

ДИФфуЗИОННЫЙ ХАОС

Как уже отмечалось во введении, диффузионный хаос — это частный случай сценария развития турбулентности Ландау–Селла, реализующийся в системах параболических уравнений типа реакция–диффузия. Суть этого феномена в том, что в указанных системах при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах может возникнуть хаотический аттрактор, имеющий сколь угодно высокую ляпуновскую размерность.

Глава состоит из разделов 8–10. В разделе 8 формулируется общая концепция диффузионного хаоса и выделяется некоторый класс параболических систем, в котором реализуемость данного феномена наиболее вероятна. Помимо этого в данном разделе рассматриваются различные конечномерные модели диффузионного хаоса, представляющие собой как цепочки диффузионно связанных обыкновенных дифференциальных уравнений, так и соответствующие цепочки дискретных отображений.

В разделе 9 исследуется некоторая трехмерная система обыкновенных дифференциальных уравнений вольтерровского типа, являющаяся моделью известной реакции Белоусова. Приводятся результаты асимптотического анализа ее релаксационных автоколебаний, а также результаты численных экспериментов, свидетельствующие о реализуемости в соответствующей распределенной модели феномена диффузионного хаоса.

Раздел 10 посвящен анализу явления хаотической буферности, достаточно подробное описание которого содержится во введении.

8. Диффузионный хаос и его конечномерные модели

8.1. Концепция диффузионного хаоса. Системами типа *реакция–диффузия* принято называть параболические краевые задачи вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu D \Delta u + F(u), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right|_{\partial \Omega} = 0, \quad (8.1)$$

где Δ — оператор Лапласа; $u \in \mathbb{R}^k$, $k \geq 2$; $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_k\}$, $d_j > 0$, $j = 1, \dots, k$; $\nu > 0$ — параметр, отвечающий за пропорциональное уменьшение коэффициентов диффузии; \vec{n} — внешняя нормаль к достаточно гладкой границе $\partial \Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$; $F(u)$ — гладкая вектор-функция. Как известно (см., например, [10, 108]), указанные системы служат математическими моделями многих биофизических и экологических процессов. При этом типичной

является ситуация, когда отвечающая системе (8.1) точечная модель, т.е. система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = F(u), \quad (8.2)$$

имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл

$$u = u_0(t), \quad du_0/dt \neq 0 \quad (8.3)$$

периода $T_0 > 0$. Для примера сошлемся на математическую модель реакции Белоусова (см. [53]):

$$\dot{x} = r_1[1 + a(1 - z) - x]x, \quad \dot{y} = r_2[x - y]y, \quad \dot{z} = r_3[y - z]z \quad (8.4)$$

в наиболее важном диапазоне изменения ее параметров $r_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, $a > 0$, и на известное уравнение Хатчинсона [154]:

$$\dot{\mathcal{N}} = r[1 - \mathcal{N}(t - 1)]\mathcal{N} \quad (8.5)$$

при $r > \pi/2$, описывающее колебания плотности численности млекопитающих. Наличие же или отсутствие запаздывания в рассматриваемом ниже вопросе роли не играет.

Нетрудно заметить, что цикл (8.3) сохраняется и в распределенной модели (8.1) (т.е. является решением соответствующей краевой задачи). Для выявления его свойств устойчивости линеаризуем на нем уравнение из (8.1) и применим к получившейся линейной краевой задаче метод Фурье по системе собственных функций оператора Лапласа. В результате приходим к системе

$$\dot{h} = [A_0(t) - zD]h, \quad (8.6)$$

где $A_0(t) = F'(u)|_{u=u_0(t)}$, параметр z принимает дискретные значения $\nu\lambda_k$, $k = 0, 1, \dots$, а $0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ — занумерованные в порядке возрастания собственные значения оператора $-\Delta$ с граничными условиями Неймана.

Всюду ниже для удобства будем считать параметр z в (8.6) непрерывно меняющимся на полуоси $z \geq 0$. Обозначим, далее, через $\mu_s = \mu_s(z)$, $s = 1, \dots, k$, мультипликаторы системы (8.6) и положим

$$\alpha(z) = \max_{1 \leq s \leq k} \left\{ \frac{1}{T_0} \operatorname{Re} \ln \mu_s(z) \right\}. \quad (8.7)$$

Заметим, что всегда $\alpha(0) = 0$, так как при $z = 0$ система (8.6) (в силу предполагаемой экспоненциальной устойчивости цикла (8.3) в рамках точечной модели (8.2)) имеет простой единичный мультипликатор, которому отвечает решение Флоке $h = \dot{u}_0(t)$, а все остальные ее мультипликаторы лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| < 1\}$.

В дальнейшем нам потребуется следующее определение, аналог которого впервые появился в работе [49].

Определение 8.1. Будем говорить, что параболическая краевая задача (8.1) является биологической или принадлежит классу B , если выполняются следующие ограничения.

8.1а. Соответствующая точечная модель (8.2) имеет экспоненциально орбитально устойчивый цикл (8.3).

8.1б. Найдутся такие $0 \leq z_1 < z_2$, что функция (8.7) строго положительна на интервале $z_1 < z < z_2$.

8.1в. При всех достаточно малых $\nu > 0$ динамическая система, порождаемая краевой задачей (8.1) в фазовом пространстве $C(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^k)$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, имеет хаотический аттрактор A_ν , ляпуновская размерность $d_L(A_\nu)$ которого стремится к $+\infty$ при $\nu \rightarrow 0$.

Как уже отмечалось выше, условие 8.1а типично для краевых задач вида (8.1), возникающих в различных биофизических и экологических приложениях (отсюда, собственно, и появился сам термин «биологическая система»). Далее, требование $\alpha(z) > 0$ при $z \in (z_1, z_2)$, фигурирующее в условии 8.1б, обеспечивает неустойчивость цикла (8.3) в рамках распределенной модели (8.1) при всех достаточно малых значениях параметра ν . Что же касается условия 8.1в, являющегося самым главным из всех трех, то оно гарантирует реализуемость при $\nu \rightarrow 0$ интересующего нас феномена диффузионного хаоса. В связи с этим уместно подчеркнуть, что термин «хаотический аттрактор» допускает различные интерпретации. Мы же для определенности будем придерживаться понятия хаоса, предложенного в разделе 1 (см. определение 1.4).

И последнее. В условии 8.1в ляпуновскую размерность, в принципе, можно заменить на хаусдорфову или любую другую. Однако для удобства дальнейшего численного анализа мы будем рассматривать именно ляпуновскую размерность, считая, что $d_L(A_\nu)$ определяется через характеристические показатели аттрактора A_ν по формуле (1.6).

Опираясь на определение 8.1, нетрудно сформулировать концепцию диффузионного хаоса, которая заключается в следующем утверждении.

Гипотеза (о диффузионном хаосе). Класс B параболических систем (8.1) не пуст.

Приведенная гипотеза очевидным образом перекликается с уже упоминавшимися во введении гипотезами А. Н. Колмогорова о росте размерности аттракторов уравнений Навье–Стокса при увеличении числа Рейнольдса (точные формулировки этих гипотез можно найти в работе [8]). Кроме того, прослеживается очевидная параллель между условием 8.1в и сценарием развития турбулентности по Ландау–Селлу, математические аспекты которого изложены в разделе 7.

Достаточно ясно, что обоснование гипотезы о диффузионном хаосе возможно лишь с помощью численного анализа какой-либо конкретной параболической системы вида (8.1). В связи с этим обратимся к известному уравнению Гинзбурга–Ландау (3.45) на отрезке $0 \leq x \leq 1$,

а точнее говоря, рассмотрим соответствующую ему краевую задачу

$$w_t = \nu(1 - ic_1)w_{xx} + w - (1 + ic_2)|w|^2 w, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=1} = 0, \quad (8.8)$$

где $w = w(t, x)$ — комплекснозначная функция; ν, c_1, c_2 — положительные параметры. Убедимся, далее, что при выполнении условия

$$c_1 c_2 > 1 \quad (8.9)$$

указанная параболическая система принадлежит классу B .

В случае системы (8.8) проверка условий 8.1а, 8.1б не вызывает затруднений. В самом деле, ее пространственно однородный (не зависящий от x) цикл задается равенством

$$w = \exp(-ic_2 t) \quad (8.10)$$

и является экспоненциально орбитально устойчивым в рамках соответствующей точечной модели. Что же касается устойчивости цикла (8.10) в рамках распределенной модели (8.8), то она определяется по следующему правилу. Сначала дополним уравнение из (8.8) комплексно сопряженным уравнением, а затем, считая w, \bar{w} независимыми комплекснозначными функциями, выполним в получившейся системе замены $w = \exp(-ic_2 t)(1 + h_1)$, $\bar{w} = \exp(ic_2 t)(1 + h_2)$ и отбросим нелинейные по h_1, h_2 слагаемые. На этом пути приходим к линейной краевой задаче

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} &= \nu(1 - ic_1) \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} - (1 + ic_2)(h_1 + h_2), \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} &= \nu(1 + ic_1) \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} - (1 - ic_2)(h_1 + h_2), \\ \frac{\partial h_j}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial h_j}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad j = 1, 2, \end{aligned}$$

к которой, в свою очередь, применяем метод Фурье по системе функций $\cos k\pi x$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. В результате убеждаемся, что за устойчивость однородного цикла (8.10) по отношению к пространственно неоднородным возмущениям начальных условий отвечает расположение спектра семейства матриц

$$- \begin{pmatrix} 1 + ic_2 & 1 + ic_2 \\ 1 - ic_2 & 1 - ic_2 \end{pmatrix} - k^2 \pi^2 \nu \begin{pmatrix} 1 - ic_1 & 0 \\ 0 & 1 + ic_1 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.11)$$

И наконец, несложный анализ матриц (8.11) с учетом условия (8.9) приводит к выводу, что цикл (8.10) устойчив (неустойчив) в рамках краевой задачи (8.8) при $\nu - \nu_* > 0$ (< 0), где

$$\nu_* = \frac{2(c_1 c_2 - 1)}{\pi^2(1 + c_1^2)} > 0. \quad (8.12)$$

Проверку справедливости условия 8.1в для краевой задачи (8.8) будем проводить посредством численного анализа при конкретных значениях параметров c_1 , c_2 , а именно, при

$$c_1 = 4,129145761413521, \quad c_2 = 1,205298342698789. \quad (8.13)$$

Отметим сразу, что излагаемые ниже результаты остаются в силе и при других c_1 , c_2 , удовлетворяющих условию (8.9). Что же касается значений (8.13), то их выбор продиктован некоторыми дополнительными соображениями, которые проявятся в последующем.

Для описания соответствующего численного эксперимента введем в рассмотрение точки $x = (j - 1/2)/N$, $j = 1, 2, \dots, N$, где N — произвольно фиксированное натуральное число, и заменим в (8.8) частную производную по x в указанных точках приближенными равенствами

$$w_{xx}(t, x)|_{x=(j-1/2)/N} \approx N^2(w_{j+1}(t) - 2w_j(t) + w_{j-1}(t)), \quad (8.14)$$

$$w_j(t) = w(t, x)|_{x=(j-1/2)/N},$$

считая, что $w_0(t) = w_1(t)$, $w_{N+1}(t) = w_N(t)$. В результате для переменных $w_j(t)$ приходим к конечномерной модели вида

$$\dot{w}_j = \nu N^2(1 - ic_1)(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + w_j - (1 + ic_2)|w_j|^2 w_j, \quad (8.15)$$

$$j = 1, \dots, N.$$

Интересно отметить, что для системы (8.15) сохраняется унаследованная от краевой задачи (8.8) симметрия, состоящая в ее инвариантности относительно замены

$$w_j \rightarrow w_{N-j+1}, \quad j = 1, \dots, N. \quad (8.16)$$

Кроме того, эта система, как и исходная задача (8.8), допускает пространственно однородный или, точнее говоря, синхронный цикл

$$w_1 = w_2 = \dots = w_N = \exp(-ic_2 t). \quad (8.17)$$

Добавим еще, что цикл (8.17) экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $\nu - \nu_*(N) > 0 (< 0)$, где для критического значения $\nu_*(N)$ справедлива аналогичная (8.12) формула

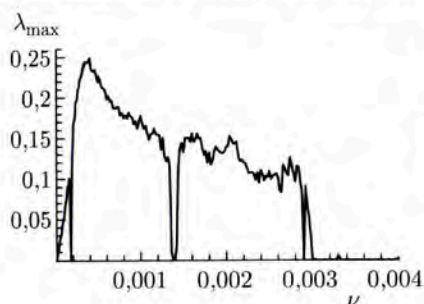
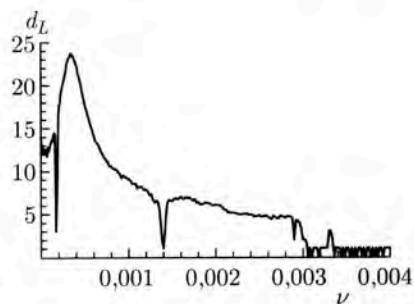
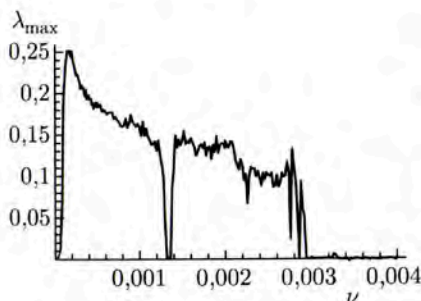
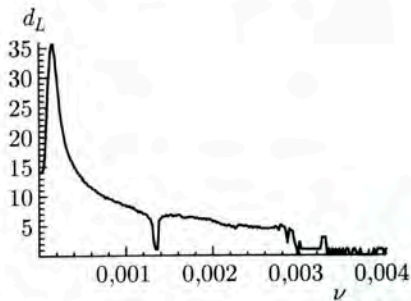
$$\nu_*(N) = \frac{c_1 c_2 - 1}{2(1 + c_1^2)N^2 \sin^2(\pi/(2N))}, \quad (8.18)$$

причем очевидным образом $\nu_*(N) \rightarrow \nu_*$ при $N \rightarrow \infty$. В частности, при $N = 20$ и при значениях (8.13) параметров c_1 , c_2 имеем $\nu_* \approx 0,044647$, $\nu_*(20) \approx 0,044739$. А это означает, что при значениях ν , близких к критическому, разностная модель (8.15) вполне адекватно описывает исходную краевую задачу (8.8).

Обратимся теперь непосредственно к результатам компьютерного анализа системы (8.15), который проводился при условиях (8.13) в диапазоне параметров $5 \leq N \leq 100$, $0 \leq \nu \leq 0,004$. Как и в п. 7.4, использо-

вался метод Дорманда–Принса 8(5,3) с автоматическим выбором шага, величина которого не превосходила 0,001.

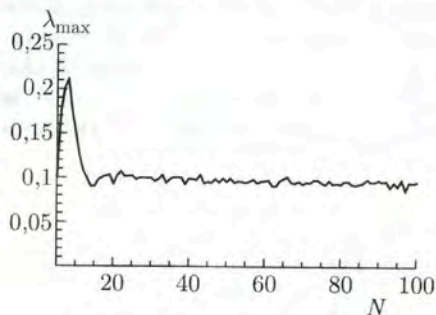
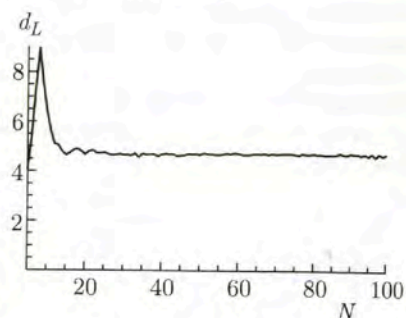
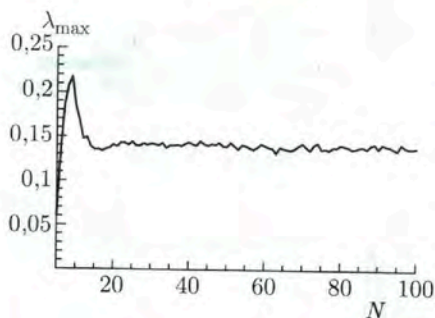
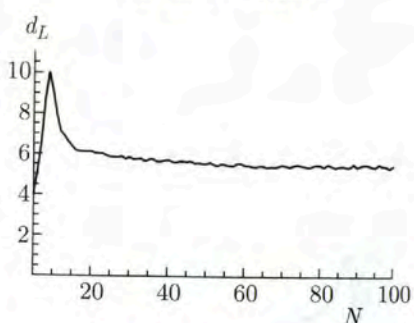
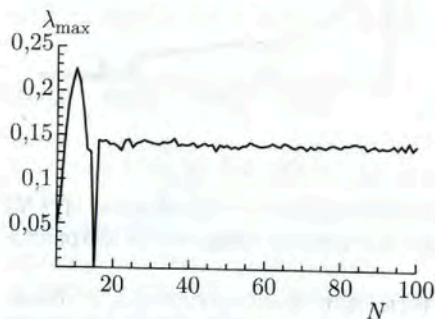
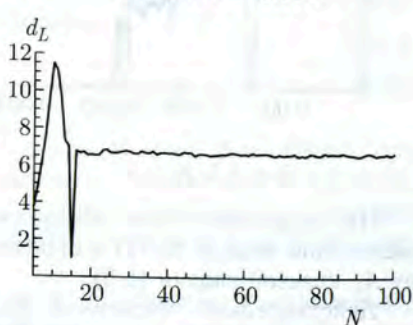
Как оказывается, при уменьшении параметра ν и при прохождении его через критическое значение (8.18) от однородного цикла (8.17) ответвляется пара устойчивых пространственно неоднородных циклов, переходящих друг в друга в результате замены (8.16). Иными словами, наблюдается бифуркация типа вилки. Последующее же уменьшение ν приводит к постепенному усложнению динамики и к появлению хаотических колебаний. Наглядное представление об этом процессе дают графики по ν старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$ и ляпуновской размерности $d_L(A_\nu(N))$ аттрактора $A_\nu(N)$ системы (8.15). Построение этих графиков проводилось при $N = 20$ и $N = 30$ на промежутке $0 \leq \nu \leq 0,004$ по точкам с шагом 0,00001, а сами они представлены на рисунках 8.1–8.4.

Рис. 8.1. $N = 20$ Рис. 8.2. $N = 20$ Рис. 8.3. $N = 30$ Рис. 8.4. $N = 30$

На следующем этапе убедимся, что с ростом N аттрактор $A_\nu(N)$ разностной модели (8.15) в определенном смысле сходится к аттрактору A_ν краевой задачи (8.8).

Действительно, численные расчеты для фиксированных ν показывают, что при увеличении N происходит стабилизация величин $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$ и $d_L(A_\nu(N))$. На рисунках 8.5–8.10 изображены графики

их зависимости от N при $\nu = 0,0025; 0,002; 0,0015$. Существенным здесь оказывается то обстоятельство, что меньшим значениям параметра ν соответствуют большие предельные значения оцениваемых величин. Таким образом, на основании всей совокупности проделанных численных исследований мы можем утверждать, что при $\nu \rightarrow 0$ размерность $d_L(A_\nu)$ хаотического аттрактора A_ν краевой задачи (8.8) неограниченно растет. А это, собственно, и означает, что при условиях (8.13) рассматриваемая задача принадлежит классу B .

Рис. 8.5. $\nu = 0,0025$ Рис. 8.6. $\nu = 0,0025$ Рис. 8.7. $\nu = 0,002$ Рис. 8.8. $\nu = 0,002$ Рис. 8.9. $\nu = 0,0015$ Рис. 8.10. $\nu = 0,0015$

8.2. Конечномерная модель фазовой турбулентности. Предпринятый выше анализ свидетельствует о том, что система (8.15) при фиксированном $\nu > 0$ и при всех достаточно больших N представляет собой вполне адекватную конечномерную модель диффузионного хаоса, хорошо отражающую как качественные, так и количественные его характеристики. Однако с уменьшением ν , как показывает соответствующий численный эксперимент, стабилизация величин $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$ и $d_L(A_\nu(N))$ происходит при все более высоких значениях размерности аппроксимации N . Если же N фиксировано, а ν мало, то динамические свойства разностной модели (8.15), в принципе, уже не имеют никакого отношения к свойствам исходной системы (8.8). В частности, именно этим обстоятельством обусловлены «провалы» графиков $\lambda_{\max}(A_\nu(N))$ и $d_L(A_\nu(N))$ при $0 \leq \nu \leq 0,0004$, $N = 20$ и $0 \leq \nu \leq 0,0002$, $N = 30$ (см. рисунки 8.1–8.4). Для сравнения заметим, что в случае распределенной модели (8.8) при $\nu \rightarrow 0$ имеют место предельные равенства $d_L(A_\nu) \rightarrow +\infty$, $\lambda_{\max}(A_\nu) \rightarrow \lambda_{\max}^0$, где $\lambda_{\max}^0 \approx 0,25$.

Несмотря на все вышесказанное, изучение аттракторов системы (8.15) при фиксированном N и при $\nu \ll 1$ представляет самостоятельный интерес. Связано это с тем, что в данном диапазоне параметров в ней наблюдается весьма интересное явление, получившее в физической литературе название «фазовая турбулентность» (см., например, [114, 118]).

