвечает конечномерная система, получающаяся из (6.15), если положить равными нулю компоненты $\rho_{n,k}$, для которых $1 - \nu(\omega_{n,k}^2 - 1) < 0$. Действительно, из структуры входящих в (6.15) уравнений следует, что упомянутые компоненты заведомо стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$. Очевидно также, что при $\nu \rightarrow 0$ размерность соответствующей конечномерной системы неограниченно растет.

Во-вторых, при $\nu = 0$ любое состояние равновесия системы (6.15) с конечным числом ненулевых положительных координат (6.16) экспоненциально неустойчиво, причем бесконечна размерность его неустойчивого многообразия (напомним, что такая же ситуация наблюдается при $\nu = 0$ и в системе (2.66)). Для того чтобы убедиться в этом, положим $\eta_j = \rho_{n_j, k_j}$, $j = 1, \dots, p$, и рассмотрим систему для нахождения η_j , имеющую вид

$$\alpha_{j,1}\eta_1 + \alpha_{j,2}\eta_2 + \dots + \alpha_{j,p}\eta_p = 1, \quad j = 1, \dots, p, \quad (6.18)$$

где $\alpha_{j,j} = 9/4$, $j = 1, \dots, p$, а все остальные $\alpha_{j,k}$, $j \neq k$, равны 2 или 3. Тем самым, заменяя в (6.18) все $\alpha_{j,k}$ при $j \neq k$ на 2, приходим к серии оценок

$$2\eta_1 + \dots + 2\eta_{j-1} + 9\eta_j/4 + 2\eta_{j+1} + \dots + 2\eta_p \leq 1, \quad j = 1, \dots, p. \quad (6.19)$$

Складывая, далее, все неравенства (6.19), убеждаемся, что

$$S \equiv \sum_{j=1}^p \eta_j \leq 4p/(8p+1). \quad (6.20)$$

И наконец, рассмотрим систему в вариациях на интересующем нас состоянии равновесия. Нетрудно заметить, что любое ее уравнение с индексами (m, r) , для которых $m \neq n_j$ и $r \neq k_j$, $j = 1, \dots, p$, имеет вид

$$dh_{m,r}/d\tau = (1 - 2S)h_{m,r}.$$

А отсюда и из оценки (см. (6.20))

$$1 - 2S \geq 1/(8p+1) \quad (6.21)$$

требуемый факт вытекает очевидным образом.

Введем в рассмотрение отвечающую (6.15) укороченную систему

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{n,k}}{d\tau} = & \left(1 - \nu(\omega_{n,k}^2 - 1) - \frac{9}{4}\rho_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^N \rho_{n,m} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \rho_{m,k} - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^N \rho_{m,r} \right) \rho_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots, N, \quad (6.22) \end{aligned}$$

предполагая номер $N = N(\nu)$ настолько большим, что $1 - \nu(\omega_{n,k}^2 - 1) < 0$ при всех (n, k) , для которых $n \geq N + 1$ или $k \geq N + 1$. Рассмотрим, далее, все экспоненциально устойчивые состояния равновесия (если они существуют) системы (6.22), лежащие в конусе K , и обозначим их количество через $N_* = N_*(\nu)$. Кроме этого, каждому такому состоянию равновесия поставим в соответствие число $p \geq 0$, равное количеству его ненулевых координат, и положим $N_{**}(\nu) = \min p$ (минимум берется по всем устойчивым состояниям равновесия из K). Указанные выше характерные особенности системы (6.15) наводят на мысль о справедливости следующего утверждения.

Теорема 6.2. *Имеют место предельные равенства*

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} N_*(\nu) = \lim_{\nu \rightarrow 0} N_{**}(\nu) = \infty. \quad (6.23)$$

Доказательство. Обоснование первого из предельных равенств (6.23) носит конструктивный характер. А именно, при каждом достаточно малом $\nu > 0$ будет предьявлен конкретный набор устойчивых состояний равновесия системы (6.15), количество которых неограниченно возрастает при $\nu \rightarrow 0$.

Рассмотрим числовую последовательность

$$\bar{\nu}_N = 3/[\pi^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)N(16N^2 - 9N - 4)], \quad N \geq 1,$$

и будем считать, что параметр ν удовлетворяет неравенствам вида (2.69). Несложная проверка показывает, что в этом случае система (6.15) имеет группу состояний равновесия, у которых ненулевыми являются только координаты

$$\rho_{j, k_j} = \eta_j, \quad \eta_j = 4[1 - 2S - \nu\pi^2(\sigma_1^2 j^2 + \sigma_2^2 k_j^2)] > 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad (6.24)$$

где

$$S = \frac{4N}{8N+1} \left[1 - \frac{\nu\pi^2}{6} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)(N+1)(2N+1) \right], \quad (6.25)$$

а (k_1, k_2, \dots, k_N) — всевозможные перестановки, получающиеся из целочисленного вектора $(1, 2, \dots, N)$. Количество же таких состояний равновесия равно, очевидно, $N!$.

Анализ свойств устойчивости состояний равновесия (6.24), (6.25) подробно изложен в монографиях [73, 103] (см. также статьи [58, 65]). Поэтому здесь соответствующие выкладки опустим. Отметим только, что каждое из них устойчиво при $\nu \in (\bar{\nu}_{N+1}, \bar{\nu}_N)$. Далее, при $\nu = \bar{\nu}_N$ обращаются в нуль координаты ρ_{N, k_N} у тех состояний равновесия (6.24), (6.25), для которых $k_N = N$ (количество таких состояний равновесия равно $(N-1)!$). Что же касается оставшихся $N! - (N-1)!$ положений равновесия семейства (6.24), (6.25), то они сохраняют свою устойчивость и при $\nu = \bar{\nu}_N$. А отсюда очевидным образом вытекает требуемое предельное равенство $\lim_{\nu \rightarrow 0} N_*(\nu) = \infty$, $\nu \rightarrow 0$.

Для обоснования второго предельного равенства (6.23) достаточно показать, что для любого натурального p найдется $\nu_0 = \nu_0(p) > 0$

такое, что при всех $0 < \nu \leq \nu_0$ каждое состояние равновесия системы (6.15) с количеством ненулевых положительных координат, равным p , экспоненциально неустойчиво.

В предположении противного существуют такое натуральное p_0 и такая последовательность $\nu_m > 0$, $\nu_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, что при $\nu = \nu_m$ система (6.15) имеет в конусе K хотя бы одно устойчивое положение равновесия с конечным числом ненулевых координат вида

$$\rho_{n_1, k_1}, \rho_{n_2, k_2}, \dots, \rho_{n_{p_0}, k_{p_0}}. \quad (6.26)$$

Заметим, что переходя, если это необходимо, от ν_m к соответствующей подпоследовательности, всегда можно добиться выполнения для номеров $n_j = n_j(\nu_m)$, $k_j = k_j(\nu_m)$, $j = 1, \dots, p_0$, предельных равенств

$$\lim_{m \rightarrow \infty} n_j = n_j^0, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} k_j = k_j^0, \quad j = 1, \dots, p_0, \quad (6.27)$$

где n_j^0, k_j^0 могут быть как конечными натуральными числами, так и равняться бесконечности.

