Вывод общего уравнения макроэкономической динамики с нелинейным акселератором и анализ его решений

А.А.Акаев

(Москва)

Впервые выведено общее дифференциальное уравнение, описывающее совместное взаимодействие долгосрочного экономического роста и циклических колебаний деловой активности. Уравнение содержит встроенный нелинейный акселератор инвестиций, поддерживающий незатухающие колебания в экономике. Предложена схема приближенного решения полученного нелинейного уравнения макроэкономической динамики путем разделения быстроколеблющихся деловых циклов и медленноменяющейся трендовой траектории с помощью метода усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского.

Центральное место в современной макроэкономической динамике принадлежит теории долгосрочного экономического роста и теории деловых циклов (или бизнес - циклов). Экономический рост является классическим предметом экономики, восходящим к Адаму Смиту, Д.Рикардо, Т. Мальтусу, К.Марксу и другим. Основы современной теории роста заложил лауреат Нобелевской премии Р.Солоу, разработав неоклассическую модель экономического роста [1], которая позволила изучить влияние таких экзогенных факторов роста как норма сбережения, темпы роста населения и технического прогресса, а также выявить условия устойчивого сбалансированного роста. Дальнейшее развитие теории роста связано с разработкой моделей эндогенного роста путем введения в базовую модель Солоу человеческого капитала Р. Лукасом [2], накопление которого, на основе образования и обучения в процессе деятельности, служит источником непрерывного роста наряду с техническим прогрессом, а также продукта инвестиций в НИОКР, исследования и разработки [3]. Все это привело к существенному улучшению моделей роста и их соответствия эмпирическим данным, благодаря чему и вызвало мощную волну теоретических исследований и практических разработок в этом направлении [4].

Основным недостатком неоклассической модели Солоу является декларирование существования экзогенного технического прогресса, никак не связанного с действиями экономических субъектов, который объясняет до 75% реального темпа роста. Включение знаний и НИОКР в производственную функцию в эндогенных моделях роста также не решает всех проблем.. Альтернативная эволюционная теория роста, лишенная указанного основного недостатка неоклассических моделей, была предложена Р.Нельсоном и С.Уинтером [5]. Они разработали дискретные эволюционные модели экономического роста, основанные на шумпетерианской конкуренции путем поиска и отбора инноваций, которые в полной мере учитывают тот факт, что эта конкуренция протекает в условиях продолжительного неравновесия. Отбор и поиск у эволюционистов заменяют принципы равновесия и максимизации прибыли у неоклассиков. Они полагают, что "правила принятия решений"связаны с поиском новых технологических возможностей, инноваций, причем конкуренция рассматривается как процесс "естественного отбора". Они также привели эмпирические подтверждения того, что экономический рост нельзя объяснить лишь движением вдоль производственной функции, так как сама функция должна также смещаться при появлении новых производственных возможностей. Эволюционная теория использует микроэкономические механизмы роста, поэтому отпадает необходимость в использовании производственной функции вообще. Естественно, что модель достаточно сложна и поэтому она была реализована в виде компьютерной имитационной модели. В результате моделирования было выявлено, что эволюционная модель более плавно отражает технологические изменения, что в большей степени соответствует реальным эмпирическим данным.

Значительную роль в развитии современной теории деловых циклов (бизнес–циклы) сыграли работы А.Бёрнса, У.Митчелла, Й.Шумпетера, П. Самуэльсона, Дж. Хикса, А.Филлипса, Р.Гудвина и других. А.Бёрнс и У.Митчелл предприняли первую серьёзную попытку, чтобы определить разницу между трендом и циклом [6]. Одна из центральных гипотез, лежащих в основе подхода Бернса и Митчелла к исследованию бизнес-циклов, состояла в том, что динамику рядов выпуска обусловливает экономический рост, известный как возрастающий тренд, а циклы деловой активности представляют собой колебания вокруг тренда. Было установлено, что тренд есть результат действия факторов, обусловливающих долговременный рост в экономике – уровня сбережений, прироста трудовых ресурсов, технологических сдвигов и т.п. Практически все исследователи согласны с тем, что факторы, определяющие вид делового цикла, почти не влияют на формирование долговременного экономического тренда. Шумпетер рассматривал циклы как отклонения от состояния равновесия, вызванные инновационными шоками, "как серьезные нарушения экономического кругооборота, без которых не было бы вообще экономического роста" [7]. Изящные математические модели для анализа бизнес-циклов были получены путём использования различных вариантов акселератора инвестиций и мультипликатора потребления, которые получили название "кейнсианских моделей". Наиболее полная формулировка взаимодействия мультипликатора и акселератора в дискретной форме впервые была дана Самуэльсоном [8, р. 786] и позднее развита Хиксом [9]. Основная предпосылка модели Самуэльсона-Хикса состоит в осуществлении планов потребления и капиталовложений. Следовательно, остается открытой возможность непредвиденных сбережений, что придает модели необходимую гибкость. Модель включает линейную функцию потребления и линейный акселератор с дискретно распределенным запаздыванием. Филлипс [10] разработал непрерывную модель, взяв непрерывно распределенные запаздывания спроса на потребительские товары и элементы капиталовложений. В отличие от Самуэльсона-Хикса, Филлипс рассматривает спрос и предложение отдельно. Планы потребления и капиталовложений, в сумме образуют совокупный спрос, а предложение с дальнейшим запаздыванием приспосабливается к спросу. Модель Филлипса оказалась наиболее гибкой и плодотворной, она лучше отражает реальные динамические процессы, протекающие в экономической системе. Именно поэтому она легла в основу всех последующих разработок, связанных с реализацией практической политики экономического регулирования и стабилизации. Ограниченность моделей Самуэльсона-Хикса и Филлипса состоит в их линейности, что справедливо для малых мощностей акселератора, тогда как в реальных деловых циклах определяющую роль играет нелинейное взаимодействие основных переменных, в частности нелинейный акселератор. Именно нелинейный акселератор позволяет удерживать взрывные колебания, возникающие в экономической системе с большой мощностью акселератора, в ограниченных пределах. Важность нелинейных факторов для возникновения незатухающих циклических колебаний в экономике прекрасно понимал Хикс, который предпочел дополнить свою модель мультипликатора-акселератора внешними факторами, определяющими ее верхний и нижний пределы. Он предполагал, что мощность акселератора достаточно велика для возникновения собственных колебаний взрывного типа, но симметричных. Хикс также считал, что главной причиной циклических колебаний в экономике является акселератор инвестиций. Наиболее удачную нелинейную модель разработал Гудвин [11, p. 1]; основываясь на некоторых особенностях модели Филлипса, он встроил нелинейный элемент в систему взаимодействия мультипликатора-акселератора. Модель Гудвина включает запаздывания двух типов: на стороне спроса на капиталовложения – отставание с фиксированной продолжительностью действия акселератора, а на стороне предложения имеет место непрерывно распределенное запаздывание. Получающееся в результате колебательное движение совершенно не зависит от внешних факторов или начальных условий, что характерно для нелинейных колебательных систем. Анализ кейнсианских моделей, во-первых, убедительно показал, что динамика циклических колебаний определяется главным образом запаздываниями и нелинейностью или обоими факторами сразу, причем основную роль играет нелинейность акселератора инвестиций. Во-вторых, взаимодействие мультипликатора-акселератора служит необходимым механизмом распространения циклических колебаний после изменения индуцированных инвестиций. Сам Кейнс и его последователи совершенно справедливо считали главным источником импульсов, порождающих экономические колебания, изменения автономных инвестиционных расходов.

Как только выяснилось, что деловые циклы не демонстрируют той регулярности и симметрии, которая необходима для использования детерминистских кейнсианских моделей, возобладал подход, при котором циклы рассматриваются как следствия последовательно возникающих случайных толчков (шоки, сдвиги), называемых "импульсами на экономическую систему, что и вызывает циклическую модель отклика. Естественно, что каждый из такого рода импульсов распространяется в экономике благодаря механизму взаимодействия мультипликатора и акселератора. Причем благоприятный шок может вызвать увеличение текущего выпуска. Хотя основы анализа циклов деловой активности как отклика экономики на случайные шоки были заложены российским ученым Е.Слуцким ещё в 1927 г. [12, с. 34], дальнейшие попытки развития данного подхода были предприняты лишь в 70-х годах прошлого столетия. Этот подход, получивший широкую известность как модель реального делового цикла, исходит, прежде всего, из идей Й.Шумпетера, полагавшего, что для капитализма характерны волны "созидательного разрушения во время которых непрерывное введение различных инноваций, технологических новшеств, постоянно выталкивает существующие фирмы из бизнеса [7]. Таким образом, сторонники теории реального делового цикла (РДЦ) полагают, что циклические колебания возникают как результат случайных технологических шоков [13, 14], а в общем случае – шоков предложения, непосредственно воздействующих на производственную сторону экономической системы. Случайные шоки выводят экономику из устойчивого состояния равновесия и вызывают цепную реакцию во всей экономической системе, приводящую к циклическим колебаниям. Идея о том, что основной источник колебания деловой активности следует искать в шоках спроса или в политических шоках, таких, как изменения денежного предложения, отвергается сторонниками теории РДЦ. РДЦ – это весьма плодотворный подход, который воспринимает экономическую систему, как "черный ящик получающий шоковые импульсы на входе и преобразующий их в деловые циклы на выходе. Главным недостатком моделей РДЦ является основное предположение теории, которое состоит в том, что шоки производительности могут быть как положительными, так и отрицательными, т.е. возможен как технический прогресс, так и технический регресс. Более того, в рамках данной теории именно отрицательные шоки вызывают рецессии, что выглядит искусственным и порождает серьезные сомнения. Ведь технические достижения обычно используются до тех пор, пока не замещаются ещё более совершенной техникой.

