

Глава 5

ХАОТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ СИСТЕМАХ

Глава состоит из разделов 13–16. В разделе 13 получает дальнейшее развитие идея кольцевой однонаправленной связи, предложенная в п. 10.4. Точнее говоря, мы по-прежнему рассматриваем кольцевую цепочку вида (10.49), (10.50), но теперь в качестве парциальных подсистем в ней берем уже не уравнения Шрёдингера, а три одинаковые системы обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным аттрактором — состоянием равновесия или циклом. Показывается, что в такой системе при подходящем выборе параметров возникают хаотические автоколебания, обусловленные коллективным взаимодействием парциальных осцилляторов. Иными словами, предлагается некий универсальный подход к проектированию генераторов хаоса.

В разделе 14 изучается механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом 1 : 2. Механизм, о котором идет речь, заключается в следующем. Рассмотрим произвольную автономную диссипативную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с единственным нулевым состоянием равновесия, в задаче об устойчивости которого реализуется критический случай резонанса 1 : 2. Тогда при определенной общности положения это состояние равновесия является неустойчивым, а значит, в силу диссипативности такая система будет иметь хотя бы один нетривиальный аттрактор (т.е. аттрактор, отличный от состояния равновесия и, вообще говоря, лежащий вне некоторой окрестности нуля). Далее, при малых возмущениях правой части системы ее состояние равновесия может стать устойчивым, в то время как нелокальный аттрактор, естественно, сохранится. Таким образом, приходим к случаю, который принято называть *жестким возбуждением автоколебаний*.

Ниже предлагается способ моделирования описанной нелокальной ситуации посредством локальных методов, что позволяет выявить ряд характерных особенностей динамики. В частности, удастся показать (с помощью численного анализа), что при определенных условиях устойчивое нулевое решение может сосуществовать с хаотическим аттрактором.

В разделе 15 рассматривается специальный класс нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений — так называемые *флаттерные системы*, возникающие при галеркинских аппроксимациях некоторых краевых задач нелинейной теории аэроупругости, а также в ряде радиофизических приложений. При условии малости коэффици-

ента затухания исследуется вопрос об аттракторах флаттерных систем, появляющихся в малой окрестности нулевого состояния равновесия в результате взаимодействия резонансов $1:1$ и $1:2$. Устанавливается, что, во-первых, эти аттракторы могут быть как регулярными, так и хаотическими (в последнем случае речь идет, естественно, о результатах численного анализа); во-вторых, при определенном выборе параметров они сосуществуют с устойчивым нулевым решением, т.е. наблюдается эффект жесткого возбуждения автоколебаний.

В разделе 16 исследуется известное уравнение Син-Гордона с нулевыми граничными условиями Дирихле на концах конечного отрезка, дополненное малым затуханием и малой квазипериодической внешней силой. Главное предположение состоит в том, что все частоты внешней силы находятся в резонансе $1:1$ с некоторыми собственными частотами невозмущенного уравнения, т.е. наблюдается так называемый основной многочастотный резонанс. Показывается, что в этой ситуации при подходящем выборе параметров внешнего воздействия можно добиться существования у рассматриваемой краевой задачи устойчивого инвариантного тора любой конечной размерности, бифурцирующего из нуля на произвольном наперед заданном конечном наборе пространственных мод. Устанавливается также (посредством численного анализа), что в ряде случаев указанный тор сосуществует с хаотическим аттрактором.

13. Явления хаоса в кольце из трех однонаправленно связанных генераторов

13.1. Локальная постановка проблемы. Реализуемость общей идеи проектирования кольцевых хаотических генераторов проиллюстрируем на примере скалярного нелинейного уравнения:

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + u = f(u, \dot{u}), \quad (13.1)$$

где ε — малый по модулю параметр произвольного знака, а тейлоровское разложение в нуле функции $f(u, v) \in C^\infty$ имеет вид

$$f(u, v) = a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + b_1 u^3 + b_2 u^2 v + b_3 uv^2 + b_4 v^3 + \dots \quad (13.2)$$

Основное предположение, при котором будет рассматриваться это уравнение, состоит в выполнении неравенства

$$\operatorname{Re} d < 0, \quad (13.3)$$

где d — комплексная ляпуновская величина, отвечающая нулевому состоянию равновесия при $\varepsilon = 0$ и вычисляющаяся по формуле

$$d = \frac{1}{2} [a_2(a_1 + a_3) + b_2 + 3b_4] - \frac{i}{6} [10a_1(a_1 + a_3) + 4a_3^2 + a_2^2 + 9b_1 + 3b_3]. \quad (13.4)$$