Положим $N_0 = \max\{n_j^0, k_j^0\}$, где максимум берется по конечным предельным значениям из (6.27) (если таковых нет, то полагаем $N_0 = 0$). Линеаризуем затем систему (6.15) при $\nu = \nu_m$ на состоянии равновесия (6.26) и выпишем уравнение получившейся системы в вариациях с номерами $(N_0 + 1, N_0 + 1)$. Из способа выбора N_0 следует, что при всех достаточно больших m это уравнение принимает вид

$$dh_{N_0+1, N_0+1}/d\tau = [1 - 2S - (N_0 + 1)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\nu_m\pi^2] h_{N_0+1, N_0+1}, \quad (6.28)$$

где, как и выше, $S = \sum_{j=1}^{p_0} \rho_{n_j, k_j}$, причем сохраняется (вместе с доказательством) аналогичная (6.21) оценка

$$1 - 2S \geq 1/(8p_0 + 1). \quad (6.29)$$

Остается заметить, что в силу (6.29) для коэффициента уравнения (6.28) при всех достаточно больших m справедливо неравенство

$$1 - 2S - (N_0 + 1)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\nu_m\pi^2 > 0,$$

противоречащее предполагаемой устойчивости состояний равновесия (6.26). Теорема 6.2 полностью доказана.

Из теорем 6.1, 6.2 следует, что при некоторой общности положения, связанной с выбором параметров σ_1 , σ_2 , и при $\nu \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ в краевой задаче (6.9) реализуется интересующий нас феномен турбулентной буферности. Действительно, в этом случае неограниченно возрастает количество ее устойчивых инвариантных торов вида (6.17), причем одновременно неограниченно увеличиваются и размерности всех этих торов.

Подводя итог, отметим, что в отличие от краевой задачи (5.12) здесь при $\nu = 0$, $\varepsilon > 0$ не удастся доказать существования предтурбулентного

аттрактора. Причиной этого являются так называемые приближенные резонансы, от которых нельзя избавиться за счет шевеления параметров σ_1, σ_2 и которые, в свою очередь, приводят к эффекту малых знаменателей. Для примера обратим внимание, что в знаменателе коэффициента функции $u_1(t, \tau, x, y)$ при гармонике $\exp(i\omega_{m,s} t)e_{m-2n,s+2k}(x, y)$ фигурирует выражение

$$(\sigma_1^2 mn - \sigma_2^2 sk - \sigma_1^2 n^2 - \sigma_2^2 k^2) / \omega_{m,s},$$

стремящееся к нулю при фиксированных n, k и при $m, s \rightarrow \infty, s/m \rightarrow \sigma_1^2 n / (\sigma_2^2 k)$. А это значит, что в данном случае формула $u = u_0 + \varepsilon u_1$ уже не порождает корректной замены переменных, действующей из $\dot{W}_2^2(\Omega) \times \dot{W}_2^2(\Omega)$ в подходящее пространство последовательностей.

6.3. О других моделях турбулентной буферности. Весьма интересно, что краевая задача (6.9) допускает экономическую интерпретацию. Действительно, нетрудно увидеть, что она получается из экономической модели (5.5) в случае нелинейности $F = -u^2 u_t$, прямоугольной области Ω , граничных условий (5.9) и прежних предположений (5.11) относительно параметров a, b, d_1, d_2 .

Из общих соображений ясно, что обнаруженный в краевой задаче (6.9) феномен турбулентной буферности достаточно универсален и присущ не только волновым уравнениям. Для того чтобы убедиться в этом, покажем, что при определенных условиях он наблюдается, например, в уравнении Гинзбурга–Ландау (3.45), которое само является фундаментальным во многих вопросах математической физики (см. обзор [9], где содержится достаточно подробная библиография по этой тематике).

Рассмотрим краевую задачу, получающуюся из уравнения (3.45) в прямоугольнике $\{(x, y): 0 \leq x \leq a_1, 0 \leq y \leq a_2\}$ с нулевыми граничными условиями Дирихле, и будем считать параметры $c_j, j = 1, 2, 3$, в ней таковыми, что

$$c_1 = \nu, \nu = \text{const} > 0; \quad c_2 = -1/\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1; \quad c_3 = c_0, \quad c_0 = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

В результате после нормировок $t/\varepsilon \rightarrow t, x/a_1 \rightarrow x, y/a_2 \rightarrow y$ получаем краевую задачу в единичном квадрате Ω , имеющую вид:

$$w_t = (\varepsilon\nu - i)\mathcal{L}w + \varepsilon[w - (1 + ic_0)|w|^2 w], \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.30)$$

где оператор \mathcal{L} — тот же самый, что и в (6.9), но теперь $\sigma_j = 1/a_j, j = 1, 2$.

Поставим вопрос о динамике краевой задачи (6.30) по параметру ν , считая, что $(\text{Re } w, \text{Im } w) \in \dot{W}_2^2(\Omega) \times \dot{W}_2^2(\Omega)$. В связи с этим обратим внимание, что при $\varepsilon = 0$ она допускает волновые решения

$$w = \exp(i\omega_{n,k} t)e_{n,k}(x, y), \quad \omega_{n,k} = \pi^2(\sigma_1^2 n^2 + \sigma_2^2 k^2), \quad n, k \geq 1, \quad (6.31)$$

где функции $e_{n,k}(x, y)$ те же, что и в (6.11). Тем самым, к ней можно применить изложенную в п. 6.2 методику исследования автоколебаний.

Действительно, наличие волновых решений (6.31) позволяет искать возможные автоколебательные режимы краевой задачи (6.30) в виде формального ряда

$$w = w_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon w_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (6.32)$$

где

$$w_0 = \sum_{n,k=1}^{\infty} z_{n,k}(\tau) \exp(i\omega_{n,k} t) e_{n,k}(x, y), \quad (6.33)$$

а подлежащие определению комплексные амплитуды $z_{n,k}$ удовлетворяют требованию $\sum_{n,k} \omega_{n,k}^2 |z_{n,k}|^2 < \infty$, обеспечивающему принадлежность функции (6.33) пространству $\dot{W}_2^2(\Omega)$.

После подстановки соотношений (6.32), (6.33) в (6.30) и последующего приравнивания коэффициентов при ε для функции w_1 выходит линейная неоднородная краевая задача

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + i\mathcal{L}w_1 = g(t, \tau, x, y), \quad w_1|_{\partial\Omega} = 0, \quad (6.34)$$

в которой $g = -\partial w_0 / \partial \tau + \nu \mathcal{L}w_0 + w_0 - (1 + ic_0)|w_0|^2 w_0$, а переменная τ рассматривается как параметр.