Теория РДЦ стала господствующим подходом к осмыслению деловых циклов, поскольку она хорошо согласуется с так называемыми стилизованными фактами, полученными на основе анализа доступных эмпирических данных и присущими всем деловым циклам во всех странах. Приведем наиболее важные:

1. В развитых странах темпы роста реального ВВП испытывают повторяющиеся, но нерегулярные колебания с продолжительностью цикла в среднем 5-8 лет;

2. Амплитуда делового цикла, измеренная относительно среднего ВВП и относительно процесса экономического роста, невелика и обычно составляет 2-5%. Она обусловливается исключительно внутренними свойствами экономической системы;

3. Деловые циклы несимметричны. Подъем по продолжительности имеет тенденцию быть длительнее спада в 2-3 раза.

Действительно, поскольку шоки предложения случайны, они порождают циклы различной продолжительности и амплитуды, на что указывают стилизованные факты 1 и 2. Факт 3 теоретически может быть реализован только при учете в модели нелинейной связи между переменными. Если многие из этих шоков связаны с технологическими нововведениями, они не только вызывают циклы, но и в длительном периоде накапливаются, обусловливая процесс долгосрочного экономического роста. Принято считать, что "хорошая теория делового цикла" – это такая теория, которая может также повторить ключевые стилизованные факты, приведенные выше.

Главным недостатком рассмотренных выше математических моделей экономического роста и деловых циклов является изолированное рассмотрение роста и циклических колебаний друг от друга, тогда как из теории Шумпетера вытекает, что циклические колебания - это составная часть долгосрочного экономического роста. Более того, Нельсон и Плоссер [15, p. 139] показали, что большинство изменений, происходящих в ВВП являются постоянными и не исчезают со временем, поэтому отсутствует тенденция возвращения выпуска к неизменному тренду, т.е. происходит смещение самого тренда выпуска, что противоречит основной гипотезе Бёрнса и Митчелла о разграничении тренда и циклических колебаний. Циклы деловой активности представляют собой отклонения реального совокупного выпуска от своего долгосрочного тренда. Таков основной вывод фундаментальной работы Нобелевского лауреата Р. Лукаса "Понимание экономических циклов"[16, p. 7]. На основе идей Лукаса сформировалась новая концепция "теории циклов роста". Отсюда следует, что изолированное изучение экономического роста и циклических колебаний является серьезной ошибкой. Следовательно тренд маскирует колебания, которые представляют большой интерес при исследовании деловых циклов. Для того чтобы выделить эти колебания необходимы математические модели, описывающие совместное взаимодействие долгосрочного роста и деловых циклов, которые позволяли бы разделить их. Разработка такой модели и стала предметом настоящей работы.

Основы теории реальных деловых циклов были заложены в 80-х годах прошлого века Ф. Кюдландом и Э.Прескоттом [17, p. 1345] и с тех пор стали базовыми в макроэкономическом компьютерном моделировании. Кюдланд и Прескотт с самого начала поставили своей целью объединить теорию экономического роста с теорией деловых циклов. Разработанная ими дискретная модель делового цикла, базирующаяся на стохастической динамической модели общего равновесия, включала в себя также стохастическую версию неоклассической модели экономического роста Солоу. Они показали, что технологические шоки, то есть резкие краткосрочные отклонения от положительного тренда технологического развития, определяющего рост экономики в долгосрочной перспективе, являются причиной колебаний в совокупном выпуске. Они также показали, что эффект долгосрочного роста есть следствие краткосрочных циклических воздействий. Отсюда вытекает, что технический прогресс является основным фактором не только долгосрочных изменений в экономике, но и краткосрочных колебаний в уровне выпуска – в силу того, что технологическое развитие неравномерно во времени. За разработку нового подхода к численному моделированию циклов деловой активности и макроэкономической динамики вообще Кюдланд и Прескотт были удостоены Нобелевской премии в 2004 году по экономике.

В настоящей работе предпринята попытка возрождения аналитических методов исследования экономических колебаний путем объединения обоих подходов – стохастического и детерминистского. Первый дает описание случайных входных импульсов. Второй раскрывает механизм распространения этих импульсов, а также запаздывания и нелинейности, которые определяют незатухающие циклические колебания, наблюдаемые в экономике. Современная экономическая система, основанная на частном предпринимательстве и свободной конкуренции, есть нелинейная система с обратной связью, что невозможно отразить в модели, не учитывая запаздывания и взаимодействие мультипликатора и акселератора. Наличие положительной обратной связи делает устойчивым состояние продолжительного неравновесия, в котором пребывает современная динамичная экономика.

Приступим к выводу общего уравнения макроэкономической динамики, следуя наиболее плодотворной схеме, избранной в свое время Филлипсом [18, §3.5, с. 81]. В этой схеме предполагается, что плановые величины потребления и капиталовложений реализуются. Мы также придерживаемся этой предпосылки, поскольку она является экономически наиболее значимой предпосылкой. Следовательно, планы потребления и капиталовложений с запаздыванием превращаются в фактические затраты, дающие в сумме выпуск продукции. Филлипс также обосновал, что наиболее подходящей формой запаздывания является показательная форма запаздывания. Соответствующее непрерывное распределение запаздывания имеет вид: $f(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}$. Что же касается сбережений, то относительно них допускается возможность непредвиденных сбережений, что вносит гибкость в динамическую модель. Однако следует помнить, что по определению фактические сбережения и капиталовложения равны, т.е. $S = I$

Если выделить автономные (независимые от дохода) расходы как на капиталовложения, так и на потребление, не зависящие от дохода, то основное условие равновесия запишется в виде:

$$Y = C + I + A. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{C}$ – потребление; $\boldsymbol{I}$ – фактические индуцированные капиталовложения; $\boldsymbol{A}$ – независимые инвестиции. Поскольку $\boldsymbol{I}$ представляет собой фактические индуцированные капиталовложения в момент времени t , вызванные изменениями в выпуске продукции и запаздыванием в виде показательной функции, они удовлетворяют дифференциальному уравнению запаздывания:

$$\frac{dI}{dt} = -æ\,[I(t) - J(t)] \quad , \tag{2}$$

где $\boldsymbol{J(t)}$ - потенциальный объем капиталовложений; а æ - скорость реакции запаздывания. Временная постоянная запаздывания $T = \frac{1}{æ}$.

Суть данного уравнения заключается в том, что скорость возрастания капиталовложений ($\frac{dI}{dt}$) всегда пропорциональна разности $-\left[\quad I(t) - J(t)\right]$ фактического (I) и потенциального объемов капиталовложений (J). Функциональную связь между индуцированными капиталовложениями и изменениями выпуска продукции принято называть акселератором. В общей форме акселератор без запаздывания можно записать по Гудвину следующим образом [18] : $J(t) = \Psi\{\, \frac{d}{dt}\, Y(t)\}$, где Ψ - нелинейная функция, подходящая форма которой показана на рис. 1. Здесь акселератор выступает как зависимость

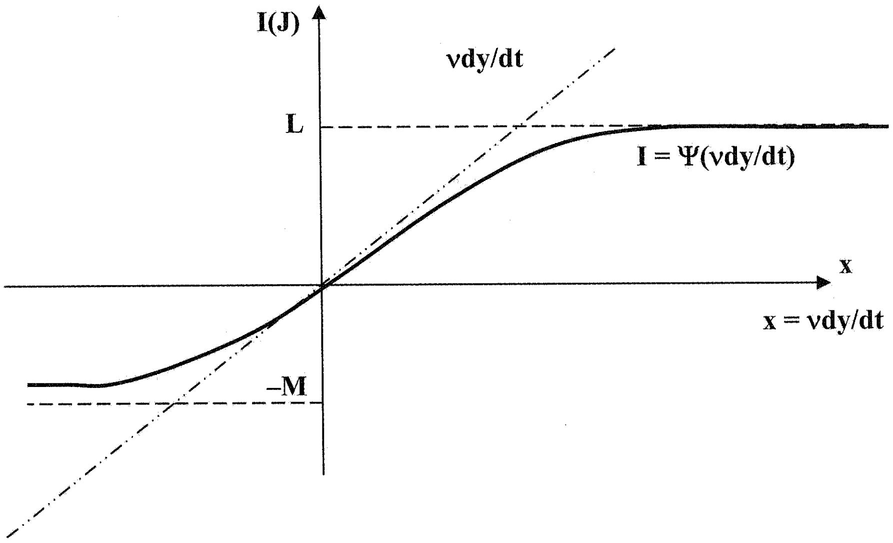

Рис. 1 Нелинейный акселератор по Гудвину

между объемом решений о капиталовложениях $J(t)$ и текущей скоростью изменения выпуска продукции $\frac{dY}{dt}$. Для малых изменений выпуска действует акселератор в линейной форме $J = \nu\frac{dY}{dt}$,где ν - положительная постоянная, коэффициент инвестиций, указывающий мощность акселератора. При большом увеличении выпуска уровень J повышается до верхнего предела L, ограничиваемого наличными мощностями отраслей, производящих капитальное оборудование. При большом сокращении выпуска J понижается до нижнего предела $(-M)$, ограничиваемого нормой износа основного капитала. Между фактическими капиталовложениями и решениями об инвестициях имеется запаздывание, которое Гудвин в отличие от Филлипса, в целях упрощения, ввел в форме фиксированного отставания [18, §7.3, с. 197] : $I(t) = J(t-\theta) = \Psi\left\{v\frac{d}{dt}Y(t-\theta)\right\}$