Для описания феномена фазовой турбулентности прежде всего убедимся в том, что при всех достаточно малых $\nu > 0$ система (8.15) имеет глобально экспоненциально устойчивый N -мерный инвариантный тор T_N . С этой целью сделаем в ней замены $w_j = \rho_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, \dots, N$, где $\rho_j > 0$, $0 \leq \tau_j \leq 2\pi \pmod{2\pi}$. В результате она преобразуется к виду

$$\dot{\rho}_j = \nu N^2 [\rho_{j+1} \cos \alpha_j - 2\rho_j + \rho_{j-1} \cos \alpha_{j-1} + c_1(\rho_{j+1} \sin \alpha_j - \rho_{j-1} \sin \alpha_{j-1})] + \rho_j - \rho_j^3, \quad j = 1, \dots, N, \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j = & -c_2(\rho_{j+1}^2 - \rho_j^2) + \nu N^2 \left[\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \sin \alpha_{j+1} - \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} + \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \sin \alpha_j + \right. \\ & + \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \sin \alpha_{j-1} - c_1 \left(\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \cos \alpha_{j+1} + \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} - \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \cos \alpha_j - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \cos \alpha_{j-1} \right) \right], \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\dot{\tau}_N = -c_2 \rho_N^2 - \nu N^2 \left[\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} \sin \alpha_{N-1} + c_1 \left(\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} \cos \alpha_{N-1} - 1 \right) \right], \quad (8.21)$$

где $\tau_0 = \tau_1$, $\tau_{N+1} = \tau_N$, $\rho_0 = \rho_1$, $\rho_{N+1} = \rho_N$, $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Нетрудно заметить, что интересующий нас глобально устойчивый инвариантный тор заведомо существует у системы (8.19)–(8.21) при $\nu = 0$. Действительно, в этом случае он задается равенствами $\rho_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, а поведение траекторий на нем описывают уравнения

$\dot{\alpha}_j = 0$, $j = 1, \dots, N-1$, $\dot{\tau}_N = -c_2$. Далее, из общих результатов монографии [73] следует, что указанный тор сохраняется у системы (8.19)–(8.21) и при всех достаточно малых $\nu > 0$, причем теперь он имеет вид

$$T_N: \rho_j = 1 + \nu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \nu), \quad j = 1, \dots, N, \quad (8.22)$$

где достаточно гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по α_k , $k = 1, \dots, N-1$, функции ψ_j таковы, что

$$\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = \frac{N^2}{2} (\cos \alpha_j - 2 + \cos \alpha_{j-1} + c_1 (\sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1})), \\ j = 1, \dots, N. \quad (8.23)$$

Что же касается движений на данном торе, то они описываются системой

$$\dot{\alpha}_j = \nu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \nu), \quad \dot{\tau}_N = -c_2 + \nu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \nu), \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (8.24)$$

получающейся из (8.20), (8.21) при учете соотношений (8.22). Отметим еще вытекающие из (8.23) равенства

$$\Phi_j|_{\nu=0} = -N^2 [(c_1 c_2 - 1)(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \\ + (c_1 + c_2)(\cos \alpha_{j+1} - \cos \alpha_{j-1})], \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (8.25)$$

На следующем этапе убедимся, что при значениях (8.13) параметров c_1, c_2 , при $0 < \nu \ll 1$ и при любом фиксированном $5 \leq N \leq 100$ инвариантный тор T_N является носителем хаотического аттрактора. Для этого рассмотрим отщепляющуюся от (8.24) систему для α_j и, учитывая (8.9), выполним в ней замену времени $\nu N^2(c_1 c_2 - 1)t \rightarrow t$. Затем отбросим в правых частях получившейся системы слагаемые порядка малости ν и выше. В результате с учетом равенств (8.25) она преобразуется к виду

$$\dot{\alpha}_j = -(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) - \kappa (\cos \alpha_{j+1} - \cos \alpha_{j-1}), \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (8.26)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $\kappa = (c_1 + c_2)/(c_1 c_2 - 1) \approx 1,341373$.

Численный анализ системы (8.26) при $5 \leq N \leq 100$ показал, что она действительно имеет хаотический аттрактор A_N , ляпуновская размерность $d_L(A_N)$ которого с ростом N неограниченно растет (см. рис. 8.11). Что же касается старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}(A_N)$ аттрактора A_N , то его зависимость от N представлена на рис. 8.12.

Итак, мы видим, что при $N \sim 1$, $\nu \ll 1$ функционирование системы (8.15) происходит в режиме фазовой турбулентности. Действительно, согласно равенствам (8.22) на ее аттракторе A_N амплитуды $\rho_j = |w_j|$, $j = 1, \dots, N$, с течением времени остаются практически постоянными,

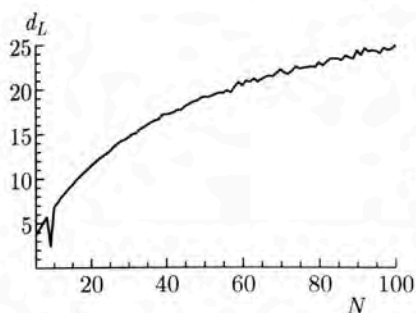


Рис. 8.11

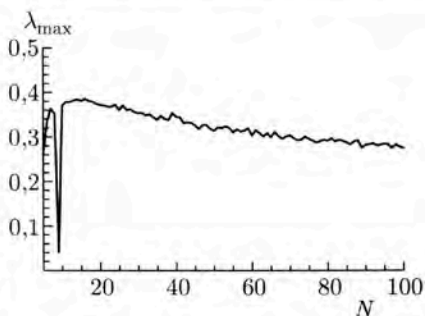


Рис. 8.12

в то время как разности фаз $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$ меняются существенно и согласно (8.26) эволюционируют по хаотическому закону. Напомним, далее, что именно такое поведение траекторий и принято считать фазовой турбулентностью. Саму же систему (8.26) в связи с этим уместно назвать конечномерной моделью данного феномена.

Завершая обсуждение проблемы фазовой турбулентности, отметим, что модельная система (8.26) является в определенном смысле универсальной, так как возникает не только при анализе системы (8.15), но и при рассмотрении цепочек диффузионно связанных гармонических осцилляторов различной природы (см. [50, 103], а также соответствующее место в разделе 10). Численное же исследование модели (8.26) впервые проделано в статье [25], где для случая $\varkappa = 3$ был получен аналогичный изложенному выше результат о росте ляпуновской размерности ее хаотического аттрактора при увеличении N .

8.3. Дискретный аналог уравнения Хатчинсона с диффузией.

В простейшем варианте уравнение Хатчинсона с диффузией представляет собой краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial x^2} + r[1 - \mathcal{N}(t-1, x)]\mathcal{N}, \\ \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0 \end{aligned} \quad (8.27)$$

на отрезке $0 \leq x \leq \pi$, получающуюся из уравнения (8.5) при учете диффузионного слагаемого $D \partial^2 \mathcal{N} / \partial x^2$, $D = \text{const} > 0$.

Скажем сначала несколько слов о свойствах точечной модели (8.5). В монографии [54] установлено существование такого $r_0 > \pi/2$, что при всех $r \geq r_0$ аттрактор уравнения (8.5) состоит из релаксационного цикла $\mathcal{N}_0(t) > 0$ периода

$$T_0 = (1 + \exp(r))/r + O(\exp(-r)/r), \quad r \rightarrow \infty, \quad (8.28)$$

причем

$$\begin{aligned} \max \mathcal{N}_0(t) &= \exp(r-1) + (2e)^{-1} + O(\exp(-r)), \\ \min \mathcal{N}_0(t) &\sim \exp(-\exp r), \end{aligned} \quad (8.29)$$

а время всплеска на периоде, когда $\mathcal{N}_0(t) \geq 1$, асимптотически близко к единице при $r \rightarrow \infty$. Все же остальное время функция $\mathcal{N}_0(t)$ асимптотически близка к нулю. Отметим еще, что указанный цикл бифурцирует из состояния равновесия $\mathcal{N} \equiv 1$ при $0 < r - \pi/2 \ll 1$, а при последующем увеличении r довольно быстро приобретает релаксационный характер. В частности, формулы (8.28), (8.29) заведомо применимы уже при $r = 3$.

Итак, при всех $r > \pi/2$ краевая задача (8.27) имеет однородный цикл $\mathcal{N}_0(t)$, устойчивый в рамках точечной модели. Как показывают результаты работ [24, 47, 48], в рамках распределенной модели (8.27) он устойчив (неустойчив) при $D - D_*(r) > 0 (< 0)$, где $D = D_*(r)$, $D_*(\pi/2) = 0$, $D_*(r) \sim r \ln r \exp(-r)$ при $r \rightarrow \infty$, — некоторое критическое значение коэффициента D . В случае $r = \pi/2 + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$ асимптотика функции $D_*(r)$ строится с помощью локальных методов (см. [47]). Впервые посредством синтеза методов большого и малого параметра нейтральная кривая $D = D_*(r)$ при всех $r > \pi/2$ была получена в работе [48], а ее уточнение с помощью численного анализа несколько позднее предпринято в [24].

Изложенные выше факты свидетельствуют о том, что для краевой задачи (8.27) выполняются условия 8.1а, 8.1б из определения 8.1. Что же касается условия 8.1в, то пока вопрос о его справедливости в данном случае остается открытым. В связи с этим в настоящем разделе мы попытаемся получить ответ на него на эвристическом уровне строгости, заменяя исходную распределенную модель (8.27) некоторым дискретным конечномерным аналогом.

Обратимся сначала к точечной модели (8.5). Для вывода ее дискретного аналога фиксируем произвольно натуральное k и заметим, что любое решение $\mathcal{N}(t) > 0$ уравнения (8.5) удовлетворяет интегральному соотношению

$$\mathcal{N}(t + 1/k) = \mathcal{N}(t) \exp \left[r \left(\frac{1}{k} - \int_{t-1}^{t-1+1/k} \mathcal{N}(\tau) d\tau \right) \right]. \quad (8.30)$$

Далее, полагая в равенстве (8.30) $t = n/k$, $n \in \mathbb{Z}$, $u_n = \mathcal{N}(t)|_{t=n/k}$ и аппроксимируя фигурирующий в нем интеграл по формуле прямоугольников, приходим к разностному уравнению с запаздыванием

$$u_{n+1} = u_n \exp \left[\frac{r}{k} (1 - u_{n-k}) \right], \quad n \geq 0, \quad (8.31)$$

которое, собственно, и является интересующим нас дискретным вариантом уравнения Хатчинсона.

Получение дискретного аналога распределенной модели (8.27) базируется на аналогичном (8.30) интегральном равенстве

$$\mathcal{N}(t+1/k, x) = \mathcal{N}(t, x) \exp \left[D \int_t^{t+1/k} \frac{1}{\mathcal{N}(\tau, x)} \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial x^2}(\tau, x) d\tau + r \left(\frac{1}{k} - \int_{t-1}^{t-1+1/k} \mathcal{N}(\tau, x) d\tau \right) \right]. \quad (8.32)$$

Действительно, фиксируем произвольно натуральное N и в точках $x_j = \pi(j-1/2)/N$, $j = 1, \dots, N$, заменим фигурирующую в (8.32) частную производную по x аналогичными (8.14) разностными соотношениями. Что же касается интегралов по τ , то, как и выше, их аппроксимируем по формуле прямоугольников. В результате для переменных $u_{n,j} = \mathcal{N}(t, x)|_{t=n/k, x=x_j}$ получается система разностных уравнений

$$u_{n+1,j} = u_{n,j} \exp \left[d \left(\frac{u_{n,j+1}}{u_{n,j}} + \frac{u_{n,j-1}}{u_{n,j}} - 2 \right) + \frac{r}{k} (1 - u_{n-k,j}) \right], \quad (8.33)$$

$$n \geq 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

где $d = N^2 D / (k\pi^2)$, $u_{n,0} = u_{n,1}$, $u_{n,N+1} = u_{n,N}$. В дальнейшем, однако, удобнее работать с упрощенной системой

$$u_{n+1,j} = (d u_{n,j+1} + (1 - 2d) u_{n,j} + d u_{n,j-1}) \exp \left[\frac{r}{k} (1 - u_{n-k,j}) \right], \quad (8.34)$$

$$n \geq 0, \quad j = 1, \dots, N,$$

получающейся из (8.33) в результате разложения по параметру d (который всюду ниже считаем малым) и отбрасывания слагаемых порядка малости d^2 и выше.

Остановимся на локальных свойствах моделей (8.31) и (8.34). В связи с этим обратим внимание, что разностное уравнение (8.31) имеет состояние равновесия $u_n \equiv 1$, за устойчивость которого отвечает расположение корней полинома

$$P(\lambda) = \lambda^{k+1} - \lambda^k + r/k. \quad (8.35)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.1. При каждом $r \in (0, r_*)$, где

$$r_* = 2k \sin \left(\frac{\pi}{2(2k+1)} \right), \quad (8.36)$$

все корни многочлена (8.35) лежат в круге $S = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$. Далее, при $r = r_*$ уравнение $P(\lambda) = 0$ имеет простую пару корней

$$\lambda = \exp(\pm i\omega_0), \quad \omega_0 = \pi/(2k+1), \quad (8.37)$$

а все остальные его корни по-прежнему находятся в S . И наконец, выполняется неравенство

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} |\lambda(\varepsilon)| \right|_{\varepsilon=0} > 0, \quad (8.38)$$

где $\lambda = \lambda(\varepsilon)$ — корень полинома (8.35), существующий при $r = r_* + \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \ll 1$, и обращающийся в $\exp(i\omega_0)$ при $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Заметим, что при $r = 0$ многочлен (8.35) имеет корень $\lambda = 0$ кратности k и простой корень $\lambda = 1$. Далее, при $0 < r \ll 1$ обозначим через $\lambda(r)$ корень этого многочлена, обращающийся в единицу при $r = 0$. Несложный подсчет приводит к выводу, что $\lambda'(0) = -1/k < 0$. А это значит, что при малых r все корни уравнения $P(\lambda) = 0$ заведомо лежат в S .

Для того чтобы выявить характер поведения корней полинома (8.35) при увеличении параметра r , подставим в уравнение $P(\lambda) = 0$ соотношение $\lambda = \exp(i\omega)$, $\omega > 0$, умножим результат на $\exp[-i(k+1/2)\omega]$ и в получившемся выражении разделим вещественную и мнимую части. В результате приходим к равенствам

$$\cos(k+1/2)\omega = 0, \quad r \sin(k+1/2)\omega = 2k \sin(\omega/2). \quad (8.39)$$

Нетрудно заметить, что допустимые частоты ω , определяющиеся из (8.39), задаются формулами

$$\omega_n = \frac{\pi}{2k+1} + \frac{2n\pi}{2k+1}, \quad n = 0, 1, \dots, 2k-1. \quad (8.40)$$

Подчеркнем, что рассматривать в (8.40) натуральные n , большие $2k-1$, не имеет смысла, так как $\omega_{2k} = 2\pi - \omega_0$, $\omega_{2k+1} = 2\pi + \omega_0$ и т.д. Кроме того, поскольку $\omega_n < 2\pi \forall n \leq 2k-1$, то в случае нечетного n (в силу того, что $\sin(k+1/2)\omega_n = -1$, $\sin(\omega_n/2) > 0$) выполнение второго равенства из (8.39) невозможно. Таким образом, из всей совокупности (8.40) рассматривать следует только частоты ω_{2s} , $s = 0, 1, \dots, k-1$. Что же касается наименьшего значения $r_* > 0$ параметра r , при котором первый раз пара комплексных корней $\lambda, \bar{\lambda}$ многочлена (8.35) «садится» на единичную окружность, то в силу всего вышесказанного оно имеет вид

$$r_* = \min_{0 \leq s \leq k-1} 2k \sin(\omega_{2s}/2). \quad (8.41)$$

Несложная проверка показывает, что минимум в (8.41) достигается только при $s = 0$. А это значит, что для r_* справедлива требуемая формула (8.36), причем при $r = r_*$ полином (8.35) имеет на единичной окружности ровно одну простую пару корней (8.37).

Для обоснования неравенства (8.38) обратимся к соответствующей формуле

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} |\lambda(\varepsilon)| \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{k} \operatorname{Re} \left(\frac{\exp(-ik\omega_0)}{(k+1)\exp(i\omega_0) - k} \right) \quad (8.42)$$

и заметим, что знак правой части из (8.42) совпадает со знаком выражения $(2k+1)\cos(k\omega_0)$, которое в силу очевидного свойства $k\omega_0 < \pi/2$ является положительным. Лемма 8.1 доказана.

В дополнение к установленной лемме отметим, что поскольку корни (8.37) удовлетворяют требованиям нерезонансности $\exp(im\omega_0) \neq 1$, $m = 1, 2, 3, 4$, то при

$$r = r_* + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (8.43)$$

мы находимся в рамках применимости известной бифуркационной теоремы Андронова–Хопфа для отображений (см. [93]).

Суть упомянутой бифуркационной проблемы состоит в следующем. Рассмотрим $(k+1)$ -мерное отображение

$$y = (y_0, y_1, \dots, y_k) \rightarrow F(y, \varepsilon) = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_k), \quad (8.44)$$

$$\bar{y}_s = y_{s+1}, \quad s = 0, \dots, k-1, \quad \bar{y}_k = y_k \exp\left(\frac{r_* + \varepsilon}{k}(1 - y_0)\right),$$

индуцируемое разностным уравнением (8.31) при условии (8.43). Проведенный выше линейный анализ свидетельствует о том, что в некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия $y_0 = \dots = y_k = 1$ это отображение имеет экспоненциально устойчивое двумерное инвариантное многообразие Σ_2 . Далее, пусть Π — сужение F на Σ_2 . Как показано в [93], после перемещения интересующего нас состояния равновесия в начало координат и последующего перехода к подходящим криволинейным полярным координатам $0 \leq \xi \leq \xi_0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi \pmod{2\pi}$ отображение Π записывается в виде

$$\Pi: \quad \begin{aligned} \xi &\rightarrow (1 + \varepsilon \kappa_{1,1})\xi + \kappa_{2,1}\xi^3 + \Phi(\xi, \varphi, \varepsilon), \\ \varphi &\rightarrow \varphi + \omega_0 + \varepsilon \kappa_{1,2} + \kappa_{2,2}\xi^2 + \Psi(\xi, \varphi, \varepsilon). \end{aligned} \quad (8.45)$$

Здесь $\kappa_{j,k}$, $j, k = 1, 2$, — некоторые вещественные постоянные, а достаточно гладкие по совокупности переменных 2π -периодические по φ функции Φ , Ψ удовлетворяют неравенствам

$$|\Phi| \leq M(\varepsilon^2\xi + \varepsilon\xi^2 + \xi^4), \quad |\Psi| \leq M(\varepsilon^2 + \varepsilon\xi + \xi^3), \quad (8.46)$$

где M — независимая от ε , ξ положительная константа.

Анализ отображения (8.45) существенно упрощается после замены $\xi = \sqrt{\varepsilon}\rho$. Действительно, в новых переменных ρ , φ в силу свойств (8.46) остатков Φ , Ψ оно приобретает вид

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho + \varepsilon(\kappa_{1,1}\rho + \kappa_{2,1}\rho^3) + O(\varepsilon^{3/2}), \\ \varphi &\rightarrow \varphi + \omega_0 + \varepsilon(\kappa_{1,2} + \kappa_{2,2}\rho^2) + O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Далее, введем в рассмотрение систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\rho}{dt} = \varepsilon(\kappa_{1,1}\rho + \kappa_{2,1}\rho^3), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \varepsilon(\kappa_{1,2} + \kappa_{2,2}\rho^2) \quad (8.48)$$

и заметим, что отображение сдвига по ее траекториям за время $t = 1$ с точностью до величин порядка $\varepsilon^{3/2}$ совпадает с (8.47). Что же касается самой системы (8.48), то после замен $\varphi = \psi + \omega_0 t$, $w = \rho \exp(i\psi)$, $\tau = \varepsilon t$ она принимает вид

$$\frac{dw}{d\tau} = \kappa_1 w + \kappa_2 |w|^2 w, \quad (8.49)$$

где $\kappa_1 = \kappa_{1,1} + i\kappa_{1,2}$, $\kappa_2 = \kappa_{2,1} + i\kappa_{2,2}$.

Отдельного рассмотрения заслуживает алгоритмическая часть проблемы, связанная с вычислением коэффициентов κ_1 , κ_2 . Для ее решения можно воспользоваться, например, так называемым амплитудным методом Ю. С. Колесова [46], распространенным на случай отображений в статье [97]. Мы же применим несколько иную методику, позволяющую вместо нормальной формы (8.47) получить сразу аппроксимирующее ее дифференциальное уравнение (8.49).

Суть нашего метода такова. Рассмотрим аналогичное (8.31) разностное уравнение с непрерывным временем

$$u(t+1) = u(t) \exp \left[\frac{r}{k} (1 - u(t-k)) \right], \quad t \in \mathbb{R}, \quad (8.50)$$

и при выполнении условия (8.43) его формальное решение будем искать в виде ряда

$$u = 1 + \sqrt{\varepsilon} h_0(t, \tau) + \varepsilon h_1(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} h_2(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \quad (8.51)$$

Здесь

$$h_0 = w(\tau) \exp(i\omega_0 \tau) + \overline{w}(\tau) \exp(-i\omega_0 \tau), \quad (8.52)$$

$w(\tau)$ — пока произвольная (подлежащая определению в последующем) комплекснозначная функция, а h_1 , h_2 — некоторые тригонометрические полиномы аргумента $\omega_0 \tau$ с зависящими от τ коэффициентами.

После подстановки соотношений (8.43), (8.51) в (8.50) и приравнивания коэффициентов при $\sqrt{\varepsilon}$, ε и $\varepsilon^{3/2}$ приходим к серии линейных неоднородных разностных уравнений вида

$$L(h_0) = 0, \quad L(h_j) = f_j(t, \tau), \quad j = 1, 2, \quad (8.53)$$

где $L(h) \stackrel{\text{def}}{=} h(t+1, \tau) - h(t, \tau) + (r_*/k) h(t-k, \tau)$, а переменная τ рассматривается как параметр.

Обратим внимание, что в силу (8.52) и очевидных свойств

$$L(\exp(\pm i\omega_0 \tau)) = 0 \quad (8.54)$$

первое уравнение из (8.53) представляет собой верное равенство. Далее, нетрудно заметить, что неоднородность f_1 во втором из этих уравнений, имеющая вид

$$f_1 = \frac{r_*^2}{2k^2} h_0^2(t-k, \tau) - \frac{r_*}{k} h_0(t, \tau) h_0(t-k, \tau), \quad (8.55)$$

является линейной комбинацией гармоник $\exp(\pm 2i\omega_0 t)$. В таком же виде ищем и h_1 . На этом пути приходим к формуле

$$h_1(t, \tau) = A w^2(\tau) \exp(2i\omega_0 t) + \bar{A} \bar{w}^2(\tau) \exp(-2i\omega_0 t), \quad (8.56)$$

в которой

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{\exp(i\omega_0) + 1}{\exp(i\omega_0) + 1 - \exp(-ik\omega_0)}, \quad (8.57)$$

В случае третьего уравнения из (8.53) ситуация несколько иная. А именно, учитывая в аналогичном (8.55) равенстве

$$\begin{aligned} f_2 = & - \left[(\exp(i\omega_0) - r_* \exp(-ik\omega_0)) \frac{dw}{d\tau} + \frac{1}{k} w(\tau) \exp(-ik\omega_0) \right] \times \\ & \times \exp(i\omega_0 t) + \text{к.с.} + \frac{r_*^2}{k^2} h_0(t-k, \tau) h_1(t-k, \tau) - \\ & - \frac{r_*}{k} (h_0(t, \tau) h_1(t-k, \tau) + h_1(t, \tau) h_0(t-k, \tau)) + \\ & + \frac{r_*^2}{2k^2} h_0(t, \tau) h_0^2(t-k, \tau) - \frac{r_*^3}{6k^3} h_0^3(t-k, \tau) \end{aligned}$$

уже известную информацию (8.52), (8.56), (8.57), приходим к выводу, что его неоднородность f_2 допускает представление вида

$$f_2 = f_{2,1}(\tau) \exp(i\omega_0 t) + f_{2,3}(\tau) \exp(3i\omega_0 t) + \text{к.с.} \quad (8.58)$$

А отсюда и из (8.54) заключаем, что необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения для h_2 в классе тригонометрических полиномов является отсутствие в (8.58) первых гармоник, т.е. равенство

$$f_{2,1}(\tau) \equiv 0. \quad (8.59)$$

Добиться же выполнения данного требования удастся за счет выбора имеющейся в запасе комплексной амплитуды $w(\tau)$ (см. (8.52)). Проводя соответствующие вычисления и опираясь на формулы

$$\begin{aligned} \frac{r_*}{k} \exp(-ik\omega_0) &= 1 - \exp(i\omega_0), \\ \exp(i(k+1)\omega_0) &= -\exp(-ik\omega_0), \end{aligned}$$

убеждаемся, что из (8.59) для $w(\tau)$ получается дифференциальное уравнение (8.49), в котором

$$\begin{aligned} \varkappa_1 &= -\frac{1}{k} \cdot \frac{\exp(-ik\omega_0)}{(k+1)\exp(i\omega_0) - k}, \\ \varkappa_2 &= -\frac{(1 + \exp(i\omega_0) - 2\exp(-ik\omega_0))(\exp(i\omega_0) - 1)}{2(1 + \exp(i\omega_0) - \exp(-ik\omega_0))((k+1)\exp(i\omega_0) - k)}. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Лемма 8.2. Для коэффициентов (8.60) выполняются неравенства

$$\operatorname{Re} \varkappa_1 > 0, \quad \operatorname{Re} \varkappa_2 < 0. \quad (8.61)$$

Доказательство. Отметим сразу, что свойство $\operatorname{Re} \kappa_1 > 0$ уже установлено нами при обосновании леммы 8.1 (для того чтобы убедиться в этом, достаточно сравнить (8.42) с первой формулой из (8.60)). Что же касается величины $-\operatorname{Re} \kappa_2$, то после некоторых преобразований приходим к выводу, что ее знак совпадает со знаком выражения

$$g_k = (2k + 1)(2 + \cos \omega_0)(1 - \cos \omega_0) - \sin(k\omega_0) \sin \omega_0.$$

Последнее же является положительным при всех $k \in \mathbb{N}$, что следует из цепочки очевидных неравенств

$$g_k > 2(2k + 1)(1 - \cos \omega_0) - \sin \omega_0 = 2(2k + 1) \sin \omega_0 \left(\operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2} - \frac{\omega_0}{2\pi} \right) > 0.$$

Лемма 8.2 доказана.