Дальнейший анализ проведем в предположении об иррациональности числа σ_1^2 / σ_2^2 . В этом случае невозможно одновременное выполнение равенств вида

$$\omega_{n,k} = \omega_{n_1,k_1} + \omega_{n_2,k_2} - \omega_{n_3,k_3}, \quad n = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3, \quad k = \pm k_1 \pm k_2 \pm k_3,$$

при произвольном выборе комбинаций знаков «+» и «-» во втором и третьем из них (как и в п. 6.2, тождественные резонансы, когда $(n, k) = (n_1, k_1)$, $(n_2, k_2) = (n_3, k_3)$, здесь не рассматриваются). А отсюда, как нетрудно увидеть, следует, что краевая задача (6.34) будет разрешимой в классе формальных тригонометрических рядов в том и только в том случае, когда в неоднородности g отсутствуют гармоники (6.31). Тем самым, приравнивая коэффициенты при указанных гармониках к нулю, приходим к счетной системе

$$\begin{aligned} \frac{dz_{n,k}}{d\tau} = & (1 - \nu \omega_{n,k}) z_{n,k} - (1 + ic_0) \left[\frac{9}{4} |z_{n,k}|^2 + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |z_{m,k}|^2 + \right. \\ & \left. + 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} |z_{n,m}|^2 + 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} |z_{m,r}|^2 \right] z_{n,k}, \quad n, k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

а для $\rho_{n,k} = |z_{n,k}|^2$ после замены $2\tau \rightarrow \tau$ получаем в точности систему (6.15).

Завершая обсуждение краевой задачи (6.30), отметим, что для нее остается в силе аналог теоремы 6.1. Следовательно, при условии иррациональности отношения σ_1^2/σ_2^2 эта задача имеет по параметру ν ту же динамику, что и задача (6.9), т.е. в ней наблюдается феномен турбулентной буферности.

7. О реализуемости сценария Ландау–Селла

7.1. Общая постановка проблемы. Разобранные в разделах 4–6 содержательные примеры иллюстрируют реализуемость сценария развития турбулентности по Ландау в его обобщенном смысле, когда мы не требуем квазипериодичности решений на торах T_N , $\dim T_N = N$, из цепочки (0.1). Но пока остается открытым вопрос о реализуемости сценария Ландау–Селла. Напомним (см. соответствующее место во введении), что под этим сценарием мы понимаем цепочку бифуркаций (0.1), в которой каждый инвариантный тор T_N , начиная с некоторого номера N_0 , заменен хаотическим аттрактором A_N , причем $d_L(A_N) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, где d_L — ляпуновская размерность (не исключен случай $A_N \subset T_N$, $N \geq N_0$).

В настоящем разделе исследуется некоторая феноменологическая модель, в рамках которой удастся обнаружить интересующий нас сценарий Ландау–Селла. В качестве такой модели рассматривается нелинейная краевая задача

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + b u^5 = \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon u + \nu u_{xx}) - \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t, \quad (7.1)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где a, b, ε, ν — произвольные положительные параметры, $u = u(t, x)$ — скалярная вещественная функция.

Обратим внимание, что при $b = 0$ эта задача представляет собой пространственно одномерный вариант краевой задачи (5.12). Тем самым, для нее остаются в силе все результаты раздела 5, связанные с переходом к турбулентности по Ландау при $\varepsilon, \nu \rightarrow 0$.

Другие причины, по которым мы остановили свой выбор на модели (7.1), состоят в следующем. Во-первых, при ее построении за основу взято нелинейное уравнение Клейна–Гордона на отрезке $0 \leq x \leq 1$ с нулевыми граничными условиями Дирихле. Соответствующую краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u + b u^5 = 0, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad (7.2)$$

можно рассматривать как некий аналог уравнений Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, так как, например, она допускает закон сохра-

нения

$$\int_0^1 ((u_t)^2 + a^2(u_x)^2 + u^2 + b u^6/3) dx \equiv \text{const.} \quad (7.3)$$

Во-вторых, при переходе от (7.2) к (7.1) мы добавили в правую часть уравнения Клейна–Гордона слагаемые $\varepsilon u_t - \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t$ и νu_{txx} , которые в гидродинамической интерпретации соответствуют возбуждающей силе и вязкости.

Следует отметить, что предложенная нами гидродинамическая модель (7.1) хотя и существенно проще, чем исходная система уравнений Навье–Стокса, но тем не менее является весьма содержательной. Как будет установлено ниже, при согласованном стремлении параметров ε и ν к нулю в ней происходит развитие турбулентности по Ландау, а при $\varepsilon \sim 1$, $\nu \rightarrow 0$ реализуется сценарий Ландау–Селла.

7.2. Нелокальная разрешимость начально-краевой задачи.

Введенную выше краевую задачу (7.1) будем рассматривать как динамическую систему в фазовом пространстве $\dot{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, где через $\dot{W}_2^1(0, 1)$ обозначено замыкание по норме

$$\|u\|_{\dot{W}_2^1} = \left(\int_0^1 u^2 dx + a^2 \int_0^1 (u')^2 dx \right)^{1/2} \quad (7.4)$$

линеала гладких функций $u(x)$, $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = u(1) = 0$. Для того чтобы определить понятие обобщенного решения этой задачи с начальными условиями из указанного фазового пространства, поступим так же, как и в п. 5.2. А именно, положим $w_1 = \mathcal{D}u$, $w_2 = u_t$, где $\mathcal{D} = \sqrt{I - a^2 d^2/dx^2}$, I — единичный оператор. В итоге в пространстве $E = L_2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, элементами которого являются вектор-функции

$$w = \text{colon}(w_1, w_2) : w_1, w_2 \in L_2(0, 1), \|w\|_E = \left(\int_0^1 (w_1^2 + w_2^2) dx \right)^{1/2}, \quad (7.5)$$

получаем аналогичное (5.13) абстрактное дифференциальное уравнение

$$\dot{w} = Aw + F(w), \quad (7.6)$$

где $A = \mathcal{V}_0 \mathcal{D} - \mathcal{V}_1 \mathcal{D}^2 + \mathcal{V}_2$,

$$\mathcal{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon + \nu/a^2 \end{pmatrix}, \quad (7.7)$$

$$F(w) = \text{colon} \left(0, -b(\mathcal{D}^{-1}w_1)^5 - w_2 \int_0^1 (w_2)^2 dx \right),$$

а операторы \mathcal{D} и \mathcal{D}^2 применяются к вектор-функции (7.5) покомпонентно. Например, $\mathcal{D}w = \text{colop}(\mathcal{D}w_1, \mathcal{D}w_2)$.

