

ЖИЗНЬ НА КРОМКЕ ХАОСА

Термином «жизнь на кромке хаоса» обозначается новая, ныне активно развивающаяся парадигма нелинейной динамики, цель которой — создание теории безопасности и риска для систем, потенциально склонных к катастрофам. К различным частным проявлениям общего понятия «жизни на кромке хаоса» уместно отнести такие феномены, как перемежаемость и жесткую турбулентность.

Следует отметить, что строгого определения понятия перемежаемости или прерванного равновесия не существует. На эвристическом же уровне об этом явлении принято говорить в том случае, когда в системе интервалы хаотического поведения сменяются практически регулярными участками, связанными с прохождением траектории вблизи неподвижной точки, или, другими словами, когда наблюдается чередование турбулентной и ламинарной фаз. При этом длительности указанных фаз могут меняться случайным образом. Прерванное равновесие характерно для многих областей естествознания, таких как биологическая эволюция, гидродинамика, экономика и др.

В настоящее время известно несколько видов перемежаемости. Например, классическая перемежаемость Помо и Манневиля [13] предполагает близость системы к точке бифуркации типа седло-узел, Хопфа или удвоения периода (в соответствии с этим различают и три типа перемежаемости). Однако для релаксационных систем, которые изучаются в данной главе, наиболее естественна так называемая переключающая перемежаемость (*on-off intermittency*), описанная в работах [164, 168, 180].

Переключающая перемежаемость наблюдается в окрестности бифуркации типа *blowout* [164], суть которой состоит в следующем. Пусть в некоторой системе (зависящей от параметра μ) при $\mu < 0$ имеется устойчивое инвариантное многообразие M с хаотическим аттрактором S на нем. Пусть, далее, при $\mu > 0$ инвариантное множество S становится неустойчивым по дополнительному к M направлению и, более того, начинает асимптотически быстро и асимптотически далеко «выбрасывать» траектории в этом направлении. Если такую систему дополнить механизмом возвращения «выброшенных» траекторий обратно к многообразию M , а затем и к инвариантному множеству S , то будет наблюдаться переключающая перемежаемость: хаотический режим, перемежающийся редкими, но асимптотическими высокими выбросами.

Описание другого упомянутого выше феномена, а именно, жесткой турбулентности, также возможно лишь на эвристическом уровне строгости. Как уже отмечалось в п. 3.4, этим термином обозначается

автоколебательный режим с редкими, но весьма интенсивными выбросами на общем относительно спокойном турбулентном фоне. Исследование таких режимов актуально в связи с проблемой описания редких катастрофических событий в сложных системах: различных природных и социальных катаклизмов, ураганов и волн-убийц в системе атмосфера-океан, экономических кризисов и т. д. Что же касается базовой математической модели жесткой турбулентности, то таковой принято считать уравнение Гинзбурга-Ландау (3.45).

Из общих соображений ясно, что для понимания механизма функционирования системы в режиме жесткой турбулентности можно опереться на описанные выше принципы переключающей перемежаемости. Однако, несмотря на простоту и наглядность этих принципов, их приложение непосредственно к уравнению (3.45) не представляется возможным, так как для него вопрос о нахождении инвариантного многообразия M с требуемыми свойствами заведомо нелокален (не ясно даже, существует ли оно). Поэтому актуальна проблема построения конечномерных феноменологических моделей жесткой турбулентности, при решении которой идеи работ [164, 168, 180] могут послужить хорошим руководством к действию.

Один из возможных подходов к указанной проблеме предлагается в данной главе. А именно, ниже рассматриваются сингулярно возмущенные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с одной быстрой и n ($n \geq 3$) медленными переменными. Опираясь на развитые в [164, 168, 180] общие представления и используя технику неклассических релаксационных колебаний [98], удается сформулировать условия существования у этих систем аттракторов типа жесткой турбулентности и переключающей перемежаемости. Показывается также, что любая конечномерная система с хаосом может быть дстроена до системы на единицу большей размерности, в которой реализуется жесткая турбулентность. Иными словами, предлагается некоторый универсальный способ учета редких катастрофических событий в системах со сложным поведением.

11. Аттракторы типа жесткой турбулентности

11.1. Описание объекта исследования. В данном разделе изучим класс релаксационных систем, поведение решений которых имеет определенное сходство с режимами жесткой турбулентности в уравнении Гинзбурга-Ландау (3.45). С этой целью в полупространстве $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^n, y \geq 0\}$, где $n \geq 3$, рассмотрим релаксационную систему

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = [g(x, y) + \mu] y. \quad (11.1)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а μ — вспомогательный параметр, знак которого произволен; $f, g \in C^\infty$ при всех $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \{y: y \geq -\delta_0\}$,

где $\delta_0 > 0$. Ее анализ проведем при ряде дополнительных ограничений. Наиболее нетривиальное из них относится к системе

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad (11.2)$$

описывающей поведение исходной системы (11.1) на инвариантном многообразии $y = 0$. Поскольку в дальнейшем это многообразие будет играть роль многообразия M , являющегося носителем хаотического аттрактора, то естественным образом приходим к следующему условию.

Условие 11.1. *Считаем, что система (11.2) имеет компактный аттрактор A , хаотический в смысле определения 1.7.*

Условие 11.1 гарантирует существование у системы (11.1) инвариантного хаотического множества

$$\{(x, y): x \in A, y = 0\}, \quad (11.3)$$

которое в дальнейшем будет играть роль инвариантного множества S . Следующие два ограничения обеспечивают реализацию в этой системе при смене знака параметра μ бифуркации типа *blowout* [164].

Условие 11.2. *Предполагаем выполнение при всех $x \in \mathbb{R}^n$ неравенства $g(x, 0) \leq 0$. Считаем еще, что множество $\Omega_0 = \{x: g(x, 0) < 0\}$ не пусто и его замыкание не пересекается с A .*

Условие 11.3. *Считаем, что $g(x, y) > 0$ на множестве $\{(x, y): x \in A, y > 0\}$ и выполняется неравенство $g'_y(x, 0) > 0$ при любом $x \in A$.*

Из условия 11.2 вытекает, что $g(x, 0) \equiv 0$ на множестве A . Поэтому инвариантное множество (11.3) системы (11.1) будет, очевидно, экспоненциально устойчивым при $\mu < 0$ и неустойчивым при $\mu > 0$. Далее, из условия 11.3 и содержащихся в монографии [98] результатов заключаем, что в случае $\mu > 0$ в течение времени порядка ε движение по любой траектории $x(t, \varepsilon, \mu)$, $y(t, \varepsilon, \mu)$ этой системы с независимыми от ε , μ начальными условиями $x(0, \varepsilon, \mu) = x_0 \in A$, $y(0, \varepsilon, \mu) = y_0 > 0$ происходит в асимптотически малой окрестности луча $x = x_0$, $y \geq y_0$, причем за это время фазовая точка может удалиться от гиперплоскости $y = 0$ на любое наперед заданное конечное расстояние. Таким образом, инвариантное хаотическое множество (11.3), устойчивое при $\mu < 0$, теряет устойчивость при $\mu > 0$ и начинает асимптотически быстро выбрасывать траектории в перпендикулярном направлении, т. е. согласно [164] происходит бифуркация типа *blowout*. В связи с этим естественным образом возникает необходимость в следующих трех ограничениях, касающихся поведения функций f и g при $y \rightarrow +\infty$.

Условие 11.4. *При $y \rightarrow +\infty$ равномерно по любому ограниченному подмножеству изменения x справедливы асимптотические представления*

$$f(x, y) = y^{n_1} \left(f_0(x) + \frac{f_1(x)}{y} + \frac{f_2(x)}{y^2} + \dots \right), \quad (11.4)$$

$$g(x, y) = y^{n_2} \left(g_0(x) + \frac{g_1(x)}{y} + \frac{g_2(x)}{y^2} + \dots \right), \quad (11.5)$$

где $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 0$ — целые числа, причем $p = n_1 - n_2 > 0$. Будем считать, что асимптотические равенства (11.4), (11.5) сохраняют силу при дифференцировании по x и y в любом порядке и любое число раз.

Условие 11.5. Уравнение $g_0(x) = 0$ определяет гладкую поверхность Γ , гомеоморфную сфере, причем $g_0(x) < 0$ во внутренней области Ω_1 , ограничиваемой поверхностью Γ , и $g_0(x) > 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_1$, где $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \Gamma$. Считаем также, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ и $g_1(x)|_{x \in \Gamma} < 0$.

Для формулировки очередного ограничения введем в рассмотрение систему

$$\dot{x} = f_0(x). \quad (11.6)$$

Условие 11.6. Предполагаем существование для каждой траектории $x = x(t, x_0)$ системы (11.6) с начальным условием $x(0, x_0) = x_0 \in A$ такого момента времени $t = \tau_0(x_0) > 0$, что $x(t, x_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}_1$ при $0 \leq t < \tau_0$, $x(t, x_0) \in \Omega_1$ при всех $t > \tau_0$. Считаем еще, что выполняется неравенство $((*, *)$ — евклидово скалярное произведение)

$$(f_0(x), \nabla g_0(x))|_{x \in \Gamma} < 0, \quad (11.7)$$

означающее, что поверхность Γ является для системы (11.6) поверхностью без контактов.

Следующее ограничение в определенном смысле противоположно условию 11.3, так как обеспечивает возвращаемость траекторий системы (11.1) из асимптотически удаленных точек обратно к гиперплоскости $y = 0$.

Условие 11.7. Считаем, что $g(x, y) < 0$ на множестве $\{(x, y): x \in \bar{\Omega}_1, y \geq 0\}$.

Остановимся на взаимосвязи приведенных ограничений. Заметим, что справедливость условия 11.7 при $y = 0$ вытекает из включения $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_0$ (см. условие 11.5). Далее, из условия 11.7 и асимптотического представления (11.5) с необходимостью имеем $g_1(x) \leq 0$ на поверхности Γ . Таким образом, предполагаемое в условии 11.5 соответствующее строгое неравенство характеризует некоторую общность положения. То же самое можно сказать и о фигурирующем в условии 11.3 неравенстве $g'_y(x, 0) > 0$ при $x \in A$.

И наконец, последнее условие обеспечивает возвращаемость траекторий системы (11.2) с начальными условиями из $\bar{\Omega}_1$ к аттрактору A .

Условие 11.8. Предполагаем, что ω -предельное множество каждой траектории системы (11.2) с начальным условием из $\bar{\Omega}_1$ содержится в аттракторе A или, иными словами, $\bar{\Omega}_1$ находится в области притяжения аттрактора A .

В силу разноплановости приведенных ограничений возникает вопрос об их совместном выполнении, который будет рассмотрен отдель-

но. Смысл же всех этих условий окончательно прояснится в следующем пункте.

11.2. Характер поведения траекторий. Всюду ниже, если не оговорено противное, будем считать μ малым положительным параметром, независимым от ε . Рассмотрим, далее, множество A_δ , представляющее собой объединение замкнутых шаров радиуса $\delta > 0$ с центрами в точках множества A . При этом выбором δ распорядимся таким образом, чтобы сохранились условия 11.2, 11.3, 11.6 при замене в них A на A_δ (возможность указанной замены в случае условий 11.2, 11.6 очевидна, а в случае условия 11.3 ее гарантируют асимптотическое представление (11.5) и свойства функции $g_0(x)$). Затем рассмотрим такой достаточно большой момент времени $t = \tilde{t} > 0$ (его существование вытекает из условия 11.1), что $B = \varphi^{\tilde{t}}(\mathcal{U}) \subset A_\delta$, где \mathcal{U} — поглощающая окрестность аттрактора A , фигурирующая в определении 1.7. И наконец, обозначим через

$$(x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu)): x(0, \varepsilon, \mu) = x_0, y(0, \varepsilon, \mu) = 1 \quad (11.8)$$

траекторию системы (11.1) с произвольно фиксированным начальным условием $x_0 \in B$. Цель настоящего пункта — дать описание асимптотического поведения траектории (11.8) при увеличении t .

Как показано в монографии [98], из неравенства $g(x_0, y) > 0$ при $y \geq 1$ и асимптотических представлений (11.4), (11.5) вытекает, что сначала асимптотически малое время (порядка ε при $n_2 \neq 0$ или $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ при $n_2 = 0$) движение происходит примерно по лучу $x = x_0$, $y \geq 1$, причем переменная y достигает за это время значений порядка $\varepsilon^{-1/p}$.

Для того чтобы проследить за дальнейшим движением фазовой точки (11.8), выполним в системе (11.1) замены $y = u \varepsilon^{-1/p}$, $t = s \varepsilon^{n_1/p}$ и воспользуемся разложениями (11.4), (11.5). В итоге после отбрасывания асимптотически малых по ε и μ слагаемых приходим к системе

$$dx/ds = u^{n_1} f_0(x), \quad du/ds = u^{n_2+1} g_0(x). \quad (11.9)$$

Полагая затем в (11.9) $d\tau = u^{n_1} ds$, убеждаемся, что дальнейшее движение происходит приблизительно по кривой

$$L(x_0): x(\tau) = x(\tau, x_0), \quad u(\tau) = \left(p \int_0^\tau g_0(x(\theta, x_0)) d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < \tau < \tau_1, \quad (11.10)$$

где $x(\tau, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$ — траектория системы (11.6), а $\tau_1 = \tau_1(x_0)$ — такое значение переменной τ , что $u(\tau) > 0$ при $0 < \tau < \tau_1$, $u(\tau_1) = 0$.