Как известно (см., например, [132]), при условии (13.3) и при $\varepsilon > 0$ нулевое решение уравнения (13.1) экспоненциально устойчиво, а при $\varepsilon < 0$, $|\varepsilon| \ll 1$ из нуля рождается устойчивый цикл амплитуды порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$. В дальнейшем считаем, что каждый из упомянутых аттракторов глобально устойчив. В этом случае уравнение (13.1) удовлетворяет основным требованиям, которые мы предъявляем к парциальным системам. Другая причина, по которой наш выбор пал именно на это уравнение, состоит в том, что при различных правых частях f оно служит математической моделью для широкого класса автогенераторов с сосредоточенными параметрами [95].

При рассмотрении кольцевого генератора ограничимся простейшим случаем, когда все три парциальные системы одинаковы и моделируются уравнением (13.1). В итоге приходим к системе

$$\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j + \mu g(u_{j-1}) = f(u_j, \dot{u}_j), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.5)$$

где $u_0 = u_3$, а функция связи $g(u) \in C^\infty$ такова, что $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$, $g(u) \rightarrow 0$ при $|u| \rightarrow \infty$ (смысл последнего требования в том, что связь должна гасить излишне интенсивные сигналы). Что же касается параметра $\mu > 0$, то его считаем хотя и малым, но подчиненным соотношению:

$$|\nu| \ll 1, \quad \text{где } \nu = \varepsilon/\mu. \quad (13.6)$$

Следуя изложенной в [73] методике, при условии (13.6) возможные автоколебательные режимы системы (13.5) будем искать в виде формальных рядов по целым степеням $\sqrt{\mu}$:

$$u_j = \sqrt{\mu} u_{j,1}(t, \tau) + \mu u_{j,2}(t, \tau) + \mu^{3/2} u_{j,3}(t, \tau) + \dots, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.7)$$

где $\tau = \mu t$, все функции $u_{j,k}$, $k \geq 1$, являются 2π -периодическими по t , причем

$$u_{j,1} = z_j(\tau) \exp(it) + \bar{z}_j(\tau) \exp(-it), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.8)$$

а z_j — некоторые пока неизвестные (подлежащие определению в ходе алгоритма) комплексные амплитуды.

Подставляя формулы (13.2), (13.7), (13.8) вместе с равенством $\varepsilon = \nu\mu$ в систему (13.5) и приравнявая коэффициенты при μ , для $u_{j,2}$ получаем линейные неоднородные уравнения вида:

$$\ddot{u}_{j,2} + u_{j,2} = c_{j,0}(\tau) + c_{j,1}(\tau) \exp(2it) + \bar{c}_{j,1}(\tau) \exp(-2it), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.9)$$

где, как и в (13.5), точкой обозначено дифференцирование по t , а переменная τ в данном случае рассматривается как параметр. Отсюда функции $u_{j,2}$ однозначно определяются в форме, аналогичной правым частям уравнений (13.9), т. е. в виде суммы нулевых и вторых гармоник по t .

После приравнивания коэффициентов при $\mu^{3/2}$ для $u_{j,3}$ получаем уравнения, подобные (13.9), но теперь их правые части $g_j(t, \tau)$ —

суммы первых и третьих гармоник по t . Напомним, далее, что нас интересуют периодические по t решения этих уравнений. Тем самым, с необходимостью должны быть равными нулю коэффициенты при $\exp(\pm i t)$ в неоднородностях $g_j(t, \tau)$, $j = 1, 2, 3$. Добиться же выполнения требуемых равенств можно за счет выбора имеющихся в запасе комплексных амплитуд $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$. Нетрудно убедиться, что на этом пути для упомянутых амплитуд получаем систему

$$\frac{dz_j}{d\tau} = -\frac{\nu}{2} z_j + \frac{i}{2} z_{j-1} + d |z_j|^2 z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.10)$$

где $z_0 = z_3$, а комплексная постоянная d и вещественный параметр ν задаются соответственно равенствами (13.4) и (13.6).

В дальнейшем в силу малости $|\nu|$ вместо (13.10) будем работать с предельной системой

$$\frac{dz_j}{d\tau} = \frac{i}{2} z_{j-1} + d |z_j|^2 z_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (13.11)$$

Нам потребуются следующие два определения.