Как и в п. 5.2, убедимся теперь, что оператор A порождает в E сильно непрерывную по $t \geq 0$ полугруппу линейных ограниченных операторов $\exp(At)$. Для этого обратимся к разложениям Фурье

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} w_{(k)} e_k(x), \quad \mathcal{D}w = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k w_{(k)} e_k(x),$$

$$w_{(k)} = \int_0^1 w \cdot e_k(x) dx, \quad k \geq 1, \quad (7.8)$$

где $e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x)$, $\omega_k = \sqrt{1 + a^2 \pi^2 k^2}$, $k \geq 1$. Из представлений (7.8) и из явного выражения для A очевидным образом следует, что действие интересующей нас полугруппы на любой элемент $w \in E$ определяется посредством равенства

$$\exp(At)w = \sum_{k=1}^{\infty} \exp[(\omega_k \mathcal{V}_0 - \omega_k^2 \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2)t] w_{(k)} e_k(x). \quad (7.9)$$

Наличие полугруппы (7.9) позволяет определить понятие обобщенного решения в первую очередь для уравнения (7.6). А именно, под обобщенным решением этого уравнения с произвольным начальным условием $w(0) = w_0 \in E$ будем понимать непрерывную вектор-функцию $w(t)$ со значениями в E , удовлетворяющую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ интегральному уравнению

$$w(t) = \exp(At)w_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))F(w(s))ds. \quad (7.10)$$

Полагая затем $u(t, \cdot) = \mathcal{D}^{-1}w_1(t)$, $u_t(t, \cdot) = w_2(t)$, где $w_1(t)$, $w_2(t)$ — компоненты (7.5) введенной чуть выше вектор-функции $w(t)$, получаем искомое обобщенное решение

$$(u(t, x), u_t(t, x)) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1) \quad (7.11)$$

исходной краевой задачи (7.1). Подчеркнем, что включение в (7.11) имеет место по переменной x при любом фиксированном $t \in [0, \bar{t}]$. Сама же вектор-функция (u, u_t) непрерывна по t в пространстве $\overset{\circ}{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$ с нормой

$$\|(u, u_t)\|_{\overset{\circ}{W}_2^1 \times L_2} = \left(\|u\|_{\overset{\circ}{W}_2^1}^2 + \|u_t\|_{L_2}^2 \right)^{1/2}. \quad (7.12)$$

Обратимся теперь к вопросу о существовании обобщенных решений. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 7.1. *Обобщенное решение (7.11) краевой задачи (7.1) с произвольными начальными условиями*

$$u|_{t=0} = u_0(x) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \in L_2(0, 1) \quad (7.13)$$

существует и единственно при всех $t \geq 0$.

При обосновании сформулированной теоремы нам потребуются некоторые факты из теории так называемых абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений. В связи с этим будем рассматривать уравнение (7.6) в произвольном вещественном банаховом пространстве E с нормой $\| \cdot \|$, предполагая, что, во-первых, $A: E_A \rightarrow E$ — замкнутый линейный оператор с плотной в E областью определения E_A , являющийся инфинитезимальным производящим для C^0 -полугруппы линейных ограниченных операторов $\exp(At)$, $t \geq 0$; во-вторых, нелинейный оператор $F: E \rightarrow E$ бесконечно дифференцируем по Фреше и ограничен на любом ограниченном подмножестве $\Omega \subset E$ вместе с любым конечным числом своих производных. Подчеркнем, что перечисленным свойствам заведомо удовлетворяет нелинейность F из (7.7). Само же уравнение (7.6) при выполнении указанных условий будем называть полулинейным.

Дополним уравнение (7.6) начальным условием

$$w(0) = w_0, \quad (7.14)$$

где w_0 — произвольный элемент из E . Под обобщенным решением задачи Коши (7.6), (7.14), как уже было сказано выше, понимается непрерывное решение соответствующего интегрального уравнения (7.10). Пусть теперь $w_0 \in E_A$. Тогда классическим решением задачи Коши (7.6), (7.14) назовем такую непрерывно дифференцируемую на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ вектор-функцию $w = w(t)$, что, во-первых, $w(t) \in E_A$ и $Aw(t)$ непрерывна при каждом $t \in [0, \bar{t}]$; во-вторых, функция $w(t)$ на рассматриваемом отрезке удовлетворяет уравнению (7.6), а при $t = 0$ — начальному условию (7.14).

Общая теория абстрактных полулинейных дифференциальных уравнений содержится, например, в монографиях [73, 151]. Из приведенных там построений вытекает следующая серия утверждений.

Лемма 7.1. *По любому ограниченному множеству $\Omega \subset E$ можно указать такое $t_0 = t_0(\Omega) > 0$, что каждое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$, $w(0, w_0) = w_0$ уравнения (7.6) с начальным условием $w_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. В случае же $w_0 \in \Omega \cap E_A$ это решение при всех $t \in [0, t_0]$ будет классическим.*

Лемма 7.2. *Пусть задано произвольное (вообще говоря, обобщенное) решение $w = w_*(t)$ уравнения (7.6) на некотором отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Тогда найдется такое достаточно малое $r_0 > 0$, что любое обобщенное решение $w = w(t, w_0)$ этого уравнения с начальным условием $w(0, w_0) = w_0 \in B$, $B = \{w \in E : \|w - w_*(0)\| \leq r_0\}$, существует на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ и непрерывно по совокупности*

переменных $(t, w_0) \in [0, \bar{t}] \times B$. Если же дополнительно $w_0 \in E_A$, то соответствующее решение $w(t, w_0)$ при всех $t \in [0, \bar{t}]$ оказывается классическим.

Лемма 7.3. Для любого обобщенного решения $w = w_*(t)$, определенного на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$, найдется такая последовательность классических решений $w = w_n(t)$, $t \in [0, \bar{t}]$, $n \geq 1$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|w_*(t) - w_n(t)\| = 0. \quad (7.15)$$

Скажем несколько слов об обосновании каждой из приведенных лемм. Справедливость фактов существования и единственности обобщенных решений, о которых говорится в лемме 7.1, вытекает из анализа интегрального уравнения (7.10). Действительно, обозначим через Π оператор, порождаемый правой частью этого уравнения в пространстве $C([0, t_0]; E)$ непрерывных на отрезке $0 \leq t \leq t_0$ вектор-функций $w(t) \in E$ с нормой $\|w(t)\|_C = \max_{0 \leq t \leq t_0} \|w(t)\|$. Опираясь на свойства ограниченности и гладкости нелинейности F и используя известную оценку вида $\|\exp(At)\|_{E \rightarrow E} \leq c_1 \exp(c_2 t)$, $t \geq 0$, $c_1 = \text{const} > 0$, $c_2 = \text{const} \in \mathbb{R}$, на полугруппу $\exp(At)$, нетрудно установить существование для любого фиксированного $r_0 > 0$ такого независимого от $w_0 \in \Omega$ достаточно малого $t_0 = t_0(r_0, \Omega) > 0$, что оператор Π преобразует в себя множество $\{w(t) \in C([0, t_0]; E) : \|w(t) - \exp(At)w_0\|_C \leq r_0\}$ и оказывается сжимающим. А отсюда очевидным образом следует, что любое обобщенное решение $w(t, w_0)$ уравнения (7.6) с начальным условием $w_0 \in \Omega$ однозначно определено на отрезке $0 \leq t \leq t_0$. Более того, используя развитые в работе [73] конструкции, можно показать, что при $w_0 \in \Omega \cap E_A$ это решение будет классическим.