Для того чтобы убедиться в существовании требуемого значения $\tau_1 = \tau_1(x_0)$ при всех $x_0 \in B$, остановимся на свойствах функции

$$\tilde{u}(\tau) = \int_0^\tau g_0(x(\theta, x_0)) d\theta. \quad (11.11)$$

В связи с этим обратимся к условиям 11.5, 11.6, из которых следует, что $d\tilde{u}(\tau)/d\tau > 0$ при $0 \leq \tau < \tau_0$, $d\tilde{u}(\tau)/d\tau < 0$ при $\tau > \tau_0$, где $\tau_0 = \tau_0(x_0)$ определено в условии 11.6. Далее, из неравенства (11.7) заключаем, что при $\tau \geq \tau_0 + 1$ траектория $x(\tau, x_0)$ уже не может приблизиться к поверхности Γ на сколь угодно малое расстояние, а значит,

$$\sup_{\tau \geq \tau_0 + 1} g_0(x(\tau, x_0)) < 0. \quad (11.12)$$

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что при $0 \leq \tau \leq \tau_0$ функция (11.11) монотонно возрастает от нуля до значения $\tilde{u}(\tau_0) > 0$, а при $\tau > \tau_0$ она убывает и в силу (11.12) стремится при $\tau \rightarrow +\infty$ к значению $-\infty$. Поэтому уравнение $\tilde{u}(\tau) = 0$ имеет единственный положительный корень $\tau_1 = \tau_1(x_0) > \tau_0$, который и является искомым.

Строгий смысл изложенным выше эвристическим соображениям придает теория неклассических релаксационных колебаний, разработанная в монографии [98]. Точнее говоря, из содержащихся в [98] результатов вытекают следующие факты.

Во-первых, часть траектории

$$(x(t, \varepsilon, \mu), u(t, \varepsilon, \mu)), \quad u = \varepsilon^{1/p} y(t, \varepsilon, \mu), \quad (11.13)$$

лежащая в полупространстве $u \geq \varepsilon^{1/p}$, при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ имеет своим пределом кривую (11.10). Время же прохождения фазовой точкой (11.13) любого участка этой кривой, отвечающего произвольно фиксированному отрезку $\tau \in [\tau_*, \tau_{**}] \subset (0, \tau_1)$, равномерно по μ имеет порядок $\varepsilon^{n_1/p}$.

Во-вторых, равенство $u(\tau_1) = 0$ в (11.10) и условие 11.7 гарантируют возвращение траектории (11.8) на гиперплоскость $y = 1$, т.е. существование такого первого момента времени $t = t_0(\varepsilon, \mu) > 0$, что $y(t_0, \varepsilon, \mu) = 1$. При этом величина $t_0(\varepsilon, \mu)$ асимптотически мала (равномерно по μ имеет порядок ε при $n_2 \neq 0$ или $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ в случае $n_2 = 0$).

И наконец, в-третьих, для оператора

$$x_0 \rightarrow \Pi_{1, \varepsilon, \mu}(x_0) = x(t, \varepsilon, \mu)|_{t=t_0} \quad (11.14)$$

первого возвращения на гиперплоскость $y = 1$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.1. При любом целом $k \geq 0$ в метрике $C^k(B)$ имеет место предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} \Pi_{1, \varepsilon, \mu}(x_0) = \Pi_1(x_0), \quad \Pi_1(x_0) = x(\tau, x_0)|_{\tau=\tau_1(x_0)}, \quad (11.15)$$

где вектор-функция $x(\tau, x_0)$ и скалярная функция $\tau_1(x_0)$ определены в (11.10).

Из установленной выше оценки $\tau_1 > \tau_0$ и способа определения τ_0 (см. условие 11.6) следует, что $\Pi_1(B) \subset \Omega_1$. А отсюда и из (11.15) вытекает, что при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$ справедливо

аналогичное включение $\Pi_{1,\varepsilon,\mu}(B) \subset \Omega_1$. Поэтому вопрос об асимптотическом поведении траектории (11.8) при $t \geq t_0$ можно заменить более общим вопросом о поведении при $t \geq 0$ траектории

$$(x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu)): x(0, \varepsilon, \mu) = x_1, y(0, \varepsilon, \mu) = 1, \quad (11.16)$$

системы (11.1) с произвольным начальным условием $x_1 \in \bar{\Omega}_1$.

При $t \geq 0$ происходит «падение» (описываемое с помощью техники из монографии [19]) фазовой точки (11.16) на устойчивый участок многообразия $y = 0$, соответствующий значениям $x \in \bar{\Omega}_1$ (см. условие 11.7). В нашем случае применение методики из [19] приводит к следующему утверждению.

Лемма 11.2. *При любом фиксированном $t_* > 0$ равномерно по $t \in [0, t_*]$ и $x_1 \in \bar{\Omega}_1$ для компонент траектории (11.16) при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$ справедливы асимптотические представления*

$$x(t, \varepsilon, \mu) = x_*(t) + O(\varepsilon), \quad w(t, \varepsilon, \mu) = -\mu t - \int_0^t g(x_*(\tau), 0) d\tau + O(\varepsilon), \quad (11.17)$$

где $x_*(t)$ — решение системы (11.2) с начальным условием $x_*(0) = x_1$, а функция $w(t, \varepsilon, \mu)$ определена равенством $w(t, \varepsilon, \mu) = -\varepsilon \ln y(t, \varepsilon, \mu)$.

Из сформулированной леммы следует, что на любом конечном отрезке изменения t происходит разделение движений: компонента $x(t, \varepsilon, \mu)$ траектории (11.16) асимптотически близка к соответствующему решению системы (11.2), а компонента $y(t, \varepsilon, \mu)$ в силу вытекающих из условий 11.2, 11.8 неравенств

$$-\int_0^t g(x_*(\tau), 0) d\tau > 0 \text{ при } t > 0, \quad -\int_0^\infty g(x_*(\tau), 0) d\tau < \infty \quad (11.18)$$

и второго асимптотического представления (11.17) экспоненциально мала. Рост же переменной $y(t, \varepsilon, \mu)$ начинается с того момента, когда $x_*(t)$ покидает множество Ω_0 , так как в этом случае $g(x_*(t), 0) \equiv 0$. Поэтому должен существовать такой момент времени $t_1 = t_1(\varepsilon, \mu)$, что

$$\mu t_1 + \int_0^{t_1} g(x(t, \varepsilon, \mu), y(t, \varepsilon, \mu)) dt = 0, \quad (11.19)$$

а значит, $y(t_1, \varepsilon, \mu) = 1$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.3. *Найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 < \mu \leq \mu_0$ существует момент времени $t = t_1(\varepsilon, \mu) > 0$, обладающий свойствами:*

$$0 < y(t, \varepsilon, \mu) < 1 \text{ при } 0 < t < t_1, \quad y(t_1, \varepsilon, \mu) = 1, \\ x(t_1, \varepsilon, \mu) \in B, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_1(\varepsilon, \mu) = c_0/\mu, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0} t_1(\varepsilon, \mu) = \infty, \quad (11.20)$$

где

$$c_0 = - \int_0^{\infty} g(x_*(\tau), 0) d\tau > 0. \quad (11.21)$$

Доказательство. Остановимся сначала на информации, которую можно извлечь из леммы 11.2. С этой целью, считая параметр μ фиксированным, перейдем в (11.19) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. В итоге с учетом асимптотических равенств (11.17) получаем уравнение

$$\mu t_1 + \int_0^{t_1} g(x_*(\tau), 0) d\tau = 0. \quad (11.22)$$

А так как при всех достаточно больших $t > 0$ справедливо тождество

$$\int_0^t g(x_*(\tau), 0) d\tau \equiv -c_0, \quad (11.23)$$

где c_0 — постоянная (11.21), то предельное уравнение (11.22) имеет, очевидно, решение $t_1 = c_0/\mu$.

Итак, лемма 11.2 гарантирует существование требуемого момента времени $t_1(\varepsilon, \mu)$, удовлетворяющего первому предельному равенству из (11.20), только при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(\mu)$, где, вообще говоря, $\varepsilon_0(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow 0$. Связано это с тем, что равенства (11.17) теряют силу на асимптотически больших временных промежутках. Действительно, фигурирующее в (11.17) решение $x_*(t)$ системы (11.2) при $t \rightarrow \infty$ стремится к хаотическому аттрактору A , на котором в общем случае имеет место экспоненциальное «разбегание» траекторий. Поэтому при подходящем уменьшении μ асимптотическое вычисление компоненты $x(t, \varepsilon, \mu)$ траектории (11.16) на временном промежутке порядка μ^{-1} заведомо обречено на неудачу. Однако для доказательства существования $t_1(\varepsilon, \mu)$ при независимом изменении ε и μ достаточно знать только самые грубые свойства компонент $x(t, \varepsilon, \mu)$, $y(t, \varepsilon, \mu)$ при $t \geq t_*$, которые устанавливаются ниже.

Прежде всего уточним выбор фигурирующего в лемме 11.2 момента времени $t_* > 0$. А именно, будем считать t_* настолько большим, что $x(t_*, \varepsilon, \mu) \in A_{\delta'}$ для некоторого фиксированного $\delta' > 0$, подчиненного требованиям: $\delta' < \delta$, $A_{\delta'} \in B$. Возможность подобного выбора t_* обеспечивают условие 11.8 и первое асимптотическое равенство (11.17), из которых, в частности, следует, что t_* можно взять независимым от ε и $x_1 \in \bar{\Omega}_1$.

Анализ поведения траектории (11.16) при $t \geq t_*$ начнем с вывода некоторых априорных оценок для компоненты $y(t, \varepsilon, \mu)$. С этой целью введем в рассмотрение постоянные

$$m_- = \min_{\substack{x \in B \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y)/y, \quad m_+ = \max_{\substack{x \in B \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y)/y.$$

положительные в силу условий 11.2, 11.3. Обращаясь, далее, ко второму уравнению из (11.1), для $y(t, \varepsilon, \mu)$ получаем дифференциальные неравенства

$$[\mu + m_- y] y \leq \varepsilon \dot{y} \leq [\mu + m_+ y] y,$$

справедливые при тех $t \geq t_*$, для которых

$$x(t, \varepsilon, \mu) \in B, \quad 0 < y(t, \varepsilon, \mu) \leq 1. \quad (11.24)$$

А отсюда при указанных t очевидным образом вытекают оценки

$$y_-(t, \varepsilon, \mu) \leq y(t, \varepsilon, \mu) \leq y_+(t, \varepsilon, \mu). \quad (11.25)$$

Здесь

$$y_{\pm}(t, \varepsilon, \mu) = \frac{\mu \exp [\mu(t - t_*)/\varepsilon]}{\mu \exp(c/\varepsilon) + m_{\pm}(1 - \exp [\mu(t - t_*)/\varepsilon])}, \quad c = w(t_*, \varepsilon, \mu), \quad (11.26)$$

а для $c = c(\varepsilon, \mu)$ из (11.17), (11.23) получаем асимптотическое представление

$$c = -\mu t_* + c_0 + O(\varepsilon), \quad (11.27)$$

где c_0 — постоянная (11.21).

На следующем этапе убедимся в существовании достаточно малой независимой от ε , μ постоянной $\sigma_0 > 0$, удовлетворяющей условию $x(t, \varepsilon, \mu) \in B$ при априорном предположении $y(t, \varepsilon, \mu) < \sigma_0$. Для этого рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{x} = f(x, \bar{y}(t, \varepsilon, \mu)), \quad (11.28)$$

где

$$\bar{y}(t, \varepsilon, \mu) = \begin{cases} y(t, \varepsilon, \mu) & \text{при } t_* \leq t \leq \bar{t}, \\ \sigma_0 & \text{при } t \geq \bar{t}, \end{cases} \quad (11.29)$$

\bar{t} — такой момент времени, что $y(t, \varepsilon, \mu) < \sigma_0$ при $t_* \leq t < \bar{t}$, $y(\bar{t}, \varepsilon, \mu) = \sigma_0$ (если конечного \bar{t} не существует, то полагаем $\bar{y} = y(t, \varepsilon, \mu)$ при всех $t \geq t_*$). Значение же параметра $\sigma_0 \in (0, 1)$ пока произвольно. Заметим, далее, что поскольку свойство динамической системы иметь аттрактор является C^0 -грубым, то при всех достаточно малых σ_0 у системы (11.28), равномерно по ε , μ близкой к (11.2), существует аттрактор $A' \subset A_{\delta'}$. Поэтому заведомо найдется такое независимое от ε , μ значение параметра σ_0 , при котором ее решение $\bar{x}(t, \varepsilon, \mu)$ с начальным условием $\bar{x}|_{t=t_*} = x(t_*, \varepsilon, \mu) \in A_{\delta'}$ при всех $t \geq t_*$ остается в множестве B . А так как в силу (11.29) имеем $\bar{x}(t, \varepsilon, \mu) = x(t, \varepsilon, \mu)$ при $t_* \leq t \leq \bar{t}$, то тем самым установлен требуемый факт.