Установим конкретное выражение нелинейной функции $\underline{\psi}$. Кривая на рис. 1, представляющая искомую функциональную зависимость является логистической кривой и описывается логистическим уравнением, которое известно также как уравнение Ферхюльста [19, с. 85]:

$$\frac{dJ}{dx} = k(J+\varepsilon)(1-\varepsilon-J), \tag{3}$$

где $x = \nu\frac{dY}{dt}$, $\quad \varepsilon = \frac{M}{L+M}$,. Решая данное уравнение с разделяющимися переменными для наиболее важного симметричного случая, когда $\varepsilon = \frac{1}{2}$, получаем: $J = \frac{1}{2}th\frac{k}{2}x$.
Гиперболический тангенс в правой части имеет разложение в ряд [20]. $thz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2}{15}z^5 - ...$
которое сходится при $z^2 < \frac{\pi^2}{4}$ или $|z| < \frac{\pi}{2}$. Ограничиваясь первыми двумя членами данного ряда, будем иметь приближенное выражение для нелинейного акселератора по

Гудвину:

$$J \cong \frac{k}{4}\left[1-\frac{k^2}{12}x^2\right]\ x \quad .$$

Поскольку для малых значений простейшего (линейного) акселератора $x=\nu\frac{dY}{dt}$ имеет место $I \cong x$, отсюда немедленно следует, что $k=4$, а также следующая аппроксимация для нелинейного (гибкого) акселератора:

$$J \cong \left[1-\frac{4}{3}\left(\nu\frac{dY}{dt}\right)^2\right]\nu\frac{dY}{dt}. \tag{4}$$

при условии $\left|\nu\frac{dY}{dt}\right| < \frac{\pi}{4}$.
Легко показать, что последнее условие почти всегда выполняется в реальной экономике.

Вернемся снова к основному условию равновесия. Поскольку запаздывания спроса отсутствуют, а планируемое потребление $C=cY=(1-s)Y$, где c и s- коэффициенты потребления и сбережений, то совокупный спрос будет равен

$$Z=(1-s)Y+I+A\ . \tag{5}$$

Предложение также берется с непрерывно распределенным запаздыванием показательной формы и скоростью реакции λ:

$$\frac{dY}{dt}=-\lambda(Y-Z) \tag{6}$$

Уравнения (2), (5) и (6) являются уравнениями модели для реальной экономической системы. Модель имеет два непрерывно распределенных запаздывания: одно на стороне предложения (реакция выпуска продукции на спрос со скоростью λ), второе на стороне акселератора (индуцированные капиталовложения реагируют на изменение выпуска продукции со скоростью æ). Чтобы получить дифференциальное уравнение относительно выпуска Y необходимо исключить Z и I из уравнений модели. С этой целью сначала подставим (5) в (6), учитывая, что в (5) мы имеем потенциальные или ожидаемые (Y^e, I^e) величины всех переменных, т.е.

$$Z=(1-s)Y^e+I^e+A^e\ .$$

Поскольку $A^e=A$ как заданные независимые инвестиции, а $I^e=I$ согласно принятой предпосылке модели, в результате получаем:

$$\frac{dY}{dt}=-\lambda\left[\ \ Y-(1-s)\,Y^e-I-A\ \ \right].$$

Разрешив последнее уравнение относительно I и дифференцируя полученное выражение получаем:

$$I=\frac{1}{\lambda}\frac{dY}{dt}+Y-(1-s)Y^e-A\ ;\ \ \frac{dI}{dt}=\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2}+\frac{dY}{dt}-(1-s)\frac{dY^e}{dt}-\frac{dA}{dt}\ \ .$$

Подставляя эти выражения в уравнение (2) получаем дифференциальное уравнение относительно выпуска Y:

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2}+\left\{1+\frac{æ}{\lambda}-æ\nu\left[1-\chi\frac{4}{3}\left(\nu\frac{dY}{dt}\right)^2\right]\right\}\frac{dY}{dt}-(1-s)\frac{dY^e}{dt}+æY-æ(1-\mathrm{s})Y^e=\frac{dA}{dt}+æ\mathrm{A} \tag{7}$$

Здесь введена постоянная χ, которая принимает лишь два значения – 0 или 1. При $\chi = 0$ имеем классическую модель Филлипса с линейным акселератором, а в случае $\chi = 1$ получаем модель Филлипса со встроенным нелинейным акселератором в форме Гудвина.

Если в уравнении (7) принять $Y = Y^e$, что является весьма грубым приближением, так как доход Y есть непланируемая величина, а также положить $\chi = 0$ и $A = const$, то мы получим известное уравнение Филлипса [18, §3.5, с. 82] :
$\frac{d^2Y}{dt^2} + (\lambda s + æ - æ\lambda\nu)\frac{dY}{dt} + æ\lambda sY = æ\lambda A$.

В отличие от Филлипса и Гудвина, мы внесем в уравнение (7) выражение для потенциального (или ожидаемого) значения выпуска Y^e, определяемого через основные производственные факторы – капитал (K) и труд (L). Как известно, связь выпуска с факторами производства определяется производственной функцией [21, §11.2, с. 307] вида $\overline{Y} = F(K, L)$, которая представляет собой траекторию долгосрочного экономического роста. Поскольку производственные функции обладают свойством однородности, используя теорему Эйлера для однородных функций в наиболее общем виде имеем следующее уравнение для производственной функции:

$$aK\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} + bL\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L} = h\overline{Y} \ , \tag{8}$$

где a, b и h - постоянные коэффициенты. Общее решение данного уравнения имеет вид [22, с. 106]:

$$\overline{Y} = K^{h/a}\,\Phi(K^{-b}, L^a) = L^{h/b}\,\Phi(L^{-a}, K^b), \tag{9}$$

причем функцию $\Phi(K^b, L^{-a})$ можно разложить в степенной ряд

$$\Phi(K^b, L^{-a}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{nm}K^{bn}L^{-am} = A_{00} + A_{10}K^b + A_{01}L^{-a} + A_{11}K^bL^{-a} + \ldots.$$

Отсюда при $A_{nm} = 0$, когда $n \neq 1$ и $m \neq 1$, получаем как частный случай функцию Кобба-Дугласа: $\overline{Y} = A_{11}K^bL^{\frac{h}{b}-a}$, причем $h = b(1 - b + a)$.

Итак, из уравнения (8) следует требуемое приближенное выражение для ожидаемого значения выпуска Y^e:

$$Y^e \cong \overline{Y} = \frac{a}{h}K\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} + \frac{b}{h}L\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L} \tag{10}$$

Очевидно, что данное приближение является более точным, нежели весьма грубое допущение Филлипса-Гудвина: $Y^e = Y$. Но главное достоинство такого подхода состоит в том, что он дает возможность ввести в основное уравнение производственные факторы. Дифференцируя по времени данное выражение и проводя необходимые упрощения получим:

$$\frac{dY^e}{dt} = \frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\frac{dK}{dt} + \frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\frac{dL}{dt} \quad . \tag{11}$$

Теперь нам необходимо установить функциональные зависимости производных от капитала $(\frac{dK}{dt})$ и труда $(\frac{dL}{dt})$, входящего в выражение (11). В первом случае мы можем воспользоваться широко известным уравнением инвестиций, опиcывающим накопление капитала [21, §13.2, с. 375]:

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - \mu K(t) = sY(t) - \mu K(t) \tag{12}$$

Здесь μ - коэффициент выбытия капитала. Во втором случае воспользуемся законом Оукена, устанавливающим связь между величиной циклической или конъюнктурной безработицы $(u - u^*)$ и конъюнктурным разрывом в выпуске $(Y_F - Y)$:

$$\frac{Y_F - Y}{Y_F} = \gamma(u - u^*) \quad , \tag{13}$$

где γ - параметр Оукена; $Y_F(L^*)$ - национальный доход при полной занятости; $Y(L)$- фактический объем выпуска при наличии конъюнктурной безработицы; L^*- численность рабочих при полной занятости; L - фактическая численность рабочих, занятых в производстве; u^* - естественный уровень безработицы, соответствующий полной занятости L^*; u - фактический уровень безработицы. Поскольку $u - u^* = \frac{L^* - L}{L^*}$ из соотношения (13) получаем $Y_F - Y = \gamma^*(L^* - L)$, где $\gamma^* = \gamma \frac{Y_F}{L^*}$, а $\frac{Y_F}{L^*}$ - производительность труда при полной занятости. Дифференцируя обе части последнего соотношения получаем требуемое соотношение:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{\gamma^*}\frac{dY}{dt}. \tag{14}$$

Подставляя выражения (12) и (14) в выражение (11) будем иметь:

$$\frac{dY^e}{dt} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial K}(sY - \mu K) + \frac{\partial \overline{Y}}{\partial L}\frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{\gamma^*} \quad . \tag{15}$$

А теперь подставляя выражения для Y^e (10) и $\frac{dY^e}{dt}$ (15) в исходное уравнение (7) и приводя подобные, получаем общее дифференциальное уравнение макроэкономической динамики:

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{\lambda}\tfrac{d^2Y}{dt^2} + \left\{1 + \tfrac{æ}{\lambda} - æ\nu\left[1 - \chi\tfrac{4}{3}\left(\nu\tfrac{dY}{dt}\right)^2\right] - (1-s)\tfrac{1}{\gamma^*}\tfrac{\partial \overline{Y}}{\partial L}\right\}\tfrac{dY}{dt} + \left[æ - \mathrm{s}(1-\mathrm{s})\tfrac{\partial \overline{Y}}{\partial K}\right]Y + \\ +(1-s)(\mu - æ\tfrac{a}{h})K\tfrac{\partial \overline{Y}}{\partial K} - æ(1-s)\tfrac{b}{h}L\tfrac{\partial \overline{Y}}{\partial L} = \tfrac{dA}{dt} + æ\mathrm{A}.\end{gathered} \tag{16}$$

Важно отметить, что данное уравнение учитывает закон накопления капитала (12), а также закон Оукена, устанавливающий связь между колебаниями уровня безработицы и колебаниями выпуска (13). Отдельные коэффициенты уравнения могут быть случайными величинами, например æ или λ. Правая часть уравнения, как правило, содержит случайную составляющую. Поэтому уравнение (16) в общем случае является стохастическим дифференциальным уравнением, объединяющим детерминистские и стохастические подходы к исследованию реальных деловых циклов.