Подводя итог, отметим, что неравенства (8.61) гарантируют существование у уравнения (8.49) экспоненциально орбитально устойчивого цикла $w = \xi_* \exp(i\alpha_* \tau)$, $\xi_* = \sqrt{-\kappa_{1,1}/\kappa_{2,1}}$, $\alpha_* = \kappa_{1,2} + \kappa_{2,2}\xi_*^2$. Согласно результатам из [93] в исходном разностном уравнении (8.31) данному циклу отвечает экспоненциально устойчивая замкнутая инвариантная кривая диаметра порядка $\sqrt{\varepsilon}$, бифурцирующая из единичного состояния равновесия при $r = r_* + \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Добавим еще, что, как и в непрерывном случае, при увеличении параметра r эта кривая довольно быстро теряет гармоническую форму.

Проделанный анализ позволяет уже достаточно просто разобраться с локальными свойствами цепочки разностных уравнений (8.34). Действительно, в силу леммы 8.1 при условиях

$$r = r_* + \varepsilon, \quad d = \varepsilon d_0, \quad d_0 = \operatorname{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (8.62)$$

порождаемое данной цепочкой точечное отображение $F: \mathbb{R}^{(k+1)N} \rightarrow \mathbb{R}^{(k+1)N}$ имеет в некоторой достаточно малой окрестности единичного состояния равновесия экспоненциально устойчивое $2N$ -мерное инвариантное многообразие Σ_{2N} . Что же касается отображения $\Pi = F|_{\Sigma_{2N}}$, то, руководствуясь изложенной выше методикой, его можно аппроксимировать системой обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных амплитуд $w_j(\tau)$, $j = 1, \dots, N$, $\tau = \varepsilon t$. Несложный подсчет показывает, что в данном случае эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_j}{d\tau} &= \kappa_0(w_{j+1} - 2w_j + w_{j-1}) + \kappa_1 w_j + \kappa_2 |w_j|^2 w_j, \\ j &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (8.63)$$

где $w_0 = w_1$, $w_{N+1} = w_N$,

$$\kappa_0 = d_0 / ((k+1) \exp(i\omega_0) - k), \quad (8.64)$$

а комплексные постоянные κ_1 , κ_2 задаются равенствами (8.60).

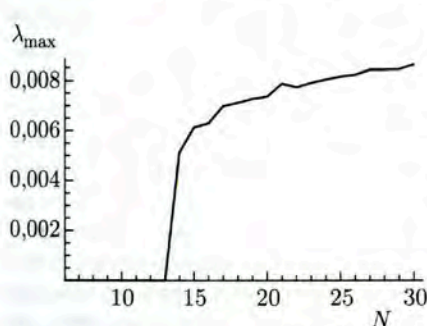
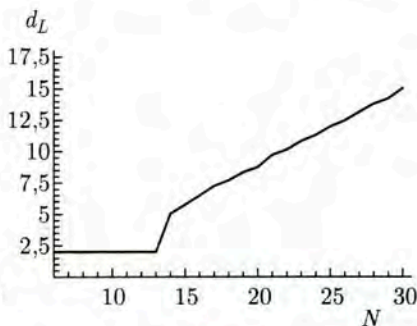
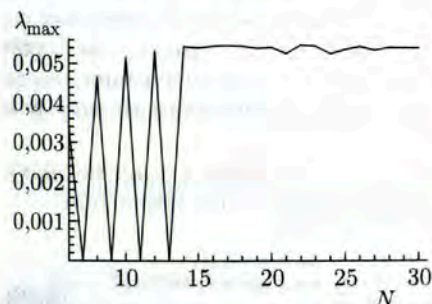
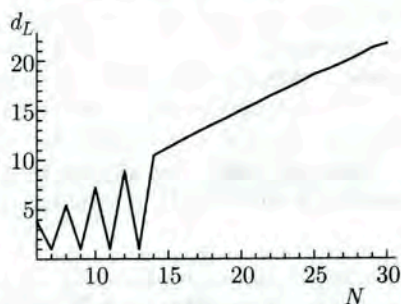
Получившуюся систему (8.63) имеет смысл рассматривать только при $k \geq 2$, так как при $k = 1$ в силу (8.64) сталкиваемся с вырождением $\operatorname{Re} \kappa_0 = 0$. В случае же $k \geq 2$ после замен $\exp(-i \operatorname{Im} \kappa_1 \tau) w_j \rightarrow w_j$,

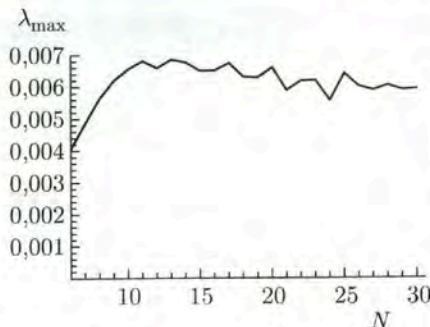
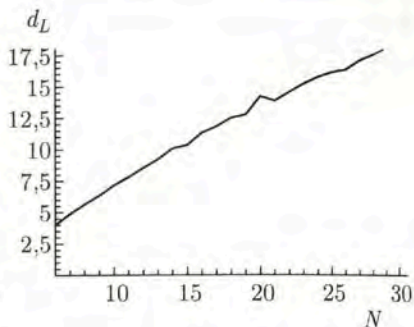
Re $\kappa_1 \tau \rightarrow \tau$ и последующей нормировки $w_j / \sqrt{-\text{Re } \kappa_1 / \text{Re } \kappa_2} \rightarrow w_j$ система (8.63) преобразуется к виду (8.15), где

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{(k+1) \sin \omega_0}{(k+1) \cos \omega_0 - k}, \\ c_2 &= \frac{(2 + \cos \omega_0) \sin \omega_0 + (2k+1) \sin(k\omega_0)(1 - \cos \omega_0)}{(2k+1)(2 + \cos \omega_0)(1 - \cos \omega_0) - \sin(k\omega_0) \sin \omega_0}, \\ \nu &= \frac{d_0((k+1) \cos \omega_0 - k)}{N^2 \text{Re } \kappa_1 |(k+1) \exp(i\omega_0) - k|^2}. \end{aligned} \quad (8.65)$$

В частности, полагая в (8.65) $k = 2$, приходим к значениям (8.13) параметров c_1 , c_2 , при которых, напомним, в п. 8.1 проводился численный эксперимент по выявлению диффузионного хаоса.

Итак, наличие в цепочке (8.34) при подходящем выборе параметров хаотического аттрактора сколь угодно высокой размерности, в принципе, вытекает уже из локального анализа. Однако данный феномен сохраняется, естественно, и в нелокальном случае. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к рисункам 8.13–8.18, где показаны графики зависимости от N старшего ляпуновского показателя λ_{\max} и ля-

Рис. 8.13. $d = 0,065$ Рис. 8.14. $d = 0,065$ Рис. 8.15. $d = 0,01$ Рис. 8.16. $d = 0,01$

Рис. 8.17. $d = 0,001$ Рис. 8.18. $d = 0,001$

пуновской размерности d_L хаотического аттрактора системы (8.34) при $k = 2$, $r = 1,5$; $6 \leq N \leq 30$ для серии значений $d = 0,065$; $0,01$; $0,001$.

8.4. Заключительные замечания. Суммируя полученные результаты, обратим внимание на следующее интересное обстоятельство: между тремя рассмотренными нами конечномерными моделями диффузионного хаоса наблюдается определенная взаимосвязь. Действительно, система фазовых уравнений (8.26) выводится из модели (8.15) при $0 < \nu \ll 1$, в то время как сама система (8.15) служит укороченной нормальной формой для цепочки отображений (8.34) при условиях (8.62). Что же касается дискретной модели (8.34), то в силу своего происхождения она (по крайней мере, на качественном уровне) вполне адекватно описывает динамические свойства уравнения Хатчинсона с диффузией. Таким образом, есть все основания ожидать, что при $r > \pi/2$ краевая задача (8.27) действительно принадлежит классу B .

В заключение скажем несколько слов о связи диффузионного хаоса со свойствами устойчивости однородного цикла. Как правило, именно неустойчивость последнего приводит к постепенному усложнению динамики распределенной модели (8.1) при уменьшении ν и к появлению в ней в конечном итоге хаотического аттрактора. Во всяком случае, ровно так обстоят дела в краевой задаче (8.8) при фиксированных c_1 , c_2 , удовлетворяющих условию (8.9), и при $\nu \rightarrow 0$. Однако, как показывает приводимый ниже пример, возможна и иная ситуация, когда устойчивый однородный цикл сосуществует с хаотическим аттрактором сколь угодно большой размерности.

Для описания соответствующего примера обратимся к дискретному аналогу модели (8.4), а именно, к системе разностных уравнений

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n \exp [r_1(1 + a(1 - z_n) - x_n)], \\ y_{n+1} &= y_n \exp [r_2(x_n - y_n)], \\ z_{n+1} &= z_n \exp [r_3(y_n - z_n)], \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Далее, рассмотрим аналогичную (8.34) цепочку диффузионно связанных подсистем (8.66), имеющую вид

$$x_{n+1,j} = (d_1 x_{n,j+1} + (1 - 2d_1)x_{n,j} + d_1 x_{n,j-1}) \times \exp[r_1(1 + a(1 - z_{n,j}) - x_{n,j})], \quad (8.67)$$

$$y_{n+1,j} = (d_2 y_{n,j+1} + (1 - 2d_2)y_{n,j} + d_2 y_{n,j-1}) \exp[r_2(x_{n,j} - y_{n,j})],$$

$$z_{n+1,j} = (d_3 z_{n,j+1} + (1 - 2d_3)z_{n,j} + d_3 z_{n,j-1}) \exp[r_3(y_{n,j} - z_{n,j})],$$

где $j = 1, \dots, N$ и, как обычно, $x_{n,0} = x_{n,1}$, $y_{n,0} = y_{n,1}$, $z_{n,0} = z_{n,1}$, $x_{n,N+1} = x_{n,N}$, $y_{n,N+1} = y_{n,N}$, $z_{n,N+1} = z_{n,N}$. Что же касается параметров a , r_k , d_k , $k = 1, 2, 3$, то их зададим равенствами

$$\begin{aligned} a &= 15, \quad r_1 = 0,03, \quad r_2 = 0,01, \quad r_3 = 0,02, \\ d_1 &= 0,000001, \quad d_2 = 0,0004, \quad d_3 = 0,0001. \end{aligned} \quad (8.68)$$

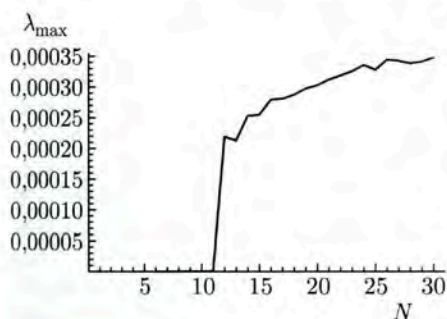


Рис. 8.19

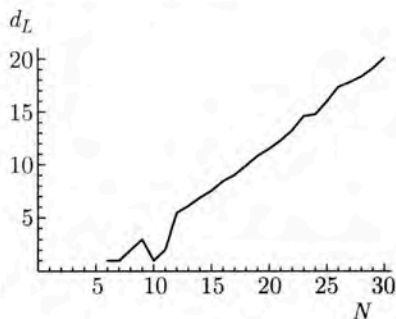


Рис. 8.20

Численное исследование системы (8.67) при условиях (8.68) и при $6 \leq N \leq 30$ показало наличие у нее хаотического аттрактора A_N . Зависимости от N его старшего ляпуновского показателя λ_{\max} и ляпуновской размерности d_L представлены на рисунках 8.19 и 8.20 соответственно. Но, как выяснилось, аттрактор A_N сосуществует с устойчивой «пространственно однородной» инвариантной кривой Γ , являющейся здесь аналогом однородного цикла. Эта кривая задается равенством вида $\Gamma = \{(x_{n,j}, y_{n,j}, z_{n,j}) = (x_n, y_n, z_n) \in \Gamma_0, j = 1, \dots, N\}$, где Γ_0 — устойчивая инвариантная кривая отображения (8.66) (заведомо существующая при значениях параметров a , r_1 , r_2 , r_3 из (8.68)).

9. Диффузионный хаос в математической модели реакции Белоусова

9.1. Математическая модель и ее релаксационные свойства.

Интересующая нас реакция была открыта Б. П. Белоусовым в 1951 г., но по некоторым причинам подробная статья на эту тему появилась

значительно позднее (см. [12]). Что же касается экспериментального анализа данной реакции, то он содержится в монографии [36].

К настоящему времени известно много окислительно-восстановительных колебательных химических реакций, имеющих однотипный механизм. Дадим его краткое описание, следуя [36], где в качестве основных веществ выделены бромистая кислота HBrO_2 , цезий Ce^{4+} и бромид Br^- .

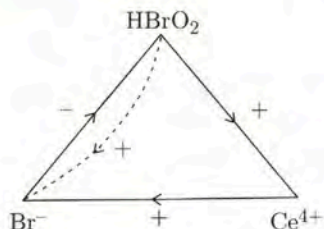


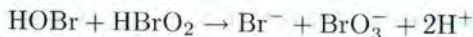
Рис. 9.1

В самом общем виде механизм реакции таков: цезий, выполняющий роль катализатора, способствует образованию бромида, который служит сильным ингибитором бромистой кислоты, а последняя повышает концентрацию цезия. Соответствующая схема связей показана на рис. 9.1, где знак «+» означает, что наличие одного вещества способствует появлению другого, а знак «-» свидетельствует об угнетении одного вещества другим.

Интересно отметить, что перечисленные особенности допускают биологическую интерпретацию. В частности, из приведенной на рис. 9.1 схемы можно сделать вывод о феноменологической близости реакции Белоусова к своеобразной задаче хищник–жертва. Обыгрывая этот факт, для ее описания Ю. С. Колесов в работе [49] предложил систему дифференциальных уравнений (8.4), в которой буквами x, y, z обозначены плотности концентраций $\text{HBrO}_2, \text{Ce}^{4+}$ и Br^- соответственно. В дальнейшем, однако, по ряду причин мы будем пользоваться модифицированной системой (8.4), имеющей вид:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r_1[1 + a(1 - z) - x]x, & \dot{y} &= r_2[x - y]y, \\ \dot{z} &= r_3[\alpha x + (1 - \alpha)y - z]z,\end{aligned}\tag{9.1}$$

где параметры $a, \alpha, r_j, j = 1, 2, 3$, положительны, причем новый параметр α принадлежит интервалу $(0, 1)$. Отметим, что слагаемое $r_3\alpha xz$ в третьем уравнении из (9.1) отвечает за дополнительную связь $\text{HBrO}_2 \xrightarrow{+} \text{Br}^-$, показанную на рис. 9.1 пунктирной линией и соответствующую переходу



в известной схеме П. Руоффа и Р. Нойеса [171].

Асимптотический анализ системы (9.1) проведем в наиболее естественном с химической точки зрения предположении, что $\varepsilon = 1/a \ll 1$, а остальные параметры имеют порядок единицы. Действительно, как уже отмечалось ранее, бромид является сильным ингибитором бромистой кислоты или, иными словами, хищник (Br^-) сильно давит на жертву (HBrO_2). Что же касается параметра a , то в биологической ин-

терпретации он соответствует коэффициенту этого давления, а значит, должен быть большим.

В математическом плане нас будет интересовать следующая проблема. Фиксируем произвольно компактное множество Ω_0 из полуполосы $\{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ и обозначим через

$$L_\varepsilon(u_0, v_0) = (x(t, u_0, v_0, \varepsilon), y(t, u_0, v_0, \varepsilon), z(t, u_0, v_0, \varepsilon)), \quad (9.2)$$

$$t \geq 0, \quad (u_0, v_0) \in \Omega_0,$$

траекторию системы

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x} &= r_1[1 - z + \varepsilon(1 - x)]x, & \dot{y} &= r_2[x - y]y, \\ \dot{z} &= r_3[\alpha x + (1 - \alpha)y - z]z, \end{aligned} \quad (9.3)$$

выпущенную при $t = 0$ из точки $(x, y, z) = (1, u_0, v_0)$. Далее, введем в рассмотрение второй положительный корень $t = T(u_0, v_0, \varepsilon)$ уравнения $x(t, u_0, v_0, \varepsilon) = 1$ (если он существует) и на секущей плоскости $\{(x, y, z) : x = 1\}$ определим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon(u_0, v_0)$ посредством равенства

$$\Pi_\varepsilon(u_0, v_0) = (y(t, u_0, v_0, \varepsilon), z(t, u_0, v_0, \varepsilon))|_{t=T(u_0, v_0, \varepsilon)}. \quad (9.4)$$

Наша ближайшая задача заключается в выявлении асимптотических свойств данного оператора при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Из структуры правых частей системы (9.3) и из условия $v_0 < 1$ вытекает, что на начальном этапе движения траектория (9.2) асимптотически близка к лучу $\{(x, y, z) : x \geq 1, y = u_0, z = v_0\}$, причем за асимптотически малое время $t_0 = t_0(u_0, v_0, \varepsilon)$, $t_0 = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$ переменная x , монотонно возрастаая, достигает значения $\varepsilon^{-3/4}$. Соответствующий участок траектории $L_\varepsilon(u_0, v_0)$ обозначим через $L_\varepsilon^{(1)}(u_0, v_0)$, а в качестве параметра на нем возьмем x . В итоге имеем

$$L_\varepsilon^{(1)}(u_0, v_0) = \{(x, y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon)) : 1 \leq x \leq \varepsilon^{-3/4}\}, \quad (9.5)$$

где $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ — компоненты решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \varepsilon F_1(x, y, z, \varepsilon), & \frac{dz}{dx} &= \varepsilon F_2(x, y, z, \varepsilon), \\ y|_{x=1} &= u_0, & z|_{x=1} &= v_0, \end{aligned} \quad (9.6)$$

в которой

$$F_1 = \frac{r_2}{r_1 x} \cdot \frac{(x - y)y}{1 - z + \varepsilon(1 - x)}, \quad F_2 = \frac{r_3}{r_1 x} \cdot \frac{(\alpha x + (1 - \alpha)y - z)z}{1 - z + \varepsilon(1 - x)}. \quad (9.7)$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 9.1. По любому компактному множеству $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$,

что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы равномерные по $x \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$, $(u_0, v_0) \in \Omega_0$ асимптотические представления

$$y(x, u_0, v_0, \varepsilon) = u_0 + O(\varepsilon^{1/4}), \quad z(x, u_0, v_0, \varepsilon) = v_0 + O(\varepsilon^{1/4}); \quad (9.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u_0} &= 1 + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial y}{\partial v_0} = O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z}{\partial u_0} = O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z}{\partial v_0} &= 1 + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (9.9)$$

Доказательство. Фиксируем произвольно постоянные $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, 1)$ и рассмотрим множество точек

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) : 1 \leq x \leq \varepsilon^{-3/4}, \quad 0 < y \leq q_1, \quad 0 < z \leq q_2\}. \quad (9.10)$$

Из явного вида (9.7) функций F_1 , F_2 вытекает, что $\forall (x, y, z) \in \Sigma_0$ и при всех $\varepsilon \in (0, (1 - q_2)^4]$ для них справедливы оценки

$$|F_j| \leq M_1, \quad \left| \frac{\partial F_j}{\partial y} \right| \leq M_2, \quad \left| \frac{\partial F_j}{\partial z} \right| \leq M_3, \quad j = 1, 2, \quad (9.11)$$

где через M_1, M_2 и т. д. здесь и ниже обозначаем некоторые универсальные (не зависящие от x, y, z, ε , но зависящие от q_1, q_2 из (9.10)) положительные константы.

Предположим, далее, что при всех допустимых значениях x, u_0, v_0, ε для функций $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ выполняются априорные условия

$$0 < y(x, u_0, v_0, \varepsilon) \leq q_1, \quad 0 < z(x, u_0, v_0, \varepsilon) \leq q_2, \quad (9.12)$$

где q_1, q_2 заимствованы из (9.10). Применяя затем эти неравенства вместе с оценками (9.11) к правым частям системы из (9.6), убеждаемся, что в этом случае

$$\begin{aligned} |y(x, u_0, v_0, \varepsilon) - u_0| &\leq \varepsilon M_1 (\varepsilon^{-3/4} - 1), \\ |z(x, u_0, v_0, \varepsilon) - v_0| &\leq \varepsilon M_1 (\varepsilon^{-3/4} - 1), \end{aligned} \quad (9.13)$$

где M_1 — постоянная из (9.11). А отсюда с учетом того факта, что $(u_0, v_0) \in \Omega_0$, делаем вывод о справедливости оценок (9.12) при соответствующем выборе постоянных $q_1 = q_1(\Omega_0)$, $q_2 = q_2(\Omega_0)$ в (9.10) и при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$ достаточно мало. Добавим еще, что из (9.13) требуемые асимптотические равенства (9.8) вытекают очевидным образом.