Подведем некоторый итог. Из проделанного анализа следует, что условия (11.24), а значит, и оценки (11.25) справедливы при $t_* \leq t \leq \bar{t}$. Обращаясь, далее, к формулам (11.26), без труда убеждаемся в существовании и единственности значений

$$t_+ \leq t_-, \quad t_{\pm} = t_* + \frac{\varepsilon}{\mu} \ln \left[\frac{\sigma_0(\mu \exp(c/\varepsilon) + m_{\pm})}{\mu + \sigma_0 m_{\pm}} \right], \quad (11.30)$$

для которых $y_{\pm}(t_{\pm}, \varepsilon, \mu) = \sigma_0$. А отсюда и из неравенств (11.25) с необходимостью выводим, что $\bar{t} \in [t_+, t_-]$. И наконец, из условия 11.3 и результатов монографии [19] вытекает, что расстояние между гиперплоскостями $y = \sigma_0$ и $y = 1$ фазовая точка (11.16) проходит за время порядка ε . Тем самым, существует такой первый момент времени $t_1 > \bar{t}$, $t_1 - \bar{t} = O(\varepsilon)$, что $y(t_1, \varepsilon, \mu) = 1$ и, по-прежнему, $x(t_1, \varepsilon, \mu) \in B$. Остается добавить, что поскольку в силу (11.27), (11.30) имеем $\lim t_{\pm}(\varepsilon, \mu) = \infty$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $\mu \rightarrow 0$, то аналогичное предельное равенство справедливо и для $t_1(\varepsilon, \mu)$. Лемма 11.3 доказана.

Обращаем внимание, что леммы 11.1–11.3 остаются в силе и в случае $\mu = 0$. При этом утверждения лемм 11.1, 11.2 сохраняются дословно, а в лемме 11.3 для $t_1(\varepsilon, 0)$ вместо предельных равенств удается получить некоторое асимптотическое представление (что в случае двух малых параметров ε и μ сделать затруднительно). Действительно, при $\mu = 0$ для функций $y_{\pm}(t, \varepsilon, 0)$ вместо (11.26) имеем формулы

$$y_{\pm}(t, \varepsilon, 0) = \frac{1}{\exp(c/\varepsilon) - m_{\pm}(t - t_*)/\varepsilon}, \quad c = w(t_*, \varepsilon, 0),$$

из которых, в свою очередь, заключаем, что

$$t_{\pm}(\varepsilon, 0) = t_* + \frac{\varepsilon}{m_{\pm}} \exp(c/\varepsilon) + O(\varepsilon).$$

А отсюда с учетом равенства (11.27) выводим асимптотическое представление

$$t_1(\varepsilon, 0) = \exp\{(1 + o(1))c_0/\varepsilon\}, \quad (11.31)$$

где c_0 — постоянная (11.21).

Отдельному рассмотрению подлежит случай, когда параметры ε и μ связаны соотношением

$$\mu = \varepsilon^{\alpha} \quad (11.32)$$

при некотором фиксированном $\alpha > 0$. Положим

$$x(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha}), \quad y(t, \varepsilon) = y(t, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha}), \quad t_1(\varepsilon) = t_1(\varepsilon, \varepsilon^{\alpha}), \quad (11.33)$$

где $x(t, \varepsilon, \mu)$, $y(t, \varepsilon, \mu)$ — компоненты траектории (11.16), и остановимся сначала на свойствах $t_1(\varepsilon)$. Подставляя равенство (11.32) в формулы (11.30), убеждаемся, что в рассматриваемом случае

$$t_{\pm} = t_* + c\varepsilon^{-\alpha} + \alpha\varepsilon^{1-\alpha} \ln(\varepsilon/m_{\pm}) + O(\varepsilon),$$

где, как и выше, $c = w(t_*, \varepsilon, \varepsilon^{\alpha})$. А отсюда, рассуждая как и при доказательстве леммы 11.3, приходим к асимптотическому представлению

$$t_1(\varepsilon) = (1 + o(1))\varepsilon^{-\alpha}c_0, \quad (11.34)$$

где c_0 — постоянная (11.21).

Характерной особенностью асимптотического поведения траектории (11.16) на временном промежутке $0 \leq t \leq t_1$ при условии (11.32) и при $\alpha < 1$ является наличие так называемой следящей траектории, лежа-

щей на многообразии $y = 0$. Для пояснения сути дела обозначим через $x_*(t, \varepsilon)$ решение задачи Коши:

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=t_*} = x_*(\varepsilon), \quad (11.35)$$

где момент времени $t_* > 0$ выбран при доказательстве леммы 11.3, а $x_*(\varepsilon) = x(t_*, \varepsilon, \varepsilon^\alpha)$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 11.4. Пусть выполняется равенство (11.32) с постоянной $\alpha < 1$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\max_{t_* \leq t \leq t_1(\varepsilon)} \|x(t, \varepsilon) - x_*(t, \varepsilon)\| \leq N\varepsilon \ln(1/\varepsilon), \quad (11.36)$$

где $\|*\|$ — евклидова норма, а $N > 0$ — некоторая независящая от ε константа.

Доказательство. Прежде всего получим некоторую оценку сверху для фигурирующей в (11.33) функции $y(t, \varepsilon)$. С этой целью привлечем дифференциальное неравенство (см. аналогичное место в доказательстве леммы 11.3)

$$\varepsilon \dot{y} \geq [\varepsilon^\alpha + m_-]y,$$

из которого следует, что при всех $t_* \leq t \leq t_1(\varepsilon)$

$$y(t, \varepsilon) \leq y_*(t, \varepsilon). \quad (11.37)$$

Здесь $y_*(t, \varepsilon)$ — решение задачи Коши $\varepsilon \dot{y} = [\varepsilon^\alpha + m_-]y$, $y|_{t=t_*} = 1$, которое задается формулой

$$y_*(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^\alpha \exp[\varepsilon^{\alpha-1}(t - t_*)]}{\varepsilon^\alpha + m_-(1 - \exp[\varepsilon^{\alpha-1}(t - t_*)])}. \quad (11.38)$$

На следующем этапе для нахождения $h = x(t, \varepsilon) - x_*(t, \varepsilon)$ введем в рассмотрение задачу Коши:

$$\dot{h} = f(x_*(t, \varepsilon) + h, y(t, \varepsilon)) - f(x_*(t, \varepsilon), 0), \quad h|_{t=t_*} = 0. \quad (11.39)$$

Используя, далее, вытекающую из условий 11.1, 11.8 равномерную по ε ограниченность при $t_* \leq t \leq t_1(\varepsilon)$ решения $x_*(t, \varepsilon)$ задачи (11.35) и установленные выше свойства компоненты $y(t, \varepsilon)$ (см. (11.37), (11.38)), без труда убеждаемся, что правая часть фигурирующего в (11.39) уравнения (обозначим ее через F) допускает представление:

$$F = V_0(t, \varepsilon)h + V_1(t, h, \varepsilon) + V_2(t, \varepsilon), \quad (11.40)$$

где

$$V_1(t, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad \frac{\partial}{\partial h} V_1(t, h, \varepsilon)|_{h=0} \equiv 0,$$

а матрица $V_0(t, \varepsilon)$ и вектор-функция $V_2(t, \varepsilon)$ удовлетворяют при $t_* \leq t \leq t_1(\varepsilon)$ оценкам

$$\|V_0(t, \varepsilon)\| \leq N, \quad \|V_2(t, \varepsilon)\| \leq N y_*(t, \varepsilon) \quad (11.41)$$

(здесь и ниже буквами N , N_1 , N_2 и т. д. обозначаем различные независимые от ε , t положительные постоянные, точные значения которых несущественны).

Задачу (11.39) будем последовательно рассматривать на отрезках вида

$$t_* \leq t \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_1}, \quad t_1 - \varepsilon^{-\beta_k} \leq t \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_{k+1}}, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1, \\ t_1 - \varepsilon^{-\beta_{k_0}} \leq t \leq t_1 - 1, \quad t_1 - 1 \leq t \leq t_1. \quad (11.42)$$

Здесь k_0 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее оценкам

$$\alpha < (k_0 + 1)/(k_0 + 2) < 1, \quad (11.43)$$

а постоянные $\beta_k > 0$, $k = 1, \dots, k_0$, выбраны таким образом, что выполняются неравенства

$$2\alpha - 1 < \beta_1 < \alpha; \quad \beta_k + \alpha - 1 < \beta_{k+1} < \beta_k, \quad k = 1, \dots, k_0 - 1; \\ \beta_{k_0} < 1 - \alpha. \quad (11.44)$$

Подчеркнем, что возможность указанного выбора β_k , $k = 1, \dots, k_0$, обеспечивают условия (11.43). Действительно, можно, например, положить $\beta_k = \alpha - k\bar{\delta}$, $k = 1, \dots, k_0$, где

$$\bar{\delta} \in (0, 1 - \alpha) \cap ((2\alpha - 1)/k_0, \alpha/k_0). \quad (11.45)$$

Тогда, как нетрудно видеть, все требования (11.44) будут выполнены, а непустоту множества (11.45) возможных значений параметра $\bar{\delta}$ гарантируют оценки (11.43).

Рассмотрим сначала первый из отрезков (11.42). Представление (11.40) позволяет перейти на этом отрезке от задачи (11.39) к интегральному уравнению

$$h = \int_{t_*}^t K(t, \tau, \varepsilon) [V_1(\tau, h(\tau), \varepsilon) + V_2(\tau, \varepsilon)] d\tau, \quad (11.46)$$

где $K(t, \tau, \varepsilon)$ — матрица Коши линейной системы $\dot{h} = V_0(t, \varepsilon)h$. Будем рассматривать правую часть этого уравнения как оператор в пространстве $E_0 = C([t_*, t_1 - \varepsilon^{-\beta_1}]; \mathbb{R}^n)$ с нормой

$$\|h\|_{E_0} = \max_{t_* \leq \tau \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_1}} \|h(\tau)\|_{\mathbb{R}^n}. \quad (11.47)$$

Из первого неравенства (11.41) очевидным образом следует оценка

$$\|K(t, \tau, \varepsilon)\| \leq \exp\{N_1(t - \tau)\}, \quad t_* \leq \tau \leq t \leq t_1(\varepsilon). \quad (11.48)$$

А отсюда и из того факта, что в силу (11.34) и условия $\beta_1 < \alpha$ (см. (11.44)) длина рассматриваемого отрезка $t_* \leq t \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_1}$ имеет

порядок $\varepsilon^{-\alpha}$, для любой функции $h(t) \in E_0$ выводим неравенство

$$\left\| \int_{t_*}^t K(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\|_{E_0} \leq \exp(N_2/\varepsilon^\alpha) \|h\|_{E_0}. \quad (11.49)$$

В частности, подставляя в (11.49) $h(t) = V_2(t, \varepsilon)$, учитывая второе неравенство (11.41) вместе с вытекающей из формулы (11.38) оценкой

$$y_*(t, \varepsilon) \leq \exp(-N_3/\varepsilon^{\beta_1+1-\alpha}), \quad t_* \leq t \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_1}, \quad (11.50)$$

и условием $\beta_1 > 2\alpha - 1$ (см. (11.44)), приходим к выводу, что

$$\left\| \int_{t_*}^t K(t, \tau, \varepsilon) V_2(\tau, \varepsilon) d\tau \right\|_{E_0} \leq \exp(-N_4/\varepsilon^{\beta_1+1-\alpha}). \quad (11.51)$$

Из всей совокупности приведенных фактов следует, что в шаре пространства E_0 радиуса $r = \exp(-N_5/\varepsilon^{\beta_1+1-\alpha})$, где $N_5 < N_4$, с центром в нуле для оператора, порожденного правой частью равенства (11.46), выполняются условия принципа сжимающих отображений. Таким образом, для решения $h = h_0(t, \varepsilon)$ уравнения (11.46) получаем оценку

$$\|h_0\|_{E_0} \leq \exp(-N_5/\varepsilon^{\beta_1+1-\alpha}). \quad (11.52)$$

Дальнейший анализ опирается на метод математической индукции. Действительно, пусть $t \in [t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, t_1 - \varepsilon^{-\beta_{k+1}}]$, где $1 \leq k \leq k_0$ (считаем, что $\beta_{k_0+1} = 0$). На этом временном промежутке вместо (11.46) рассмотрению подлежит интегральное уравнение

$$h = K(t, t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, \varepsilon) h_{k-1}(t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, \varepsilon) + \int_{t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}}^t K(t, \tau, \varepsilon) [V_1(\tau, h(\tau), \varepsilon) + V_2(\tau, \varepsilon)] d\tau \quad (11.53)$$

в пространстве $E_k = C([t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, t_1 - \varepsilon^{-\beta_{k+1}}]; \mathbb{R}^n)$, норма в котором задается аналогичной (11.47) формулой. Здесь $h_{k-1}(t, \varepsilon)$ — вектор-функция, определенная на предыдущем шаге и удовлетворяющая оценке

$$\|h_{k-1}\|_{E_{k-1}} \leq \exp(-N_{5k}/\varepsilon^{\beta_k+1-\alpha}). \quad (11.54)$$

Отметим, что при $k = 1$ неравенство (11.54) уже установлено выше (см. (11.52)).