Доказательство существования обобщенных решений из леммы 7.2 связано с анализом аналогичного (2.7) интегрального уравнения

$$\Pi(h, w_0) = 0, \quad (h, w_0) \in C([0, \bar{t}]; E) \times E, \quad (7.16)$$

где $h(t) = w(t, w_0) - w_*(t)$,

$$\begin{aligned} \Pi(h, w_0) = & h(t) - \exp(At)(w_0 - w_*(0)) - \\ & - \int_0^t \exp(A(t-s)) \left(F(w_*(s) + h(s)) - F(w_*(s)) \right) ds. \end{aligned}$$

Несложная проверка показывает, что в точке $h = 0$, $w_0 = w_*(0)$ к этому уравнению применима теорема о неявном отображении по переменной h . Таким образом, обобщенные решения уравнения (7.6), о которых говорится в лемме 7.2, задаются равенством $w(t, w_0) = w_*(t) + h(t, w_0)$. Здесь $h(t, w_0) \in C([0, \bar{t}]; E)$ — решение уравнения (7.16), существующее в силу упомянутой выше теоремы при всех w_0 , близких к $w_*(0)$, и непрерывное по совокупности переменных.

Для обоснования утверждения леммы 7.2, касающегося классических решений, достаточно показать, что любое обобщенное решение $w(t)$ уравнения (7.6), определенное на произвольном отрезке $t \in [0, \bar{t}]$, в случае $w(0) \in E_A$ является классическим. Проверка этого факта базируется на лемме 7.1. В самом деле, взяв в условиях этой леммы в качестве начального множества Ω кривую $\{w = w(t): 0 \leq t \leq \bar{t}\}$, последовательно убеждаемся, что интересующее нас решение будет классическим на отрезках $[0, t_0]$, $[t_0, 2t_0]$, $[2t_0, 3t_0]$ и т. д., где $t_0 = t_0(\Omega) > 0$.

Оставшаяся лемма 7.3 непосредственно вытекает из леммы 7.2. Для того чтобы убедиться в этом, возьмем такую последовательность $w_n \in E_A$ (существующую в силу плотности E_A в E), что $\|w_n - w_*(0)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Далее, без ограничения общности будем считать, что $w_n \in E_A \cap B$, где $B = \{w \in E: \|w - w_*(0)\| \leq r_0\}$, а постоянная $r_0 > 0$ выбрана в соответствии с леммой 7.2 по решению $w = w_*(t)$. В этом случае каждое решение $w_n(t) = w(t, w_n)$ уравнения (7.6) с начальным условием $w(0, w_n) = w_n$ заведомо является классическим и определено на всем отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Что же касается требуемого предельного равенства (7.15), то оно — очевидное следствие непрерывности функции $w(t, w_0)$ по совокупности переменных $(t, w_0) \in [0, \bar{t}] \times B$.

В дальнейшем нам потребуется еще одна лемма, являющаяся аналогом леммы 2.3. Перед ее формулировкой, как и в п. 2.1, для каждого решения $w(t)$ уравнения (7.6) с начальным условием (7.14) определим максимальный полуинтервал существования $[0, t_{\max})$, где

$$t_{\max} = \sup \{t_0: w(t) \text{ существует на отрезке } t \in [0, t_0]\}. \quad (7.17)$$

Согласно лемме 7.1 множество значений t_0 , по которым берется \sup в (7.17), заведомо не пусто. Кроме того, любое решение $w(t)$ однозначно продолжается на свой максимальный полуинтервал $[0, t_{\max})$, причем возможен и случай $t_{\max} = +\infty$. Если же оказалось, что $t_{\max} < +\infty$, то справедливо следующее утверждение.

Лемма 7.4. *Предположим, что для некоторого обобщенного решения $w(t)$ уравнения (7.6) конечна величина (7.17). Тогда выполняется предельное равенство*

$$\lim_{t \rightarrow t_{\max} - 0} \|w(t)\| = +\infty. \quad (7.18)$$

Доказательство сформулированной леммы опустим, поскольку оно практически дословно повторяет обоснование леммы 2.3.

Обратимся теперь непосредственно к доказательству теоремы 7.1. В связи с этим фиксируем произвольно начальные функции (7.13), а затем выполним в начально-краевой задаче (7.1), (7.13) замену переменных (7.5). В результате приходим к задаче Коши (7.6), (7.14), в которой $w_0 = \text{colop}(w_1^0, w_2^0)$, $w_1^0 = \mathcal{D}u_0(x)$, $w_2^0 = u_1(x)$. Применяя, далее, к упомянутой задаче лемму 7.1, убеждаемся, что ее обобщенное решение $w(t) = \text{colop}(w_1(t), w_2(t))$ однозначно определено на своем максимальном полуинтервале существования $[0, t_{\max})$. И наконец, осу-

шествя обратный переход от переменных (7.5) к исходным переменным (u, u_t) , получаем единственное обобщенное решение

$$(u(t, x), u_t(t, x)) \in \dot{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1), \quad t \in [0, t_{\max}] \quad (7.19)$$

интересующей нас смешанной задачи (7.1), (7.13).

Итак, для завершения обоснования теоремы 7.1 осталось лишь установить, что фигурирующая в (7.19) величина t_{\max} равна $+\infty$. В силу леммы 7.4 для этого достаточно показать справедливость априорной оценки вида

$$\|(u, u_t)\|_{\dot{W}_2^1 \times L_2} \leq c \cdot \exp(\varepsilon t), \quad c = \text{const} > 0 \quad \forall t \in [0, t_{\max}], \quad (7.20)$$

препятствующей «уходу» решения (u, u_t) в бесконечность за конечное время.

Для того чтобы убедиться в выполнении требуемого неравенства, фиксируем произвольно значение $\bar{t} \in [0, t_{\max}]$ и на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ аппроксимируем построенное выше обобщенное решение (7.19) классическими решениями. Согласно лемме 7.3 найдется такая последовательность классических решений $u_n(t, x)$, $n \geq 1$, краевой задачи (7.1), что

$$\max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|u - u_n\|_{\dot{W}_2^1} \rightarrow 0, \quad \max_{0 \leq t \leq \bar{t}} \left\| \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_n}{\partial t} \right\|_{L_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (7.21)$$

Остановимся на некоторых необходимых в последующем свойствах функций $u_n(t, x)$. Нетрудно увидеть, что область определения оператора A (см. (7.6), (7.7)) задается равенством

$$E_A = \{w = \text{colon } (w_1, w_2) \in E : w_1 \in \dot{W}_2^1(0, 1), w_2 \in \dot{W}_2^2(0, 1)\}. \quad (7.22)$$

А отсюда и из приведенного выше общего определения классических решений полулинейных уравнений вида (7.6) вытекает, что в данном случае, во-первых,

$$\begin{aligned} u_n(t, \cdot) &\in C^1([0, \bar{t}]; \dot{W}_2^1) \cap C([0, \bar{t}]; \dot{W}_2^2), \\ \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, \cdot) &\in C^1([0, \bar{t}]; L_2) \cap C([0, \bar{t}]; \dot{W}_2^2); \end{aligned} \quad (7.23)$$

во-вторых, при любом фиксированном $t \in [0, \bar{t}]$ и при каждом $n \geq 1$ имеем

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + u_n + b u_n^5 = \varepsilon \frac{\partial u_n}{\partial t} + \nu \frac{\partial^3 u_n}{\partial x^2 \partial t} - \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx \cdot \frac{\partial u_n}{\partial t}. \quad (7.24)$$

Точнее говоря, в силу (7.23) все фигурирующие в (7.24) производные заведомо принадлежат пространству $L_2(0, 1)$ по x и само равенство (7.24) понимается в смысле $L_2(0, 1)$ по переменной x .