Определение 13.1. Автомодельным циклом системы (13.11) назовем ее периодическое решение вида

$$z_j(\tau) = z_j^0 \exp(i\sigma\tau), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.12)$$

где $z_j^0 \in \mathbb{C}$, $j = 1, 2, 3$, и $\sigma \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные.

Определение 13.2. Двумерным автомодельным тором системы (13.11) будем называть ее квазипериодическое решение вида

$$z_j(\tau) = z_j^0(\tau) \exp(i\sigma\tau), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.13)$$

где σ — вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(\tau)$, $j = 1, 2, 3$, периодичны по τ с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем, что решение (13.13) не приводится к виду (13.12).

Из способа получения системы (13.11) вытекает, что она представляет собой укороченную нормальную форму исходной системы (13.5). Тем самым, справедливо следующее стандартное утверждение о соответствии (см. например, [14, 73]).

Теорема 13.1. Предположим, что система (13.11) имеет некоторый автомодельный цикл (тор), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда найдутся такие достаточно малые μ_0 , $\nu_0 > 0$, что при всех ϵ, μ : $0 < \mu \leq \mu_0$, $|\epsilon|/\mu \leq \nu_0$ исходная система (13.5) имеет цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости, асимптотика которого задается формулами (13.7), (13.8) с учетом равенств (13.12) или (13.13) соответственно.

Прежде чем обсудить вопрос о содержательности данной теоремы, приведем систему (13.11) к виду, более удобному для численного интегрирования. С этой целью последовательно выполним в ней замены

$$z_j \sqrt{-2\operatorname{Re} d} \rightarrow z_j, \quad j = 1, 2, 3; \quad \tau/2 \rightarrow \tau; \quad z_j = \xi_j \exp(i\varphi_j), \\ \xi_j > 0, \quad 0 \leq \varphi_j \leq 2\pi, \quad j = 1, 2, 3.$$

В результате от получившейся в итоге шестимерной системы для ξ_j , φ_j , $j = 1, 2, 3$, отщепляется пятимерная система для ξ_j , $j = 1, 2, 3$, $\psi_1 = \varphi_1 - \varphi_3$, $\psi_2 = \varphi_2 - \varphi_1$, имеющая в точности вид (10.63) при

$$c_0 = -\operatorname{Im} d / \operatorname{Re} d. \quad (13.14)$$

Проделанный в п. 10.4 численный анализ системы (10.63) свидетельствует о том, что область применимости теоремы 13.1 заведомо не пуста. Следует отметить, впрочем, что эта теорема носит вспомогательный характер и фиксирует лишь тот объем информации об исходной системе (13.5), который допускает строгое математическое обоснование. Главная же особенность динамики системы (10.63) заключается в наличии в ней хаоса при всех $|c_0| \geq 54,7$. Действительно, это означает, что кольцевой хаотический генератор можно сконструировать, взяв за основу практически любой известный классический генератор периодических колебаний, моделирующийся уравнением (13.1). Единственная проблема заключается в том, чтобы добиться выполнения для соответствующей величины (13.14) требуемой оценки $|c_0| \geq 54,7$ за счет надлежащего выбора параметров парциальной системы.

В качестве конкретного примера, к которому применима описанная выше локальная теория, возьмем уравнение Ван дер Поля–Дуффинга:

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + u^2 \dot{u} + u + a u^3 = 0, \quad (13.15)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$, $a = \operatorname{const} > 0$. Это уравнение удовлетворяет всем требованиям, наложенным выше на парциальную систему и, в частности, здесь

$$d = -\frac{1}{2} + \frac{3i}{2} a, \quad c_0 = 3a. \quad (13.16)$$

Рассмотрим затем соответствующую уравнению (13.15) кольцевую систему

$$\ddot{u}_j + \varepsilon \dot{u}_j + u_j^2 \dot{u}_j + u_j + a u_j^3 + \mu g(u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.17)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, а функцию связи $g(u)$ зададим формулой

$$g(u) = u/(1 + b u^4), \quad b > 0. \quad (13.18)$$

При исследовании получившейся системы (13.17), (13.18) ограничимся случаем

$$a = 60, \quad b = 4, \quad \varepsilon = 0,001. \quad (13.19)$$

В силу (13.16), (13.19) здесь $c_0 = 180$ и в соответствии с проделанным выше локальным анализом при достаточно малых $\mu > 0$ в рассматриваемой системе должна наблюдаться хаотическая динамика.