При подходящих начальных и граничных условиях дифференциальное уравнение (16) может представить движение выпуска от одного положения равновесия до другого. Начальные и граничные условия целесообразно привязать к трендовой траектории:

$$\begin{gathered}\text{а) } Y(t,K,L)_{|t=t_0} = \overline{Y}(t_0,K_0,L_0) = \overline{Y}_0\ ; \quad \text{б) } \frac{dY}{dt}_{|t=t_0} = \frac{d\overline{Y}}{dt}_{|t=t_0} = g_0\ ; \\ \text{в) } \frac{\partial Y}{\partial K}_{|K=K_0} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial K}_{|K=K_0} = i_0\ ; \quad \text{г) } \frac{\partial Y}{\partial L}_{|L=L_0} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial L}_{|L=L_0} = w_0\ ; \\ \text{д) } \frac{\partial Y}{\partial K}_{|K\to\infty} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial K}_{|K\to\infty} = 0\ ; \quad \text{е) } \frac{\partial Y}{\partial L}_{|L\to\infty} = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial L}_{|L\to\infty} = 0\ .\end{gathered} \tag{17}$$

Здесь g_0 - начальная скорость изменения выпуска; i_0 - норма процента; w_0 - реальная заработная плата в начальный момент. Условия (17, в и г) означают достижение максимума прибыли в условиях совершенной конкуренции. Условия (17, д и е) означают свойство убывания предельных производительностей капитала и труда.

В общем уравнении макроэкономической динамики (16) мы имеем дело с двумя переменными, характеризующими выпуск продукции: быстроменяющейся переменной $Y(t)$ и медленноменяющейся $\overline{Y}(t)$. Это обстоятельство позволяет их разделить путем применения метода усреднения [23, §13]. Итак, движение экономической системы характеризуется двумя сильно различающимися временными масштабами – быстрые циклические колебания и их медленный дрейф по трендовой траектории. Метод усреднения Крылова-Боголюбова-Митропольского (метод КБМ) как раз и направлен на разделение быстрых и медленных составляющих решения. Действительно, можно сначала провести усреднение быстроменяющейся переменной $Y(t)$ и получить усеченное описание системы, учитывающее только её осредненную эволюцию, представляющую долговременный тренд, описываемый $\overline{Y}(t)$. Такой подход позволяет относительно легко найти обе зависимости.

Для дальнейшего анализа уравнения (16) важно выделить трендовую составляющую в его правой части, которая определяется независимыми от дохода инвестициями. Сюда входят капиталовложения государственных и частных организаций в развитие общественной инфраструктуры, а также инвестиции вызываемые научно-техническим прогрессом, изобретениями и технологическими нововведениями, которые определяют не только долгосрочный экономический рост, но также влияют на краткосрочные колебания, поскольку они носят нерегулярный характер. Сюда же относятся независимые расходы на потребление домохозяйств. Итак, независимые инвестиции $A(t)$ всегда можно представить в виде $A(t) = \overline{A}(t) + \varphi(t)$, где $\overline{A}(t)$ - трендовая составляющая (например, $\overline{A}(t) = A_0 + A_1 \cdot t$ или $\overline{A}(t) = A_2 \cdot e^{gt}$); $\varphi(t)$ - квазипериодическая функция, колеблющаяся вокруг трендовой составляющей. Таким образом, правая часть уравнения примет вид:

$$\frac{dA}{dt} + \text{æ}\mathrm{A} = \left(\frac{d\overline{A}}{dt} + \text{æ}\overline{\mathrm{A}}\quad\right) + \left(\frac{d\varphi}{dt} + \text{æ}\varphi\quad\right). \tag{18}$$

Второе слагаемое в правой части данного выражения оказывает непосредственное влияние на циклические колебания.

Прежде всего выделим в основном уравнении (16) циклические колебания, описываемые переменной $y = Y - \overline{Y}$. Для этого рассмотрим линейный случай ($\chi = 0$), чтобы воспользоваться принципом суперпозиции. Подставив $Y = y + \overline{Y}$ в линейное уравнение (16) получим:

$$\begin{gathered}\tfrac{d^2y}{dt^2} + \sigma\tfrac{dy}{dt} + \omega^2 y + \tfrac{d^2\overline{Y}}{dt^2} + \overline{\sigma}\tfrac{d\overline{Y}}{dt} + \overline{\omega}^2\overline{Y} - \lambda(1-s)\tfrac{1}{\gamma^*}\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\tfrac{d\overline{Y}}{dt} - \lambda s(1-s)\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\overline{Y} + \\ +\lambda(1-s)\left[(\mu - \text{æ}\tfrac{a}{h})K\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial K} - \text{æ}\tfrac{b}{h}L\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\right] = \lambda\left(\tfrac{d\overline{A}}{dt} + \text{æ}\overline{A}\right) + \lambda\left(\tfrac{d\varphi}{dt} + \text{æ}\varphi\right).\end{gathered} \tag{19}$$

Здесь $\sigma = \lambda + \text{æ} - \text{æ}\lambda\nu\left[1 - \frac{4}{3}\left(v\frac{dY}{dt}\right)^2\right] - (1-s)\lambda\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}$; $\quad \omega^2 = \lambda\left[\text{æ} - s(1-s)\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\right]$; $\overline{\sigma} = \lambda + \text{æ} - \text{æ}\lambda\nu$; $\quad \overline{\omega}^2 = \lambda\text{æ}$. Поскольку $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}$ и $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}$ являются медленноменяющимися функциями, в коэффициентах σ и ω^2 их можно заменить выражениями, вытекающими из максимизации прибыли в условиях совершенной конкуренции [21, §11.2]: $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} = i$; $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L} = w = \beta\frac{Y_F}{L^*}$, где i - норма процента; w – реальная заработная плата; β - отражает эластичность выпуска по труду в производственной функции Кобба-Дугласа. Следовательно имеем:

$$\sigma = \lambda + æ - æ\lambda\nu \left[1 - \frac{4}{3}\left(\nu\frac{dY}{dt}\right)^2\right] - (1-s)\lambda\frac{\beta}{\gamma}; \qquad \omega^2 = \lambda\left[æ - s(1-s)i\right]; \tag{20}$$

$$\overline{\sigma} = \lambda + æ - æ\lambda\nu\ ; \qquad \overline{\omega}^2 = \lambdaæ \quad .$$

Следующим шагом мы проведем усреднение уравнения (19) по быстроменяющимся переменным y и φ и получаем усеченное дифференциальное уравнение, описывающее только ее осредненную эволюцию, т.е. трендовую траекторию:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d^2\overline{Y}}{dt^2} + \overline{\sigma}\tfrac{d\overline{Y}}{dt} + \overline{\omega}^2\overline{Y} - \lambda(1-s)\tfrac{1}{\gamma^*}\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\tfrac{d\overline{Y}}{dt} - \lambda s(1-s)\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\overline{Y} + \\ &+\lambda(1-s)\left[(\mu - æ\tfrac{a}{h})K\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial K} - æ\tfrac{b}{h}L\tfrac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\right] = \lambda\left(\tfrac{d\overline{A}}{dt} + æ\overline{\mathrm{A}}\right) .\end{aligned} \tag{21}$$

Начальные и граничные условия сохраняются прежними (17).

Поскольку принцип усреднения заключается в том, что быстроменяющиеся члены основного уравнения должны компенсироваться независимо от медленноменяющихся членов, то соответствующее уравнение $\frac{d^2y}{dt^2} + \sigma\frac{dy}{dt} + \omega^2\mathrm{y} = \lambda\left(\frac{d\varphi}{dt} + æ\varphi\right) = \varphi^*$ дает решение, описывающее циклические колебания. Причем в данном уравнении с самого начала мы должны учитывать нелинейность акселератора, заключенную в коэффициенте σ (20). Поэтому в дальнейшем мы будем анализировать решение нелинейного дифференциального уравнения в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \left[\sigma_0 - \frac{4}{3}æ\lambda\nu^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt} + \omega^2 y = \varphi^* \tag{22}$$

где $\sigma_0 = -\left[\lambda + æ - æ\lambda v - \lambda(1-s)\frac{\beta}{\gamma}\right]$; $\quad \omega^{\ 2} = \lambda\left[æ\ - s(1-s)i\ \right]$; $\ \beta = \frac{h}{b}\ - a$.

Полученное уравнение широко известно как уравнение Рэлея, которое имеет большое значение в теории автоколебаний.