Покажем сначала, что интересующая нас оценка (7.20) выполняется для решений $u_n(t, x)$, $n \geq 1$. С этой целью умножим левую и правую части соотношения (7.24) на $\partial u_n / \partial t$ и проинтегрируем по x в пределах от 0 до 1. В результате убеждаемся, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) &= \\ &= \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx - \nu \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial t} \right)^2 dx - \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx \right)^2 \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx \end{aligned}$$

и, соответственно,

$$\ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} + 2\varepsilon \int_0^t \kappa_n(\tau) d\tau, \quad (7.25)$$

где $\kappa_n(t) = \int_0^1 \left(\frac{\partial u_n}{\partial t} \right)^2 dx$, $\ell(u, u_t)$ — функционал, определяемый левой частью формулы (7.3). Учитывая, далее, вытекающие из (7.3), (7.4), (7.12) очевидные свойства

$$\kappa_n(t) \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right), \quad \left\| \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1 \times L_2}^2 \leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right),$$

из неравенства (7.25) и леммы Гронуолла–Беллмана последовательно выводим:

$$\begin{aligned} \kappa_n(t) &\leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \cdot \exp(2\varepsilon t), \\ \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) &\leq \ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0} \cdot \exp(2\varepsilon t). \end{aligned}$$

А отсюда, в свою очередь, следует искомая оценка

$$\left\| \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \right\|_{\dot{W}_{\frac{1}{2}}^1 \times L_2} \leq \sqrt{\ell \left(u_n, \frac{\partial u_n}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}} \cdot \exp(\varepsilon t) \quad \forall t \in [0, \bar{t}] \quad (7.26)$$

для классических решений $u_n(t, x)$.

На завершающем этапе, привлекая свойства (7.21), перейдем в (7.26) к пределу при $n \rightarrow \infty$. В итоге на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ получаем требуемую априорную оценку (7.20) с константой $c = \sqrt{\ell(u_0, u_1)}$, где u_0, u_1 — начальные функции из (7.13). Остается заметить, что в силу произвольности $\bar{t} \in (0, t_{\max})$ эта оценка справедлива на всем полуинтервале $[0, t_{\max})$. Теорема 7.1 доказана.

Следует добавить, что утверждение теоремы 7.1 сохраняется (вместе с обоснованием) и в случае $\nu = 0$. В некоторой корректировке здесь нуждаются только равенство (7.22) и свойства (7.23) классических решений. А именно, при $\nu = 0$ в (7.22), (7.23) для компонент w_2 и $\partial u_n / \partial t$ должны выполняться включения

$$w_2 \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, 1), \quad \frac{\partial u_n}{\partial t}(t, \cdot) \in C^1([0, \bar{t}]; L_2) \cap C([0, \bar{t}]; \overset{\circ}{W}_2^1).$$

7.3. Анализ локальных аттракторов. В данном пункте изучим локальные (располагающиеся в некоторой достаточно малой окрестности нулевого состояния равновесия) аттракторы краевой задачи (7.1) при условии малости параметров ε и ν .

В связи с этим введем в рассмотрение краевую задачу

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + u = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (u + \nu_0 u_{xx}) - \varepsilon \int_0^1 (u_t)^2 dx \cdot u_t - \varepsilon^2 b u^5, \quad (7.27)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

получающуюся из (7.1) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu = \nu_0 \varepsilon$, $\nu_0 = \text{const} \geq 0$ после нормировки $u/\sqrt{\varepsilon} \rightarrow u$.

Для анализа аттракторов задачи (7.27) воспользуемся описанным в п. 5.3 методом квазинормальных форм. Следуя идеологии этого метода, возможные автоколебательные режимы рассматриваемой задачи будем искать в виде формального разложения

$$u = u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (7.28)$$

Здесь

$$u_j(t, \tau, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{n,j}(t, \tau) e_n(x), \quad j = 0, 1; \quad (7.29)$$

$$u_{n,0} = z_n(\tau) \exp(i\omega_n t) + \bar{z}_n(\tau) \exp(-i\omega_n t), \quad n \geq 1, \quad (7.30)$$

функции $e_n(x)$ и частоты ω_n те же самые, что и в (7.8), а неизвестные (подлежащие определению) комплексные амплитуды $z_n(\tau)$, $n \geq 1$, таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_n^2 |z_n|^2$ (в этом случае после подстановки соотношений (7.30) в (7.29) при $j = 0$ получается функция класса $\overset{\circ}{W}_2^1$ по переменной x). Что же касается функции $u_1(t, \tau, x)$ из (7.28), то фигурирующие в ней коэффициенты Фурье $u_{n,1}(t, \tau)$, $n \geq 1$, представляют собой формальные тригонометрические ряды переменных $\omega_k t$, $k \geq 1$.

Реализация описанного метода приводит к уравнениям вида (5.23) с неоднородностями (5.24), в которых теперь $\nu \lambda_n$ следует заменить на $\nu_0 \pi^2 n^2$. Как и выше, разрешимости этих уравнений в требуемом классе функций добиваемся за счет подходящего выбора имеющихся в запасе комплексных амплитуд z_n из (7.30). В результате для $\xi_n(\tau) = \omega_n z_n(\tau)$ приходим к системе (5.26) при $\nu = \nu_0$, $\lambda_n = \pi^2 n^2$.

Последующие рассуждения, вполне аналогичные изложенным в п. 5.3, опустим. Приведем сразу итоговый результат.