Для обоснования равенств (9.9) продифференцируем, к примеру, задачу Коши (9.6) по параметру u_0 . В результате для $h_1(x, u_0, v_0, \varepsilon) = \partial y / \partial u_0$, $h_2(x, u_0, v_0, \varepsilon) = \partial z / \partial u_0$ приходим к линейной задаче Коши

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dx} &= \varepsilon(a_{11}(x, u_0, v_0, \varepsilon)h_1 + a_{12}(x, u_0, v_0, \varepsilon)h_2), \quad h_1|_{x=1} = 1, \\ \frac{dh_2}{dx} &= \varepsilon(a_{21}(x, u_0, v_0, \varepsilon)h_1 + a_{22}(x, u_0, v_0, \varepsilon)h_2), \quad h_2|_{x=1} = 0, \end{aligned} \quad (9.14)$$

где $a_{j1} = \partial F_j / \partial y$, $a_{j2} = \partial F_j / \partial z$, $j = 1, 2$, а производные вычисляются при $y = y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z = z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$.

Исследование задачи (9.14) повторяет изложенный выше анализ в нелинейном случае. Действительно, фиксируем некоторые постоянные $q_3 > 1$, $q_4 > 0$ и предположим, что при всех интересующих нас значениях x, u_0, v_0, ε выполняются априорные условия

$$|h_1(x, u_0, v_0, \varepsilon)| \leq q_3, \quad |h_2(x, u_0, v_0, \varepsilon)| \leq q_4. \quad (9.15)$$

Учитывая затем эти оценки вместе с уже установленными неравенствами (9.11), (9.12) в (9.14), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} |h_1 - 1| &\leq \varepsilon(M_2 q_3 + M_3 q_4)(\varepsilon^{-3/4} - 1), \\ |h_2| &\leq \varepsilon(M_2 q_3 + M_3 q_4)(\varepsilon^{-3/4} - 1), \end{aligned} \quad (9.16)$$

где M_2, M_3 — постоянные из (9.11). Остается заметить, что из (9.16) вытекает справедливость при надлежащем уменьшении ε как априорных неравенств (9.15), так и асимптотических представлений $h_1 = 1 + O(\varepsilon^{1/4})$, $h_2 = O(\varepsilon^{1/4})$. Что же касается асимптотических формул для $\partial y / \partial v_0$, $\partial z / \partial v_0$, то они обосновываются аналогично. Лемма 9.1 доказана.

Следующий этап асимптотического анализа траектории (9.2) связан с рассмотрением ее участка $L_\varepsilon^{(2)}(u_0, v_0)$, лежащего в полупространстве $\{(x, y, z): x \geq \varepsilon^{-3/4}\}$. В этом случае после замены $x = \omega / \varepsilon$ и выбора в качестве параметра на $L_\varepsilon^{(2)}(u_0, v_0)$ переменной z приходим к очередному параметрическому представлению

$$L_\varepsilon^{(2)}(u_0, v_0) = \{(\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) / \varepsilon, y(z, u_0, v_0, \varepsilon), z) : z_0 \leq z \leq z_1\}. \quad (9.17)$$

Здесь $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon)$, $y(z, u_0, v_0, \varepsilon)$ — компоненты решения задачи Коши

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{r_1}{\alpha r_3} \cdot \frac{1 - z - \omega}{z} + \sqrt{\varepsilon} \Phi_1(\omega, y, z, \varepsilon), \quad (9.18)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{r_2}{\alpha r_3} \cdot \frac{y}{z} + \sqrt{\varepsilon} \Phi_2(\omega, y, z, \varepsilon),$$

$$\omega|_{z=z_0} = \varepsilon^{1/4}, \quad y|_{z=z_0} = y_0, \quad (9.19)$$

в которой согласно (9.5)

$$y_0(u_0, v_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} y(x, u_0, v_0, \varepsilon)|_{x=\varepsilon^{-3/4}}, \quad (9.20)$$

$$z_0(u_0, v_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} z(x, u_0, v_0, \varepsilon)|_{x=\varepsilon^{-3/4}},$$

функции Φ_j , $j = 1, 2$, задаются равенствами

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{r_1 \sqrt{\varepsilon}}{\alpha r_3} \frac{\alpha \omega - (1 - z - \omega)((1 - \alpha)y - z)}{z(\alpha \omega + \varepsilon((1 - \alpha)y - z))}, \\ \Phi_2 &= -\frac{r_2 \sqrt{\varepsilon}}{\alpha r_3} \frac{(y - z)y}{z(\alpha \omega + \varepsilon((1 - \alpha)y - z))}, \end{aligned} \quad (9.21)$$

а $z_1 = z_1(u_0, v_0, \varepsilon) > z_0$ — ближайший к z_0 корень уравнения $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$ (вопрос о существовании такого корня выяснится в последующем).

Анализ задачи (9.18), (9.19) начнем со случая $\varepsilon = 0$. Для этого нам потребуются вытекающие из (9.8), (9.9) асимптотические формулы

$$y_0(u_0, v_0, \varepsilon) = u_0 + O(\varepsilon^{1/4}), \quad z_0(u_0, v_0, \varepsilon) = v_0 + O(\varepsilon^{1/4}), \quad (9.22)$$

допускающие дифференцирование по u_0, v_0 . Учитывая их в (9.19), (9.20) и полагая $\varepsilon = 0$, приходим к задаче Коши

$$\frac{d\omega}{dz} = \beta \frac{1-z-\omega}{z}, \quad \frac{dy}{dz} = \gamma \frac{y}{z}, \quad \omega|_{z=v_0} = 0, \quad y|_{z=v_0} = u_0, \quad (9.23)$$

где $\beta = r_1(\alpha r_3)^{-1}$, $\gamma = r_2(\alpha r_3)^{-1}$. Решение же последней, как нетрудно увидеть, при всех $z \geq v_0$ задается равенствами $\omega = \omega_*(z, v_0)$, $y = y_*(z, u_0, v_0)$, где

$$\omega_*(z, v_0) = z^{-\beta}[\varphi(z) - \varphi(v_0)], \quad y_*(z, u_0, v_0) = u_0 \left(\frac{z}{v_0}\right)^\gamma, \quad (9.24)$$

$$\varphi(z) = z^\beta \left(1 - \frac{\beta}{\beta+1} z\right).$$

В дальнейшем нам понадобится следующая информация о функциях (9.24).

Лемма 9.2. Уравнение $\omega_*(z, v_0) = 0$ на полуоси $z > v_0$ имеет единственный корень $z = v_1$, $v_1 = v_1(v_0) \in (1, 1 + 1/\beta)$, такой что

$$\omega_*(z, v_0) > 0 \text{ при } v_0 < z < v_1, \quad \left. \frac{\partial \omega_*}{\partial z} \right|_{z=v_1} < 0. \quad (9.25)$$

Доказательство. Обратимся к фигурирующей в (9.24) функции $\varphi(z)$. Нетрудно увидеть, что $\varphi'(z) > 0$ при $z \in (0, 1)$, $\varphi'(z) < 0$ при $z > 1$, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1 + 1/\beta) = 0$. А отсюда и из условия $v_0 < 1$ заключаем, что уравнение $\varphi(z) = \varphi(v_0)$ при $z > v_0$ имеет единственный корень $z = v_1(v_0) \in (1, 1 + 1/\beta)$, причем $\varphi(z) > \varphi(v_0)$ при $v_0 < z < v_1$, $\varphi(z) < \varphi(v_0)$ при $z > v_1$, $\varphi'(v_1) < 0$. Тем самым, оказываются справедливыми требуемые свойства (9.25). Лемма доказана.

Для исследования задачи Коши (9.18), (9.19) в случае $\varepsilon > 0$ выберем некоторую постоянную $q \in (0, 1)$. Из явных формул (9.21) вытекает, что на любом множестве K вида

$$K = \{(\omega, y, z) : \omega \geq q\varepsilon^{1/4}, \quad c_1 \leq y \leq c_2, \quad c_3 \leq z \leq c_4\}, \quad (9.26)$$

где независимые от ε постоянные $0 < c_1 < c_2$, $0 < c_3 < c_4$ произвольно фиксированы, функции Φ_1, Φ_2 из (9.18) ограничены равномерно по ε вместе со своими частными производными первого порядка по ω, y, z . Иными словами, на множестве (9.26) система (9.18) представляет собой регулярное возмущение соответствующей системы из

(9.23). А отсюда и из (9.22) очевидным образом выводим, что при тех значениях z : $z \geq z_0$, для которых

$$(\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon), y(z, u_0, v_0, \varepsilon), z) \in \{(\omega, y, z) : \omega \geq q\varepsilon^{1/4}\}, \quad (9.27)$$

справедливы асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) &= \omega_*(z, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ y(z, u_0, v_0, \varepsilon) &= y_*(z, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial \omega}{\partial u_0} &= O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial v_0} = \frac{\partial \omega_*}{\partial v_0}(z, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial \omega}{\partial z} &= \frac{\partial \omega_*}{\partial z}(z, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y}{\partial u_0} &= \frac{\partial y_*}{\partial u_0}(z, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{\partial y_*}{\partial v_0}(z, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y}{\partial z} &= \frac{\partial y_*}{\partial z}(z, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (9.28)$$

Зададимся теперь вопросом о том, при каких же именно значениях z выполняется априорное условие (9.27). В связи с этим обратим внимание, что свойства (9.25), (9.28) гарантируют существование у уравнения $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$ корня $z_1 = z_1(u_0, v_0, \varepsilon)$, асимптотически близкого к корню $v_1 = v_1(v_0)$ уравнения $\omega_*(z, v_0) = 0$ и такого, что $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) > \varepsilon^{1/4}$ при $z_0 < z < z_1$. Заметим, далее, что в силу требования $q < 1$ условие (9.27) заведомо имеет место на отрезке $z_0 \leq z \leq z_1$, а значит, обоснованы как законность применения формул (9.28) при отыскании корня z_1 , так и справедливость самих этих формул при $z_0 \leq z \leq z_1$. Более того, из (9.28) для $z_1 = z_1(u_0, v_0, \varepsilon)$ вытекают асимптотические представления

$$z_1 = v_1(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z_1}{\partial u_0} = O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z_1}{\partial v_0} = v'_1(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \quad (9.29)$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

Лемма 9.3. Для любого компактного множества $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ найдется такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для функций $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon)$, $y(z, u_0, v_0, \varepsilon)$ из (9.17) выполняются равномерные по $(u_0, v_0) \in \Omega_0$, $z \in [z_0, z_1]$ асимптотические равенства (9.28). Для функций же $z_0(u_0, v_0, \varepsilon)$, $z_1(u_0, v_0, \varepsilon)$, в свою очередь, равномерно по $(u_0, v_0) \in \Omega_0$ справедливы асимптотические представления (9.22), (9.29).

При рассмотрении очередного участка траектории (9.2) нам требуется точка с координатами $(x, y, z) = (\varepsilon^{-3/4}, y_1, z_1)$. Здесь z_1 — введенный выше корень уравнения $\omega(z, u_0, v_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$, а $y_1 = y_1(u_0, v_0, \varepsilon)$ определяется посредством равенства $y_1 = y(z, u_0, v_0, \varepsilon)|_{z=z_1}$ и согласно

(9.28), (9.29) обладает аналогичными (9.29) асимптотическими свойствами:

$$\begin{aligned} y_1(u_0, v_0, \varepsilon) &= u_1(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y_1}{\partial u_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y_1}{\partial v_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \end{aligned} \quad (9.30)$$

где $u_1(u_0, v_0) = y_*(z, u_0, v_0)|_{z=v_1(v_0)}$. Далее, обозначим через $L_\varepsilon^{(3)}(u_0, v_0)$ участок $L_\varepsilon(u_0, v_0)$, расположенный между указанной точкой и точкой пересечения с плоскостью $\{(x, y, z): x = \exp(-\varepsilon^{-3/4})\}$, а в качестве параметра на нем возьмем переменную x . В результате имеем аналогичное (9.5) параметрическое представление

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^{(3)}(u_0, v_0) &= \\ &= \{(x, y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon)): \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq x \leq \varepsilon^{-3/4}\}, \end{aligned} \quad (9.31)$$

где $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ — компоненты решения задачи Коши для системы из (9.6) с начальными условиями

$$y|_{x=\varepsilon^{-3/4}} = y_1, \quad z|_{x=\varepsilon^{-3/4}} = z_1. \quad (9.32)$$

Аналогом леммы 9.1 для данного случая является следующее утверждение.

Лемма 9.4. По любому компактному множеству $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0): u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ можно указать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для фигурирующих в (9.31) функций $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ выполняются равномерные по $x \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$, $(u_0, v_0) \in \Omega_0$ асимптотические представления:

$$\begin{aligned} y(x, u_0, v_0, \varepsilon) &= u_1(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ z(x, u_0, v_0, \varepsilon) &= v_1(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y}{\partial u_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{\partial u_1}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z}{\partial u_0} &= O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z}{\partial v_0} = v_1'(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Доказательство. Фиксируем постоянные $q_1 > 0$, $1 < q_2 < q_3$ и в данном случае вместо (9.10) рассмотрим множество точек

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z): \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq x \leq \varepsilon^{-3/4}, 0 < y \leq q_1, q_2 \leq z \leq q_3\}. \quad (9.34)$$

Снова привлекая формулы (9.7), убеждаемся, что теперь для функций F_1 , F_2 при $\forall (x, y, z) \in \Sigma_0$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеют

место оценки

$$|F_j| \leq M_1 \frac{1+x}{x}, \quad \left| \frac{\partial F_j}{\partial y} \right| \leq M_2 \frac{1+x}{x}, \quad \left| \frac{\partial F_j}{\partial z} \right| \leq M_3 \frac{1+x}{x}, \quad j = 1, 2, \quad (9.35)$$

где, как и в (9.11), $M_1, M_2, M_3 > 0$ — некоторые универсальные (зависящие только от выбора q_1, q_2, q_3) константы.

Следующий шаг вполне аналогичен соответствующему месту из доказательства леммы 9.1. А именно, предположим, что при всех интересующих нас значениях x, u_0, v_0, ε функции $y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ удовлетворяют априорным условиям

$$0 < y(x, u_0, v_0, \varepsilon) \leq q_1, \quad q_2 \leq z(x, u_0, v_0, \varepsilon) \leq q_3, \quad (9.36)$$

где q_1, q_2, q_3 — постоянные из (9.34). Учитывая эти неравенства вместе с оценками (9.35) в правых частях системы из (9.6), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} |y(x, u_0, v_0, \varepsilon) - y_1| &\leq \varepsilon M_1 \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^{\varepsilon^{-3/4}} \frac{x+1}{x} dx = \\ &= \varepsilon M_1 \left[2\varepsilon^{-3/4} - \exp(-\varepsilon^{-3/4}) - \frac{3}{4} \ln \varepsilon \right], \end{aligned} \quad (9.37)$$

где M_1 — константа из (9.35), y_1 — начальное условие из (9.32), и аналогичным образом

$$|z(x, u_0, v_0, \varepsilon) - z_1| \leq \varepsilon M_1 \left[2\varepsilon^{-3/4} - \exp(-\varepsilon^{-3/4}) - \frac{3}{4} \ln \varepsilon \right]. \quad (9.38)$$

Получившиеся неравенства свидетельствуют о том, что условия (9.36) действительно выполняются при соответствующем выборе констант $q_j = q_j(\Omega_0)$, $j = 1, 2, 3$. Отметим только один момент, который необходимо учесть при отыскании q_2 и q_3 . Привлекая асимптотические представления (9.29) и свойство $v_1(v_0) > 1$, приходим к выводу, что $z_1 \geq q$, где $q = \text{const} > 1$. Таким образом, постоянные q_2, q_3 должны удовлетворять требованиям $q_2 \in (1, q)$, $q_3 > q$.

Итак, при подходящем выборе q_1, q_2, q_3 оценки (9.37), (9.38) обретают законную силу. Объединяя их с формулами (9.29), (9.30), убеждаемся в справедливости первых двух асимптотических представлений из (9.33). Что же касается асимптотических равенств для производных функций $y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ по u_0, v_0 , то они обосновываются по той же схеме, что и в лемме 9.1. Лемма 9.4 доказана.

Для того чтобы выделить очередной участок кривой (9.2), положим

$$y_2 \stackrel{\text{def}}{=} y(x, u_0, v_0, \varepsilon)|_{x=\exp(-\varepsilon^{-3/4})}, \quad z_2 \stackrel{\text{def}}{=} z(x, u_0, v_0, \varepsilon)|_{x=\exp(-\varepsilon^{-3/4})}$$

и заметим, что функции $y_2(u_0, v_0, \varepsilon)$, $z_2(u_0, v_0, \varepsilon)$ допускают вытекающие из (9.33) асимптотические представления

$$\begin{aligned} y_2(u_0, v_0, \varepsilon) &= u_1(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ z_2(u_0, v_0, \varepsilon) &= v_1(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y_2}{\partial u_0} &= \frac{\partial u_1}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial y_2}{\partial v_0} = \frac{\partial u_1}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z_2}{\partial u_0} &= O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z_2}{\partial v_0} = v_1'(v_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (9.39)$$

Обозначим через $L_\varepsilon^{(4)}(u_0, v_0)$ участок траектории (9.2), начинающийся в точке $(x, y, z) = (\exp(-\varepsilon^{-3/4}), y_2, z_2)$ и лежащий в полупространстве $\{(x, y, z): x \leq \exp(-\varepsilon^{-3/4})\}$. После замены $x = \exp(-\omega/\varepsilon)$ и параметризации посредством переменной y указанный участок записывается в виде

$$L_\varepsilon^{(4)}(u_0, v_0) = \{(\exp(-\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon)/\varepsilon), y, z(y, u_0, v_0, \varepsilon)): y_3 \leq y \leq y_2\}. \quad (9.40)$$

Здесь $\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(y, u_0, v_0, \varepsilon)$ — компоненты решения задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dy} &= \frac{r_1}{r_2 y^2} (1 - z) + \varepsilon \Psi_1(\omega, y, z, \varepsilon), \\ \frac{dz}{dy} &= -\frac{r_3}{r_2 y^2} [(1 - \alpha)y - z]z + \varepsilon \Psi_2(\omega, y, z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\omega|_{y=y_2} = \varepsilon^{1/4}, \quad z|_{y=y_2} = z_2, \quad (9.42)$$

$y_3 = y_3(u_0, v_0, \varepsilon)$ — корень уравнений $\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$ из интервала $0 < y < y_2$ (вопрос о его существовании будет исследован отдельно), а явные формулы для функций Ψ_1 , Ψ_2 опустим. Отметим только, что как и аналогичные добавки Φ_1 , Φ_2 в (9.18), они ограничены равномерно по ε вместе со своими частными производными первого порядка по ω , y , z на любом множестве K вида (9.26), где постоянные $q \in (0, 1)$, $0 < c_1 < c_2$, $0 < c_3 < c_4$ произвольно фиксированы.

Перечисленные выше свойства Ψ_1 , Ψ_2 вместе с уже установленными асимптотическими представлениями (9.39) свидетельствуют о том, что задача (9.41), (9.42) представляет собой регулярное возмущение соответствующей задачи Коши

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dy} &= \frac{r_1}{r_2 y^2} (1 - z), \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{r_3}{r_2 y^2} [(1 - \alpha)y - z]z, \\ \omega|_{y=u_1} &= 0, \quad z|_{y=u_1} = v_1, \end{aligned} \quad (9.43)$$

где, напомним, $v_1 = v_1(v_0)$, $u_1 = u_1(u_0, v_0)$ — функции из (9.29), (9.30). Поэтому, рассуждая как и в случае задачи (9.18), (9.19), приходим к выводу, что при априорном условии

$$\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon) \geq q \varepsilon^{1/4}, \quad q = \text{const} \in (0, 1), \quad (9.44)$$

для ее решения выполняются асимптотические равенства

$$\begin{aligned}\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon) &= \omega_*(y, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ z(y, u_0, v_0, \varepsilon) &= z_*(y, u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial \omega}{\partial u_0} &= \frac{\partial \omega_*}{\partial u_0} + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial v_0} = \frac{\partial \omega_*}{\partial v_0} + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\partial \omega_*}{\partial y} + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z}{\partial u_0} &= \frac{\partial z_*}{\partial u_0} + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z}{\partial v_0} = \frac{\partial z_*}{\partial v_0} + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_*}{\partial y} + O(\varepsilon^{1/4}).\end{aligned}\quad (9.45)$$

Здесь $\omega = \omega_*(y, u_0, v_0)$, $z = z_*(y, u_0, v_0)$ — компоненты решения задачи Коши (9.43), для которых, в свою очередь, справедливы явные формулы

$$\begin{aligned}\omega_*(y, u_0, v_0) &= \frac{r_1}{r_2} \left[\frac{1}{u_1} - \frac{1}{y} + \frac{r_2}{r_3} \left((\delta + 1) \ln \frac{u_1}{y} - \ln \frac{u_1}{v_1} + \ln \psi(y, u_0, v_0) \right) \right], \\ z_*(y, u_0, v_0) &= \frac{y}{\psi(y, u_0, v_0)},\end{aligned}\quad (9.46)$$

где

$$\delta = (1 - \alpha)r_3/r_2, \quad \psi(y, u_0, v_0) = \frac{u_1}{v_1} \left(\frac{y}{u_1} \right)^{\delta+1} + \frac{r_3}{r_2(\delta+1)} \left(1 - \left(\frac{y}{u_1} \right)^{\delta+1} \right).\quad (9.47)$$

Остановимся на некоторых необходимых в дальнейшем свойствах функций (9.46). А именно, нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 9.5. На интервале $0 < y < u_1$ уравнение $\omega_*(y, u_0, v_0) = 0$ имеет единственный корень $y = u_2(u_0, v_0)$, причем

$$\omega_* > 0 \text{ при } y \in (u_2, u_1), \quad \omega_* < 0 \text{ при } y \in (0, u_2), \quad \left. \frac{\partial \omega_*}{\partial y} \right|_{y=u_2} > 0. \quad (9.48)$$

Доказательство. Покажем сначала, что уравнение $z_*(y, u_0, v_0) = 1$ допускает единственное решение $y = \bar{u}(u_0, v_0) \in (0, u_1)$. Из соотношений (9.46), (9.47) следует, что это уравнение записывается в виде

$$f(\kappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r_3}{r_2(\delta+1)u_1} + \left(\frac{1}{v_1} - \frac{r_3}{r_2(\delta+1)u_1} \right) \kappa^{\delta+1} - \kappa = 0, \quad (9.49)$$

где $\kappa = y/u_1$, $0 < \kappa < 1$. Предположим, далее, что

$$\frac{1}{v_1} - \frac{r_3}{r_2(\delta+1)u_1} \leq 0. \quad (9.50)$$

Тогда выполняется неравенство $f'(\kappa) < 0 \quad \forall \kappa \in [0, 1]$ и, кроме того, очевидным образом $f(0) > 0$, $f(1) = 1/v_1 - 1 < 0$. А это значит, что при условии (9.50) у уравнения (9.49) на интервале $0 < \kappa < 1$ существует единственный корень.