Таким образом, применив метод усреднения КБМ к основному уравнению макроэкономической динамики (16) , мы разделили быстрые и медленные движения и получили два независящих друг от друга уравнения: одно – описывающее долговременную траекторию роста экономики (21); другое – описывающее циклические колебания экономики вокруг трендовой кривой (22). Анализ решений этих уравнений теперь можно осуществлять отдельно, а искомое решение $Y(t)$ исходного уравнения (16) получить суперпозицией $Y(t) = y(t) + \overline{Y}(t)$.

Итак, рассмотрим сначала уравнение (21), описывающее трендовую траекторию. В этом уравнении возможно исключить переменные факторы K и L, поскольку мы уже учли их временные зависимости (12) и (14) при выводе общего дифференциального уравнения макроэкономической динамики (16). С этой целью выпишем члены с третьего по шестой в левой части уравнения (21), слегка перегруппировав их:

$$\lambdaæ\overline{Y} - \lambda(1-s)\frac{1}{\gamma^*}\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\frac{d\overline{Y}}{dt} - \lambda s(1-s)\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\overline{Y} + \lambda(1-s)\mu K\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} - \lambda(1-s)æ\left[\frac{a}{h}K\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} + \frac{b}{h}L\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\right] . \tag{23}$$

Здесь мы воспользуемся: соотношением $wdL + idK = 0$, выражающим свойство эластичности замены "труд-капитал"; условиями достижения максимума прибыли $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L} = w$ и $\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K} = i$; а также соотношением $\frac{d\overline{Y}}{dt} = \gamma^*\frac{dL}{dt}$ (14), вытекающим из закона Оукена. Отсюда следует:

$$\frac{dK}{dL}=-\frac{w}{i}=-\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\Big/\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}\Rightarrow\frac{\partial\bar{Y}}{\partial L}=\frac{w}{i}\frac{\partial\bar{Y}}{\partial K};\ \frac{d\bar{Y}}{dt}=-\gamma^*\frac{i}{w}\frac{dK}{dt}\quad. \tag{24}$$

Следовательно, выражение (23), с учетом соотношений (24), можно привести к виду: $\lambda æ\overline{Y}+\lambda(1-s)(\frac{dK}{dt}-s\bar{Y}+\mu K)\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}-\lambda(1-s)æ\left[\frac{a}{h}K\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}+\frac{b}{h}L\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}\right]$.

Если учесть, что $\frac{dK}{dt}-s\bar{Y}+\mu K=0$ (см. (12)) и $\frac{a}{h}K\frac{\partial\overline{Y}}{\partial K}+\frac{b}{h}L\frac{\partial\overline{Y}}{\partial L}=\bar{Y}$ (10), то последнее выражение, а следовательно, и выражение (23) сильно упростится и примет вид одночлена $\lambda æ s\overline{Y}$, а исходное дифференциальное уравнение (21) также сильно упрощается

$$\frac{d^2\overline{Y}}{dt^2}+\overline{\sigma_0}\frac{d\overline{Y}}{dt}+\overline{\omega_0}^2\overline{Y}=\lambda\left(\frac{d\bar{A}}{dt}+æ\bar{A}\right)\ , \tag{25}$$

где $\bar{\sigma}_0=\lambda+æ-\lambda æ\nu$, $\quad\bar{\omega}_0^2=\ \lambda sæ$

Общее решение данного уравнения складывается из однородного решения, соответствующего правой части. Характеристическое уравнение $p^2+\bar{\sigma}_0p+\bar{\omega}_0^2=0$, определяющее решение однородного уравнения, имеет корни $p_{1,2}=-\frac{\bar{\sigma}_0}{2}\pm\sqrt{\frac{\bar{\sigma}_0^2}{4}-\bar{\omega}_0^2}$. Приведем пример конкретного решения, наиболее часто встречающегося на практике, при следующих численных значениях параметров системы: $\lambda=4$; $\quad æ=1$; $\quad s=0,25$; $\quad v=1,1$. Тогда: $\bar{\sigma}_0=0,6$; $\quad\bar{\omega}_0^2=1$; $\quad p_{1,2}=-0,3\pm0,95i$.

Значит, $\overline{Y}_{одн}=(c_1\cos0,95++c_2\sin0,95t)e^{-0,3t}$. Для отыскания частного решения зададимся конкретным видом функции $\bar{A}(t):\bar{A}(t)=A_0e^{gt}$. Это означает рост долгосрочных инвестиций с постоянным ежегодным темпом, равным g, - наиболее важный частный случай, встречающийся на практике. Тогда $\bar{Y}_G=Be^{gt}$, $B=\frac{\lambda(g+æ)}{g^2+\bar{\sigma}_0g+\bar{\omega}_0^2}A_0$.

Общее решение дифференциального уравнения (25) запишется в виде($\bar{Y}=\bar{Y}_{одн}+\bar{Y}_ч$):

$$\bar{Y}=(c_1\cos0,95t+c_2\sin0,95t)e^{-0,3t}+Be^{gt}\ . \tag{26}$$

При начальных условиях $\bar{Y}(0)=Y_0$ и $\frac{d\bar{Y}}{dt}|_{t=0}=0$, получим: $c_1=\bar{Y}_0-B$;

$$c_2=0,32\left[\bar{Y}_0-(1+3,3g)B\right].$$

Таким образом, решение уравнения (25) в окончательной форме примет вид:

$$\bar{Y}(t)=B\left\{e^{gt}+\left[(\frac{\bar{Y}_0}{B}-1)\cos0,95t+0,32(\frac{\bar{Y}_0}{B}-1-3,3g)\sin0,95t\right]e^{-0,3t}\right\} \tag{27}$$

Второе слагаемое в фигурных скобках имеет характер затухающего колебательного процесса, поэтому в стационарном состоянии решение имеет вид:

$$\bar{Y}_{AB}(t)=Be^{gt} \tag{28}$$

Данное решение имеет максимум относительно темпа роста независимых инвестиций g. Решая уравнение $B_g^{'}=0$, получаем оптимальное значение g, равное

$$g^*=\sqrt{æ^2-\bar{\omega}_0^2-\bar{\sigma}_0æ}-æ,$$

что дает $g^*=0,184$, т.е. максимум наступает при весьма высоких темпах роста инвестиций, равных 18,4%!

В дальнейших примерах численных расчетов мы будем придерживаться следующих значений параметров: $B=1$; $\quad g=0,03$ (3 % в год).

Приступим теперь к анализу решений уравнения (22), описывающего нелинейные циклические колебания экономической системы вокруг трендовой траектории (26). Существенное влияние на характер искомого решения оказывает абсолютная величина и знак коэффициента σ при первой производной $\frac{dy}{dt}$:

$$\sigma = -\left[\sigma_0 - \frac{4}{3}æ\lambda\nu^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \ ; \ \ \sigma_0 = - \ \left[\lambda + æ - æ\lambda\nu - \lambda\left(1-s\right)\frac{\beta}{\gamma}\right]. \tag{29}$$

Типичные значения параметров, входящих в этот коэффициент, следующие: $\lambda = 4$; $æ = 1$; $\nu = 1,1$; $s = 0,25$; $\gamma = 2,5$; $i = 0,1$; $\beta = 0,67$. При данных значениях параметров имеем: $\sigma_0 = -0,2$; $\quad \omega^2 = 3,92$ и для линейного уравнения корни соответствующего характеристического уравнения $q^2 + \sigma_0 q + \omega^2 = 0$ составят $q_{1,2} = -0,1 \pm 1,98j$, т.е. определяют затухающий колебательный процесс. Если принять $\gamma = 2$, при неизменных заданных значениях остальных параметров, тогда получится $\sigma_0 = 0$ и корни характеристического уравнения будут чисто мнимыми $q_{1,2} = \pm 1,98j$, что означает наличие в системе незатухающих гармонических колебаний. В классических исследованиях, посвященных кейнсианским моделям циклических колебаний [18, Гл. 6 и 7] рассматривались именно эти случаи, когда $\sigma_0 < 0$ и выступает в качестве коэффициента затухания, как практически наиболее интересные. Случаи, когда $\sigma_0 > 0$ и имеют место колебания взрывного характера, подробно не анализировались как не соответствующие реальным динамическим процессам, происходящим в реальных экономических системах. Это заблуждение явилось следствием игнорирования нелинейности акселератора. Как раз случай $\sigma_0 \leq 0$ является тривиальным случаем, когда экономическая система пребывает в равновесии ($\sigma_0 = 0$) или стремится к состоянию равновесия, после того как очередной шок предложения вывел её из состояния равновесия. Ключевую роль среди заданных параметров играет мощность акселератора $\nu(\nu > 0)$, причем: при небольших величинах $\nu < 1$, $\quad \sigma < 0$ и имеют место затухающие колебания, при некотором значении ν $(\nu > 1)$ близком к единице $\sigma_0 = 0$ и возникают незатухающие колебания, а при больших величинах $\nu(\nu > 1, \sigma_0 > 0)$ они превращаются во взрывные. Можно показать, что значения ν, порождающие колебания в линейной модели, расположены на интервале $(1-\sqrt{s})^2 < \nu < (1+\sqrt{s})^2$ [18, §7.7] и лишь при одном значении ν близком к единице имеют место регулярные незатухающие колебания. Однако теория не может опираться на такой случайный вариант, когда акселератор обладает надлежащей мощностью, порождающей регулярные колебания, что означает несостоятельность линейной теории для описания циклических колебаний в экономике.