Для оценки первого слагаемого в правой части уравнения (11.53) и получения аналогичного (11.49) неравенства используем уже известные неравенства (11.48), (11.54) и тот факт, что длина рассматриваемого временного промежутка в силу условия $\beta_k > \beta_{k+1}$ (см. (11.44)) имеет порядок $\varepsilon^{-\beta_k}$. В итоге убеждаемся, что

$$\|K(t, t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, \varepsilon) h_{k-1}(t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}, \varepsilon)\|_{E_k} \leq \exp(-N_{5k+1}/\varepsilon^{\beta_k+1-\alpha}), \quad (11.55)$$

$$\left\| \int_{t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}}^t K(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\|_{E_k} \leq \exp(N_{5k+2}/\varepsilon^{\beta_k}) \|h\|_{E_k}. \quad (11.56)$$

Подставим, далее, в (11.56) функцию $h(t) = V_2(t, \varepsilon)$. В результате, опираясь на второе неравенство (11.41), вытекающую из формулы (11.38) аналогичную (11.50) оценку

$$y_*(t, \varepsilon) \leq \exp(-N_{5k+3}/\varepsilon^{\beta_{k+1}+1-\alpha}), \quad t_1 - \varepsilon^{-\beta_k} \leq t \leq t_1 - \varepsilon^{-\beta_{k+1}},$$

и условие $\beta_{k+1} > \beta_k + \alpha - 1$ (см. (11.44)), получаем аналогичное (11.51) неравенство

$$\left\| \int_{t_1 - \varepsilon^{-\beta_k}}^t K(t, \tau, \varepsilon) V_2(\tau, \varepsilon) d\tau \right\|_{E_k} \leq \exp(-N_{5k+4}/\varepsilon^{\beta_{k+1}+1-\alpha}). \quad (11.57)$$

И наконец, объединяя соотношения (11.55)–(11.57), приходим к выводу, что оператор, порожденный правой частью равенства (11.53), преобразует в себя шар пространства E_k радиуса

$$r = \exp(-N_{5(k+1)}/\varepsilon^{\beta_{k+1}+1-\alpha}), \quad \text{где } N_{5(k+1)} < N_{5k+4},$$

с центром в нуле и является в нем сжимающим. А это означает, что уравнение (11.53) имеет единственное решение $h_k(t, \varepsilon) \in E_k$, причем

$$\|h_k\|_{E_k} \leq \exp(-N_{5(k+1)}/\varepsilon^{\beta_{k+1}+1-\alpha}). \quad (11.58)$$

На оставшемся временном промежутке, т.е. при $t_1 - 1 \leq t \leq t_1$, рассмотрению подлежит интегральное уравнение

$$h = K(t, t_3 - 1, \varepsilon) h_{k_0}(t_3 - 1, \varepsilon) + \int_{t_3 - 1}^t K(t, \tau, \varepsilon) [V_1(\tau, h(\tau), \varepsilon) + V_2(\tau, \varepsilon)] d\tau \quad (11.59)$$

в пространстве $E_{k_0+1} = C([t_1 - 1, t_1]; \mathbb{R}^n)$. Объединяя оценки (11.41), (11.48) с неравенством (11.58) при $k = k_0$ и вытекающей из формулы (11.38) оценкой

$$\int_{t_1 - 1}^{t_1} y_*(t, \varepsilon) dt \leq N_{5k_0+6} \varepsilon \ln(1/\varepsilon),$$

приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_3-1}^t K(t, \tau, \varepsilon) h(\tau) d\tau \right\|_{E_{k_0+1}} &\leq N_{5k_0+7} \|h\|_{E_{k_0+1}}, \\ \|K(t, t_3-1, \varepsilon) h_{k_0}(t_3-1, \varepsilon)\|_{E_{k_0+1}} &\leq \exp(-N_{5k_0+8}/\varepsilon^{1-\alpha}), \\ \left\| \int_{t_3-1}^t K(t, \tau, \varepsilon) V_2(\tau, \varepsilon) d\tau \right\|_{E_{k_0+1}} &\leq N_{5k_0+9} \varepsilon \ln(1/\varepsilon). \end{aligned}$$

А отсюда, рассуждая как и выше, заключаем, что для решения $h_{k_0+1}(t, \varepsilon)$ интегрального уравнения (11.59) имеет место неравенство

$$\|h_{k_0+1}\|_{E_{k_0+1}} \leq N_{5(k_0+2)} \varepsilon \ln(1/\varepsilon). \quad (11.60)$$

Остается заметить, что требуемая оценка (11.36) получается при объединении установленных ранее неравенств (11.58) при $k = 0, 1, \dots, k_0$ с оценкой (11.60). Лемма 11.4 доказана.

Обращаем внимание, что при обосновании леммы 11.4 существенно используется тот факт, что показатель степени α в (11.32) меньше единицы. В самом деле, чем ближе α к единице, тем больше фигурирующее в (11.43) натуральное k_0 и, следовательно, большее количество шагов требуется для доказательства оценки (11.36). Если же $\alpha > 1$, то утверждение леммы 11.4 вообще не имеет места: наблюдается эффект исчезновения следящей траектории. Для пояснения сути дела заметим, что при условии (11.32) и при $\alpha > 1$ интересующая нас траектория $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$ системы (11.1) и «следящая» за ней траектория $(x_*(t, \varepsilon), 0)$ в течение времени порядка $\varepsilon^{-\alpha}$ находятся в окрестности хаотического множества (11.3), на котором, как уже говорилось выше, в общем случае происходит (в среднем) экспоненциальное разбегание траекторий. А отсюда следует, что расстояние между истинной и следящей траекториями, которое при $t = t_*$ имело порядок $\exp(-c_0/\varepsilon)$, $c_0 > 0$, может стать величиной порядка единицы уже за время порядка ε^{-1} . Тем самым, в случае $\alpha > 1$ оценка (11.36) справедлива, вообще говоря, только на временных промежутках вида $t_* \leq t \leq t_* + \varepsilon^{-\alpha}$, где $\alpha_* < 1$, а не на всем отрезке $t_* \leq t \leq t_1(\varepsilon)$, длина которого имеет порядок $\varepsilon^{-\alpha} \gg \varepsilon^{-1}$.

Заканчивая обсуждение общего характера поведения траекторий системы (11.1), отметим, что в силу лемм 11.2, 11.3 при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\mu \geq 0$ определен оператор $\Pi_{2, \varepsilon, \mu}: \bar{\Omega}_1 \rightarrow B$, действующий по правилу:

$$x_1 \rightarrow \Pi_{2, \varepsilon, \mu}(x_1) = x(t, \varepsilon, \mu)|_{t=t_1}. \quad (11.61)$$

Однако в отличие от оператора (11.14) здесь заведомо отсутствует предел при одновременном стремлении параметров ε и μ к нулю. Связано это с тем, что траектория (11.16) в течение асимптотически большого времени меняется в хаотическом режиме, находясь в асимп-

тотически малой окрестности инвариантного множества (11.3). Поэтому «срыв» при $t = t_1$ с многообразия $y = 0$ происходит в «случайно» выбранной точке $x(t_1, \varepsilon, \mu)$, принадлежащей некоторой асимптотически малой окрестности множества A . Таким образом, становится весьма наглядной причина возникновения хаоса в системе (11.1).

11.3. Описание результатов. Введем в рассмотрение оператор $\Pi_{\varepsilon, \mu} = \Pi_{2, \varepsilon, \mu} \circ \Pi_{1, \varepsilon, \mu}$, где $\Pi_{1, \varepsilon, \mu}$, $\Pi_{2, \varepsilon, \mu}$ — операторы (11.14), (11.61). Из лемм 11.1 и 11.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 11.1. Пусть выполнены условия 11.1–11.8. Тогда найдутся такие достаточно малые $\varepsilon_0, \mu_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \mu \leq \mu_0$ на множестве B определен оператор $x_0 \rightarrow \Pi_{\varepsilon, \mu}(x_0)$ и справедливо включение $\Pi_{\varepsilon, \mu}(B) \subset B$.

Установленная теорема гарантирует существование у отображения $\Pi_{\varepsilon, \mu}$ аттрактора

$$B(\varepsilon, \mu) = \bigcap_{k \geq 0} \Pi_{\varepsilon, \mu}^k(B). \quad (11.62)$$

Выпуская, далее, из точек множества $\{(x, y): x \in B(\varepsilon, \mu), y = 1\}$ траектории системы (11.1), получим ее аттрактор $\Sigma(\varepsilon, \mu)$, который будем называть аттрактором типа жесткой турбулентности. Подобное название оправдано тем, что в рамках системы (11.1) реализованы все идеи работ [164, 168, 180]. Действительно, при $\mu < 0$ имеется устойчивое инвариантное многообразие $y = 0$ с хаотическим поведением траекторий на нем. Далее, при $\mu > 0$ инвариантное хаотическое множество (11.3) теряет устойчивость и начинает асимптотически быстро выбрасывать траектории в перпендикулярном направлении. И наконец, группа условий 11.4–11.8 обеспечивает требуемую возвращаемость «выброшенных» траекторий обратно к многообразию $y = 0$, а затем и к инвариантному множеству (11.3). Все это приводит к появлению аттрактора $\Sigma(\varepsilon, \mu)$, поведение решений на котором характеризуется редкими, но асимптотически высокими выбросами по переменной y на общем турбулентном фоне изменения переменной x , т. е. прослеживается определенная аналогия с режимами жесткой турбулентности в уравнении (3.45). Точнее говоря, для колебаний на $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ естественным образом можно выделить три характерных временных промежутка: катастрофическую, ламинарную и турбулентную фазы.

Рассмотрим произвольную траекторию (11.8) из $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ с начальным условием $x_0 \in B(\varepsilon, \mu)$. Временной промежуток $0 \leq t \leq t_0$, на котором $y(t, \varepsilon, \mu) \geq 1$, назовем *фазой катастрофы*. Данная фаза характеризуется асимптотически высоким выбросом по переменной y и асимптотически быстрым изменением x от x_0 до значения, асимптотически близкого к $x_1 = \Pi_1(x_0)$, где Π_1 — оператор из (11.15). Заметим, далее, что поскольку $x_1 \in \Omega_1$, а множества $\bar{\Omega}_1$ и A не пересекаются, то катастрофа приводит к выбросу компоненты $x(t, \varepsilon, \mu)$ из аттрактора A (см. рис. 11.1, на котором схематически показано движение рассматриваемой фазовой точки). Длительность этой фазы асимптотически мала.

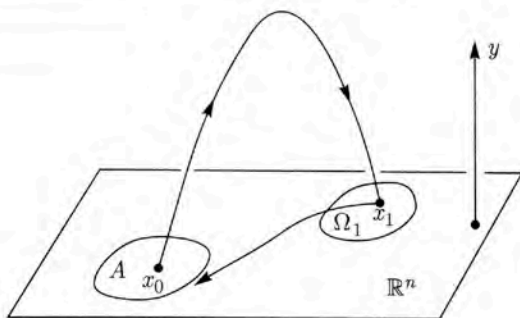


Рис. 11.1

Следующий временной промежуток, начинающийся с момента $t = t_0$ и заканчивающийся моментом, когда компонента $x(t, \varepsilon, \mu)$ попадает в множество B , назовем *ламинарной фазой*, поскольку все это время компонента $x(t, \varepsilon, \mu)$ проводит вне хаотического аттрактора A (см. рис. 11.1). Длительность указанной фазы имеет порядок единицы и практически на всем ее протяжении (за исключением асимптотически малой окрестности точки t_0) переменная $y(t, \varepsilon, \mu)$ асимптотически мала.

И наконец, оставшееся время, в течение которого рассматриваемая траектория находится в полосе $0 < y \leq 1$, назовем *турбулентной фазой*, так как в этом случае компонента $x(t, \varepsilon, \mu)$ меняется в хаотическом режиме. Длительность турбулентной фазы согласно (11.20) асимптотически велика, а по прошествии этого времени процесс повторяется: наступает следующая катастрофа, приводящая к очередной ламинарной фазе и т. д.

Особо подчеркнем, что в предложенной нами модели за счет изменения параметра μ можно управлять средним временем между двумя соседними катастрофами (см. асимптотическое равенство (11.34), справедливое при условии (11.32)). В частности, можно добиться того, что катастрофы будут происходить исключительно редко. Действительно, в самом крайнем случае, т. е. при $\mu = 0$, в системе (11.1) наблюдаются незатухающие колебания с продолжительностями турбулентных фаз порядка $\exp(c_0/\varepsilon)$ (см. (11.31)). В другом крайнем случае, когда параметр $\mu > 0$ фиксирован, в рассматриваемой системе реализуются автоколебания со средней продолжительностью турбулентных фаз порядка единицы. Связано это с тем, что при фиксированном μ и при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператор $\Pi_{\varepsilon, \mu}$ равномерно по $x_0 \in B$ стремится к оператору $\Pi_\mu = \Pi_{2, \mu} \circ \Pi_{1, \mu}$, где

$$\Pi_{2, \mu}(x_1) = x_*(t)|_{t=c_0/\mu}, \quad \Pi_{1, \mu}(x_0) = x(\tau, x_0)|_{\tau=\tau_1(x_0, \mu)}.$$

Здесь $x_*(t)$ — фигурирующее в (11.17) решение системы (11.2), c_0 — постоянная (11.21), $x(\tau, x_0)$ — рассматриваемая в (11.10) траектория

системы (11.6), а момент $\tau = \tau_1(x_0, \mu)$ определяется по описанному в предыдущем пункте правилу при замене $g_0(x)$ на функцию

$$g_0(x, \mu) = \begin{cases} g_0(x) & \text{при } n_2 > 0, \\ g_0(x) + \mu & \text{при } n_2 = 0. \end{cases}$$

В заключение скажем несколько слов о поведении решений системы (11.1) при $\mu < 0$. С этой целью введем в рассмотрение компакт $\tilde{\Omega}_1 = \Pi_1(B) \subset \Omega_1$, где Π_1 — оператор из (11.15). Обозначим, далее, через $c_1 = c_1(x_1)$ функцию, задающуюся равенством (11.21) при различных начальных условиях $x_*(0) = x_1 \in \tilde{\Omega}_1$ для решения $x_*(t)$ системы (11.2). И наконец, положим

$$c_* = \min_{x_1 \in \tilde{\Omega}_1} c_1(x_1) > 0, \quad c_{**} = \max_{x_1 \in \tilde{\Omega}_1} c_1(x_1) > 0.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 11.2. Пусть выполнены условия 11.1–11.8, а параметр μ удовлетворяет неравенствам

$$-\exp(-\bar{c}/\varepsilon) \leq \mu < 0 \quad (11.63)$$

при некотором фиксированном $\bar{c} > c_{**}$. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в системе (11.1) аттрактор $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ сосуществует с устойчивым инвариантным множеством (11.3). Если же

$$\mu = -\exp(-\bar{c}/\varepsilon) \quad (11.64)$$

при некотором фиксированном $\bar{c} \in (0, c_*)$, то любая траектория (11.8) системы (11.1) с начальным условием $x_0 \in B$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к множеству (11.3).