Теорема 7.2. *Предположим, что при некотором натуральном N параметр ν_0 удовлетворяет неравенствам $\bar{\nu}_{N+1} < \nu_0 < \bar{\nu}_N$, где*

$$\bar{\nu}_N = 3 \left(\pi^2 N (4N^2 - 1) \right)^{-1}, \quad N \geq 1. \quad (7.31)$$

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ краевая задача (7.27) имеет экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор T_N , допускающий параметрическое представление вида

$$T_N : \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^N \frac{2}{\omega_n} \sqrt{\rho_n} \cos \varphi_n e_n(x) + \varepsilon U_*(\varphi, x, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega + \varepsilon^2 \Phi_*(\varphi, \varepsilon), \end{aligned} \quad (7.32)$$

Здесь $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, $\omega = \text{colon}(\omega_1, \dots, \omega_N)$,

$$\rho_n = \frac{1}{2N+1} + \frac{\nu_0 \pi^2}{3} N(N+1) - \nu_0 \pi^2 n^2, \quad n = 1, \dots, N, \quad (7.33)$$

а 2π -периодические по φ функции U_ , Φ_* ограничены равномерно по φ , ε (вместе с любым фиксированным числом производных по φ) в метрике $\tilde{W}_2^1(0, 1)$ и \mathbb{R}^N соответственно.*

Из соотношений (7.31)–(7.33) вытекает, что при согласованном стремлении параметров ε и ν_0 к нулю в краевой задаче (7.27) реализуется сценарий возникновения турбулентности по Ландау. Более того, опираясь на развитую в п. 5.4 технику, нетрудно показать, что при $\nu_0 = 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$ в ней наблюдается развитая турбулентность: существует предтурбулентный аттрактор $\tilde{A}(\varepsilon)$. Однако, как и в п. 5.4, вопрос о том, будет ли этот аттрактор турбулентным в смысле определения 1.6, остается открытым.

7.4. Нелокальный случай. В данном пункте с помощью численного анализа изучается вопрос об аттракторах краевой задачи (7.1) при $\nu \rightarrow 0$ в случае, когда все остальные параметры имеют порядок единицы. Точнее говоря, всюду ниже считаем, что эти параметры фиксированы и заданы, к примеру, равенствами

$$\varepsilon = b = 10, \quad a^2 = 0.1. \quad (7.34)$$

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала, полагая $u_t = v$, перейдем от уравнения второго порядка из (7.1) к системе

$$\begin{aligned} u_t &= v, \quad v_t = \varepsilon v + \nu v_{xx} - \int_0^1 v^2 dx \cdot v + a^2 u_{xx} - u - b u^5, \\ u|_{x=0} &= u|_{x=1} = v|_{x=0} = v|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Заменим, далее, в (7.35) частные производные по x и интегральное слагаемое приближенными равенствами

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)), \\ v_{xx}(t, x)|_{x=k/(N+1)} &\approx (N+1)^2(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)), \\ \int_0^1 v^2(t, x) dx &\approx \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^N v_k^2(t), \end{aligned}$$

где N — произвольно фиксированное натуральное число, $u_k(t) = u(t, x)|_{x=k/(N+1)}$, $v_k(t) = v(t, x)|_{x=k/(N+1)}$, $k = 1, \dots, N$. В результате для переменных u_k , v_k приходим к конечномерной модели вида

$$\begin{aligned} \dot{u}_k &= v_k, \quad \dot{v}_k = \varepsilon v_k + \nu(N+1)^2(v_{k+1} - 2v_k + v_{k-1}) - \frac{v_k}{N+1} \sum_{m=1}^N v_m^2 + \\ &+ a^2(N+1)^2(u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}) - u_k - b u_k^5, \quad k = 1, \dots, N, \quad (7.36) \end{aligned}$$

где $u_0 = v_0 = u_{N+1} = v_{N+1} = 0$.

Компьютерный анализ модели (7.36) проводился при условиях (7.34) в диапазоне параметров $5 \leq N \leq 100$, $0 \leq \nu \leq 1,01$. Использовался метод Дорманда–Принса 8(5,3) с автоматическим выбором шага, величина которого во всех случаях не превосходила 0,001. Подчеркнем, что указанный метод в настоящее время является одним из стандартных методов численного решения дифференциальных уравнений и реализован, например, в таких пакетах, как **Matds**, **Dynamics Solver** и т. д.

Обратимся к вопросу о поведении различных характеристик аттрактора Ω_N системы (7.36) при фиксированном $\nu \geq 0$ и при увеличении N . Как оказывается, в случае $\nu = 0$ ляпуновская размерность d_L этого аттрактора при $N \rightarrow \infty$ неограниченно растет, а его старший ляпуновский показатель λ_{\max} , наоборот, убывает и при $N \geq 25$ становится равным нулю. Графики зависимости указанных величин от N представлены на рисунках 7.1 и 7.2. Добавим еще, что на промежутке $5 \leq N \leq 23$ для d_L справедлива приближенная формула $d_L \approx 1,028 + 1,509 \cdot N$

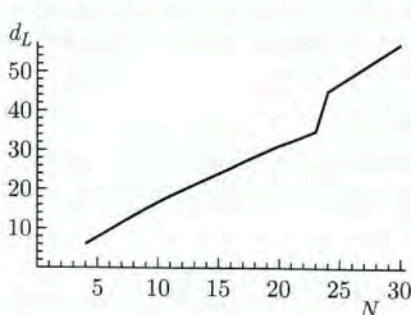


Рис. 7.1

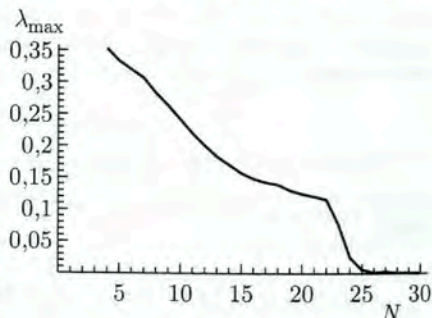
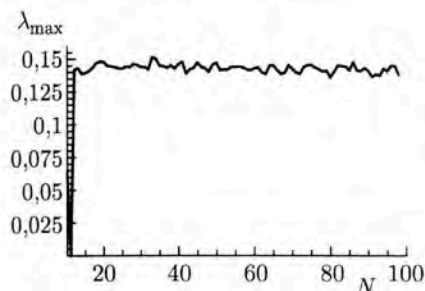
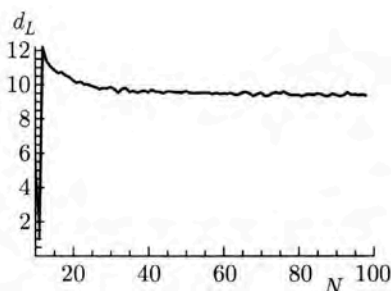
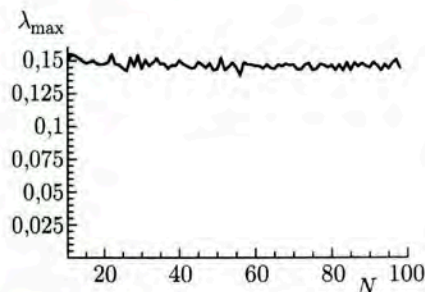
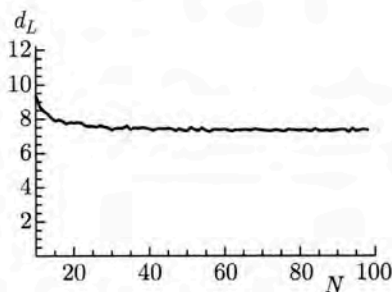
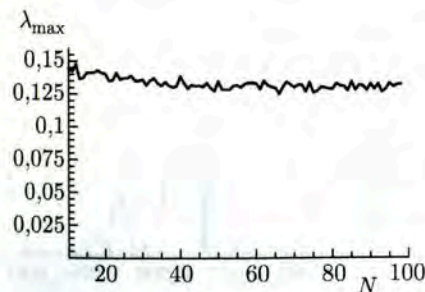
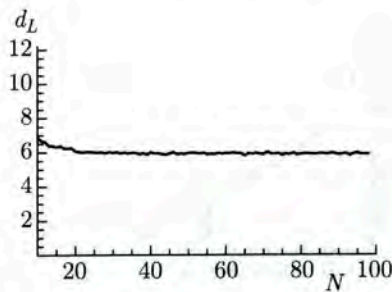