В случае справедливости строго противоположного (9.50) неравенства $\forall \kappa > 0$ имеем $f''(\kappa) > 0$. Таким образом, в силу выпуклости $f(\kappa)$ у уравнения (9.49) на полуоси $\kappa > 0$ может находиться не более

двух корней. Но поскольку $f(0) > 0$, $f(1) < 0$, $\lim_{\varkappa \rightarrow +\infty} f(\varkappa) = +\infty$, то на интересующем нас интервале $0 < \varkappa < 1$ лежит ровно один из них.

Итак, уравнение $z_*(y, u_0, v_0) = 1$ имеет единственный корень $y = \bar{u} \in (0, u_1)$, причем $z_* < 1$ при $y \in (0, \bar{u})$, $z_* > 1$ при $y \in (\bar{u}, u_1)$. Учитывая этот факт, из первого уравнения системы (9.43) заключаем, что $\partial\omega_*/\partial y > 0$ при $y \in (0, \bar{u})$, $\partial\omega_*/\partial y < 0$ при $y \in (\bar{u}, u_1)$. А отсюда и из очевидных свойств $\omega_*|_{y=u_1} = 0$, $\lim_{y \rightarrow +0} \omega_* = -\infty$ вытекают существование у уравнения $\omega_*(y, u_0, v_0) = 0$ единственного корня $y = u_2 \in (0, \bar{u})$ и выполнение требуемых неравенств (9.48). Лемма доказана.

Вернемся к формулам (9.45), которые, напомним, носят пока условный характер. Однако, опираясь на лемму 9.5 и, в частности, на свойства (9.48), мы можем утверждать, что требуемое априорное условие (9.44) справедливо на отрезке $y_3 \leq y \leq y_2$, где y_3 — корень уравнения $\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$, асимптотически близкий к $y = u_2(u_0, v_0)$. Существование же такого корня и асимптотические равенства

$$\begin{aligned} y_3(u_0, v_0, \varepsilon) &= u_2(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y_3}{\partial u_0} &= \frac{\partial u_2}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y_3}{\partial v_0} &= \frac{\partial u_2}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \end{aligned} \quad (9.51)$$

в свою очередь, вытекают из представлений (9.45) и свойств (9.48) (см. аналогичное место, связанное с формулами (9.28) и нахождением корня $z_1 = z_1(u_0, v_0, \varepsilon)$). Тем самым, получаем следующее утверждение.

Лемма 9.6. Для любого компактного множества $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ можно подобрать такое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для функций $\omega(y, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(y, u_0, v_0, \varepsilon)$ из (9.40) справедливы равномерные по $(u_0, v_0) \in \Omega_0$, $y_3 \leq y \leq y_2$ асимптотические равенства (9.45), а для функций $y_2(u_0, v_0, \varepsilon)$, $y_3(u_0, v_0, \varepsilon)$ равномерно по $(u_0, v_0) \in \Omega_0$ имеют место формулы (9.39), (9.51).

На заключительном этапе анализа траектории (9.2) нам требуется точка с координатами $(x, y, z) = (\exp(-\varepsilon^{-3/4}), y_3, z_3)$, где $y_3(u_0, v_0, \varepsilon)$ — функция (9.51), а функцию z_3 определим равенством $z_3(u_0, v_0, \varepsilon) = z(y, u_0, v_0, \varepsilon)|_{y=y_3}$. Отметим сразу, что для второй из этих функций в силу (9.51), (9.45) выполняются асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} z_3(u_0, v_0, \varepsilon) &= v_2(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z_3}{\partial u_0} &= \frac{\partial v_2}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z_3}{\partial v_0} &= \frac{\partial v_2}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \end{aligned} \quad (9.52)$$

где $v_2(u_0, v_0) = z_*(y, u_0, v_0)|_{y=u_2(u_0, v_0)}$.

Обозначим через $L_\varepsilon^{(5)}(u_0, v_0)$ фрагмент траектории (9.2), расположенный между введенной выше точкой и точкой пересечения с плоскостью $\{(x, y, z): x = 1\}$, а в качестве параметра на нем возьмем x . В результате имеем

$$L_\varepsilon^{(5)}(u_0, v_0) = \{(x, y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon)) : \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq x \leq 1\}, \quad (9.53)$$

где $(y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon))$ — решение задачи Коши для системы из (9.6) с начальными условиями

$$y|_{x=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} = y_3, \quad z|_{x=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} = z_3. \quad (9.54)$$

Справедлива следующая

Лемма 9.7. По любому компактному $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Omega_0) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ для функций $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ из (9.53) имеют место равномерные по переменным $(u_0, v_0) \in \Omega_0$, $\exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq x \leq 1$ асимптотические формулы

$$\begin{aligned} y(x, u_0, v_0, \varepsilon) &= u_2(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ z(x, u_0, v_0, \varepsilon) &= v_2(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial y}{\partial u_0} &= \frac{\partial u_2}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial y}{\partial v_0} = \frac{\partial u_2}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial z}{\partial u_0} &= \frac{\partial v_2}{\partial u_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}), \quad \frac{\partial z}{\partial v_0} = \frac{\partial v_2}{\partial v_0}(u_0, v_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (9.55)$$

Доказательство леммы проводится по той же схеме, что и обоснование лемм 9.1, 9.4. А именно, фиксируем некоторые постоянные $q_1 > 0$, $q_2 \in (0, 1)$ и рассмотрим аналогичное (9.10), (9.34) множество точек

$$\Sigma_0 = \{(x, y, z) : \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq x \leq 1, 0 < y \leq q_1, 0 < z \leq q_2\}. \quad (9.56)$$

Далее, привлекая в очередной раз формулы (9.7), приходим к выводу, что на множестве (9.56) функции F_1, F_2 допускают оценки вида (9.35).

На следующем шаге сделаем априорное предположение о том, что при всех рассматриваемых x, u_0, v_0, ε для функций $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ выполняются неравенства (9.12). Как обычно, учтем эти неравенства в правых частях системы из (9.6) вместе с упоминавшимися выше оценками (9.35). В итоге убеждаемся, что

$$\begin{aligned} |y(x, u_0, v_0, \varepsilon) - y_3| &\leq \varepsilon M(\varepsilon^{-3/4} + 1 - \exp(-\varepsilon^{-3/4})), \\ |z(x, u_0, v_0, \varepsilon) - z_3| &\leq \varepsilon M(\varepsilon^{-3/4} + 1 - \exp(-\varepsilon^{-3/4})), \quad M = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (9.57)$$

где y_3, z_3 — начальные условия (9.54).

Неравенства (9.57) вместе с асимптотическими формулами (9.51), (9.52) позволяют заключить, что требуемые условия (9.12) действительно выполняются при подходящем выборе q_1, q_2 . Впрочем, следует обратить внимание на один момент. Из доказательства леммы 9.5

вытекает, что $v_2(u_0, v_0) = z_*(y, u_0, v_0)|_{y=u_2} < 1$, поскольку $u_2 \in (0, \bar{u})$. Поэтому в силу (9.52) имеем $z_3 \leq q$, где $q = \text{const} \in (0, 1)$. Таким образом, константу q_2 в (9.12) необходимо брать из интервала $(q, 1)$.

Завершая обоснование леммы 9.7, отметим, что оценки (9.57) влекут справедливость первых двух асимптотических представлений из (9.55). Остальные же из них устанавливаются по схеме, описанной при доказательстве леммы 9.1.

Подведем итог. Из проделанных построений следует, что на любом компактном множестве $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ и при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(\Omega_0)$ оператор последования Пуанкаре (9.4) определен посредством равенства

$$\Pi_\varepsilon(u_0, v_0) = (y(x, u_0, v_0, \varepsilon), z(x, u_0, v_0, \varepsilon))|_{x=1},$$

где $y(x, u_0, v_0, \varepsilon)$, $z(x, u_0, v_0, \varepsilon)$ — функции из (9.53). Более того, из асимптотических представлений (9.55) вытекает следующее утверждение.

Теорема 9.1. *На любом компактном множестве $\Omega_0 \subset \{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ в метрике пространства $C^1(\Omega_0; \mathbb{R}^2)$ имеет место предельное равенство*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Pi_\varepsilon(u_0, v_0) = \Pi_0(u_0, v_0) \stackrel{\text{def}}{=} (u_2(u_0, v_0), v_2(u_0, v_0)). \quad (9.58)$$

В дополнение к установленной теореме отметим, что время движения фазовой точки системы (9.3) по участкам $L_\varepsilon^{(k)}(u_0, v_0)$, $k = 1, 2, 3, 5$, имеет порядок $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, а аналогичное время для участка $L_\varepsilon^{(4)}(u_0, v_0)$ асимптотически конечно (т.е. допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ конечный положительный предел). Суммарное же время $T(u_0, v_0, \varepsilon)$ движения по всем этим участкам таково, что равномерно по $(u_0, v_0) \in \Omega_0$

$$T(u_0, v_0, \varepsilon) = \frac{1}{r_2} \left(\frac{1}{u_2(u_0, v_0)} - \frac{1}{u_1(u_0, v_0)} \right) + O(\varepsilon^{1/4}).$$

Наглядное представление о поведении траектории $L_\varepsilon(u_0, v_0)$ дает ее график при $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $\alpha = 0,3$, $\varepsilon = 0,001$, показанный на рис. 9.2 (точнее говоря, здесь изображен случай начальных условий u_0, v_0 , при которых данная кривая является устойчивым циклом). Зависимость же от времени координат x, y для аналогичного устойчивого цикла при $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$, $\alpha = 0,2$, $\varepsilon = 0,01$ представлена на рис. 9.3, где график x показан сплошной линией, а график компоненты y — пунктирной.

9.2. О некоторых свойствах предельного отображения.

Из установленной выше теоремы 9.1 очевидным образом следует, что если предельное отображение Π_0 из (9.58) имеет неподвижную точку (u_0, v_0) , экспоненциально устойчивую или дихотомичную, то при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ исходный оператор Π_ε допускает неподвижную точку $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ с асимптотически близкими к (u_0, v_0) компонентами

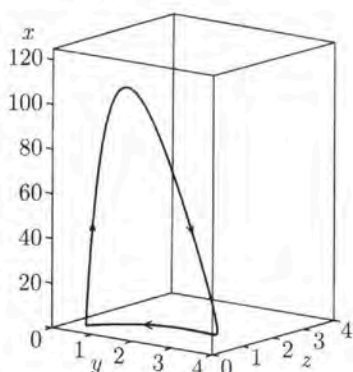


Рис. 9.2

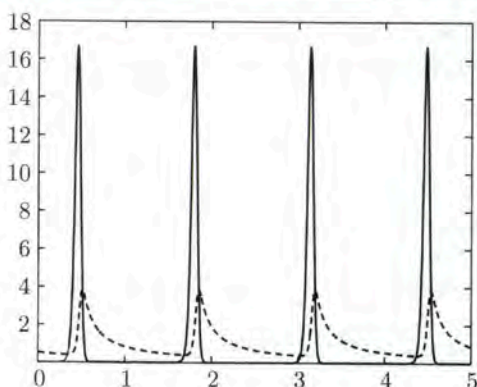


Рис. 9.3

и с теми же свойствами устойчивости. Таким образом, проблема существования и устойчивости релаксационных автоколебаний в системе (9.3) сводится к анализу оператора Π_0 .

Рассмотрим систему уравнений

$$u_0 = u_2(u_0, v_0), \quad v_0 = v_2(u_0, v_0) \quad (9.59)$$

для отыскания возможных неподвижных точек $(u_0, v_0) \in \{(u, v): u > 0, 0 < v < 1\}$ предельного отображения. При ее анализе нам потребуется промежуточная точка $(u_1, v_1) = (u_1(u_0, v_0), v_1(v_0))$ (см. (9.29), (9.30)), а также отношение $\varkappa = v_0/v_1$, которое в силу неравенств $v_0 < 1, v_1 > 1$ строго меньше единицы. Как будет показано ниже, координаты u_0, v_0 любого возможного решения системы (9.59) выражаются через \varkappa , а для параметра \varkappa получается в конечном итоге некоторое скалярное нелинейное уравнение. Таким образом, вопрос о неподвижных точках отображения Π_0 сводится к поиску корней этого уравнения.

Приступим к реализации описанного плана действий. В первую очередь обратимся к уравнению для нахождения v_1 , имеющему вид $\varphi(v_1) = \varphi(v_0)$, где $\varphi(z)$ — функция из (9.24). Несложный подсчет показывает, что из этого уравнения v_0 выражается через \varkappa посредством равенства

$$v_0 = \frac{(\beta + 1)\varkappa(1 - \varkappa^\beta)}{\beta(1 - \varkappa^{\beta+1})}. \quad (9.60)$$

Напомним, далее, что по определению величины u_1 и v_1 связаны между собой соотношением $u_*|_{z=v_1} = u_1$, где $u_*(z, u_0, v_0)$ — функция из (9.24). Учитывая это обстоятельство, приходим к выводу, что

$$\frac{u_0}{u_1} = \varkappa^\gamma, \quad \frac{u_1}{v_1} = \frac{u_0}{v_0} \varkappa^{-(\gamma-1)}. \quad (9.61)$$

На следующем этапе рассмотрим уравнение $z_*(y, u_0, v_0)|_{y=u_2} = v_2$, где $z_*(y, u_0, v_0)$ — функция из (9.46). Подставим в него требуемые равенства $u_2 = u_0, v_2 = v_0$ (см. (9.59)) вместе с формулами (9.61).

В результате получаем некоторое соотношение между u_0/v_0 и \varkappa , из которого находим

$$\frac{u_0}{v_0} = \frac{r_3}{r_2(\delta+1)} \cdot \frac{1 - \varkappa^{\gamma(\delta+1)}}{1 - \varkappa^{\gamma\delta+1}}. \quad (9.62)$$

Обратимся теперь к уравнению $\omega_*(y, u_0, v_0)|_{y=u_2} = 0$ для определения u_2 , где $\omega_*(y, u_0, v_0)$ — функция из (9.46). Подставляя в него равенство $u_2 = u_0$ и соотношения (9.60)–(9.62), после некоторых преобразований получаем уравнение для отыскания \varkappa , имеющее вид

$$H(\varkappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\delta+1)\beta}{1+\beta} \cdot \frac{(1-\varkappa^\gamma)(1-\varkappa^{\gamma\delta+1})(1-\varkappa^{\beta+1})}{\varkappa(1-\varkappa^\beta)(1-\varkappa^{\gamma(\delta+1)})} + (\gamma\delta+1)\ln \varkappa = 0. \quad (9.63)$$

Итак, мы убедились, что если (u_0, v_0) — решение системы (9.59), то соответствующая ему величина $\varkappa = v_0/v_1(u_0, v_0)$ есть решение уравнения (9.63). Верно и обратное утверждение: если $\varkappa \in (0, 1)$ — некоторый корень уравнения (9.63), то ему отвечает решение системы (9.59), координаты u_0, v_0 которого определяются с помощью равенств (9.60), (9.62). Добавим еще, что при этом обязательно $v_0 < 1$, поскольку $\varkappa^{\beta+1} > (\beta+1)\varkappa - \beta \quad \forall \varkappa \in (0, 1)$.

Как показывают численные эксперименты, уравнение (9.63) на интервале $0 < \varkappa < 1$ может иметь один или два корня. Первую из этих ситуаций иллюстрирует рис. 9.4, где изображен график функции $H(\varkappa)$ при $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3, \alpha = 0.2$. Второй же случай реализуется, например, при $r_1 = 2, r_2 = 0.6, r_3 = 0.5, \alpha = 0.246$. Соответствующий ему график $H(\varkappa)$ представлен на рис. 9.5.

Для того чтобы получить достаточное условие существования у уравнения (9.63) хотя бы одного корня, обратимся к тейлоровскому

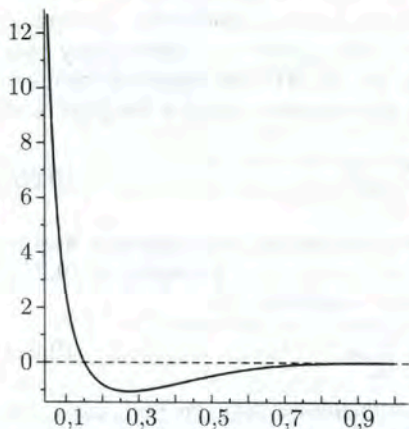


Рис. 9.4

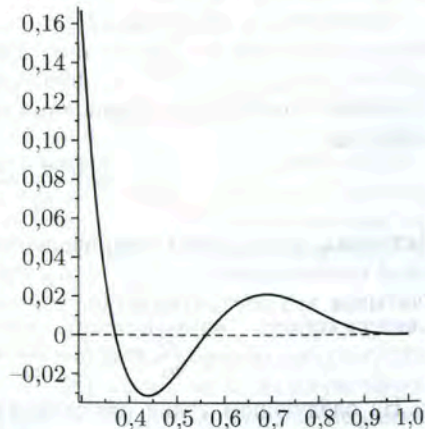


Рис. 9.5

разложению функции $H(\kappa)$ в точке $\kappa = 1$:

$$H(\kappa) = a_1(\kappa - 1)^3 + a_2(\kappa - 1)^4 + a_3(\kappa - 1)^5 + O((\kappa - 1)^6), \quad (9.64)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{12\alpha^3 r_3} (r_2 - \alpha(r_1 + r_2 + r_3)), \quad a_2 = -\frac{1}{8\alpha^3 r_3} (r_2 - \alpha(r_1 + r_2 + r_3)), \quad (9.65)$$

$$a_3 = -\frac{1}{720\alpha^5 r_3^3} \left[r_2(r_2^2 + 4r_2 r_3 + r_3^2) - \right. \\ \left. - \alpha(r_1^3 + r_2^3 + r_3^3 + 5r_1 r_2 r_3 + 8r_2^2 r_3 + 8r_2 r_3^2) + \right. \\ \left. + \alpha^2 r_3(5r_1 r_2 + 4r_3^2 + 5r_1 r_3 + r_1^2 - 9r_2 r_3 + 4r_2^2) + \right. \\ \left. + 104\alpha^3 r_3^2(r_1 + r_2 + r_3) \right]. \quad (9.66)$$

Заметим, далее, что в силу (9.65) при выполнении неравенства

$$\alpha < \frac{r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \quad (9.67)$$

положителен коэффициент a_1 из (9.64). Таким образом, в этом случае $H(\kappa) < 0$ при $0 < 1 - \kappa \ll 1$. Но поскольку всегда $H(\kappa) \rightarrow +\infty$ при $\kappa \rightarrow +0$, то (9.67) и является искомым достаточным условием, о котором говорилось выше.

Суммируя проделанный анализ, приходим к следующему утверждению.

Теорема 9.2. При условии (9.67) у предельного отображения Π_0 в полуполосе $\{(u_0, v_0) : u_0 > 0, 0 < v_0 < 1\}$ существует хотя бы одна неподвижная точка.

Численные расчеты, выполненные при различных r_1, r_2, r_3 и при значениях $\alpha \in (0, r_2/(r_1 + r_2 + r_3))$, свидетельствуют о том, что неподвижная точка, о которой говорится в теореме 9.2, на самом деле единственна, а в исходной системе (9.3) ей отвечает устойчивый релаксационный цикл L_ε (см., например, рис. 9.2).

Заканчивая рассмотрение предельного отображения Π_0 , добавим, что равенства (9.64)–(9.66) позволяют сформулировать также и достаточные условия существования у уравнения (9.63) не менее двух корней. Действительно, предположим, что $\alpha = r_2/(r_1 + r_2 + r_3) + \mu$, $0 < \mu \ll 1$ и $Q \stackrel{\text{def}}{=} a_3|_{\alpha=r_2/(r_1+r_2+r_3)} > 0$. Тогда, как нетрудно убедиться, уравнение (9.63) допускает корень вида

$$\kappa_*(\mu) = 1 - \frac{(r_1 + r_2 + r_3)^2}{\sqrt{12r_2^3 r_3 Q}} \sqrt{\mu} + O(\mu), \quad H'(\kappa)|_{\kappa=\kappa_*} > 0.$$

А отсюда и из того факта, что $H(\kappa) \rightarrow +\infty$ при $\kappa \rightarrow +0$, вытекает существование у этого уравнения еще по крайней мере одного корня κ_{**} , лежащего на интервале $(0, \kappa_*)$ (см. рис. 9.5).

9.3. Результаты численных экспериментов по выявлению диффузионного хаоса. В этом пункте рассмотрим отвечающую системе (9.1) распределенную модель, т.е. параболическую краевую задачу вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + r_1[1 + a(1 - z) - x]x, & \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + r_2[x - y]y, & \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial y}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= D_3 \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + r_3[\alpha x + (1 - \alpha)y - z]z, & \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{s=0} &= \frac{\partial z}{\partial s} \Big|_{s=1} = 0 \end{aligned} \quad (9.68)$$

на отрезке $0 \leq s \leq 1$. Здесь D_j , $j = 1, 2, 3$, — некоторые положительные параметры, которые, как и в случае (8.1), считаем пропорциональными одному параметру $\nu > 0$. Точнее говоря, положим в (9.68)

$$\begin{aligned} (D_1, D_2, D_3) &= \nu(D_1^0, D_2^0, D_3^0), \quad D_1^0 = 0,01, \quad D_2^0 = 0,08, \quad D_3^0 = 0,01; \\ r_1 &= 1, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 3, \quad \alpha = 0,2, \quad a = 100 \end{aligned} \quad (9.69)$$

и будем интересоваться аттракторами получившейся краевой задачи, возникающими в ее фазовом пространстве $(x, y, z) \in C([0, 1]; \mathbb{R}^3)$ при уменьшении ν .

Для решения поставленной проблемы выполним в (9.68) стандартную дискретизацию. Как и в случае краевых задач (7.35), (8.8), фиксируем натуральное N и в точках $s = (j - 1/2)/N$, $j = 1, 2, \dots, N$, заменим частные производные по s соответствующими разностными операторами. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= \nu D_1^0 N^2 (x_{j+1} - 2x_j + x_{j-1}) + r_1[1 + a(1 - z_j) - x_j]x_j, \\ \dot{y}_j &= \nu D_2^0 N^2 (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + r_2[x_j - y_j]y_j, \\ \dot{z}_j &= \nu D_3^0 N^2 (z_{j+1} - 2z_j + z_{j-1}) + r_3[\alpha x_j + (1 - \alpha)y_j - z_j]z_j, \end{aligned} \quad (9.70)$$

где $x_j(t) = x(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $y_j(t) = y(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $z_j(t) = z(t, s)|_{s=(j-1/2)/N}$, $j = 1, \dots, N$, причем $x_0 = x_1$, $y_0 = y_1$, $z_0 = z_1$, $x_{N+1} = x_N$, $y_{N+1} = y_N$, $z_{N+1} = z_N$.