Численные расчеты, результаты которых представлены в табл. 13.1, полностью согласуются с теоретическими выводами. В этой таблице приведены значения старшего ляпуновского показателя λ_{\max} хаотического аттрактора системы (13.17)–(13.19) при различных μ .

Таблица 13.1

μ	0,01	0,05	0,1	0,3
λ_{\max}	0,005	0,018	0,0206	0,015

Механизм возникновения хаоса в описанном выше примере удобнее проследить, меняя параметр μ от больших значений к малым. Как показывает численный анализ, здесь реализуется известный сценарий Рюэля–Тakensа (см., например, [84]). А именно, сначала, т.е. при всех $\mu \gtrsim 16$, единственным аттрактором системы (13.17)–(13.19) является предельный цикл. При дальнейшем уменьшении μ этот цикл теряет устойчивость и от него ответвляется устойчивый двумерный тор. Последний наблюдается в диапазоне $0,4 \lesssim \mu \lesssim 16$, а затем на его месте возникает хаотический аттрактор, т.е. мы вступаем в область применимости локальной теории.

13.2. Нелокальные случаи. В этом пункте показывается, что хаотические режимы могут наблюдаться в кольце из трех односторонне связанных генераторов и в случае, когда заведомо не работает описанная выше локальная теория. Изложение ведется на уровне рассмотрения двух содержательных примеров.

В первом примере в качестве парциальной системы возьмем автогенератор, блок-схема которого изображена на рис. 13.1. Здесь L , C , R — сосредоточенные индуктивность, емкость и активное сопротивление, а E — напряжение источника питания. Что же касается нелинейного элемента — туннельного диода TD, то его вольт-амперная характеристика имеет вид, представленный на рис. 13.2.

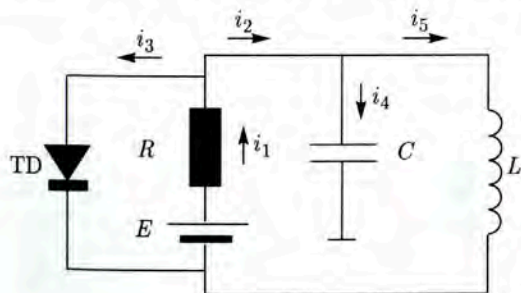


Рис. 13.1

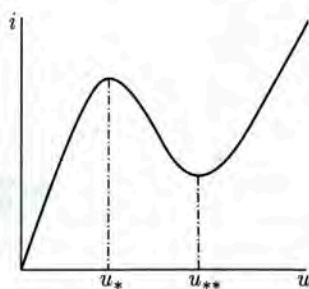


Рис. 13.2

При выводе математической модели парциального генератора воспользуемся законами Ома и Кирхгофа, на основании которых для токов i_k , $k = 1, 2, \dots, 5$, в нем (см. рис. 13.1) справедливы соотношения

$$i_1 = \frac{E - u}{R}, \quad i_3 = f(u), \quad i_4 = C \frac{du}{dt}, \quad i_5 = -\frac{1}{L} \int (E - u) dt, \quad (13.20)$$

$$i_1 = i_2 + i_3, \quad i_2 = i_4 + i_5,$$

где u — напряжение в контуре, $f(u)$ — нелинейная характеристика туннельного диода (см. рис. 13.2). Из равенств (13.20), в свою очередь, без труда получаем дифференциальное уравнение для $u = u(t)$:

$$C \ddot{u} + \left[\frac{1}{R} + f'(u) \right] \dot{u} + \frac{1}{L} u = \frac{E}{L}. \quad (13.21)$$

Нетрудно заметить, что уравнение (13.21) имеет состояние равновесия $u = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = E$, которое является устойчивым (неустойчивым) при

$$\frac{1}{R} + f'(\tilde{u}_0) > 0 \quad (< 0). \quad (13.22)$$

Всюду ниже предполагаем, что рабочая точка $A = (\tilde{u}_0, \tilde{i}_0)$, $\tilde{i}_0 = f(\tilde{u}_0)$ лежит на падающем участке нелинейной характеристики $i = f(u)$, т. е. $f'(\tilde{u}_0) < 0$. В этом случае в силу (13.22) добиться устойчивости или неустойчивости положения равновесия $u = \tilde{u}_0$ всегда можно только за счет изменения сопротивления R (при фиксированных прочих параметрах).