Доказательство. Напомним, что, как уже отмечалось в п. 11.1, при $\mu < 0$ инвариантное множество (11.3) экспоненциально устойчиво. Поэтому в случае (11.63) проблема заключается в доказательстве существования аттрактора $\Sigma(\varepsilon, \mu)$, что, в свою очередь, сводится к доказательству существования момента времени $t_1(\varepsilon, \mu) > 0$ с требуемыми в лемме 11.3 свойствами для любой траектории (11.16) с начальным условием $x_1 \in \Pi_{1,\varepsilon,\mu}(B)$.

Обратимся к доказательству леммы 11.3 и заметим, что поскольку

$$\Pi_{1,\varepsilon,\mu}(B)|_{\varepsilon=\mu=0} = \tilde{\Omega}_1, \quad c(\varepsilon, \mu)|_{\varepsilon=\mu=0} = c_1(x_1),$$

где $c(\varepsilon, \mu)$ — постоянная из (11.26), то из условий (11.63) вытекают неравенства

$$\mu \exp(c/\varepsilon) + m_{\pm} > 0, \quad (11.65)$$

справедливые при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при любом $x_1 \in \Pi_{1,\varepsilon,\mu}(B)$. Следовательно, существуют конечные моменты времени t_{\pm} (см. (11.30)), а значит, справедливы и все последующие выводы. В то же время в случае (11.64) ситуация обратная: при любом $x_1 \in \Pi_{1,\varepsilon,\mu}(B)$ выполняются строго противоположные (11.65) неравенства, означаю-

шие, что $y_{\pm}(t, \varepsilon, \mu) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. А отсюда очевидным образом следует, что каждая из интересующих нас траекторий (11.16) при $t \rightarrow \infty$ стремится к инвариантному множеству (11.3). Теорема доказана.

Итак, при достаточно больших по модулю отрицательных значениях μ (см. (11.64)) аттрактор $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ типа жесткой турбулентности не существует. Как следует из проделанного выше анализа, возникает он нелокально еще при докритических значениях μ , когда устойчиво инвариантное множество (11.3) (см. (11.63)). Вопрос же о характере бифуркаций, приводящих к появлению $\Sigma(\varepsilon, \mu)$, остается открытым.

11.4. «Охота на хаос». В данном пункте остановимся на вопросе о реализуемости условий 11.1–11.8. С этой целью рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (11.66)$$

удовлетворяющую условию 11.1. Как уже говорилось в п. 1.3, класс этих систем не пуст. Например, в случае $n = 3$ в качестве (11.66) можно взять известную систему Лоренца:

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \quad \dot{x}_3 = -bx_3 + x_1x_2, \quad (11.67)$$

при значениях параметров $\sigma = 10$; $b = 8/3$; $24,74 \leq r \leq 30,1$. Проблема «охоты на хаос» заключается в достройке любой такой системы до системы вида (11.1) с требуемыми свойствами. Соответствующий процесс разобьем на два этапа.

На первом этапе фиксируем произвольно точку $x = a$, не принадлежащую аттрактору A системы (11.66), но находящуюся в его области притяжения. В силу расположения этой точки заведомо найдутся такие постоянные $0 < r_1 < r_0$, что шар

$$\overline{\Omega}_1 = \{x: \|x - a\| \leq r_1\} \quad (11.68)$$

($\|\cdot\|$ — евклидова норма) целиком содержится в области притяжения аттрактора A , а шар

$$\overline{\Omega}_0 = \{x: \|x - a\| \leq r_0\} \quad (11.69)$$

не пересекается с A .

На втором этапе введем в рассмотрение систему (11.1), в которой

$$f(x, y) = f(x) - \alpha y^2(x - a), \quad g(x, y) = y\psi_1(r^2/r_1^2) + \psi_0(r^2/r_0^2). \quad (11.70)$$

Здесь $\alpha = \text{const} > 0$, $r^2 = \|x - a\|^2$, а $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$ — произвольно фиксированные функции, принадлежащие классу C^∞ на полуоси $s \geq 0$ и удовлетворяющие следующим требованиям:

$$\psi_0(s) < 0 \text{ при } 0 \leq s < 1, \quad \psi_0(s) \equiv 0 \text{ при } s \geq 1; \quad (11.71)$$

$$\psi_1(s) < 0 \text{ при } 0 \leq s < 1, \quad \psi_1(s) > 0 \text{ при } s > 1, \quad \psi_1'(1) > 0. \quad (11.72)$$

Например, можно положить

$$\psi_1(s) = s - 1, \quad \psi_0(s) = \begin{cases} -\exp(1/(s-1)) & \text{при } 0 \leq s < 1, \\ 0 & \text{при } s \geq 1. \end{cases} \quad (11.73)$$

Система (11.1) с правыми частями (11.70) и является искомой, так как для нее выполняются все условия 11.1–11.8. Действительно, условие 11.1 справедливо здесь автоматически, поскольку $f(x, 0) = f(x)$.

Далее, условие 11.4 выполняется в рассматриваемом случае очевидным образом, условие 11.8 вытекает из способа выбора шара (11.68), а условие 11.6 — из вида $\dot{x} = -\alpha(x - a)$ системы (11.6). Что же касается оставшихся четырех условий, то они — простые следствия свойств (11.71), (11.72) функций ψ_0, ψ_1 . В частности, фигурирующие в условиях 11.2, 11.5, 11.6 множества Ω_0 и Ω_1 в рассматриваемой ситуации задаются равенствами (11.69) и (11.68) соответственно, в которых, естественно, знак « \leq » следует заменить на « $<$ ».

Проверим, к примеру, условие 11.3. С этой целью заметим, что в силу выбора r_0 аттрактор A системы (11.66) лежит в области $r > r_0$, в которой (см. (11.70), (11.71))

$$g(x, y) = y \psi_1(r^2/r_1^2).$$

А отсюда и из свойств (11.72) функции ψ_1 вытекают требуемые в условии 11.3 неравенства. Условия 11.2, 11.5, 11.7 проверяются аналогично.

В качестве конкретной системы с аттрактором типа жесткой турбулентности рассмотрим систему (11.1), получающуюся из системы Лоренца (11.67) при

$$\sigma = 10, \quad b = 8/3, \quad r = 28 \quad (11.74)$$

по описанному выше правилу. При этом в формулах (11.70) положим

$$a = (1, 1, 60), \quad \alpha = 1, \quad r_1 = 1, \quad r_0 = 2, \quad \psi_1(s) = s - 1,$$

$$\psi_0(s) = \begin{cases} 200(s-1) & \text{при } 0 \leq s \leq 1, \\ 0 & \text{при } s \geq 1 \end{cases}$$

(в отличие от (11.73) здесь функция ψ_0 не является бесконечно дифференцируемой, что несущественно).

Вычисления, проведенные для данного случая при значениях параметров $\varepsilon = 0,09$, $\mu = 0,001$, показывают, что здесь проекция аттрактора типа жесткой турбулентности $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ на гиперплоскость $\{(x, y): x \in \mathbb{R}^3, y = 0\}$ имеет вид, представленный на рис. 11.2. Отметим, что катастрофам на этом рисунке соответствуют прямые линии, по которым происходят «выбросы» компоненты x из аттрактора A системы (11.67).

В заключение добавим, что, как следует из проделанного выше анализа, класс систем (11.1), удовлетворяющих условиям 11.1–11.8, заведомо не пуст. Более того, любая конечномерная система с хаосом

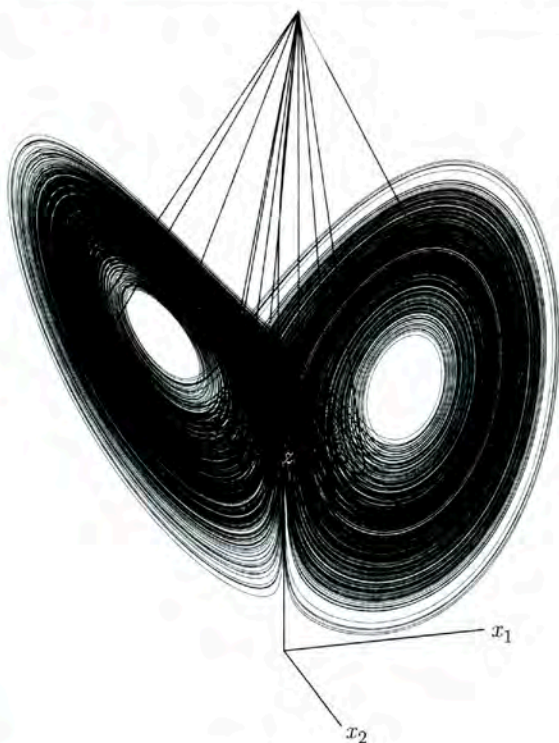


Рис. 11.2

может быть построена по описанному выше правилу до системы вида (11.1) с требуемыми свойствами. А это означает, что предложен один из возможных способов учета редких катастрофических событий в системах со сложным поведением.

12. Режимы типа переключающей перемежаемости

12.1. Описание ограничений. Следуя принятой в [164, 168, 180] терминологии, будем говорить о переключающей перемежаемости, если в системе реализуется хаотический режим, характеризующийся чередованием асимптотически долгих временных интервалов турбулентного и ламинарного поведения, а также редкими, но асимптотически высокими выбросами.

Определенные черты переключающей перемежаемости присущи, очевидно, системе (11.1) при выполнении всех перечисленных в п. 11.1 ограничений. Однако у аттракторов типа жесткой турбулентности слабо выражены ламинарные фазы и их продолжительности по отношению к турбулентным фазам весьма коротки. Вместе с тем в некоторых

случаях, например, в социальной среде, катастрофы могут приводить к длительным фазам депрессии. Поэтому представляет интерес нахождение условий, при которых в системе

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y) y, \quad (12.1)$$

получающейся из (11.1) при $\mu = 0$, наблюдаются незатухающие колебания с асимптотически большими и сопоставимыми по времени ламинарными и турбулентными фазами. Описание соответствующих ограничений приводится ниже.

Условие 12.1. *Считаем, что в дополнение к условию 11.1 система (11.2), описывающая поведение исходной системы (12.1) на инвариантном многообразии $y = 0$, имеет седловое состояние равновесия $x = a \notin A$ с неустойчивым многообразием W^u размерности k , $2 \leq k < n$. Считаем еще, что все траектории этой системы, лежащие на $W^u \setminus \{a\}$, при $t \rightarrow +\infty$ стремятся к аттрактору A .*

Подчеркнем, что дополнительное ограничение на систему (11.2), появившееся в условии 12.1, не является обременительным, так как в большинстве случаев седловая особая точка с требуемыми свойствами существует. Действительно, типовой сценарий возникновения хаотического аттрактора при изменении некоторого параметра, т.е. схема: устойчивое состояние равновесия \rightarrow устойчивый цикл \rightarrow каскад бифуркаций удвоения периода \rightarrow хаос, как раз и предполагает наличие такой особой точки (ставшей неустойчивой после первой из описанных бифуркаций). В случае же, когда A — аттрактор лоренцева типа, в качестве $x = a$ можно взять любое из двух седловых состояний равновесия, вокруг которых происходит движение.

Условие 12.2. *Считаем, что $g(x, y) > 0$ при всех $\{(x, y): x \in A, y \geq 0\}$.*

Данное ограничение, как и аналогичное ему условие 11.3, гарантирует неустойчивость инвариантного хаотического множества (11.3) системы (12.1).

Условие 12.3. *Предполагаем, что правые части системы (12.1) удовлетворяют условию 11.4. Считаем также, что $g_1(a) < 0$, $g_0(x) > 0$ при всех $x \neq a$, $g_0(a) = 0$ и положительно определена матрица $H = g_0''(a)$.*

Условие 12.4. *Допустим, что $f(a, y) \equiv 0$, $g(a, y) < 0$ при всех $y \geq 0$.*

Следующие два ограничения относятся к системе (11.6), у которой в силу условия 12.4 есть состояние равновесия $x = a$.

Условие 12.5. *Считаем, что матрица $C = f_0'(a)$ имеет простую пару комплексных собственных значений $\lambda = -\sigma_1 \pm i\sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, а все остальные ее собственные значения лежат в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < -\sigma_1\}$.*

Введем в рассмотрение собственные векторы $e_1 \pm ie_2$, $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$, отвечающие собственным значениям $-\sigma_1 \pm i\sigma_2$ матрицы C .