При интерпретации численных экспериментов, проводившихся для системы (9.70) при условиях (9.69) и при различных значениях ν , N , удобно пользоваться понятием вероятностного аттрактора (см. определение 1.7). А именно, в данном случае вероятностным аттрактором $A_N \subset \mathbb{R}^{3N}$ системы (9.70) назовем наименьшее замкнутое множество, содержащее ω -предельные множества ее траекторий для почти всех (в смысле меры Лебега) начальных условий из конуса $K \subset \mathbb{R}^{3N}$ векторов с неотрицательными координатами. Нас будут интересовать такие характеристики инвариантного множества A_N , как ляпуновская

размерность $d_L(A_N)$, вычисляющаяся по формуле (1.6), и старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}(A_N)$.

Обратимся сначала к серии численных расчетов по выявлению зависимости величин $d_L(A_N)$ и $\lambda_{\max}(A_N)$ от N . Соответствующий анализ был выполнен при $\nu = 0.002$, а его результаты представлены на рисунках 9.6–9.9.

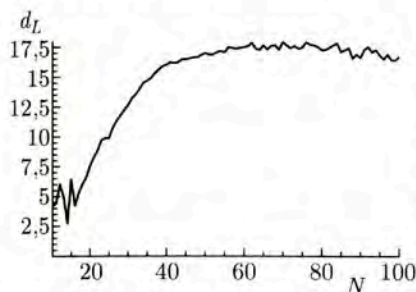


Рис. 9.6

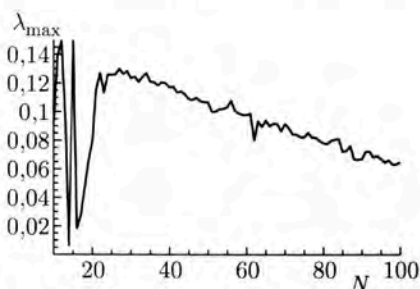


Рис. 9.7

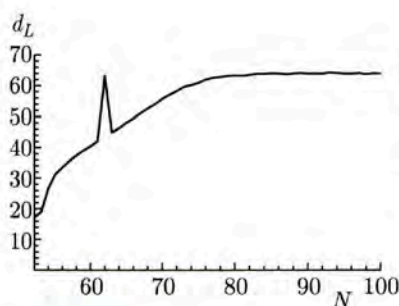


Рис. 9.8

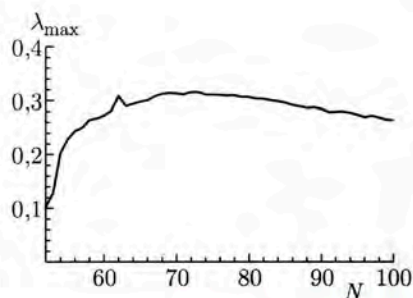


Рис. 9.9

Для пояснения приведенной визуальной информации заметим следующее. Как оказывается, при $N \geq 52$ аттрактор A_N состоит по крайней мере из двух непересекающихся компонент $A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$, которым соответствуют различные наборы ляпуновских показателей. В связи с этим вычисление величин d_L и λ_{\max} проводилось отдельно для каждой компоненты. В случае $A_N^{(1)}$ графики d_L , λ_{\max} показаны на рисунках 9.6, 9.7, а в случае $A_N^{(2)}$ — на рис. 9.8, 9.9. Добавим еще, что аналог компоненты $A_N^{(1)}$ существует и при $10 \leq N \leq 52$. Поэтому для $A_N^{(1)}$ соответствующие графики удалось построить при $10 \leq N \leq 100$, а для $A_N^{(2)}$ — только на отрезке $52 \leq N \leq 100$.

Качественное различие между аттракторами $A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$ иллюстрируют рисунки 9.10–9.12, где под буквой a) изображены графики компонент $x(t, s)$, $y(t, s)$, $z(t, s)$ решения краевой задачи (9.68) при фиксиро-

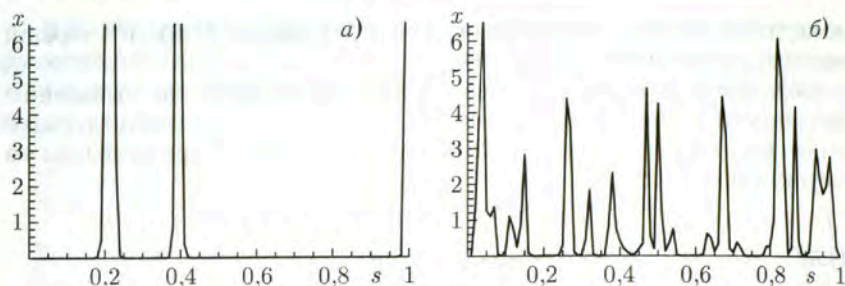


Рис. 9.10

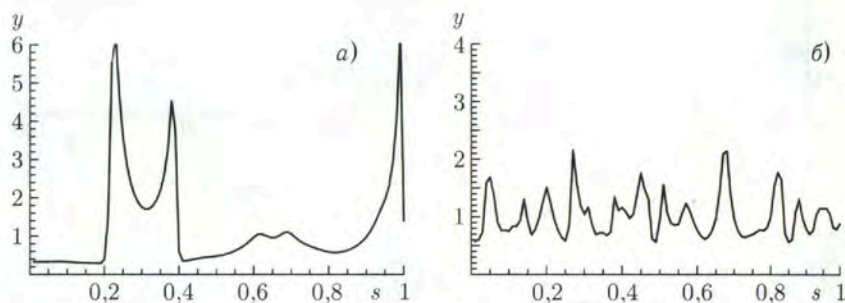


Рис. 9.11

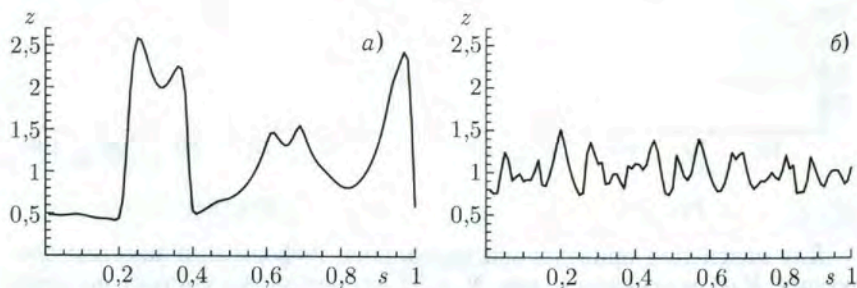


Рис. 9.12

ванном t , построенные по точкам $(x_j(t), y_j(t), z_j(t))$, $s = (j - 1/2)/N$, $j = 1, \dots, N$ при $N = 100$, $\nu = 0,002$ для случая $A_N^{(1)}$, а под буквой б) — аналогичные графики, соответствующие случаю $A_N^{(2)}$.

Основная особенность аттрактора $A_N^{(1)}$ заключается в том, что его компоненты $x_j(t)$ по своим свойствам близки к компоненте $x(t)$ релаксационного цикла системы (9.1). А именно, все они почти одновременно становятся величинами порядка 10^{-10} – 10^{-20} , остаются таковыми некоторое конечное время, а затем претерпевают достаточно высокие всплески δ -образного характера (см. рис. 9.10, а). В случае же $A_N^{(2)}$

ситуация принципиально меняется: по сравнению с $A_N^{(1)}$ уменьшаются величины всплесков компонент $x_j(t)$ и увеличиваются их минимумы (см. рис. 9.10, б). В связи с этим в дальнейшем аттрактор $A_N^{(1)}$ будем называть *релаксационным хаосом*, а аттрактор $A_N^{(2)}$ — *хаосом типа самоорганизации*.

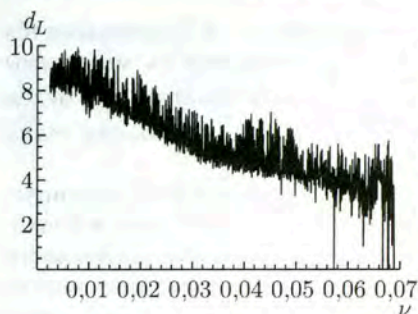
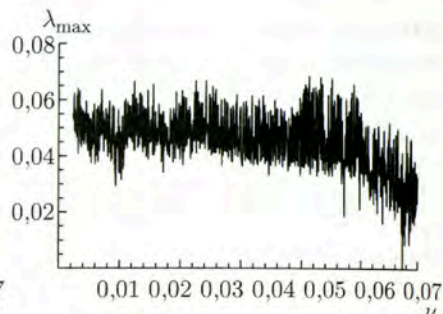
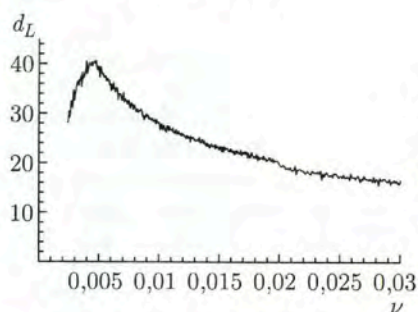
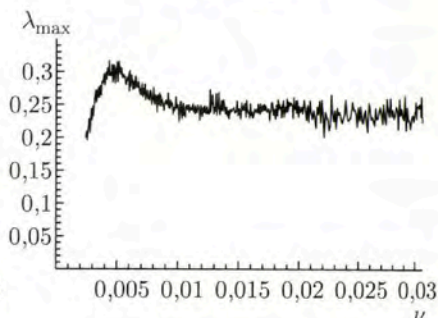
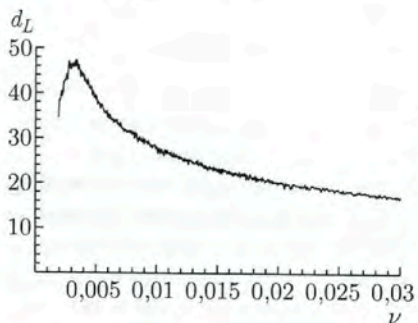
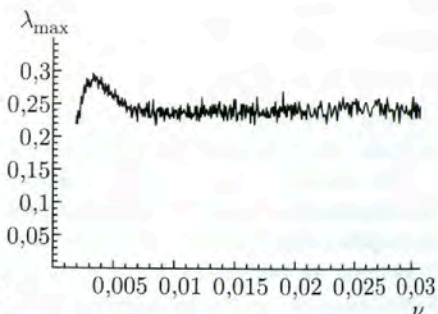
Интересно отметить, что для системы (9.70) термин «самоорганизация» имеет прозрачный биологический смысл. Действительно, в биологической интерпретации $x_j(t)$ — это локальные плотности численности жертвы. В режиме же самоорганизации происходит следующее: жертва искусственно (за счет миграций) создает себе неоднородную среду обитания и повышает свой уровень жизни — всплески ее численности становятся менее интенсивными и одновременно увеличиваются минимумы компонент $x_j(t)$, $j = 1, \dots, N$.

Отдельно остановимся на вопросе о том, какие выводы из проделанного численного анализа можно сделать об аттракторах распределенной модели (9.68) при условиях (9.69) и при $\nu = 0,002$. Изображенные на рисунках 9.8 и 9.9 графики позволяют заключить, что при $N \rightarrow \infty$ величины $d_L(A_N^{(2)})$ и $\lambda_{\max}(A_N^{(2)})$ стремятся к некоторым конечным положительным пределам. Следовательно, есть все основания ожидать, что краевая задача (9.68) имеет хаотический аттрактор $A^{(2)} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^{(2)}$, который, как и аттрактор $A_N^{(2)}$, уместно назвать *хаосом типа самоорганизации*.

В случае $A_N^{(1)}$ ситуация несколько сложнее. Здесь $d_L(A_N^{(1)})$ при $N \rightarrow \infty$ также сходится к некоторому положительному пределу, а предел $\lambda_{\max}(A_N^{(1)})$, по всей видимости, равен нулю. Это означает, что аттрактор $A^{(1)} = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N^{(1)}$ релаксационного типа в распределенной модели (9.68) при $\nu = 0,002$ хотя и существует, но не является хаотическим (он становится хаотическим при меньших значениях ν).

Рассмотрим теперь вопрос о зависимости характеристик d_L и λ_{\max} от параметра ν при фиксированном N . Соответствующие численные эксперименты проводились при $N = 20, 50, 60$, а их результаты представлены на рисунках 9.13–9.18 (в случае $N = 20$ значения d_L и λ_{\max} вычислялись на релаксационном хаосе, а в случаях $N = 50$ и 60 — на хаосе типа самоорганизации).

Приведенные графики свидетельствуют о том, что при согласованном уменьшении ν и увеличении N в системе (9.70) возникают хаотические аттракторы сколь угодно высокой размерности. Точнее говоря, величины d_L и λ_{\max} , рассматриваемые как функции переменной ν , достигают своих максимальных значений в одной и той же точке $\nu = \nu_N^*$, причем $d_L|_{\nu=\nu_N^*} \rightarrow \infty$, $\lambda_{\max}|_{\nu=\nu_N^*} \rightarrow \lambda_{\max}^0 > 0$ при $N \rightarrow \infty$. Ясно также, что неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов происходит при $\nu \rightarrow 0$ и в исходной краевой задаче (9.68), поскольку, как уже отмечалось выше, при $N \rightarrow \infty$ и при фиксированном ν аттракторы

Рис. 9.13. $N = 20$ Рис. 9.14. $N = 20$ Рис. 9.15. $N = 50$ Рис. 9.16. $N = 50$ Рис. 9.17. $N = 60$ Рис. 9.18. $N = 60$

$A_N^{(1)}$ и $A_N^{(2)}$ сходятся к соответствующим аттракторам распределенной модели.

9.4. Заключение. Суммируя проделанные построения, остановимся на следующих двух основных моментах.

Во-первых, предложенная нами система (9.1) является удачной регуляризацией модели (8.4), позволяющей построить весьма простую асимптотическую теорию релаксационных колебаний (см. теоремы

9.1, 9.2). Для сравнения отметим, что в случае $\alpha = 0$ предельный оператор Π_0 из (9.58) оказывается нулевым. Вопрос же о существовании при $\alpha = 0$ отображения (9.4) неподвижной точки, лежащей в некоторой асимптотически малой окрестности начала координат, достаточно сложен (см. [52]).

Во-вторых, для распределенной модели (9.68) с помощью численных методов удалось установить феномен диффузионного хаоса: неограниченный рост размерностей хаотических аттракторов при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии. Попутно были обнаружены два типа хаотических автоколебаний — релаксационный хаос и хаос типа самоорганизации. Автоколебательные режимы первого типа по своим свойствам в определенном смысле близки к однородному циклу $(x(t, s), y(t, s), z(t, s)) \equiv (x(t), y(t), z(t))$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — компоненты устойчивого релаксационного цикла системы (9.1). В случае же хаоса типа самоорганизации функции $x(t, s)$, $y(t, s)$, $z(t, s)$ оказываются существенно более изрезанными по пространственной переменной s (см. рисунки 9.10–9.12). Именно по этой причине режимы самоорганизации наблюдаются в системе (9.70) лишь при достаточно больших N .

В заключение отметим, что в отличие, скажем, от уравнения Гинзбурга–Ландау (8.8) возникновение диффузионного хаоса в краевой задаче (9.68) не связано напрямую с потерей устойчивости однородного цикла. Более того, если положить, например, в (9.69) $\alpha = 0$, сохранив значения остальных параметров, то этот цикл остается устойчивым при любом $\nu > 0$, а при малых ν сосуществует с диффузионным хаосом.

10. Хаотическая буферность и ее математические модели

10.1. Постановка задачи. Как уже было сказано во введении, о явлении буферности принято говорить, если в некоторой эволюционирующей во времени нелинейной системе при подходящем выборе параметров можно добиться сосуществования любого наперед заданного конечного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов, торов и т. д.). В случае же, когда имеем дело с хаотическими аттракторами, соответствующий феномен назовем хаотической буферностью. В настоящем разделе предлагается общая идея, руководствуясь которой, можно получать различные цепочки связанных осцилляторов с хаотической буферностью. В качестве конкретных примеров рассматриваются цепочки диффузионно связанных обобщенных кубических уравнений Шрёдингера и нелинейных телеграфных уравнений. Приводится также пример системы, имеющей бесконечномерный хаотический аттрактор.

Как известно, цепочки и решетки связанных генераторов с сосредоточенными параметрами являются полезными физически содержатель-

ными моделями, позволяющими выяснить ряд закономерностей развития пространственно-временного хаоса в сплошных средах [3, 22, 23]. При этом, как правило, в качестве отдельно взятого звена цепочки (парциальной системы) рассматривается генератор, описываемый системой обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным устойчивым циклом. Например, в работах [3, 22, 23] бралась одна и та же парциальная система

$$\dot{u} = u - d|u|^2 u, \quad d = 1 + ic_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad (10.1)$$

где u — комплекснозначная функция, но рассматривались различные отвечающие ей цепочки. А именно, в [3, 22] изучалась цепочка однонаправленно связанных генераторов (10.1), т. е. система вида

$$\dot{u}_j + \alpha(u_j - u_{j-1}) = u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (10.2)$$

а в [23] — аналогичная цепочка диффузионно связанных генераторов

$$\dot{u}_j = \alpha(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad j = 1, \dots, N, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (10.3)$$

где $u_0 = u_N$, $u_{N+1} = u_1$, $\operatorname{Re} \alpha > 0$. Было установлено, что в обоих случаях при достаточно большом количестве звеньев в соответствующей системе может наблюдаться хаотическое поведение, обусловленное коллективным взаимодействием парциальных осцилляторов (для цепочки (10.3) наличие хаоса при достаточно больших N проиллюстрировано нами в п. 8.1).

Предположим теперь, что в цепочках (10.2), (10.3) или в какой-либо аналогичной цепочке каждое звено заменено на генератор с распределенными параметрами, в котором реализуется феномен буферности в простейшем его варианте, когда речь идет о циклах. В итоге получим систему, имеющую (при определенных дополнительных условиях) достаточно большое число сосуществующих хаотических аттракторов. Как будет показано ниже при рассмотрении конкретных примеров, для того чтобы добиться требуемого эффекта вовсе не обязательно брать цепочку из большого числа звеньев, как это обычно делается в случае сосредоточенных осцилляторов. Достаточно ограничиться некоторым минимально допустимым их количеством.

Приступим к математическому описанию проблемы. В качестве парциальной системы при построении интересующей нас цепочки осцилляторов возьмем обобщенное кубическое уравнение Шрёдингера и дополним его граничными условиями 2π -периодичности. В итоге получим краевую задачу

$$u_t + i\sigma_0 u_{xx} = u - d|u|^2 u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (10.4)$$

где $u = u(t, x)$ — комплекснозначная функция, $d = 1 + ic_0$, а c_0 , σ_0 — положительные параметры, связанные неравенством

$$\sigma_0 > 2c_0. \quad (10.5)$$

Приведенную задачу будем рассматривать как эволюционную систему в фазовом пространстве: $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, где E — гильбертово пространство 2π -периодических функций класса W_2^2 . Подчеркнем, что выбранная таким способом парциальная система обладает требуемым свойством буферности. Действительно, как показывает несложная проверка, краевая задача (10.4) имеет счетное число автомодельных циклов (бегущих волн)

$$u = \exp[i(\sigma_0 n^2 - c_0)t + inx], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10.6)$$

которые являются устойчивыми (в метрике $E \times E$) при условии (10.5) и неустойчивыми при выполнении строго противоположного неравенства.

Рассмотрим, далее, цепочку диффузионно связанных осцилляторов (10.4), т. е. систему вида

$$u_t + i\sigma_0 u_{xx} + i\mu \Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad u(t, x + 2\pi) \equiv u(t, x), \quad (10.7)$$

где $u = \operatorname{colon}(u_1, \dots, u_N)$, $|u|^2 = \operatorname{colon}(|u_1|^2, \dots, |u_N|^2)$; $u_j = u_j(t, x)$, $j = 1, \dots, N$, комплекснозначные функции; натуральное $N \geq 5$ произвольно фиксировано; $\mu > 0$ — малый параметр; $*$ — операция покомпонентного умножения векторов, а матрица связи Λ размера $N \times N$ задана равенством

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как будет установлено ниже, при выполнении условия (10.5) эта система имеет счетное число устойчивых N -мерных торов, причем при некоторых дополнительных ограничениях на параметр c_0 каждый из них является носителем хаотического аттрактора.

10.2. Основной результат. Рассмотрим сначала отвечающую задаче (10.7) точечную модель, т. е. систему

$$\dot{u} + i\mu \Lambda u = u - d|u|^2 * u, \quad (10.8)$$

и убедимся, что при всех достаточно малых $\mu > 0$ она имеет глобально экспоненциально устойчивый N -мерный инвариантный тор. С этой целью сначала сделаем в ней замены $u_j = \rho_j \exp(i\tau_j)$, $j = 1, \dots, N$, где $\rho_j > 0$, $0 \leq \tau_j \leq 2\pi \pmod{2\pi}$. В результате она преобразуется к аналогичному (8.19)–(8.21) виду:

$$\dot{\rho}_j = \rho_j - \rho_j^3 + \mu[\rho_{j+1} \sin \alpha_j - \rho_{j-1} \sin \alpha_{j-1}], \quad j = 1, \dots, N, \quad (10.9)$$

$$\dot{\alpha}_j = -c_0(\rho_{j+1}^2 - \rho_j^2) - \mu \left[\frac{\rho_{j+2}}{\rho_{j+1}} \cos \alpha_{j+1} + \left(\frac{\rho_j}{\rho_{j+1}} - \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} \right) \cos \alpha_j - \frac{\rho_{j-1}}{\rho_j} \cos \alpha_{j-1} \right], \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (10.10)$$

$$\dot{\tau}_N = -c_0 \rho_N^2 - \mu \left[\frac{\rho_{N-1}}{\rho_N} \cos \alpha_{N-1} - 1 \right], \quad (10.11)$$

где $\tau_0 = \tau_1$, $\tau_{N+1} = \tau_N$, $\rho_0 = \rho_1$, $\rho_{N+1} = \rho_N$, $\alpha_j = \tau_{j+1} - \tau_j$.