Перейдем теперь к соответствующему кольцевому генератору, схема которого показана на рис. 13.3. Как и в предыдущем пункте, мы считаем, что все три парциальные системы идентичны и связи между ними установлены с помощью трех одинаковых блоков. Существенно же здесь то обстоятельство, что эти блоки носят принципиально

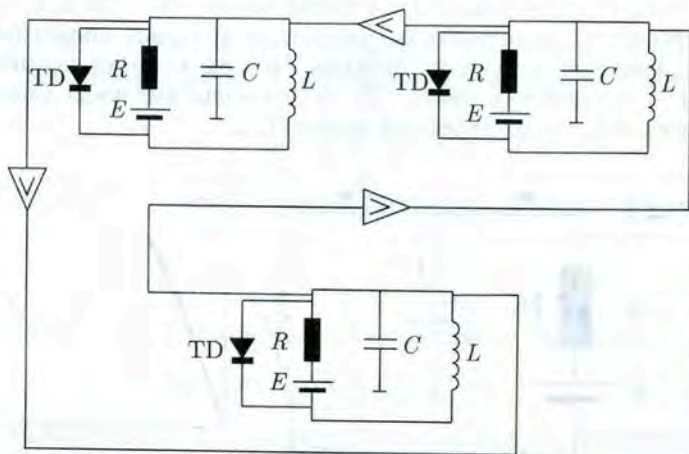


Рис. 13.3

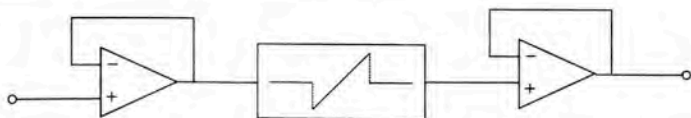


Рис. 13.4

нелинейный характер. А именно, каждый из них состоит из трех элементов (см. рис. 13.4): нелинейного преобразователя сигнала $u_{\text{out}} = g(u_{\text{in}})$, где u_{in} , u_{out} — входное и выходное напряжения соответственно, а график функции $g(u)$ изображен на рис. 13.5, и двух буферных каскадов, реализованных на операционных усилителях. Отметим, что буферные устройства должны иметь большое входное и малое выходное сопротивления, а также обладать единичным коэффициентом передачи в прямом направлении и нулевым в обратном. Практические способы реализации нелинейного блока, представленного на рис. 13.4, описаны в монографии [35].

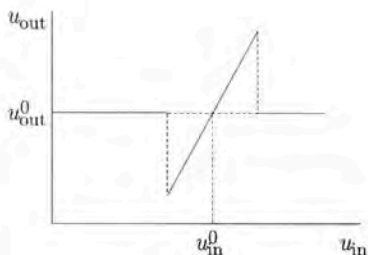


Рис. 13.5.

Для того чтобы вывести математическую модель интересующего нас кольцевого генератора, учтем тот факт, что в силу одностороннего характера связи парциальная система с номером j непосредственно влияет только на систему с номером $j + 1$ и, в свою очередь, сама испытывает влияние только со стороны $(j - 1)$ -й системы. Таким образом, для j -й ячейки имеем аналогичные (13.20) равенства

$$i_1 = \frac{E - u_j}{R}, \quad i_3 = f(u_j), \quad i_4 = C \frac{du_j}{dt}, \quad i_5 = -\frac{1}{L} \int (E - u_j - g(u_{j-1})) dt, \\ i_1 = i_2 + i_3, \quad i_2 = i_4 + i_5,$$

из которых после дифференцирования по t для парциальных напряжений u_j , $j = 1, 2, 3$, получаем систему

$$C \ddot{u}_j + \left[\frac{1}{R} + f'(u_j) \right] \dot{u}_j + \frac{1}{L} (u_j + g(u_{j-1})) = \frac{E}{L}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.23)$$

где $u_0 = u_3$.

Получившуюся систему (13.23) будем изучать при двух дополнительных ограничениях. Во-первых, напряжение E источников питания считаем таковым, что $E = u_{\text{in}}^0 + u_{\text{out}}^0$, где $u_{\text{out}}^0 = g(u_{\text{in}}^0)$ (см. рис. 13.5). Во-вторых, предполагаем, что $u_* < u_{\text{in}}^0 < u_{**}$, где u_* , u_{**} — экстремумы нелинейной характеристики туннельного диода (см. рис. 13.2). В этом случае система (13.23) имеет состояние равновесия $u_1 = u_2 = u_3 = \tilde{u}_0$, где $\tilde{u}_0 = u_{\text{in}}^0$.