Рис. 7.2

(в этом случае аттрактор Ω_N оказывается хаотическим). В случае же $N \geq 25$ множество Ω_N представляет собой $(2N - 3)$ -мерный инвариантный тор, движения на котором близки к квазипериодическим.

При малых $\nu > 0$ введенные выше величины d_L и λ_{\max} с ростом N ведут себя несколько иначе. А именно, при $N \rightarrow \infty$ они стремятся к конечным положительным пределам. Об этом свидетельствуют рисунки 7.3–7.8, где изображены графики λ_{\max} и d_L по N для $\nu = 0,001$, $0,002$ и $0,003$ соответственно.

Рис. 7.3. $\nu = 0,001$ Рис. 7.4. $\nu = 0,001$ Рис. 7.5. $\nu = 0,002$ Рис. 7.6. $\nu = 0,002$ Рис. 7.7. $\nu = 0,003$ Рис. 7.8. $\nu = 0,003$

Следует отметить, что при малых $\nu > 0$ с ростом N стабилизируется также и сигнатура Σ_N аттрактора Ω_N , равная количеству его ненулевых положительных ляпуновских показателей. Например, при $\nu = 0,002$ и при всех $N \geq 12$ выполняется равенство $\Sigma_N = 3$.

Приведенные результаты численного счета в совокупности с содержащимся в п. 7.3 теоретическим анализом позволяют сделать следующие общие выводы о динамике по ν исходной распределенной модели (7.1).

Во-первых, при $\nu = 0$ и при условиях (7.34) у краевой задачи (7.1) существует предтурбулентный аттрактор A_{turb} , который, по всей видимости, является продолжением по ε аттрактора $\tilde{A}(\varepsilon)$, обнаруженного в задаче (7.27) при $0 < \varepsilon \ll 1$, $\nu_0 = 0$. Как и $\tilde{A}(\varepsilon)$, данный аттрактор представляет собой ограниченное и некомпактное множество в фазовом пространстве $\dot{W}_2^1(0, 1) \times L_2(0, 1)$, имеющее бесконечную хаусдорфову размерность. Кроме того, что оказалось весьма неожиданным, для «типичных» траекторий из A_{turb} справедливо равенство $\lambda_{\max} = 0$.

Во-вторых, аттрактор A_{turb} является пределом при $\nu \rightarrow 0$ конечномерных хаотических аттракторов, ляпуновская размерность которых неограниченно растет. Последнее же как раз и означает, что при условиях (7.34) и при уменьшении вязкости ν в краевой задаче (7.1) наблюдается интересующий нас сценарий развития турбулентности Ландау–Селла.

Дополнительным аргументом в пользу реализуемости упомянутого сценария служит визуальная информация, представленная на рисунках 7.9, 7.10. На этих рисунках показаны графики зависимости от ν величин d_L и λ_{\max} аттрактора A_N системы (7.36) при $N = 30$, построенные на отрезке $0,005 \leq \nu \leq 0,01$ по точкам с шагом 0,0001. Подчеркнем, что дальнейшее увеличение N не имеет смысла, поскольку стабилизация характеристик d_L и λ_{\max} происходит уже в случае $N = 30$ (см. рисунки 7.3–7.8). Следовательно, есть все основания ожидать, что аналогичный вид имеют графики указанных характеристик и для аттракторов краевой задачи (7.1).

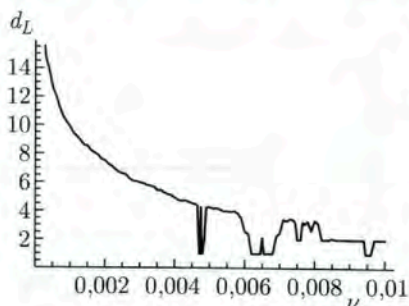


Рис. 7.9

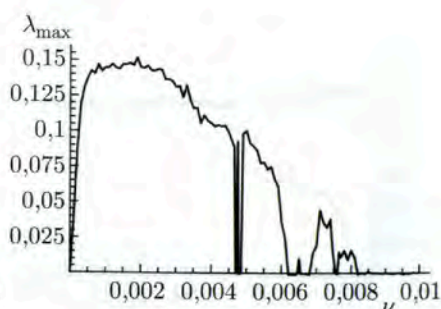


Рис. 7.10

В заключение скажем несколько слов о бифуркациях, происходящих на начальных стадиях сценария Ландау–Селла. Анализ конечномерных моделей (7.36) позволяет сделать вывод, что в исходной распределенной модели (7.1) при условиях (7.34) и при уменьшении ν наблюдаются следующие перестройки. При $\nu > 10/\pi^2$ устойчиво ее нулевое решение, а при прохождении ν через критическое значение $10/\pi^2$ из нуля рождается устойчивый цикл C (бифуркация Андронова–Хопфа). Далее, этот цикл сохраняет устойчивость при $\nu_* \lesssim \nu < 10/\pi^2$, где $\nu_* \approx 0,03272$, а при последующем уменьшении ν отдает ее бифурцирующему из него двумерному тору T . Указанный тор, в свою очередь, существует и устойчив на промежутке $\nu_{**} \lesssim \nu \lesssim \nu_*$, где $\nu_{**} \approx 0,00812$, причем динамика на нем в некоторых случаях является периодической (например, она оказывается таковой при $\nu \in [0,00941; 0,00967]$). Что же касается хаотического аттрактора, то он впервые возникает в краевой задаче (7.1) при $\nu \approx \nu_{**}$ в результате разрушения тора T . Добавим еще, что наступлению стабильного хаоса, имеющего место при малых $\nu > 0$, предшествует некоторое количество промежутков изменения ν , в которых существуют устойчивые циклы. Наиболее крупные из таких промежутков (здесь и во всех других встречающихся ниже аналогичных ситуациях будем называть их *окнами периодичности*) соответствуют значениям $\nu \in [0,00476; 0,00483]$, $[0,0062; 0,00648]$, $[0,00655; 0,00686]$.