Обратим внимание, что требуемый глобально устойчивый инвариантный тор очевидным образом существует у системы (10.9)–(10.11) при $\mu = 0$. В этом случае он задается равенствами $\rho_j = 1$, $j = 1, \dots, N$, а движения на нем описываются уравнениями $\dot{\alpha}_j = 0$, $j = 1, \dots, N-1$, $\dot{\tau}_N = -c_0$. Заметим, далее, что переход от случая $\mu = 0$ к значениям $0 < \mu \ll 1$ осуществляется в точности по описанной в п. 8.2 схеме. Тем самым, мы можем утверждать, что при малых $\mu > 0$ интересующий нас тор сохраняется и задается аналогичными (8.22) равенствами

$$\rho_j = 1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N, \quad (10.12)$$

где 2π -периодические по α_k , $k = 1, \dots, N-1$, функции ψ_j удовлетворяют аналогичным (8.23) соотношениям

$$\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = \frac{1}{2} (\sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1}), \quad j = 1, \dots, N. \quad (10.13)$$

Движения же на данном торе описываются аналогичной (8.24) системой

$$\dot{\alpha}_j = \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad \dot{\tau}_N = -c_0 + \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad (10.14)$$

где

$$\Phi_j|_{\mu=0} = -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1; \quad \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, 0) = c_0 \sin \alpha_{N-1} - \cos \alpha_{N-1} + 1. \quad (10.15)$$

Лемма 10.1. *Найдется такое достаточно малое число $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (10.7) имеет пространственно однородный (не зависящий от x) инвариантный тор*

$$u_j = \exp(i\tau_j)[1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)], \quad j = 1, \dots, N, \quad (10.16)$$

движения на котором задаются системой (10.14). Данный тор экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) в метрике фазового пространства $E^{2N} = E \times \dots \times E$ при $\sigma_0 - 2c_0 > 0$ (< 0).

В части существования лемма уже доказана, поскольку найденный выше инвариантный тор (10.16) системы (10.8) является одновременно и пространственно однородным тором задачи (10.7). Для исследования же его свойств устойчивости достаточно положить $\mu = 0$. Действительно, в этом случае рассматриваемый тор представляет собой прямое

произведение N независимых циклов $u_j = \exp(-ic_0 t)$, $j = 1, \dots, N$, каждый из которых устойчив в своей парциальной системе:

$$\partial u_j / \partial t + i\sigma_0 \partial^2 u_j / \partial x^2 = u_j - d|u_j|^2 u_j, \quad u_j(t, x + 2\pi) \equiv u_j(t, x)$$

при выполнении условия (10.5) и неустойчив при строгом его нарушении.

Проблему нахождения других аттракторов задачи (10.7), отличных от однородного тора (10.16), существенно облегчает так называемый *принцип самоподобия* [71]. Суть этого принципа заключается в следующем. Выполним в (10.7) замену $u(t, x) = T_n[v(t, x)]$, где

$$T_n[v(t, x)] = v(t, 2\sigma_0 n t + x) \exp[i(\sigma_0 n^2 t + n x)], \quad (10.17)$$

n — произвольное целое число, а затем перейдем к новой пространственной переменной $\varphi = 2\sigma_0 n t + x$. В результате для функции $v = v(t, \varphi)$ с точностью до обозначений получим прежнюю краевую задачу:

$$v_t + i\sigma_0 v_{\varphi\varphi} + i\mu \Lambda v = v - d|v|^2 * v, \quad v(t, \varphi + 2\pi) \equiv v(t, \varphi).$$

Иными словами, оператор (10.17) переводит решение $u(t, x)$ задачи (10.7) в решение $T_n[u(t, x)]$ той же самой краевой задачи.

Из принципа самоподобия вытекают два важных следствия. Во-первых, пусть в фазовом пространстве E^{2N} краевой задачи (10.7) имеется компактное множество A , инвариантное относительно траекторий:

$$\begin{aligned} (\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) : \operatorname{Re} u &= (\operatorname{Re} u_1, \dots, \operatorname{Re} u_N), \\ \operatorname{Im} u &= (\operatorname{Im} u_1, \dots, \operatorname{Im} u_N) \end{aligned} \quad (10.18)$$

(как обычно, это означает, что если $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in A$ при $t = 0$, то аналогичное включение справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$). Тогда, применяя к каждой траектории (10.18) из A оператор

$$\widetilde{T}_n : (\operatorname{Re} u(t, x), \operatorname{Im} u(t, x)) \rightarrow (\operatorname{Re} T_n[u(t, x)], \operatorname{Im} T_n[u(t, x)]), \quad (10.19)$$

получим серию множеств

$$A_n = \widetilde{T}_n(A), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (10.20)$$

также инвариантных для траекторий задачи (10.7). Во-вторых, если в предыдущем случае A — аттрактор краевой задачи (10.7), то ее аттракторами будут и все множества (10.20). Таким образом, если известен какой-либо один из аттракторов A задачи (10.7), то «тиражируя» его с помощью оператора (10.19), получаем счетное их число.

Возвращаясь к интересующей нас проблеме, в качестве множества A возьмем инвариантный тор (10.16) задачи (10.7) и применим к нему описанный выше принцип самоподобия. В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 10.1. При выполнении условия (10.5) существует такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при каждом $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (10.7) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых инвариантных торов

$$A_n: \{u_j = \exp[i(\tau_j + nx)](1 + \mu\psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), \\ j = 1, \dots, N\}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (10.21)$$

движения на которых описываются системами

$$\dot{\alpha}_j = \mu\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \\ \dot{\tau}_N = \sigma_0 n^2 - c_0 + \mu\Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (10.22)$$

где, подчеркнем, функции ψ_j , Φ_j , Ψ — те же, что и в (10.12), (10.14).

Убедимся, наконец, что при определенном выборе параметра c_0 каждый тор (10.21) является носителем хаотического аттрактора. С этой целью рассмотрим отщепляющуюся от (10.22) систему для α_j , $j = 1, \dots, N-1$, выполним в ней замену времени $\mu t \rightarrow t$ и отбросим в правых частях получившейся системы слагаемые порядка малости μ и выше. В результате с учетом равенств (10.15) она преобразуется к аналогичному (8.26) виду:

$$\dot{\alpha}_j = -c_0(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \\ j = 1, \dots, N-1, \quad (10.23)$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$.

Численный анализ системы (10.23) показал, что, например, при $c_0 = 0,6$, $N = 5$ она имеет хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями $\lambda_1 \approx 0,194$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \approx -0,08$, $\lambda_4 \approx -1,507$, а при $c_0 = 0,6$, $N = 6$ — аттрактор с показателями $\lambda_1 \approx 0,247$, $\lambda_2 \approx 0,055$, $\lambda_3 = 0$, $\lambda_4 \approx -0,202$, $\lambda_5 \approx -1,579$. Аналогичное справедливо и при других значениях c_0 . Более того, на основании проделанного в п. 8.2 численного анализа можно утверждать, что с ростом N ляпуновская размерность d_L хаотического аттрактора системы (10.23) неограниченно возрастает. Связано это с тем, что после замены $c_0 t \rightarrow t$ рассматриваемая система преобразуется к виду (8.26) при $\varkappa = 1/c_0$.

10.3. Случай граничных условий Неймана. В этом пункте придадим полученным выше результатам некоторую общность. А именно, проиллюстрируем реализуемость феномена хаотической буферности в рамках краевой задачи

$$u_t + iu_{xx} + i\varepsilon\mu\Lambda u = \varepsilon[u - d|u|^2 * u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (10.24)$$

где $\varepsilon = 1/\sigma_0$, получающейся из (10.7) после нормировки времени $\sigma_0 t \rightarrow t$ и замены граничных условий.

Наиболее просто динамические свойства краевой задачи (10.24) выявляются при дополнительном предположении о малости ε , которое

всюду ниже считаем выполненным. Действительно, рассмотрим сначала отвечающую цепочке (10.24) парциальную систему, т. е. краевую задачу

$$u_t + iu_{xx} = \varepsilon[u - d|u|^2u], \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0 \quad (10.25)$$

в фазовом пространстве $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in E \times E$, $E = \overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}_2^2$ — соболевское пространство функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Неймана. Как установлено в монографии [56], при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ краевая задача (10.25) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых (в метрике $E \times E$) автомодельных циклов

$$u_n(t, x, \varepsilon) = u_n(x, \varepsilon) \exp[i\omega_n(\varepsilon)t], \quad n \geq 1, \quad \omega_n \in \mathbb{R}, \quad (10.26)$$

где достаточно гладкие по своим переменным функции u_n , ω_n таковы, что равномерно по $n \geq 1$, $x \in [0, \pi]$

$$u_n(x, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos nx + O(\varepsilon), \quad \omega_n(\varepsilon) = n^2 - c_0\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (10.27)$$

Циклы (10.26), (10.27) играют здесь ту же роль, что и бегущие волны (10.6) в случае краевой задачи (10.7). А именно, как будет показано ниже, устойчивые циклы $u_j = u_n(t, x, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, N$, с одинаковыми номерами n , существующие при $\mu = 0$ в парциальных системах

$$\partial u_j / \partial t + i \partial^2 u_j / \partial x^2 = \varepsilon[u_j - d|u_j|^2 u_j], \quad \partial u_j / \partial x|_{x=0} = \partial u_j / \partial x|_{x=\pi} = 0,$$

при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы. При этом, что самое главное, количество таких торов счетно и при надлежащем выборе параметра c_0 каждый из них содержит хаотический аттрактор.

Последовательность дальнейших действий аналогична изложенному в п. 10.2: сначала устанавливается существование одного иницирующего инвариантного тора, а после этого осуществляется его «тиражирование» с помощью некоторого аналога описанного выше принципа самоподобия.

Остановимся сначала на алгоритмической части проблемы. Точнее говоря, убедимся, что система (10.24) имеет формальное интегральное многообразие вида

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \varepsilon^2 v_2(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) + \dots, \quad (10.28)$$

где $\xi = \operatorname{colon}(\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\bar{\xi} = \operatorname{colon}(\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_N)$, а комплексные параметры ξ_j , $j = 1, \dots, N$, на многообразии эволюционируют во времени по закону

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon \Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \varepsilon^2 \Delta_2(\xi, \bar{\xi}, \mu) + \dots \quad (10.29)$$

Предполагаем еще, что вектор-функции v_k , Δ_k , $k \geq 1$, удовлетворяют при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ дополнительным требованиям:

$$v_k(x, \mu, \exp(i\alpha)\xi, \exp(-i\alpha)\bar{\xi}) = \exp(i\alpha) v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (10.30)$$

$$\Delta_k(\exp(i\alpha)\xi, \exp(-i\alpha)\bar{\xi}, \mu) = \exp(i\alpha) \Delta_k(\xi, \bar{\xi}, \mu), \quad (10.31)$$

а также условию

$$\int_0^\pi v_k(x, \mu, \xi, \bar{\xi}) \cos x \, dx = 0. \quad (10.32)$$

Итак, подставим соотношения (10.28), (10.29) в (10.24) и будем последовательно приравнивать коэффициенты при одинаковых степенях ε . В результате на первом шаге для отыскания v_1 приходим к краевой задаче

$$i\left(\frac{\partial v_1}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_1}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi}\right) + i \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v_1}{\partial x} \Big|_{x=\pi} = 0. \quad (10.33)$$

Ее анализ существенно опирается на тот факт, что фигурирующие в (10.28) коэффициенты v_k должны удовлетворять равенствам (10.30). Действительно, дифференцируя указанные равенства по α и полагая затем $\alpha = 0$, убеждаемся, что

$$\frac{\partial v_k}{\partial \xi} \xi - \frac{\partial v_k}{\partial \bar{\xi}} \bar{\xi} = v_k, \quad k \geq 1. \quad (10.34)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что интересующая нас краевая задача (10.33) преобразуется к виду

$$iLv_1 = [\xi - i\mu\Lambda\xi - d\xi * \bar{\xi} * \xi \cos^2 x] \cos x - \Delta_1 \cos x, \\ \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{dv_1}{dx} \Big|_{x=\pi} = 0, \quad (10.35)$$

где $Lv = d^2v/dx^2 + v$, а переменные $\xi, \bar{\xi}$ рассматриваются как параметры.

Исследование задачи (10.35) уже не вызывает затруднений и проводится по стандартной схеме: сначала из условия ее разрешимости определяем функцию

$$\Delta_1 = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4} d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (10.36)$$

а затем находим и само решение v_1 , для которого с учетом соответствующего равенства (10.32) получается формула

$$v_1 = -\frac{id}{32} \xi * \bar{\xi} * \xi \cos 3x. \quad (10.37)$$

Подчеркнем, что функции (10.36), (10.37) обладают требуемыми свойствами (10.30), (10.31) и, в частности, для v_1 справедливо соотношение (10.34) при $k = 1$. Поэтому сделанный выше переход от задачи (10.33) к (10.35), носивший условный характер, оказывается правомерным. Отметим также, что хотя продолжение алгоритма нахождения

коэффициентов рядов (10.28), (10.29) не вызывает затруднений, но для наших целей достаточно уже имеющейся информации.

На следующем этапе обратимся к построенной выше системе первого приближения

$$\dot{\xi} = i\xi + \varepsilon \Delta_1(\xi, \bar{\xi}, \mu)$$

на многообразии (10.28) и выполним в ней последовательно замены $\xi \exp(-it) \rightarrow \xi$, $\bar{\xi} \exp(it) \rightarrow \bar{\xi}$ и $\varepsilon t \rightarrow t$. В результате приходим к системе

$$\dot{\xi} = \xi - i\mu\Lambda\xi - \frac{3}{4}d\xi * \bar{\xi} * \xi, \quad (10.38)$$

которая с точностью до нормировок и переобозначений совпадает с (10.8). А отсюда и из содержащегося в п. 10.2 анализа заключаем, что система (10.38) имеет глобально устойчивый N -мерный инвариантный тор

$$\xi_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) (1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)), \quad j = 1, \dots, N, \quad (10.39)$$

где функции ψ_j те же, что и в (10.12).

Подведем некоторый итог. Из проделанных построений следует, что равенством

$$u = \xi \cos x + \varepsilon v_1(x, \mu, \xi, \bar{\xi}), \quad (10.40)$$

в котором учтены соотношения (10.39), задается приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной задачи (10.24), а система уравнений на этом торе имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \varepsilon \mu \Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \\ \dot{\tau}_N &= 1 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu), \quad j = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (10.41)$$

где функции Φ_j , Ψ заимствованы из (10.14). Существование соответствующего точного инвариантного тора с главной асимптотикой (10.39)–(10.41) вытекает из общих результатов монографии [73]. А именно, справедливо следующее утверждение, представляющее собой аналог леммы 10.1.

Лемма 10.2. *Найдутся такие достаточно малые ε_0 , $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ краевая задача (10.24) имеет экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор*

$$\begin{aligned} u_j &= \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos x + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon H_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu, x) \right], \quad j = 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (10.42)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_j &= \varepsilon \mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon G_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu) \right], \\ &\quad j = 1, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (10.43)$$

$$\dot{\tau}_N = 1 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \varepsilon^2 \Omega(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \varepsilon, \mu), \quad (10.44)$$

где все функции достаточно гладко зависят от своих переменных и являются 2π -периодическими по α_k , $k = 1, \dots, N-1$.

Сформулированная лемма нуждается в некоторых пояснениях. Отметим, во-первых, что система (10.24) не меняется при замене $\exp(i\alpha)u \rightarrow u$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Именно поэтому правые части формул (10.42) оказываются пропорциональными $\exp(i\tau_j)$, а все остальные фигурирующие в (10.42)–(10.44) функции зависят не от самих фазовых переменных τ_j , $j = 1, \dots, N$, а от их разностей $\alpha_k = \tau_{k+1} - \tau_k$. Во-вторых, при $\mu = 0$ тор (10.42)–(10.44) представляет собой прямое произведение N одинаковых устойчивых циклов $u_j = u_1(t, x, \varepsilon)$, $j = 1, \dots, N$ (см. (10.26), (10.27) при $n = 1$), т. е. записывается в виде

$$u_j = u_1(\tau_j, x, \varepsilon), \quad \dot{\tau}_j = \omega_1(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N. \quad (10.45)$$

Тем самым, становится понятной причина его устойчивости при малых $\mu > 0$, а также проясняется происхождение множителя μ в правых частях системы (10.43).

Инвариантный тор, доставляемый леммой 10.2, является искомым иницирующим тором. Процедура же его «тиражирования» в данном случае такова. Пусть $u = u(t, x, \varepsilon)$ — произвольное решение краевой задачи (10.24). Продолжим его по переменной x сначала на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, при любом натуральном n функция $u(n^2 t, nx, \varepsilon/n^2)$ также будет решением задачи (10.24). Применяя, далее, эту процедуру при каждом n ко всем решениям, лежащим на торе (10.42)–(10.44), получим счетное число N -мерных инвариантных торов. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Теорема 10.2. При всех достаточно малых независимых $\varepsilon, \mu > 0$ краевая задача (10.24) имеет счетное число экспоненциально орбитально устойчивых N -мерных инвариантных торов

$$u_j = \frac{2}{\sqrt{3}} \exp(i\tau_j) \left[(1 + \mu \psi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu)) \cos nx + \frac{\varepsilon}{n^2} H_j \left(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu, nx \right) \right], \quad j = 1, \dots, N; \quad (10.46)$$

$$\dot{\alpha}_j = \varepsilon \mu \left[\Phi_j(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon}{n^2} G_j \left(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu \right) \right], \quad j = 1, \dots, N-1; \quad (10.47)$$

$$\dot{\tau}_N = n^2 - \varepsilon c_0 + \varepsilon \mu \Psi(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \mu) + \frac{\varepsilon^2}{n^2} \Omega \left(\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \frac{\varepsilon}{n^2}, \mu \right), \quad (10.48)$$

где $n = 1, 2, \dots$, а функции ψ_j , H_j , Φ_j , G_j , Ψ , Ω взяты из (10.42)–(10.44).

Причина, по которой все торы (10.46)–(10.48) оказываются устойчивыми, — та же самая, что и в случае тора (10.42)–(10.44). Действи-

тельно, при $\mu = 0$ эти торы принимают аналогичный (10.45) вид:

$$u_j = u_n(\tau_j, x, \varepsilon) \quad \dot{\tau}_j = \omega_n(\varepsilon), \quad j = 1, \dots, N,$$

где функции u_n , ω_n , $n \geq 1$, заимствованы из (10.26). Далее, как показано в [56], циклы (10.26) краевой задачи (10.25) обладают свойством равномерной устойчивости, т.е. существует такая независимая от ε и $n \geq 1$ постоянная $\gamma_0 > 0$, что все характеристические показатели этих циклов (за исключением, естественно, простых нулевых) лежат в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 \varepsilon\}$. И наконец, опираясь на развитую в [56] методику, можно показать, что свойство равномерной устойчивости, имеющее место для торов (10.46)–(10.48) при $\mu = 0$, сохраняется и при всех достаточно малых $\mu > 0$.

Из проделанного анализа следует, что краевая задача (10.24) обладает интересующим нас свойством хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к системе (10.47), выполним в ней замену $\varepsilon \mu t \rightarrow t$ и отбросим асимптотически малые (равномерно по $n \geq 1$) слагаемые. В итоге она примет вид (10.23). Таким образом, остается сослаться на результаты численного счета, упомянутые в п. 10.2.

10.4. Случай однонаправленно связанных осцилляторов.

Разобранные выше примеры представляют собой цепочки диффузионно связанных генераторов. Однако феномен хаотической буферности может наблюдаться и при другом характере связи. В качестве примера приведем систему из трех обобщенных кубических уравнений Шрёдингера, однонаправленно связанных в кольцо. Точнее говоря, рассмотрим цепочку

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + \varepsilon[iu_{k-1} + d|u_k|^2 u_k] = 0, \quad (10.49)$$

$$u_k|_{x=0} = u_k|_{x=\pi} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.50)$$

где $u_k = u_k(t, x)$ — комплекснозначные функции, причем $u_0(t, x) \equiv u_3(t, x)$. Считаем, что $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $d = 1 + ic_0$, а $c_0 \in \mathbb{R}$ и $\sigma_0 > 0$ — некоторые постоянные порядка единицы. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий $\operatorname{Re} u_k(0, x)$, $\operatorname{Im} u_k(0, x)$, $k = 1, 2, 3$) задачи (10.49), (10.50) возьмем $E^6 = E \times \dots \times E$, где $E = \dot{W}_2^2(0, \pi)$, а через \dot{W}_2^2 в данном случае обозначено соответствующее соболевское пространство функций, удовлетворяющих граничным условиям (10.50).

Для отыскания возможных автоколебательных режимов системы (10.49), (10.50) воспользуемся методом квазинормальных форм (см. п. 5.3 и 6.2). А именно, подставим в нее асимптотические ряды по целым степеням ε :

$$u_k = u_{k,0}(t, \tau, x) + \varepsilon u_{k,1}(t, \tau, x) + \dots, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.51)$$

где $\tau = \varepsilon t$, $u_{k,j}$, $j \geq 0$, — формальные тригонометрические ряды переменной t , причем

$$u_{k,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(i\sigma_0 n^2 t) z_{n,k}(\tau) \sin nx, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.52)$$

а $z_{n,k}$, $n \geq 1$, $k = 1, 2, 3$, — некоторые пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды колебаний. Приравнявая, далее, в (10.49), (10.50) коэффициенты при ε , для $u_{k,1}$ приходим к линейным неоднородным краевым задачам вида

$$\frac{\partial u_{k,1}}{\partial t} + i\sigma_0 \frac{\partial^2 u_{k,1}}{\partial x^2} = g_k(t, \tau, x), \quad u_{k,1}|_{x=0} = u_{k,1}|_{x=\pi} = 0, \quad (10.53)$$

где $g_k = -\partial u_{k,0}/\partial \tau - [iu_{k-1,0} + d|u_{k,0}|^2 u_{k,0}]$, а переменная τ рассматривается как параметр.

Отметим, что получившиеся задачи (10.53) разрешимы в классе формальных тригонометрических рядов в том и только в том случае, когда в их правых частях g_k отсутствуют гармоники вида $\exp(i\sigma_0 n^2 t) \sin nx$, $n \geq 1$. Поэтому приравняем коэффициенты при упомянутых гармониках к нулю. В результате для определения фигурирующих в (10.51), (10.52) комплексных амплитуд $z_{n,k}$ после нормировок $\sqrt{3} z_{n,k}/2 \rightarrow z_{n,k}$ приходим к счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - d \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} |z_{m,k}|^2 \right] z_{n,k}, \quad n \geq 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.54)$$

где $z_{n,0} = z_{n,3}$, $n \geq 1$, а точка — дифференцирование по τ .

Получившуюся систему (10.54) будем рассматривать в дальнейшем как самостоятельный объект исследования. Точнее говоря, поставим вопрос об аттракторах этой системы в фазовом пространстве \mathcal{Z} (над полем действительных чисел), состоящем из бесконечномерных векторов

$$z = (z_{1,1}, \bar{z}_{1,1}, z_{1,2}, \bar{z}_{1,2}, z_{1,3}, \bar{z}_{1,3}, \dots, z_{n,1}, \bar{z}_{n,1}, z_{n,2}, \bar{z}_{n,2}, z_{n,3}, \bar{z}_{n,3}, \dots) \quad (10.55)$$

с комплексными координатами, для которых конечна норма

$$\|z\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^3 |z_{n,k}|^2 \right)^{1/2} \quad (10.56)$$

(в этом случае построенная по вектору (10.55) функция (10.52) принадлежит пространству $L_2(0, \pi)$ по переменной x). Заметим, что поскольку система (10.54) порождает эволюционное уравнение в пространстве \mathcal{Z} с ограниченной и гладкой по Фреше правой частью, то локальная

однозначная разрешимость для нее задачи Коши с произвольным начальным условием из \mathcal{Z} вытекает из результатов монографии [33].