Последовательность дальнейших действий такова. Сначала выполним в системе (13.23) замену $u_j - \tilde{u}_0 \rightarrow u_j$, $j = 1, 2, 3$, переводящую

упомянутое выше состояние равновесия в нулевое. После этого аппроксимируем функцию $f(u + \tilde{u}_0)$ полиномом третьей степени, а именно, положим $f(u + \tilde{u}_0) = -s_0 u + s_1 u^3$, где $s_0, s_1 > 0$. Разрывную же нелинейность $g(u + \tilde{u}_0) - u_{\text{out}}^0$ для удобства численного анализа заменим непрерывной кусочно-линейной функцией. В результате после некоторых нормировок переменных u_j , $j = 1, 2, 3$, и времени интересующая нас система примет вид:

$$\ddot{u}_j + \frac{d}{dt}(\varepsilon u_j + u_j^3) + u_j + \mu g(u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.24)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, а знак параметра ε произволен. Что же касается функции связи $g(u)$, то теперь она задается равенствами

$$g(u) = \begin{cases} u & \text{при } 0 \leq u \leq b_1, \\ \frac{b_1}{b_2 - b_1} (b_2 - u) & \text{при } b_1 \leq u \leq b_2, \\ 0 & \text{при } u \geq b_2, \end{cases} \quad g(-u) = -g(u), \quad (13.25)$$

где параметры $0 < b_1 < b_2$ фиксированы.

Численный анализ системы (13.24), (13.25) проведем для случая, когда

$$\varepsilon = 0,001, \quad b_1 = 0,9, \quad b_2 = 1,1, \quad (13.26)$$

а параметр μ , возрастая, пробегает отрезок $0,1 \leq \mu \leq 20$. Точнее говоря, вместо (13.24) будем интегрировать эквивалентную систему первого порядка:

$$\dot{u}_j = v_j - \varepsilon u_j - u_j^3, \quad \dot{v}_j = -u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.27)$$

где $u_0 = u_3$.

Необходимо добавить, что поскольку получившаяся система (13.27) инвариантна относительно замены $u_j \rightarrow -u_j$, $v_j \rightarrow -v_j$, $j = 1, 2, 3$, то все ее аттракторы разбиваются на два класса: симметричные парные (переходящие друг в друга при указанной замене) и самосимметричные (остающиеся неизменными).

При условиях (13.26) и при увеличении μ в системе (13.27) наблюдаются следующие фрагменты динамики.

1). При $0,1 \leq \mu < \mu_1$, где $\mu_1 \approx 0,82$, единственным ее аттрактором является устойчивый самосимметричный цикл. Добавим еще, что при малом μ , подчиненном условию (13.6), существование такого цикла гарантирует изложенная в п. 13.1 локальная теория. Действительно, системе (13.24) соответствует нормальная форма (13.11), в которой $\text{Im } d = 0$. Таким образом, локальный хаос здесь заведомо невозможен, поскольку при $c_0 = 0$ единственный аттрактор системы (10.63)–(10.64) состояние равновесия (10.64). В исходной же системе (13.27) этому состоянию равновесия отвечает устойчивый цикл.

2). При прохождении параметра μ через критическое значение μ_1 упомянутый выше цикл претерпевает бифуркацию типа вилки, т.е. становится неустойчивым и порождает два устойчивых симметричных цикла. Последние сохраняются на интервале (μ_1, μ_3) , где $\mu_3 \approx 2,6108$, а при $\mu = \mu_3$ теряют устойчивость жестко.

3). При $\mu = \mu_2$, где $\mu_2 \approx 2,61$, нелокально возникают два симметричных хаотических аттрактора и при $\mu_2 < \mu < \mu_3$ эти аттракторы сосуществуют с устойчивыми симметричными циклами, о которых говорилось чуть выше.

4). При $\mu \approx 2,697$ симметричные хаотические аттракторы объединяются в один самосимметричный.

При последующем увеличении μ не удастся получить достоверного описания всех происходящих фазовых перестроек из-за наличия достаточно большого числа *окон периодичности* (напомним, что так называются промежутки изменения параметра, в которых хаос сменяется устойчивым циклом). Общее представление о динамике здесь дают лишь графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(\mu)$ аттрактора системы (13.27) (см. рисунки 13.6–13.9), построенные на отрезках

$$5 \leq \mu \leq 10, \quad 10 \leq \mu \leq 20, \quad 2,6 \leq \mu \leq 3,3, \quad 14,25 \leq \mu \leq 14,65 \quad (13.28)$$

по точкам с шагами h по μ , равными соответственно 0,001, 0,005, 0,002, 0,001. При этом в первых двух случаях (13.28) сама система (13.27) интегрировалась методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности с постоянным шагом 0,001 по времени, а в двух других — с шагом 0,0001.