Условие 12.6. Предполагаем, что для любого $x_0 \in A$ решение $x = x(t, x_0)$ системы (11.6) с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к состоянию равновесия $x = a$, касаясь ведущего двумерного многообразия:

$$x = a + s_1 e_1 + s_2 e_2, \quad s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \quad (12.2)$$

Для формулировки заключительного ограничения рассмотрим матрицу D линеаризации системы (11.2) на состоянии равновесия $x = a$. В силу условия 12.1 спектр этой матрицы распадается на две группы: k ее собственных значений лежат в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$, а остальные $(n - k)$ — в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Обозначим, далее, через V сумму корневых подпространств матрицы D , отвечающих ее собственным значениям с отрицательными действительными частями. И наконец, фиксируем в V некоторый базис g_m , $m = 1, \dots, n - k$.

Условие 12.7. Считаем, что линейно независима система, составленная из векторов e_1, e_2 и g_m , $m = 1, \dots, n - k$.

Как и в случае условий 11.1–11.8 вопрос о совместном выполнении перечисленных ограничений будет рассмотрен отдельно. Смысл же всех этих условий прояснится чуть ниже.

12.2. Описание результатов. Как и в п. 11.2, рассмотрим множество A_δ , причем выбором $\delta > 0$ распорядимся таким образом, чтобы, во-первых, сохранялось условие 12.2 при замене в нем A на A_δ (возможность указанного выбора δ гарантируют асимптотическое представление (11.5) и свойства функции $g_0(x)$); во-вторых, при всех $x_0 \in A_\delta$ оставалось в силе условие 12.6. Затем введем в рассмотрение множество $B \subset A_\delta$, которое определяется в точности по описанному в п. 11.2 правилу. И наконец, обозначим через

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon)): x(0, \varepsilon) = x_0, y(0, \varepsilon) = 1, \quad (12.3)$$

траекторию системы (12.1) с произвольно фиксированным начальным условием $x_0 \in B$. Как и в предыдущем случае, начнем с описания асимптотического поведения траектории (12.3) при увеличении t .

Снова обращаясь к результатам монографии [98], убеждаемся, что, как и в случае системы (11.1), сначала асимптотически малое время (порядка ε при $n_2 \neq 0$ или $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ при $n_2 = 0$) движение происходит в асимптотически малой окрестности луча $x = x_0, y \geq 1$, причем переменная y достигает за это время значений порядка $\varepsilon^{-1/p}$, где, напомним, $p = n_1 - n_2 > 0$.

Последующий анализ базируется на заменах $y = u \varepsilon^{-1/p}$, $t = s \varepsilon^{n_1/p}$, которые вместе с разложениями (11.4), (11.5) приводят систему (12.1) к виду

$$\begin{aligned} dx/ds &= u^{n_1} (f_0(x) + \varepsilon^{1/p} f_1(x)/u + \varepsilon^{2/p} f_2(x)/u^2 + \dots), \\ du/ds &= u^{n_2+1} (g_0(x) + \varepsilon^{1/p} g_1(x)/u + \varepsilon^{2/p} g_2(x)/u^2 + \dots). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Отбросим, далее, в (12.4) слагаемые порядка малости $\varepsilon^{1/p}$ и выше, а затем выполним замену $d\tau = u^{n_1} ds$. В результате убеждаемся, что дальнейшее движение происходит по кривой

$$\Lambda(x_0): x = x(\tau, x_0), u = \left(p \int_0^\tau g_0(x(\theta, x_0)) d\theta \right)^{1/p}, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (12.5)$$

где, как и в (11.10), $x(\tau, x_0)$, $x(0, x_0) = x_0$ — траектория системы (11.6). Точнее говоря (см. [98]), в случае $p > 1$ траектория

$$(x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)), \quad u = \varepsilon^{1/p} y(t, \varepsilon) \quad (12.6)$$

проходит в окрестности порядка $\varepsilon^{1/p}$ любого участка кривой (12.5), отвечающего произвольно фиксированному отрезку $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 > 0$, изменения τ , или в окрестности порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$ указанного участка в случае $p = 1$. Время же прохождения фазовой точкой (12.6) данного участка имеет порядок $\varepsilon^{n_1/p}$.

Подчеркнем, что основное отличие рассматриваемого случая от описанной в п. 11.2 ситуации состоит в том, что в силу условий 12.5, 12.6 фигурирующая в (12.5) траектория системы (11.6) при $\tau \rightarrow +\infty$ стремится к состоянию равновесия $x = a$. А отсюда и из предполагаемых свойств функции $g_0(x)$ (см. условие 12.3) заключаем, что при $\tau \rightarrow +\infty$ компонента u кривой (12.5) стремится к конечному пределу

$$u_0(x_0) = \left(p \int_0^\infty g_0(x(\theta, x_0)) d\theta \right)^{1/p} > 0. \quad (12.7)$$

Отметим еще, что, как следует из вида правых частей системы (12.4) и условий 12.5, 12.6, фазовая точка (12.6) заведомо попадет в окрестность порядка ε^κ , $\kappa = (2p)^{-1}$, точки $(x, u) = (a, u_0)$ за время порядка $\varepsilon^{n_1/p} \ln(1/\varepsilon)$.

В упомянутой выше окрестности точки (a, u_0) сделаем в системе (12.4) замены $x = a + \varepsilon^\kappa v$, $\varepsilon^{1/p} s \rightarrow s$. В итоге, учитывая вытекающие из условия 12.4 равенства $f_k(a) = 0$, $k \geq 0$ и свойства коэффициентов $g_0(x)$, $g_1(x)$, после сокращения на $\varepsilon^{1/p}$ и отбрасывания в правых частях получившихся уравнений асимптотически малых слагаемых приходим к системе

$$\varepsilon^{1/p} dv/ds = u^{n_1} C v, \quad du/ds = u^{n_2+1} [(Hv, v)/2 + g_1(a)/u], \quad (12.8)$$

где C и H — матрицы из условий 12.5 и 12.3 соответственно.

Из первого уравнения (12.8) и предполагаемой гурвицевости матрицы C очевидным образом следует, что при увеличении s переменная v приобретает (по норме) порядок $\exp(-c/\varepsilon^{1/p})$, $c > 0$. Переменная же u в силу неравенства $g_1(a) < 0$ начинает убывать, т. е. происходит «поворот».

После поворота, как следует из второго уравнения (12.8), переменная $u(t, \varepsilon)$ убывает примерно по закону

$$\varepsilon^{(n_1-1)/p} \dot{u} = g_1(a) u^{n_2}. \quad (12.9)$$

Что же касается переменной v , то ее изменение описывается уравнением

$$\varepsilon^{1/p} dv/du = u^p C v / g_1(a), \quad 0 < u \leq u_0. \quad (12.10)$$

Геометрически все это означает, что траектория (12.3) экспоненциально «прижимается» к инвариантному лучу $x = a$, $y \geq 0$ (см. условие 12.4), причем участок $0 < u \leq u_0$, $x = a$ этого луча, отвечающий значениям $y \sim \varepsilon^{-1/p}$, фазовая точка проходит за конечное (при $n_1 = 1$) или асимптотически малое (при $n_1 > 1$) время. Более того, неравенство $g(a, y) < 0$ при $y \geq 0$ влечет существование такого первого момента времени $t_1 = t_1(\varepsilon) > 0$, что $y(t_1, \varepsilon) = 1$. Величина же t_1 при $n_1 > 1$ асимптотически мала, а при $n_1 = 1$ (в этом случае автоматически $n_2 = 0$) несложный анализ уравнения (12.9) приводит к асимптотическому представлению

$$t_1(\varepsilon) = -u_0(x_0)/g_1(a) + o(1), \quad (12.11)$$

где $u_0(x_0)$ — функция (12.7). И наконец, дополним уравнение (12.10) при $u = u_0$ начальным вектором v_0 , который в силу условия 12.6 должен иметь ненулевую проекцию на плоскость $v = s_1 e_1 + s_2 e_2$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, и проинтегрируем в сторону убывания u . В итоге убеждаемся, что

$$\|x(t_1, \varepsilon) - a\| = \exp\{-(1 + o(1))c_0(x_0)/\varepsilon^{1/p}\}, \quad (12.12)$$

$$c_0(x_0) = -\sigma_1 \frac{u_0^{p+1}(x_0)}{g_1(a)(p+1)} > 0,$$

где σ_1 — постоянная, фигурирующая в условии 12.5, а символом $\|*\|$ здесь и ниже обозначаем евклидовы нормы различных векторов.

Подводя итог, отметим, что при всех $x_0 \in B$ определен оператор

$$x_0 \rightarrow \Pi(x_0, \varepsilon) = x(t, \varepsilon)|_{t=t_1} \quad (12.13)$$

первого возвращения на гиперплоскость $y = 1$. Некоторое представление о действии оператора (12.13), а точнее говоря, о множестве $\Pi(B, \varepsilon)$ можно извлечь из равенств (12.12). Однако в дальнейшем потребуются знание более тонкой структуры $\Pi(B, \varepsilon)$. Для ее описания перейдем в \mathbb{R}^n к новым координатам (ρ, φ, ξ) , $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-2})$ по формуле

$$x = a + \rho(e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi) + \xi_1 e_3 + \xi_2 e_4 + \dots + \xi_{n-2} e_n, \quad (12.14)$$

где e_1, e_2 — векторы, фигурирующие в (12.2), а e_3, e_4, \dots, e_n — базис в сумме корневых подпространств матрицы C , отвечающих ее собственным значениям λ_j , $j = 1, \dots, n-2$, из полуплоскости

$\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < -\sigma_1\}$ (см. условие 12.5). Фиксируем, далее, положительные постоянные c_j , $j = 1, 2, 3$, удовлетворяющие оценкам

$$(12.15) \quad c_2 < \min_{x_0 \in B} c_0(x_0) \leq \max_{x_0 \in B} c_0(x_0) < c_1, \quad 1 < c_3 < \sigma_0/\sigma_1,$$

где $\sigma_0 = \min_{1 \leq j \leq n-2} (-\operatorname{Re} \lambda_j) > \sigma_1$, и рассмотрим множество $G \subset \mathbb{R}^n$, задающееся в переменных (ρ, φ, ξ) равенством

$$(12.16) \quad G = \{(\rho, \varphi, \xi): \exp(-c_1/\varepsilon^{1/p}) \leq \rho \leq \exp(-c_2/\varepsilon^{1/p}), \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \|\xi\| \leq \rho^{c_3}\}.$$

Лемма 12.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо включение

$$(12.17) \quad \Pi(B, \varepsilon) \subset G.$$

Для доказательства сделаем в системе (12.10) аналогичную (12.14) замену

$$v = \rho(e_1 \sin \varphi + e_2 \cos \varphi) + \xi_1 e_3 + \xi_2 e_4 + \dots + \xi_{n-2} e_n,$$

приводящую ее к виду

$$(12.18) \quad \varepsilon^{1/p} \frac{d\rho}{du} = -\sigma_1 u^p \rho, \quad \varepsilon^{1/p} \frac{d\varphi}{du} = \sigma_2 u^p, \quad \varepsilon^{1/p} \frac{d\xi}{du} = u^p C_0 \xi,$$

где матрица C_0 размера $(n-2) \times (n-2)$ имеет собственные значения λ_j , $j \leq n-2$. Дополним затем систему (12.18) начальными условиями при $u = u_0$ с ненулевой компонентой ρ (в силу предполагаемого в условии 12.6 характера подхода траекторий системы (11.6) к особой точке $x = a$). В результате для компонент $\rho(t, \varepsilon)$ и $\xi(t, \varepsilon)$ вектора $x(t, \varepsilon)$ получим аналогичные (12.12) асимптотические соотношения

$$\rho(t_1, \varepsilon) = \exp\{-(1 + o(1))c_0(x_0)/\varepsilon^{1/p}\}, \\ \|\xi(t_1, \varepsilon)\| \leq \exp\{-(1 + o(1))\frac{\sigma_0}{\sigma_1}c_0(x_0)/\varepsilon^{1/p}\},$$

из которых с учетом (12.15), (12.16) включение (12.17) вытекает уже очевидным образом.

Для того чтобы проследить за дальнейшим поведением траектории (12.3), в пространстве \mathbb{R}^n окружим точку $x = a$ некоторой замкнутой гладкой $(n-1)$ -мерной поверхностью Γ , гомеоморфной сфере, и обозначим через Ω — внутреннюю область, ограничиваемую данной поверхностью. При этом выбором Γ распорядимся таким образом, чтобы, во-первых, траектории системы (11.2), лежащие на многообразии W^u , пересекали Γ общим образом; во-вторых, выполнялось неравенство

$$(12.19) \quad g(x, y) < 0 \text{ при } x \in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \quad y \in [0, 1].$$

Заметим, что поскольку $g(a, y) < 0$ при $0 \leq y \leq 1$ (см. условие 12.4), то последнее требование будет заведомо справедливым, если поверхность Γ взять достаточно близкой к точке $x = a$.

Лемма 12.2. *Существует такой первый момент времени $t_2(\varepsilon) > t_1(\varepsilon)$, что $x(t, \varepsilon) \in \Omega$ при $t_1 \leq t < t_2$, $0 < y(t, \varepsilon) < 1$ при $t_1 < t \leq t_2$, $x(t_2, \varepsilon) \in \Gamma$. Кроме этого, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеют место неравенства*

$$b_1 \varepsilon^{-1/p} \leq t_2 \leq b_2 \varepsilon^{-1/p}, \quad \exp(-b_3/\varepsilon^{1+1/p}) \leq y(t_2, \varepsilon) \leq \exp(-b_4/\varepsilon^{1+1/p}) \quad (12.20)$$

с некоторыми независящими от ε постоянными $b_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$.