Таким образом, для нелинейного дифференциального уравнения (22) весьма интересным является случай, когда $\sigma_0 > 0$. При этом имеет место взрывной колебательный процесс, вызванный начальным импульсом, который затем ограничивается нелинейным гибким акселератором, преобразуясь в незатухающие нелинейные колебания. Это происходит следующим образом. Поскольку коэффициент σ (29) является переменной величиной при малых значениях $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ имеет место $\sigma \cong -\sigma_0$, а значит $\sigma < 0$ и в системе возникает взрывное колебание, которое разгоняет амплитуду колебаний выпуска. Но затем, при достаточном увеличении $\left|\frac{dy}{dt}\right|$, второе слагаемое в (29) превышает σ_0 по абсолютной величине и происходит смена знака σ на противоположный, т.е. σ становится положительной и начинается затухание амплитуды выпуска пока снова $\left|\frac{dy}{dt}\right|$ не становится настолько малой, что вновь произойдет смена знака σ на отрицательный, что вызовет новое взрывное колебание, вновь разгоняя амплитуду колебаний выпуска. Таким образом в системе происходит установление незатухающих колебаний. Можно также показать, что в пределах практических изменений параметров системы $|\sigma| = \left|\sigma_0 - \frac{4}{3}æ\lambda\nu^3\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right| \leq 0,3 << 1$, т.е.

σ можно рассматривать как малый параметр. Следовательно, мы имеем дело со слабо нелинейным дифференциальным уравнением с малым параметром для решения которого можно эффективно использовать метод усреднения КБМ [24, Гл. 1].

Как же происходят незатухающие циклические колебания в реальной экономической системе в условиях, когда колебания имеют взрывной характер? Итак, под влиянием роста спроса происходит увеличение выпуска продукции и стимулирование необходимых для его обеспечения капиталовложений. Однако первая реакция может повлечь уменьшение оборотного капитала – запасов готовой продукции, полуфабрикатов, незавершенного производства и лишь затем последуют капиталовложения в производство, а также восстановление оборотного капитала за счет индуцированных инвестиций. По мере увеличения выпуска будут нарастать и потери оборотного капитала (это и есть явление диссипации в экономических системах), так что в конце-концов, средний за период колебаний объем расходов достигнет соответствующего уровня поступающих инвестиций, что приводит к стабилизации объемов выпуска на определенном уровне, и в системе будет протекать самоподдерживающийся колебательный процесс. Следует заметить, что амплитуда колебаний выпуска определяется только внутренними параметрами системы и не зависит от внешних факторов или начальных условий, что соответствует стилизованному факту 3, приведенному в начале статьи. Следовательно, изменения оборотного капитала (движение товарных запасов) в течение промежуточного периода, между принятием решения об объемах инвестиций и фактическим капиталовложением в производство, играют ключевую роль в колебательном процессе, выступая как элемент усиления циклических колебаний. Поэтому неудивительно, что деловые циклы в большой степени напоминают колебания товарных запасов. Более того, незатухающие колебания в экономической системе существуют потому, что расход оборотного капитала, возникающий в результате немедленного реагирования на возникший спрос, будет компенсироваться за счет индуцированных инвестиций, но с определенным запаздыванием по времени. Таким образом, благодаря наличию нелинейного гибкого акселератора экономическая система способна порождать автоколебания. В такой системе параметр σ является бифуркационным параметром. Когда σ проходит критическое значение $\sigma = 0$, происходит простейшая бифуркация Андронова-Хопфа, т.е. бифуркация рождения незатухающих автоколебаний. Амплитуда колебаний обычно пропорциональна $\sqrt{\sigma}$. Мощность акселератора играет роль коэффициента усиления в системе обратной связи. Если мощность акселератора достаточно велика, то колебания малой амплитуды, возникшие в системе, будут раскачиваться, порождая незатухающие колебания.

Для получения конкретных приближенных решений уравнения (22) рассмотрим ряд частных случаев.

Первый пример: собственные колебания системы. Внешнее воздействие отсутствует, т.е. $\varphi = 0$. Если введем обозначение $F(\frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \frac{4}{3}æ\lambda\nu^3(\frac{dy}{dt})^2\right]\frac{dy}{dt}$, то уравнение (22) запишется в стандартной форме для применения метода усреднения [24, Гл. 1, §3]:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F(\frac{dy}{dt}). \tag{30}$$

Решение данного уравнения в первом приближении ищется в виде $y = a\cos\psi$, где a и ψ являются функциями, которые определяются уравнениями:

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{2\omega}F_1(a\omega); \ \frac{d\psi}{dt} = \omega, \qquad \psi = \omega t = \vartheta\ . \tag{31}$$

Поскольку $F(-a\omega\sin\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(a\omega)\cos n(\psi + \frac{\pi}{2})$, отсюда легко находим $F_1(a\omega) = \frac{1}{\varepsilon}(\sigma_0 - \sigma_1 a^2)a\omega$, где $\sigma_1 = æ\lambda\nu^3\omega^2$; $\quad \sigma_1 a^2 > \sigma_0 > 0$. Решая уравнение (31) относительно параметра a получаем: $a = \frac{a_0 \exp\left(\frac{\sigma_0}{2} t\right)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} a_0^2 [\exp(\sigma_0 t) - 1] + 1}}$.

Следовательно, приближенное решение уравнения (30), описывающее собственные колебания системы, имеет вид:

$$y = \frac{a_0 \exp\left(\frac{\sigma_0}{2} t\right) \cos(\omega t + \vartheta)}{\sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_0} a_0^2 \left[\exp(\sigma_0 t) - 1\right] + 1}} \,. \tag{32}$$

В стационарном режиме будем иметь:

$$y_{cm} = y_0 \cos(\omega t + \vartheta), \qquad y_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_1}} \,. \tag{33}$$

Суперпозиция трендовой траектории движения выпуска (28) и его циклических колебаний (33) дает реальную кривую движения выпуска:

$$Y_{cm} = e^{pt} + y_0 \cos(\omega t + \vartheta) \,. \tag{34}$$

График данной кривой представлен на рис. 2, и он соответствует стилизованным фак-

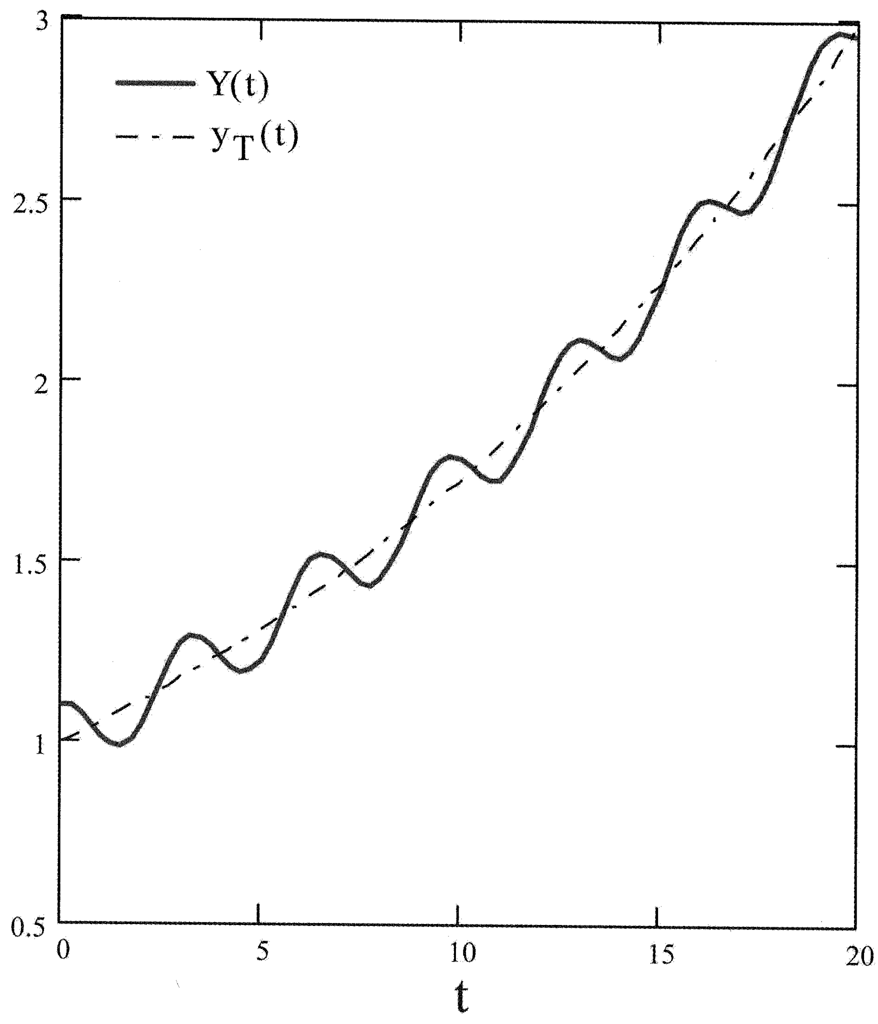

Рис. 2 Собственные колебания экономической системы

там, приведенным в начале статьи.

Второй пример: воздействие на автономную систему стационарного "белого шума".
В этом случае уравнение (29) примет соответствующий стандартный вид:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F(\frac{dy}{dt}) + \sqrt{\varepsilon}\sigma_\xi \xi(t) \ . \tag{35}$$

где $\xi(t)$ - гауссовский "белый шум"; σ_ξ - среднее квадратическое отклонение $\xi(t)$.