В дополнение к приведенной на рисунках 13.6–13.9 визуальной информации перечислим наиболее заметные окна периодичности, которые удалось обнаружить на отрезке $0,1 \leq \mu \leq 20$. К таковым относятся промежутки

$$[0,1; 2,61), (2,853; 2,95), (3,24; 4,582), (4,67; 5,061), (6,83; 6,96), \\ (12,235; 12,38), (13,755; 13,84), (15,89; 16,095).$$

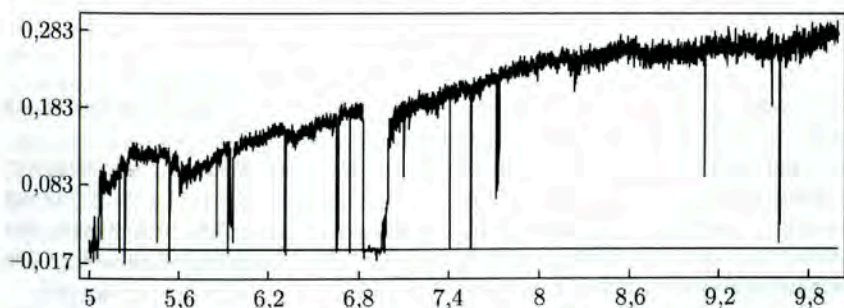


Рис. 13.6

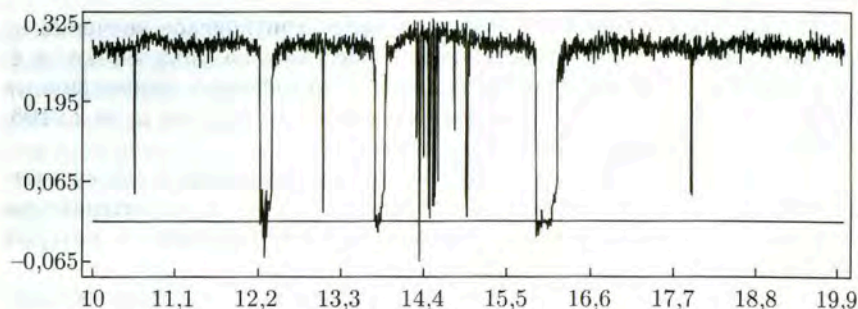


Рис. 13.7

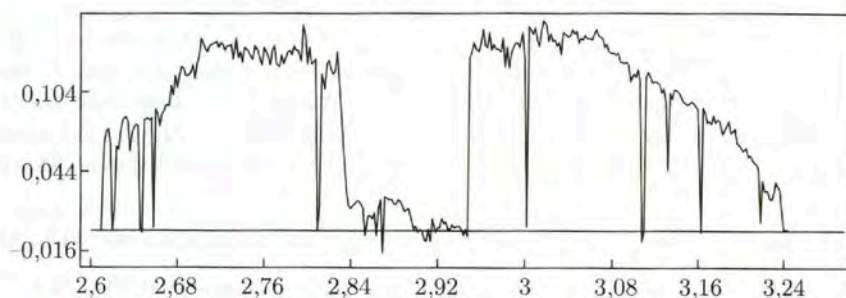


Рис. 13.8

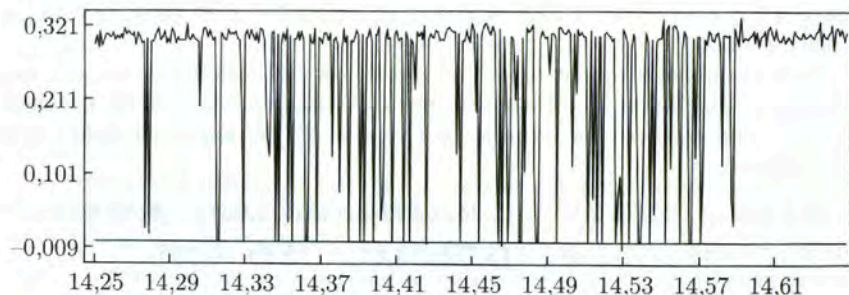


Рис. 13.9

Общее же количество всех окон, что характерно для «дышащего» хаоса (этот термин введен в п. 10.4), по всей видимости, счетно.