Доказательство. Из неравенства (12.19) и очевидного включения $x(t_1, \varepsilon) \in \Omega$ следует, что при $t \geq t_1$ компонента $y(t, \varepsilon)$ траектории (12.3) убывает и, более того, ее убывание заведомо сохранится до тех пор, пока $x(t, \varepsilon) \in \bar{\Omega}$. А отсюда и из структуры второго уравнения системы (12.1) вытекает, что при всех интересующих нас t справедливы оценки

$$\exp\left[-\frac{m_-^0(t-t_1)}{\varepsilon}\right] \leq y(t, \varepsilon) \leq \exp\left[-\frac{m_+^0(t-t_1)}{\varepsilon}\right], \quad (12.21)$$

где

$$m_-^0 = \max_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 0 \leq y \leq 1}} (-g(x, y)) > 0, \quad m_+^0 = \min_{\substack{x \in \bar{\Omega} \\ 0 \leq y \leq 1}} (-g(x, y)) > 0.$$

Из оценок (12.21) следует, что при $t \geq t_1$ происходит асимптотически быстрое «падение» фазовой точки (12.3) на устойчивый участок многообразия $y = 0$, соответствующий значениям $x \in \bar{\Omega}$. Что же касается компоненты $x(t, \varepsilon)$, то по крайней мере на качественном уровне ее изменение при $t \geq t_1$ описывается задачей Коши:

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=t_1} = x(t_1(\varepsilon), \varepsilon). \quad (12.22)$$

Таким образом, для доказательства существования требуемого момента времени t_2 достаточно убедиться, что $x(t_1, \varepsilon) \notin W^s$, где W^s представляет собой $(n-k)$ -мерное устойчивое инвариантное многообразие состояния равновесия $x = a$ системы (11.2).

Как известно, в точке $x = a$ упомянутое выше многообразие W^s касается линейного многообразия

$$x = a + s_1 g_1 + \dots + s_{n-k} g_{n-k}, \quad s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{R}. \quad (12.23)$$

Заметим, далее, что в силу условия 12.7 многообразия (12.2) и (12.23) имеют в своем пересечении единственную точку $x = a$. А отсюда и из явного вида (12.16) множества G заключаем, что оно не пересекается с W^s . Тем самым, остается воспользоваться леммой 12.1, из которой вытекает требуемый факт.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что момент времени t_2 , о котором говорится в лемме, существует и имеет порядок $\varepsilon^{-1/p}$: из асимптотического представления (12.12) следует, что именно такое время компонента $x(t, \varepsilon)$ находится «в плену» у экспоненциально неустойчивого состояния равновесия $x = a$ системы (11.2), т. е. в асимптотически малой его окрестности, и лишь после этого, двигаясь вдоль многообразия W^u , за конечное время попадает на поверхность Γ .

Ясно также, что в качестве фигурирующих в (12.20) постоянных b_j , $j = 1, \dots, 4$, можно взять

$$b_1 = c_2/\alpha_2, \quad b_2 = c_1/\alpha_1, \quad b_3 = m_-^0 b_2, \quad b_4 = m_+^0 b_1.$$

Здесь c_1, c_2 — те же, что и в (12.16), $\alpha_1 = \min \operatorname{Re} \lambda$, $\alpha_2 = \max \operatorname{Re} \lambda$, а минимум и максимум берутся по совокупности собственных значений матрицы $D = f'_x(a, 0)$, лежащих в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Лемма 12.2 доказана.

При $t \geq t_2(\varepsilon)$, как следует из второго уравнения системы (12.1), возможный рост компонент $y(t, \varepsilon)$ может происходить по экспоненциальному закону с показателем экспоненты порядка ε^{-1} . Поэтому при $t_2 \leq t \leq t_2 + t_*$, где $t_* > 0$ фиксировано, сохраняются оценки

$$\exp(-b_3/\varepsilon^{1+1/p}) \leq y(t, \varepsilon) \leq \exp(-b_4/\varepsilon^{1+1/p}) \quad (12.24)$$

с теми же самыми постоянными b_3, b_4 , что и в (12.20). А отсюда очевидным образом вытекает предельное равенство

$$\max_{t_2 \leq t \leq t_2 + t_*} \|x(t, \varepsilon) - \bar{x}(t, \varepsilon)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (12.25)$$

где $x = \bar{x}(t, \varepsilon)$ — решение задачи Коши:

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=t_2} = x(t_2, \varepsilon). \quad (12.26)$$

Заметим, что в силу условия 12.1 и асимптотической близости $x(t_2, \varepsilon)$ к многообразию W^u решение задачи (12.26) стремится при $t \rightarrow \infty$ к аттрактору A . Поэтому с течением времени и сама компонента $x(t, \varepsilon)$ с необходимостью попадет в множество $B \subset \{x: g(x, 0) > 0\}$ и уже не сможет его покинуть (по крайней мере, до тех пор, пока компонента $y(t, \varepsilon)$ асимптотически мала). А это означает, что начиная с некоторого момента времени $y(t, \varepsilon)$ растет и, более того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 12.3. *Существует такой первый момент времени $t = t_3(\varepsilon) > t_2(\varepsilon)$, что $0 < y(t, \varepsilon) < 1$ при $t_2 \leq t < t_3$, $y(t_3, \varepsilon) = 1$, $x(t_3, \varepsilon) \in B$ и справедливы неравенства*

$$b_5 \varepsilon^{-1/p} \leq t_3(\varepsilon) - t_2(\varepsilon) \leq b_6 \varepsilon^{-1/p} \quad (12.27)$$

с независящими от ε постоянными $b_5, b_6 > 0$.

Доказательство. Сначала распорядимся выбором фигурирующей в (12.25) постоянной $t_* > 0$. Будем считать ее настолько большой, что $x(t_2 + t_*, \varepsilon) \in A_{\delta'}$ для некоторого фиксированного $\delta' > 0$, удовлетворяющего условиям: $\delta' < \delta$, $A_{\delta'} \subset B$. Подчеркнем, что возможность подобного выбора t_* гарантирует условие 12.1.

Как и при доказательстве леммы 11.3, анализ поведения траектории (12.3) при $t \geq t_2 + t_*$ начнем с вывода априорных оценок для компоненты $y(t, \varepsilon)$. С этой целью рассмотрим постоянные

$$m_-^1 = \min_{\substack{x \in B \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y), \quad m_+^1 = \max_{\substack{x \in B \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y),$$

положительные в силу условия 12.2. Обращаясь, далее, ко второму уравнению системы (12.1), для $y(t, \varepsilon)$ получаем неравенства

$$y_-(t, \varepsilon) \leq y(t, \varepsilon) \leq y_+(t, \varepsilon), \quad (12.28)$$

где $y_{\pm}(t, \varepsilon) = y(t_2 + t_*, \varepsilon) \exp[m_{\pm}^1(t - t_2 - t_*)/\varepsilon]$, справедливые при тех $t \geq t_2 + t_*$, для которых $x(t, \varepsilon) \in B$, $0 < y(t, \varepsilon) \leq 1$.

Последующие рассуждения практически дословно совпадают с соответствующим местом из доказательства леммы 11.3. А именно, сначала устанавливаем существование такой независимой от ε достаточно малой постоянной $\sigma_0 > 0$ и такого момента времени \bar{t} , что $x(t, \varepsilon) \in B$ при $t_2 + t_* \leq t \leq \bar{t}$, $y(t, \varepsilon) < \sigma_0$ при $t_2 + t_* \leq t < \bar{t}$, $y(\bar{t}, \varepsilon) = \sigma_0$. Далее, опираясь на оценки (12.28), которые заведомо имеют место при $t_2 + t_* \leq t \leq \bar{t}$, убеждаемся, что $\bar{t} \in [t_+, t_-]$, где

$$t_+ \leq t_-, \quad t_{\pm} = t_2 + t_* - \frac{\varepsilon}{m_{\pm}^1} \ln y(t_2 + t_*, \varepsilon) + O(\varepsilon), \quad y_{\pm}(t_{\pm}, \varepsilon) = \sigma_0. \quad (12.29)$$

И наконец, замечаем, что поскольку в силу условия 12.2 расстояние между гиперплоскостями $y = \sigma_0$ и $y = 1$ фазовая точка (12.3) преодолевает за время порядка ε , то обязательно существует такой первый момент времени $t_3 > \bar{t}$, $t_3 - \bar{t} = O(\varepsilon)$, что $y(t_3, \varepsilon) = 1$ и, по-прежнему, сохраняется включение $x(t_3, \varepsilon) \in B$. Что же касается оценок (12.27), то они — простые следствия асимптотических представлений для t_{\pm} (см. (12.29)) и неравенств (12.24) при $t = t_2 + t_*$. В частности, в качестве постоянных b_5 , b_6 можно взять $b_5 = b_4/m_+^1$, $b_6 = b_3/m_-^1$. Лемма 12.3 доказана.

В дополнение к установленным леммам отметим еще две характерные особенности асимптотического поведения траекторий системы (12.1). Рассмотрим для простоты случай, когда фигурирующее в условии 12.1 многообразие W^u двумерно. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$ участок траектории (12.6), соответствующий значениям $0 \leq t \leq t_2$, имеет своим нулевым приближением не кривую, а более сложное множество. Это множество состоит из кривой (12.5), отрезка $\{(x, u): x = a, 0 \leq u \leq u_0\}$ и площадки $\{(x, u): u = 0, x \in W_0^u\}$, где W_0^u — участок многообразия W^u , лежащий в $\bar{\Omega}$. Действительно, при проектировании множества (12.16) на W^u параллельно многообразию (12.23) получается некоторое кольцевое множество G_0 , окружающее особую точку $x = a$. Далее, из второго уравнения системы (12.18) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ угловая координата φ , отвечающая кольцу G_0 , неограниченно растет. А это означает, что при $t > t_1$, т.е. после «падения» на гиперплоскость $y = 0$,

движение может продолжиться вдоль любой «случайно» выбранной траектории системы (11.2), лежащей на W^u . Таким образом, проявляется одна из причин возникновения хаоса в системе (12.1), которая, подчеркнем, не имеет аналога в рамках системы (11.1).

Другая причина стохастизации решений системы (12.1) носит более наглядный характер. В самом деле, траектория (12.3), как и аналогичная ей траектория (11.8) системы (11.1), в течение асимптотически большого времени меняется в хаотическом режиме, находясь в асимптотически малой окрестности инвариантного множества (11.3). Поэтому «срыв» при $t = t_3$ с многообразия $y = 0$ происходит в некоторой «случайно» выбранной точке $x(t_3, \varepsilon) \in A_{\delta(\varepsilon)}$, где $\delta(\varepsilon) > 0$ при $\varepsilon > 0$, $\delta(0) = 0$ (существование такой непрерывной функции $\delta(\varepsilon)$ следует из проделанного выше анализа).

Подводя итог, введем в рассмотрение оператор

$$x_0 \rightarrow \Pi_\varepsilon(x_0) = x(t, \varepsilon)|_{t=t_3(\varepsilon)} \quad (12.30)$$

второго возвращения на гиперплоскость $y = 1$ по траекториям системы (12.1). Из лемм 12.1–12.3 вытекает следующее утверждение.

Теорема 12.1. Пусть выполнены условия 12.1–12.7. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ на множестве B определен оператор (12.30) и справедливо включение $\Pi_\varepsilon(B) \subset B$.

Из установленной теоремы следует существование у отображения Π_ε аналогичного (11.62) аттрактора

$$B(\varepsilon) = \bigcap_{k \geq 0} \Pi_\varepsilon^k(B). \quad (12.31)$$

В системе (12.1) аттрактору (12.31) соответствует аттрактор $\Sigma(\varepsilon)$, который назовем *аттрактором типа переключающей перемежаемости*. Мотивировкой для такого названия служит то обстоятельство, что в отличие от аттрактора $\Sigma(\varepsilon, \mu)$ системы (11.1) колебания на $\Sigma(\varepsilon)$ характеризуются асимптотически долгими (порядка $\varepsilon^{-1/p}$) ламинарными фазами, сопоставимыми по длительности с турбулентными фазами. Кроме этого, переход от турбулентной к ламинарной фазе (переключение) сопровождается асимптотически высоким выбросом по переменной y , а время переключения мало по сравнению с продолжительностями самих этих фаз.

Действительно, рассмотрим произвольную траекторию (12.3), принадлежащую аттрактору $\Sigma(\varepsilon)$. Соответствующий ей временной промежуток $0 \leq t \leq t_1$ назовем *фазой переключения*. На протяжении этой фазы происходит асимптотически высокий выброс по переменной y и асимптотически быстрое изменение x от x_0 до значения, асимптотически близкого к $x = a$. Длительность этой фазы может быть как асимптотически малой (мгновенное переключение), так и порядка единицы (см. (12.11)). Отметим еще, что в последнем случае за время

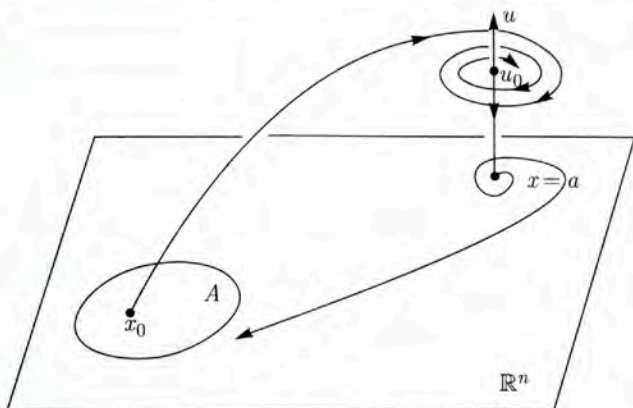


Рис. 12.1

порядка единицы происходит спад переменной y от значений порядка ε^{-1} до $y = 1$. Что же касается переменной x , то она все это время уже находится в асимптотически малой окрестности значения $x = a$.