В первую очередь будем интересоваться существованием у системы (10.54) так называемых *одномодовых аттракторов*. В связи с этим фиксируем натуральное n и обозначим через Ω_n ее инвариантное множество, задающееся равенством:

$$\Omega_n = \{z \in \mathcal{Z} : z_{m,k} = 0, k = 1, 2, 3, \quad (10.57)$$

$$\text{при всех } m \neq n; (z_{n,1}, z_{n,2}, z_{n,3}) = (v_1, v_2, v_3) \in \Omega\},$$

где Ω — некоторый аттрактор шестимерной системы

$$\dot{v}_k = -iv_{k-1} - d|v_k|^2 v_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.58)$$

в которой $v_0 = v_3$. Подчеркнем, что в силу диссипативности системы (10.58) совокупность ее возможных аттракторов Ω заведомо не пуста.

Перейдем к вопросу об устойчивости одномодовых инвариантных множеств (10.57) по «дополнительным» направлениям $z_{m,k}$, $m \neq n$. Проводя линеаризацию системы (10.54) на произвольной траектории $\{z_{m,k} = 0, z_{n,k} = v_k(\tau), k = 1, 2, 3\}$ из Ω_n , получаем счетное число одинаковых шестимерных линейных систем

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3}d|v_k(\tau)|^2 h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.59)$$

где $h_k = z_{m,k}$, $m \neq n$. Таким образом, вся счетная совокупность инвариантных множеств Ω_n , $n \geq 1$, устойчива или неустойчива одновременно и в случае устойчивости эти множества будем называть *одномодовыми аттракторами*.

Простейшими одномодовыми инвариантными множествами являются так называемые *автомодельные циклы*:

$$\{z \in \mathcal{Z} : z_{m,k} = 0 \text{ при } m \neq n, z_{n,k} = v_k^0 \exp(i\omega_0 \tau), k = 1, 2, 3\}, \quad n \geq 1, \quad (10.60)$$

где

$$v_1^0 = -\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \quad v_2^0 = -\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\xi_0, \\ v_3^0 = \xi_0, \quad \xi_0 = \sqrt[4]{12}/2, \quad \omega_0 = 1/2 - c_0\xi_0^2.$$

Что же касается устойчивости этих циклов, то здесь справедливо следующее утверждение.

Теорема 10.3. Автомодельные циклы (10.60) системы (10.54) экспоненциально орбитально устойчивы при условии $c_0 \in (c_-, c_+)$, где

$$c_- = 12\sqrt{3} - 5\sqrt{23} \approx -3,19455, \quad (10.61)$$

$$c_+ = 12\sqrt{3} + 5\sqrt{23} \approx 44,7638,$$

и неустойчивы в случае $c_0 \in \mathbb{R} \setminus [c_-, c_+]$.

Для доказательства заметим, что циклам (10.60) отвечает система (10.59) с постоянной матрицей, собственные значения которой всегда имеют отрицательные действительные части. Таким образом, проблема сводится к исследованию устойчивости автомодельного цикла

$$v_k = v_k^0 \exp(i\omega_0 \tau), \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.62)$$

вспомогательной системы (10.58). При анализе последней удобно перейти к полярным координатам $v_k = \xi_k \exp(i\varphi_k)$, $\xi_k > 0$, $0 \leq \varphi_k \leq 2\pi$, $k = 1, 2, 3$, поскольку от получающейся в итоге шестимерной системы для ξ_k , φ_k , $k = 1, 2, 3$, отщепляется пятимерная система для ξ_j , $j = 1, 2, 3$, $\psi_1 = \varphi_3 - \varphi_1$, $\psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$, имеющая вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_3 \sin \psi_1 - \xi_1^3, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1 \sin \psi_2 - \xi_2^3, \quad \dot{\xi}_3 = -\xi_2 \sin(\psi_1 + \psi_2) - \xi_3^3, \\ \dot{\psi}_1 &= c_0 (\xi_1^2 - \xi_3^2) + \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1 - \frac{\xi_2}{\xi_3} \cos(\psi_1 + \psi_2), \\ \dot{\psi}_2 &= c_0 (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \cos \psi_2 - \frac{\xi_3}{\xi_1} \cos \psi_1. \end{aligned} \quad (10.63)$$

Остается добавить, что циклу (10.62) в системе (10.63) соответствует положение равновесия

$$\begin{aligned} O = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \psi_1^0, \psi_2^0): \quad \xi_1^0 = \xi_2^0 = \xi_3^0 = \sqrt[4]{12}/2, \\ \psi_1^0 = \psi_2^0 = 2\pi/3 \end{aligned} \quad (10.64)$$

с требуемыми в теореме свойствами устойчивости.

Дальнейший анализ системы (10.54) проведем сначала для случая $c_0 \geq 0$. Из установленной выше теоремы следует, что при $0 \leq c_0 < c_+$ она имеет счетное число устойчивых автомодельных циклов (10.60), а при последующем увеличении параметра c_0 все эти циклы теряют устойчивость. На вопрос же о том, что происходит в ней при $c_0 > c_+$ позволяет ответить численное интегрирование вспомогательной системы (10.63). Было обнаружено, что при увеличении параметра c_0 в упомянутой системе наблюдаются следующие фазовые перестройки.

1). При $0 \leq c_0 < c_{0,1}^+$, где $c_{0,1}^+ = c_+$ (см. (10.61)), система (10.63) имеет единственное экспоненциально устойчивое состояние равновесия (10.64), которое при прохождении c_0 через критическое значение $c_{0,1}^+$ мягко теряет устойчивость с последующим рождением устойчивого предельного цикла C_0 .

2). При $c_{0,1}^+ < c_0 < c_{0,2}^+$, где $c_{0,2}^+ \approx 48,57$, цикл C_0 , о котором говорилось чуть выше, является единственным аттрактором рассматриваемой системы.

3). При $c_0 = c_{0,2}^+$ происходит бифуркация удвоения периода: цикл C_0 становится неустойчивым и от него ответвляется устойчивый цикл C_1 условно двойного по отношению к C_0 периода. Этот цикл сохраняет устойчивость на интервале $c_{0,2}^+ < c < c_{0,4}^+$, где $c_{0,4}^+ \approx 54,42$, а при про-

хождении c_0 через значение $c_{0,4}^+$ теряет ее жестко (т.е. не порождает других аттракторов при $c_0 > c_{0,4}^+$).

4). Первый хаотический аттрактор возникает нелокально при $c_0 = c_{0,3}^+$, где $c_{0,3}^+ \approx 54,37$, и на интервале $c_{0,3}^+ < c_0 < c_{0,4}^+$ сосуществует с устойчивым циклом C_1 .

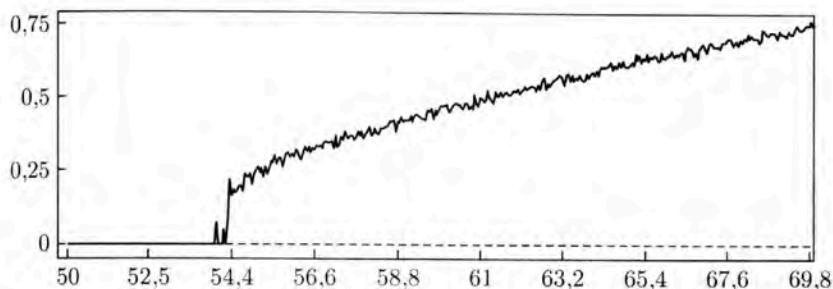


Рис. 10.1

Приведенные факты иллюстрирует показанный на рис. 10.1 график старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(c_0)$ аттрактора системы (10.63), построенный на отрезке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам с шагом h по параметру c_0 , равным 0,05 (в случае $c_{0,3}^+ < c_0 < c_{0,4}^+$ этот показатель вычислялся, естественно, для хаотического аттрактора). Из вида данного графика можно заключить, что показатель $\lambda_{\max}(c_0)$ с увеличением c_0 растет, хотя и немонотонно, и при всех $c_0 \geq 54,7$ заведомо отделен от нуля (последний вывод сделан на основе контрольных расчетов, выполненных при

$$c_0 \in \{[54,7; 55,2], [54,803; 54,807], [54,8037; 54,8039]; [54,9; 55,1]$$

с шагами h по c_0 , равными соответственно 0,0025; 0,0001; 0,00002 и 0,001).

Возвращаясь к исходной системе (10.54), заметим следующее. Любому аттрактору Ω_0 системы (10.63) соответствует аттрактор Ω системы (10.58) на единицу большей размерности. Далее, множество Ω , в свою очередь, порождает счетное число одномодовых инвариантных множеств (10.57) системы (10.54). Напомним также, что за устойчивость всей совокупности этих множеств отвечает одна и та же линейная система (см. (10.59))

$$\dot{h}_k = -ih_{k-1} - \frac{4}{3} d\xi_k^2(\tau)h_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (10.65)$$

где $h_0 = h_3$, а $(\xi_1(\tau), \xi_2(\tau), \xi_3(\tau))$ — произвольная траектория из Ω_0 .

Как показывает численный анализ, при всех рассмотренных выше значениях параметра c_0 старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max}^*(c_0)$ системы (10.65) оказывается отрицательным (см. рис. 10.2, где представлен его график, построенный на промежутке $50 \leq c_0 \leq 70$ по точкам

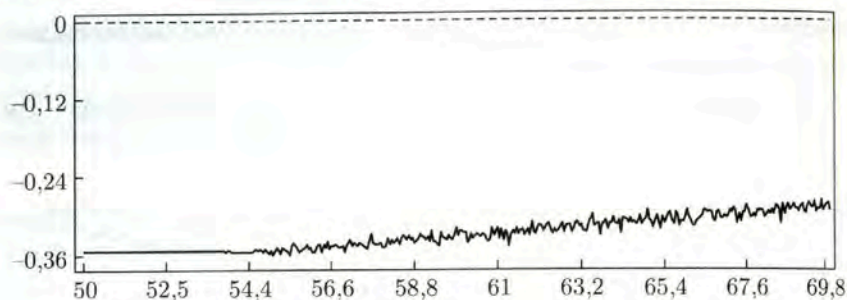


Рис. 10.2

с шагом $h = 0,05$). Таким образом, по крайней мере при $54,7 \leq c_0 \leq 70$ исходная система (10.54) имеет счетное число одномодовых хаотических аттракторов (10.57), а значит, в ней реализуется требуемый феномен хаотической буферности.

Перейдем теперь к случаю $c_0 < 0$. Здесь у вспомогательной системы (10.63) удалось выявить следующие фазовые перестройки.

1). При $c_{0,1}^- < c_0 < 0$, где $c_{0,1}^- = c_-$ (см. (10.61)), как и в предыдущем случае, система (10.63) имеет единственное устойчивое состояние равновесия (10.64).

2). При $c_{0,2}^- < c_0 < c_{0,1}^-$, где $c_{0,2}^- \approx -9,84$, аттрактором системы (10.63) является устойчивый цикл, ответвившийся от состояния равновесия (10.64) при $c_0 = c_{0,1}^-$.

3). При $c_0 = c_{0,2}^-$ упомянутый выше цикл претерпевает первую бифуркацию удвоения, при $c_0 = c_{0,3}^- \approx -10,56$ — вторую и т.д. В результате при $c_0 \approx -10,95$ по фейгенбаумовскому сценарию возникает первый хаотический аттрактор.

4). При последующем уменьшении c_0 порядок и хаос многократно сменяют друг друга. В частности, здесь имеется так называемая зона «дышащего» хаоса $-52,48 \leq c_0 \leq -11$, в которой существует достаточно большое (возможно, счетное) число окон периодичности, т.е. промежутков, в которых хаос сменяется устойчивым циклом. Стабильный же хаос, когда старший ляпуновский показатель положителен и отделен от нуля, наступает при всех $c_0 \leq -52,6$.

Наглядное представление о перечисленных выше особенностях динамики дают графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(c_0)$ аттрактора системы (10.63) и старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}^* = \lambda_{\max}^*(c_0)$ системы (10.65), показанные на рис. 10.3 и 10.4 соответственно (построение данных графиков проводилось на отрезке $-70 \leq c_0 \leq -40$ по точкам с шагом 0,05). Из их вида следует, что при достаточно больших по модулю отрицательных значениях параметра c_0 одномодовые хаотические инвариантные множества (10.57) у системы (10.54) хотя и существуют, но неустойчивы.

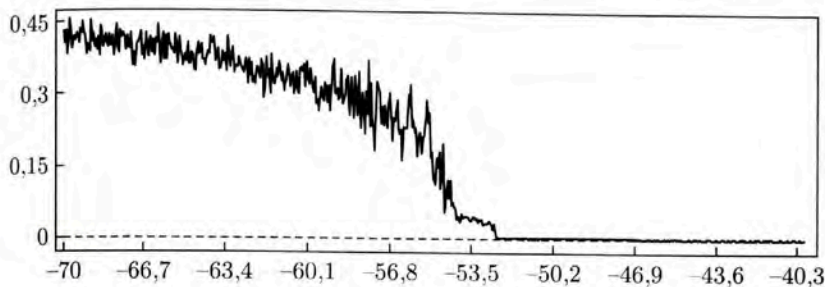


Рис. 10.3

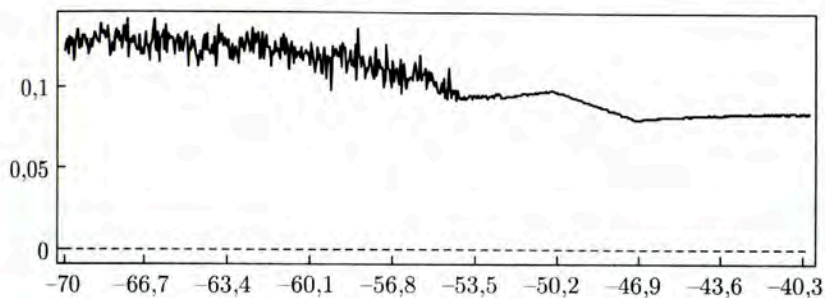


Рис. 10.4

10.5. Существование бесконечномерного хаотического аттрактора. Просуммируем полученные в предыдущем пункте результаты. Нетрудно увидеть, что при достаточно большом $R > 0$ выполняется неравенство $\dot{V}(z)|_{||z||=R} < 0$, где $V(z) = ||z||^2$, $|| \cdot ||$ — норма (10.56), $\dot{V}(z)$ — производная в силу системы (10.54). А это означает, что наша система является диссипативной и, следовательно, мы можем определить для нее максимальный аттрактор A_{\max} по формуле

$$A_{\max} = \bigcap_{t>0} \varphi^t(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} = \{z \in \mathcal{Z} : ||z|| < R\}, \quad (10.66)$$

где φ^t — фазовый поток, порожденный системой (10.54) в пространстве \mathcal{Z} . Подчеркнем, что множество (10.66) заведомо некомпактно, поскольку содержит счетное число инвариантных одномерных подмножеств (10.57). Напомним, далее, что при достаточно больших $c_0 > 0$ все эти подмножества в свою очередь оказываются аттракторами, причем хаотическими, т.е. наблюдается интересующий нас феномен хаотической буферности.

Для того чтобы разобраться со структурой множества (10.66) в случае отрицательных и достаточно больших по модулю значениях c_0 ,

обратимся к конечномерным системам

$$\dot{z}_{n,k} = -iz_{n,k-1} - (1 + ic_0) \left[|z_{n,k}|^2 + \frac{4}{3} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |z_{m,k}|^2 \right] z_{n,k}, \quad (10.67)$$

$$1 \leq n \leq N, \quad k = 1, 2, 3,$$

получающимся из (10.54) при $z_{m,k} = 0$, $m \geq N + 1$. Численный анализ, выполненный при $c_0 = -93$, показывает, что системы (10.67) имеют хаотические аттракторы Σ_N , ляпуновские размерности \mathcal{L}_N которых с ростом N растут примерно по линейному закону:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\approx 10,98, \quad \mathcal{L}_3 \approx 16,2, \quad \mathcal{L}_4 \approx 21,37, \quad \mathcal{L}_5 \approx 26,197, \quad \mathcal{L}_6 \approx 30,58, \\ \mathcal{L}_7 &\approx 34,116, \quad \mathcal{L}_8 \approx 37,63, \quad \mathcal{L}_9 \approx 41,257, \quad \mathcal{L}_{10} \approx 44,46, \\ \mathcal{L}_{11} &\approx 48,179, \quad \mathcal{L}_{12} \approx 51,333 \end{aligned}$$

и т. д. Далее, для количества l_N положительных характеристических показателей аттрактора Σ_N , начиная с номера $N = 5$, справедливо равенство $l_N = N + 2$, а сумма S_N^+ упомянутых показателей при $N \rightarrow \infty$ имеет предел $S^+ \approx 1,6$. Для сравнения заметим, что сумма S_N^- всех отрицательных показателей аттрактора Σ_N по модулю неограниченно растет, причем $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N^-/N = S^-$, где $S^- \approx -0,6$. Добавим еще, что в исходной системе (10.54) аттракторам Σ_N отвечают неустойчивые конечномерные инвариантные множества A_N , для которых $z_{m,k} = 0$, $m \geq N + 1$ (точнее говоря, каждое A_N неустойчиво уже в рамках системы (10.67) с номером $N + 1$).

Перечисленные факты свидетельствуют в пользу гипотезы о том, что аттрактор (10.66) при $c_0 = -93$ является хаотическим и бесконечномерным. Действительно, его старший ляпуновский показатель $\lambda_{\max} = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_{N,\max}$, где $\lambda_{N,\max}$ — старшие показатели инвариантных множеств A_N , положителен и примерно равен 0,68 (значения $\lambda_{N,\max}$ практически совпадают, начиная с номера $N = 3$). Что же касается всех положительных ляпуновских показателей аттрактора A_{\max} , то их количество счетно, а сумма конечна и равна введенной выше величине S^+ .

Для пояснения свойства бесконечномерности заметим, что справедливо очевидное включение $\bigcup_{N \geq 2} A_N \subset A_{\max}$. А отсюда, в свою очередь, следует, что A_{\max} не может содержать конечномерных подмножеств, также являющихся аттракторами. Есть все основания ожидать, что A_{\max} — турбулентный аттрактор в смысле определения 1.6. Однако строгое доказательство этого факта пока отсутствует.

10.6. Заключение. Завершая рассмотрение явления хаотической буферности, отметим следующее. Ситуация, с которой сталкиваемся в случае цепочек осцилляторов (10.7) и (10.24), может показаться излишне идеализированной, поскольку соответствующие им парциаль-

ные системы имеют счетное число устойчивых циклов. Однако данное свойство вовсе не является необходимым для реализации феномена хаотической буферности. Для того чтобы убедиться в этом, в качестве парциальной системы возьмем простейшее нелинейное телеграфное уравнение с граничными условиями Неймана, т. е. краевую задачу

$$u_{tt} - \varepsilon u_t + u - a^2 u_{xx} + u^2 u_t - bu^3 = 0, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (10.68)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$; $a, b = \text{const} > 0$.

Из содержащихся в [73] результатов вытекает существование для каждого натурального m_0 такого достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ краевая задача (10.68) имеет экспоненциально орбитально устойчивые (в метрике фазового пространства $(u, u_t) \in \dot{W}_2^2(0, \pi) \times W_2^1(0, \pi)$) циклы:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_m(\tau, x, \varepsilon), \quad (10.69)$$

$$\frac{d\tau}{dt} = \omega_m(1 + \varepsilon \delta_m(\varepsilon)), \quad m = 1, 2, \dots, m_0.$$

Здесь $\omega_m = \sqrt{1 + a^2 m^2}$, а достаточно гладкие по своим переменным функции $\delta_m(\varepsilon)$, $u_m(\tau, x, \varepsilon)$, $u_m(\tau + 2\pi, x, \varepsilon) \equiv u_m(\tau, x, \varepsilon)$ удовлетворяют равенствам

$$u_m(\tau, x, 0) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \tau \cos mx, \quad \delta_m(0) = -3b/(2\omega_m).$$

Таким образом, в краевой задаче (10.68) наблюдается явление буферности, но количество сосуществующих устойчивых циклов (10.69) здесь заведомо конечно (как следует из [56], оно имеет порядок ε^{-1} при $\varepsilon \rightarrow 0$).

Рассмотрим, далее, цепочку связанных осцилляторов (10.68), т. е. систему вида

$$L(u_j) = \varepsilon \mu (u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}), \quad (10.70)$$

$$\partial u_j / \partial x|_{x=0, x=\pi} = 0,$$

где $j = 1, \dots, N$, через $L(u)$ обозначена левая часть уравнения из (10.68), $u_0 = u_1$, $u_{N+1} = u_N$, а $\mu > 0$ — вспомогательный малый параметр. Используя развитую выше технику, можно показать, что устойчивые циклы (10.69) с одинаковыми номерами m , существующие при $\mu = 0$ в соответствующих парциальных системах, при $\mu > 0$ объединяются в устойчивые N -мерные торы, а поведение решений на этих торах в первом приближении описывается системами

$$\dot{\alpha}_j = -c_m(\sin \alpha_{j+1} - 2 \sin \alpha_j + \sin \alpha_{j-1}) + \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad (10.71)$$

$$j = 1, \dots, N-1,$$

где $\alpha_0 = \alpha_N = 0$, $c_m = 3b/(2\omega_m)$.

Обращаем внимание, что поскольку нас интересует феномен хаотической буферности, то номер m в (10.71), в принципе, должен при-

нимать любые сколь угодно большие значения. Поэтому рассмотрим сразу предельный случай $m = \infty$, в котором получается система

$$\dot{\alpha}_j = \cos \alpha_{j-1} - \cos \alpha_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-1. \quad (10.72)$$

Данная система оказывается консервативной, так как не меняется при заменах $t \rightarrow -t$, $\alpha_j \rightarrow -\alpha_j$, и, что самое главное, при каждом $N \geq 5$ она имеет хаотические движения. Например, при $N = 5$ посредством численного анализа в ней удалось обнаружить хаотические режимы с ляпуновскими показателями $\lambda_0, 0, 0, -\lambda_0$, где $\lambda_0 > 0$ в зависимости от выбора начальных условий может принимать различные значения: 0,135, 0,16, 0,176, 0,252, 0,258, 0,272 и т. д.

При переходе от системы (10.72) к исходной системе (10.71) некоторые из упомянутых выше хаотических движений «выживают». В частности, система (10.71) при $N = 5$ имеет хаотические аттракторы при любом $c_m \leq 0,02$. А это, в свою очередь, означает, что в цепочке осцилляторов (10.70) наблюдается феномен хаотической буферности.