Решение в первом приближении ищется в виде $y = a\cos(\omega t + \theta)$. Амплитуда a и фаза θ являются случайными величинами, которые удовлетворяют следующей системе стохастических дифференциальных уравнений [23, §23]:

$$d\overline{a} = \frac{\overline{a}}{2}(\sigma_0 - \sigma_1 \overline{a}^2)dt + \sigma_\xi \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} d\xi(t); \qquad d\overline{\theta} \ = \frac{\sigma_\xi}{\overline{a}\omega}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} d\xi(t). \tag{36}$$

Для первого из этих уравнений возможно получить точное выражение для стационарной плотности распределения усредненной амплитуды $\overline{a}$ из соответствующего уравнения Колмогорова–Фоккера–Планка [25, §2.1, с. 54]:

$$p(\overline{a}) = C\exp\left(\frac{\sigma_0}{\varepsilon\sigma_\xi^2}\overline{a}^2 - \frac{\sigma_1}{2\varepsilon\sigma_\xi^2}\overline{a}^4\right) \ , \tag{37}$$

где C - константа нормировки. Из второго уравнения системы (36) следует, что $\overline{\theta}$ является гауссовским "белым шумом". Зная функцию плотности распределения $\overline{a}$ мы можем построить кривые практической реализации движения общего выпуска по формуле (34). Одна из таких реализаций представлена на рис. 3.

Третий пример: влияние внешних периодических сил. Пусть $\varphi^* = q\sin\nu t$.. Уравнение (22) запишется в виде:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F(\frac{dy}{dt}) + q\sin\nu t \ , \tag{38}$$

где $F(\frac{dy}{dt}) = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \sigma_2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]\frac{dy}{dt}; \qquad \sigma_2 = \frac{4}{3}æ\lambda\nu^3$.
Рассмотрим вначале решение в отсутствии резонанса, т.е. $\nu \neq \omega$. Чтобы привести уравнение (38) к стандартному для применения метода усреднения виду введем замену $y = x + U\sin\nu t$. Получаем

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon f(\nu t, \frac{dx}{dt}) = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon}\left[\sigma_0 - \sigma_2\left(\frac{dx}{dt} + \nu U\cos\nu t\right)^2\right]\left(\frac{dx}{dt} + \nu U\cos\nu t\right)$,

где $U = \frac{q}{\omega^2 - \nu^2}$, далее $\theta = \nu t$.

В качестве первого приближения решения берется функция $x = a\cos\psi$, в котором a и ψ определяются уравнениями [24]

$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \qquad \frac{d\psi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a)$

Здесь $A_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\sin\psi d\theta d\psi$,

$B_1(a) = -\frac{1}{4\pi^2\omega a}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_0(a,\psi,\theta)\cos\psi d\theta d\psi$ и $f_0(a,\psi,\theta) = f(\nu t, a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)$.

Берем данные интегралы: $A_1(a) = \frac{a}{4\varepsilon}\left[2\sigma_0 - 3\sigma_2(\nu U)^2 - \frac{3}{2}\sigma_2(a\omega)^2\right]; \qquad B_1(a) = 0.$

Итак, имеем следующие дифференциальные уравнения для определения a и ψ:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = a(\sigma_3^2 - a^2)\sigma_4, \quad \sigma_3^2 = \frac{4\sigma_0 - 6\sigma_2(\nu U)^2}{3\sigma_2\omega^2}, \quad \sigma_4 = \frac{3}{8}\sigma_2\omega^2 \ ; \\ \frac{d\psi}{dt} = \omega, \qquad \psi = \omega t + \vartheta. \end{cases}$$

Решение уравнения относительно a имеет вид

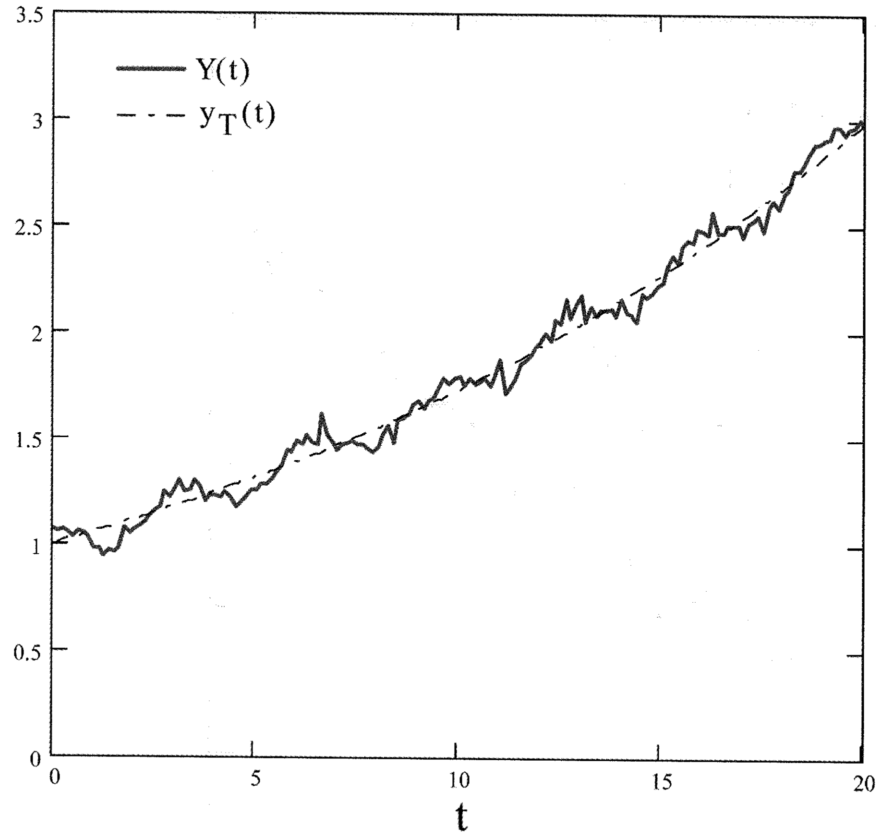

Рис. 3 Воздействие стационарного "белого шума"на автономную систему при $\sigma = 0,05$ $(a_m = 0,084, \sigma_a = 0,046, \sigma_\theta = 0,213)$. $\Delta t = \frac{1}{8}$

$$a = \frac{a_0 \exp\left(\frac{\sigma_5}{2}t\right)}{\sqrt{\frac{a_0^2}{\sigma_3^2}\left[\exp(\sigma_5 t) - 1\right] + 1}}, \qquad \sigma_5 = \sigma_0 - \frac{3}{2}\ \sigma_2 \left(\frac{q\nu}{\omega^2 - \nu^2}\right)^2 .$$

Отсюда следует, что стационарное значение амплитуды $a_{cm} = \sigma_3$. Стационарное решение исходного уравнения (38): $y_{cm} = x_{cm} + U \sin \nu t = \sigma_3 \cos(\omega t + \vartheta) + \frac{q}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t$.
Следовательно:

$$Y_{cm} = e^{pt} + \sigma_3 \cos(\omega t + \vartheta) + \frac{q}{\omega^2 - \nu^2} \sin \nu t\ . \tag{39}$$

Кривая движения выпуска (39) представлена на рис. 4 при соотношении частот $\nu = \frac{2}{3}\omega$.

Рассмотрим теперь решение уравнения (38) в резонансном случае, когда $\nu \approx \omega$. Возьмем только малое внешнее воздействие в отличие от (38):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \varepsilon F\left(\frac{dy}{dt}\right) + \varepsilon q \sin \nu t\ . \tag{40}$$

В данном случае решение в первом приближении ищется в виде $y = a\cos(\nu t + \vartheta)$, где a и ϑ определяются системой дифференциальных уравнений [24, Гл. 3, §15]:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\pi\omega} \int\limits_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \sin\psi d\psi - \frac{\varepsilon q \cos\vartheta}{\omega + \nu}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \nu - \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a} \int\limits_0^{2\pi} f_0(a, \psi) \cos\psi d\psi + \frac{\varepsilon q \sin\vartheta}{a(\omega + \nu)}. \end{cases}$$

После взятия интегралов получаем следующие уравнения:

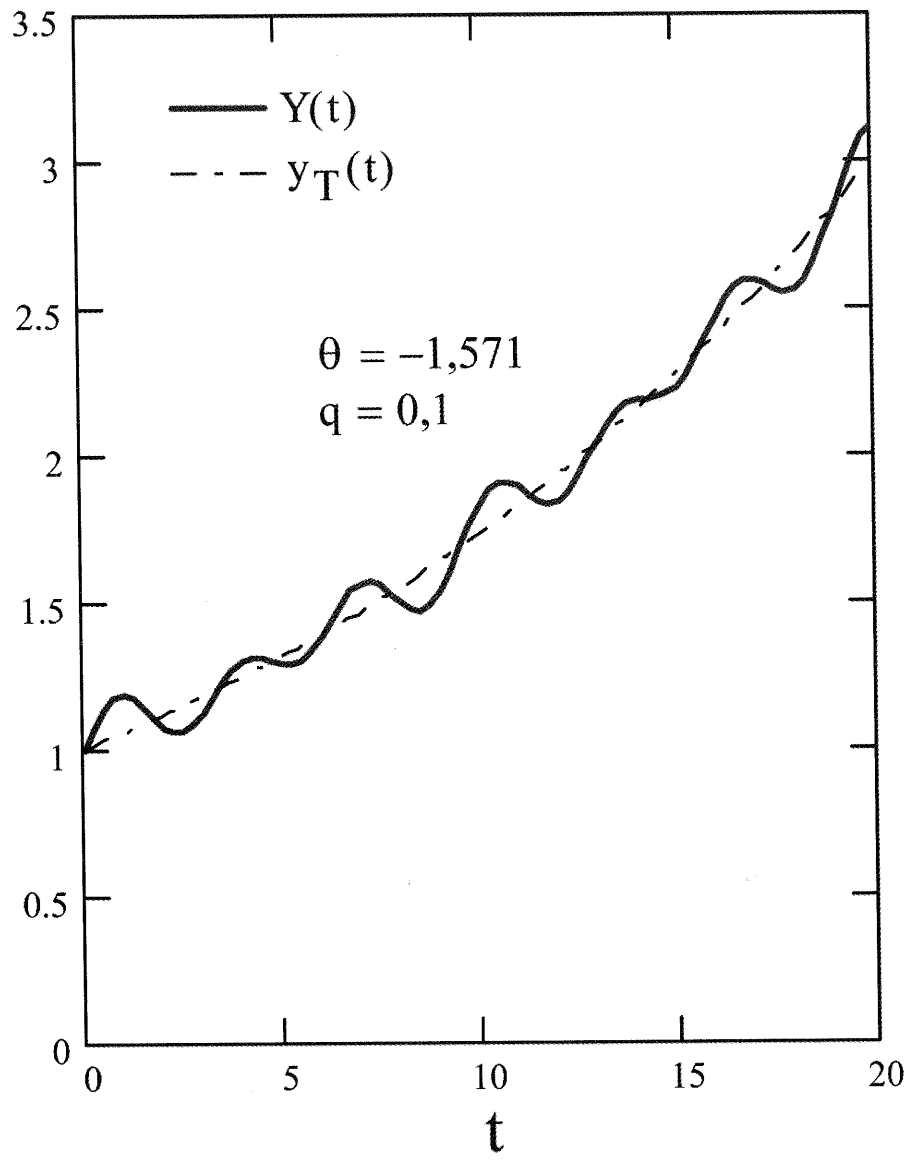

Рис. 4 Вынужденные колебания экономической системы в нерезонансном случае

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da}{dt} = \frac{a}{2}\left[\sigma_0 - \frac{3}{4}\sigma_2(a\omega)^2\right] - \frac{\varepsilon q \cos\vartheta}{\omega+\nu}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \nu + \frac{\varepsilon q \sin\vartheta}{a(\omega+\nu)}. \end{array} \right. \tag{41}$$

В стационарном режиме $\frac{da}{dt} = 0$, $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$. Исключая ϑ из уравнений (41) получаем: $(\varepsilon q)^2 = a^2\left\{\left(\nu^2 - \omega^2\right)^2 + \nu^2\left[\sigma_0 - \frac{3}{4}\sigma_2(a\omega)^2\right]^2\right\}$. Упрощая данное уравнение, получим кубическое уравнение для определения a:

$$a^3 - a\frac{4}{3}\frac{\sigma_0}{\sigma_2\omega^2} + \frac{4}{3}\frac{\varepsilon q}{\sigma_2\nu\omega^2} = 0. \tag{42}$$

Итак,

$$Y_{cm} = e^{pt} + a_3\cos(\nu t + \vartheta)\,. \tag{43}$$

Здесь a_3 - действительный корень уравнения (42).
Соответствующая уравнению (43) кривая движения выпуска представлена на рис. 5.

Как показывают рассмотренные выше примеры, предлагаемый в работе подход является эффективным для изучения циклических колебаний в современной экономике.

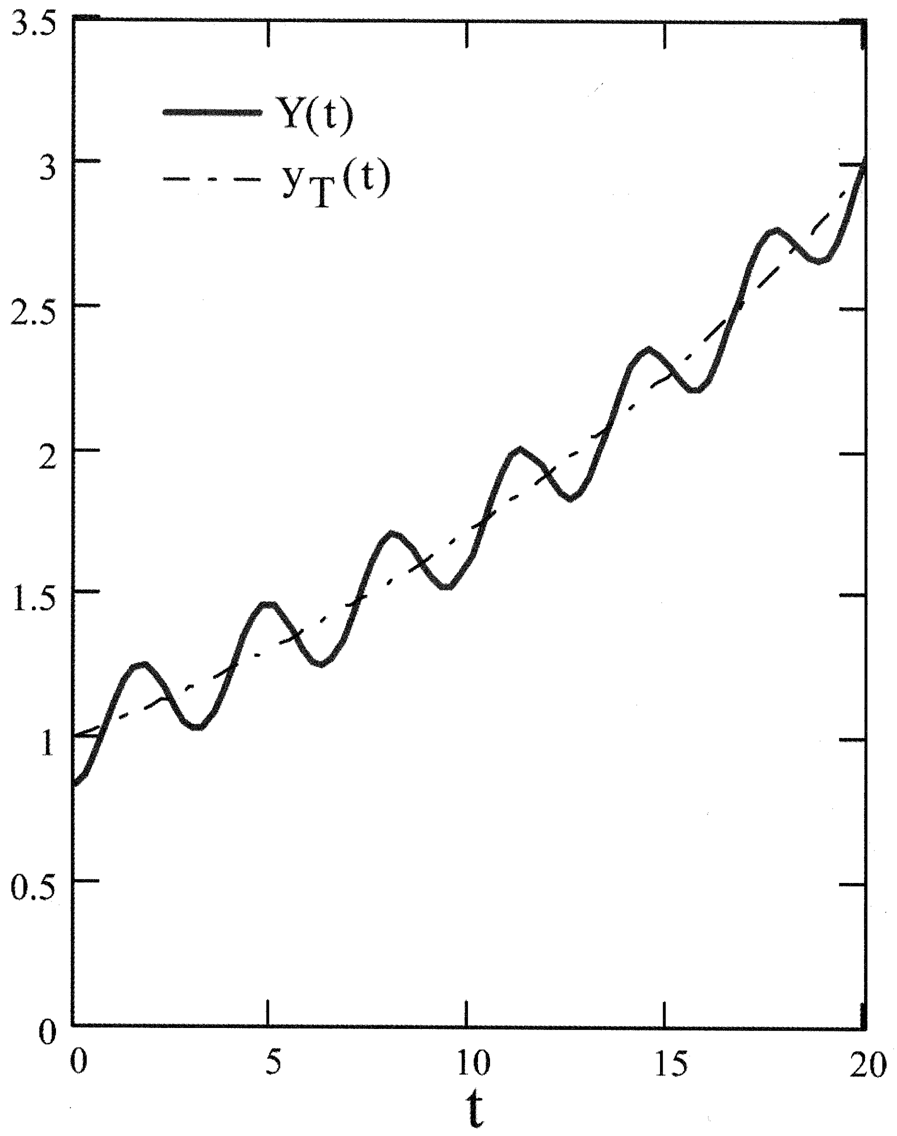

Рис. 5 Вынужденные колебания экономической системы в резонансном случае ($q = 1$; $\varepsilon = 0,1$; $a = 0,158$)

Список литературы

[1] Solow R. A Contribution to the Theory of Economic Growth // Quarterly J. of Economics, February. 1956, p. 65-94

[2] Lucas R.E. On the Mechanics of Economic Development // Journal of Monetary Economics, № 22, 1988, p.3-42.

[3] Romer P. Increasing Returns and Long-Run Growth // Journal of Political Economy, Vol. 94, №5, 1986.

[4] Шараев Ю.В. Теория экономического роста. // М.:ГУ ВШЭ, 2006, 254 с.

[5] Нельсон Р.Р., Уинтер С.Дж. Эволюционная теория экономических изменений // Пер.с англ. – М.: "Дело", 2002, 536 с.

[6] Burns A.F., Mitchell W.C. Measuring Business Cycles. // N.Y.: NBER, 1946.

[7] Шумпетер Й. Теория экономического развития. // М.: Прогресс, 1982, 455 с.

[8] Samuelson P.A. A Synthesis of the Principle of Acceleration and the Multiplier // Journal of Political Economy, №47, 1939, p.786-794.

[9] Hicks J.R. A Contribution to the Theory of the Trade Cycle. // placeCityOxford: Ch. IV, V, VI, 1950.

[10] Phillips A.W. Stabilization Policy in a Closed Economy // Economic Journal, №64, 1954, p.290-323.

[11] Goodwin R.M. The Non–linear Accelerator and the Persistence of Business Cycles // Econometrica, №19, 1951, p.1-17.

[12] Слуцкий Е.Е. Сложение случайных причин, как источник циклических процессов // М.: Журнал "Вопросы конъюнктуры", том 3, вып.1, 1927, с.34-64.

[13] Long J., Plosser C. Real Business Cycles // Journal of Political Economy, February, Vol.91, 1983, p.36-69.

[14] Prescott E. Theory Ahead of Business Cycle Measurement // Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, Autumn, 1986.

[15] Nelson Ch.R., Plosser Ch.I. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series // Journal of Monetary Economics, September, Vol.10, 1982, p.139-162.

[16] Lucas R.E. Understanding Business Cycles // Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy, №5, 1977, P.7-29.

[17] Kydland E., Prescott E. Time to Build and Aggregate Fluctuations // Econometrica. Vol.50, № 6, 1982, p. 1345-1370.

[18] Аллен Р. Математическая экономия // М.: Изд-во иностранной литературы, 1963, 668 с.

[19] Безручко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е. Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях // М.: "КомКнига", 2005, 304 с.

[20] Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы // СПб.: Изд-во Лань, 2005, 228 с.

[21] Столерю Л. Равновесие и экономический рост. // М.: Статистика, 1974, 471 с.

[22] Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка // М.: Физматлит, 2003, 416 с.

[23] Митропольский Ю.А. Метод усреднения в нелинейной механике // Киев: "Наукова Думка", 1971, 440 с.

[24] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний // М.: "Наука", 1974, 504 с.

[25] Маланин В.В., Полосков И.Е. Методы и практика анализа случайных процессов в динамических системах // М. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2005, 296 с.