Временной участок $t_1 \leq t \leq t_2$ будем называть *ламинарной фазой*, так как большую его часть, а именно, время порядка $\varepsilon^{-1/p}$ фазовая точка (12.3) проводит в асимптотически малой окрестности неустойчивого состояния равновесия $x = a, y = 0$, т. е. колебания отсутствуют.

И наконец, оставшийся временной промежуток $t_2 \leq t \leq t_3$ назовем *турбулентной фазой*, так как здесь время порядка $\varepsilon^{-1/p}$ компонента $x(t, \varepsilon)$ меняется в хаотическом режиме. Далее, при $t \geq t_3$ происходит следующее переключение, приводящее к очередной ламинарной фазе. Затем снова наступает турбулентная фаза и т. д.

В заключение добавим, что в основу функционирования систем (11.1) и (12.1) заложены одни и те же принципы. Отличие состоит лишь в механизме «возвращаемости» траекторий к гиперплоскости $y = 0$. В случае системы (12.1) центральный момент этого механизма — существование инвариантной оси $x = a, y \geq 0$, к которой после «выброса» траектория (12.3) сначала экспоненциально прижимается, а затем удаляется с экспоненциальной скоростью (см. рис. 12.1, на котором схематически изображено движение фазовой точки (12.6)).

12.3. О реализуемости условий 12.1–12.7. В пространстве \mathbb{R}^n рассмотрим произвольную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad (12.32)$$

удовлетворяющую условию 12.1 и следующему дополнительному ограничению.

Условие 12.1'. *Найдутся такие линейно независимые векторы $h_1, \dots, h_{n-2} \in \mathbb{R}^n$, что линейное многообразие*

$$x = a + s_1 h_1 + \dots + s_{n-2} h_{n-2}, \quad s_1, \dots, s_{n-2} \in \mathbb{R}, \quad (12.33)$$

не пересекается с множеством A .

Подчеркнем, что данный класс систем заведомо не пуст. Например, в случае $n = 3$ в качестве (12.32) можно взять уже упоминавшуюся ранее систему Лоренца (11.67) при значениях параметров (11.74), а в качестве ее состояния равновесия $x = a$ выбрать

$$a = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Отметим еще, что справедливость для системы (11.67) условия 12.1 вытекает из всей совокупности имеющихся к настоящему времени результатов ее численного и аналитического исследования (см. [178]), а условие 12.1', характеризующее некоторую общность положения, выполняется здесь очевидным образом.

В данном пункте покажем, что любая система (12.32) из описанного класса может быть достроена до системы вида (12.1) с требуемыми свойствами. С этой целью фиксируем такое положительное число r_0 , что замкнутый шар с центром в точке $x = a$ радиуса r_0 не пересекается с A (указанное r_0 обязательно найдется, поскольку $a \notin A$). Рассмотрим затем систему (12.1), в которой

$$f(x, y) = f(x) + y^2 C(x - a), \quad g(x, y) = y\psi_1(r^2) + \psi_0(r^2/r_0^2). \quad (12.34)$$

Здесь $r^2 = \|x - a\|^2$, C — пока произвольная постоянная матрица размера $n \times n$, а $\psi_0(s)$, $\psi_1(s)$ — некоторые функции, принадлежащие классу C^∞ на полуоси $s \geq 0$ и такие, что

$$\psi_1(s) > 0 \text{ при } s > 0, \quad \psi_1(0) = 0, \quad \psi_1'(0) > 0; \quad (12.35)$$

$$\psi_0(s) < 0 \text{ при } 0 \leq s < 1, \quad \psi_0(s) > 0 \text{ при } s > 1, \quad \psi_0'(1) > 0. \quad (12.36)$$

Нетрудно убедиться, что для системы (12.1) с правыми частями (12.34) справедливы условия 12.1–12.4. Действительно, поскольку в данном случае $f(x, 0) = f(x)$, то справедливость условия 12.1 гарантируют свойства системы (12.32). Далее, условия 12.2–12.4 очевидным образом вытекают из свойств (12.35), (12.36) функций ψ_0 , ψ_1 . Что же касается оставшихся условий 12.5–12.7, то их выполнения можно добиться за счет подходящего выбора имеющейся в запасе матрицы C . Способ построения этой матрицы описывается ниже.

Введем в рассмотрение систему (11.6), которая в данном случае имеет вид

$$\dot{x} = C(x - a). \quad (12.37)$$

Тем самым, для выполнения условий 12.5, 12.6 необходимо, чтобы матрица C была гурвицевой. Фиксируем, далее, такие два вектора e_1, e_2 из \mathbb{R}^n , что одновременно линейно независимыми являются системы $e_1, e_2, h_m, m = 1, \dots, n-2$, и $e_1, e_2, g_m, m = 1, \dots, n-k$. Здесь векторы $h_m, m = 1, \dots, n-2$, взяты из условия 12.1', а система $g_m, m = 1, \dots, n-k$, введена в п. 12.1 перед формулировкой условия 12.7. И наконец, будем считать, что, во-первых, матрица C имеет простую пару комплексных собственных значений $-\sigma_1 \pm i\sigma_2$, где $\sigma_1, \sigma_2 > 0$, которой отвечают собственные векторы $e_1 \pm ie_2$; во-вторых, всем остальным ее собственным

значениям, которые предполагаем лежащими на полуоси $\{\lambda: \lambda < -\sigma_1\}$, отвечают собственные векторы h_m , $m = 1, \dots, n - 2$. Например, можно положить

$$C = \Lambda \operatorname{diag}\{C_0, -\sigma_3, \dots, -\sigma_3\} \Lambda^{-1}, \quad (12.38)$$

где

$$C_0 = \begin{pmatrix} -\sigma_1 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & -\sigma_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1, \sigma_2 > 0, \quad \sigma_3 > \sigma_1,$$

а Λ — матрица, по столбцам которой стоят векторы e_1, e_2, h_m , $m = 1, \dots, n - 2$.

Матрица C с описанными свойствами и является искомой. В самом деле, условия 12.5 и 12.7 непосредственно следуют из способа выбора ее собственных векторов и собственных значений, а условие 12.6 — следствие того факта, что неведущее устойчивое многообразие состояния равновесия $x = a$ системы (12.37) задается равенством (12.33) и в силу условия 12.1' не пересекается с множеством A .

Итак, класс систем (12.1), удовлетворяющих условиям 12.1–12.7, заведомо не пуст. В качестве его типичного представителя можно взять систему, получающаяся из системы Лоренца (11.67) по описанному выше правилу с использованием функций $\psi_1(s) = s$, $\psi_0(s) = s - 1$ и матрицы (12.38). Более того, поскольку содержащееся в условии 12.1 требование относительно существования состояния равновесия $x = a$ не является обременительным, то практически любая конечномерная система с хаосом может быть переведена в режим «жизни на кромке хаоса», т.е. достроена до системы вида (12.1) на единицу большей размерности с аттрактором типа переключающей перемежаемости.

12.4. Заключительные замечания. Из общих соображений ясно, что режим жесткой турбулентности, когда длительные периоды «нормального» турбулентного развития прерываются редкими катастрофами и последующими непродолжительными ламинарными фазами, возможен только в системах, в определенном смысле близких к критическим. Действительно, согласно развитым в [164, 168, 180] представлениям, для возникновения жесткой турбулентности необходимо инвариантное многообразие M с хаотическим аттрактором S на нем. Кроме того, множество S должно удовлетворять двум, казалось бы, противоположным требованиям: асимптотически быстро выбрасывать траектории в перпендикулярном направлении и удерживать эти же траектории (после их возвращения к многообразию M) асимптотически долгое время. А такое возможно, очевидно, только в том случае, когда инвариантное множество S слабо неустойчиво по линейному приближению и сильно неустойчиво за счет нелинейных слагаемых.

Обращаясь к системе (11.1), отметим, что в ней многообразие M — это гиперплоскость $y = 0$, а S — инвариантное множество (11.3). Тем самым, становится понятной принципиальная роль условий $g(x, 0) \equiv 0$, $g'_y(x, 0) > 0$ при $x \in A$: они обеспечивают требуемую критичность множества S . Что же касается параметра μ , то он характеризует «отход» от

рассматриваемой особенности и, в принципе, может входить в правую часть уравнения для y более общим образом. А именно, полученные выше результаты сохраняются и в случае системы

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y, \mu) y,$$

где бесконечно дифференцируемая по совокупности переменных функция $g(x, y, \mu)$ подчинена следующим требованиям: $g'_\mu(x, 0, 0) > 0$ при $x \in A$; $g(x, y, 0)$ удовлетворяет всем прежним ограничениям; равномерно по $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, где $\mu_0 > 0$ — некоторая фиксированная постоянная, для $g(x, y, \mu)$ справедливо асимптотическое представление (11.5) с гладко зависящими от μ коэффициентами $g_k(x, \mu)$, $k \geq 0$.

Уместно подчеркнуть еще одно присущее системе (11.1) и, на первый взгляд, весьма парадоксальное свойство: чем ближе эта система к критической, т.е. чем меньше параметр μ , тем благоприятнее режим ее функционирования, т.е. больше среднее время между двумя соседними катастрофами. И наконец, в чисто критическом случае, т.е. при $\mu = 0$, указанное время становится экспоненциально большим (см. п. 11.3) и, в принципе, может оказаться сравнимым с временем жизни самой системы.

В случае системы (12.1) механизм критичности носит несколько иной характер. А именно, здесь критичность состоит в том, что поверхность уровня $g_0(x) = 0$ вырождается в точку $x = a$ и имеется еще инвариантный луч $x = a$, $y \geq 0$. Ясно также, что оба эти условия вызваны существом дела и при отказе хотя бы от одного из них аттрактора $\Sigma(\varepsilon)$ с асимптотически долгими ламинарными и турбулентными фазами не будет. Например, если вместо указанных условий потребовать, чтобы $g_0(x) < 0$ в некоторой ограниченной области Ω , содержащей точку $x = a$, и $g(x, y) < 0$ при $x \in \Omega$, $y \geq 0$, то, как и в случае системы (11.1) при $\mu > 0$, $\mu \sim 1$, будут наблюдаться колебания с турбулентными и ламинарными фазами порядка единицы.

Интересно отметить, что предложенные нами системы (11.1) и (12.1) относятся к числу так называемых *самоорганизованно критических моделей* (см. монографию [21], в которой содержится обзор таких моделей). Термин «самоорганизованная критичность» означает в данном случае следующее. Во-первых, катастрофы в системах (11.1), (12.1) обусловлены их внутренними свойствами (характером нелинейного взаимодействия переменных x и y), а не какими-либо причинами извне. Иными словами, время от времени эти системы самоорганизуются в критическое состояние: самопроизвольно возникает очередной всплеск переменной y , приводящий к переходу от турбулентной к ламинарной фазе. Во-вторых, в «штатных» и «кризисных» ситуациях системы (11.1), (12.1) описываются разными наборами параметров порядка. Действительно, на протяжении как турбулентной, так и ламинарной фазы переменная y асимптотически мала и, следовательно, в этом случае можно перейти от исходных систем к системе (11.2) на единицу меньшей размерности. В кризисной

же ситуации происходит самоорганизация, выражающаяся в появлении дополнительного параметра порядка y .

Для сравнения заметим, что, к примеру, при условии (11.64) система (11.1) не обладает свойством самоорганизованной критичности, так как единственным аттрактором в ней является хаотическое множество (11.3), характеризующее безкризисное развитие. С другой стороны, в этой системе можно искусственно спровоцировать катастрофу, задавая для нее при $t = 0$ начальные условия x_0, y_0 таким образом, что $x_0 \in A, g(x_0, y_0) + \mu > 0$. Однако по прошествии кризиса траектория с указанными начальными условиями возвращается к множеству (11.3) и уже не покидает его (до тех пор, пока мы снова не изменим начальное условие для y).

Подводя итог, отметим, что нам удалось описать новые механизмы возникновения редких катастрофических событий в системах со сложным поведением. Точнее говоря, предложена определенная методика учета таких событий. Показано, в частности, что любая конечномерная система с хаосом может быть достроена до системы на единицу большей размерности с аттрактором типа жесткой турбулентности, а при некоторых дополнительных ограничениях — с аттрактором типа переключающей перемежаемости. В связи с этим уместно добавить, что в условиях 11.1, 12.1 определение хаоса 1.7 можно заменить любым другим имеющимся к настоящему времени определением хаотического аттрактора. Например, можно считать, что A — стохастический аттрактор в смысле определения Я. Г. Синая [121], сформулированного в терминах инвариантной меры. Каждому из этих случаев будет соответствовать своя версия наших основных теорем 11.1 и 12.1.