Еще одна характерная особенность системы (13.27) заключается в том, что при некоторых μ хаотические аттракторы и устойчивые циклы в ней сосуществуют. Например, при $\mu = 4,6$ она имеет два симметричных хаотических аттрактора и три устойчивых цикла — два симметричных и один самосимметричный.

Последняя из отмеченных особенностей, т.е. сосуществование порядка и хаоса, наиболее ярко проявляется в случае, если рассматривае-

мый кольцевой автогенератор несколько упростить. А именно, сделаем следующее. Сначала из контура, изображенного на рис. 13.1, удалим туннельный диод TD и емкость C . В итоге приходим к парциальной системе, напряжение $u = u(t)$ в которой описывается уравнением (13.21) при $f(u) \equiv 0$, $C = 0$, т. е. уравнением

$$\frac{1}{R} \dot{u} + \frac{1}{L} u = \frac{E}{L}. \quad (13.29)$$

Получившийся контур с физической точки зрения представляет собой пассивную систему (т. е. систему, в которой невозможны собственные колебания). Далее, возьмем три одинаковых пассивных элемента такого вида и соединим в кольцо посредством блоков, показанных на рис. 13.4. В результате получим автогенератор, моделирующийся трехмерной системой

$$\dot{u}_j = -u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.30)$$

где $u_0 = u_3$, $\mu > 0$, $g(u)$ — функция (13.25).

. Таблица 13.2

μ	9,8	9,9	10,8	12,1	10,2	10,2	10,2
b_1	3	4	10	29	49	100	90
b_2	3,2	4,2	10,2	36	50	100,5	90,1
λ_{\max}	1,17	1,28	1,6	1,29	1,6	1,7	2,46

Вычисления, результаты которых приведены в табл. 13.2, показывают, что при надлежащем выборе параметров μ , b_1 , b_2 в системе (13.30) может существовать самосимметричный хаотический аттрактор с положительным старшим ляпуновским показателем λ_{\max} . Однако, что характерно для данной системы, вместе с хаосом она всегда имеет устойчивый самосимметричный цикл достаточно большой амплитуды.

13.3. Заключение. Суммируя проделанный анализ, можно утверждать, что предложенный в данном разделе способ создания хаотических генераторов достаточно универсален. Действительно, как уже отмечалось в п. 13.1, кольцевой генератор хаоса получается практически из любого известного генератора периодических колебаний, описывающегося уравнением (13.1). При этом в рамках локальной теории нелинейный характер связи между звеньями цепочки несущественен (нормальная форма имеет вид (13.11) и в случае, когда в системе (13.5) функция связи является линейной, т. е. $g(u) = u$). Существенно же здесь наличие резонанса 1 : 1 : 1 между собственными частотами парциальных генераторов. Последнего проще всего добиться, полагая все три генератора равными, что и было сделано выше.

Рассмотренные в п. 13.2 нелокальные случаи позволили выявить другой аспект проблемы, а именно, роль нелинейной связи между парциальными системами. В самом деле, было показано, что даже

пассивные элементы, описываемые простейшим уравнением (13.29), будучи однонаправленно связанными в кольцо посредством нелинейной функции вида (13.25), могут демонстрировать совместное хаотическое поведение. Следует отметить, впрочем, что излишнее упрощение парциальных систем приводит к побочному эффекту — возникновению устойчивого цикла, сосуществующего с хаотическим аттрактором.

Один из способов борьбы с упомянутым выше паразитным циклом состоит в добавлении дополнительной нелинейной диссипации. Для того чтобы проиллюстрировать это, обратимся к системе

$$\dot{u}_j = -u_j - \nu u_j^3 - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.31)$$

получающейся из (13.30) при учете нелинейных членов $-\nu u_j^3$, $j = 1, 2, 3$, где $\nu > 0$. Предположим, далее, что параметры μ , b_1 , b_2 в ней заданы, к примеру, равенствами

$$\mu = 9,8, \quad b_1 = 3, \quad b_2 = 3,2. \quad (13.32)$$

Тогда (см. табл. 13.2) при $\nu = 0$ в системе (13.31) сосуществуют самосимметричный хаотический аттрактор и устойчивый самосимметричный цикл. Если же при условиях (13.32) положить $\nu = 0,15$, то устойчивый цикл исчезает, а вместо одного самосимметричного хаоса появляются два симметричных хаотических аттрактора со старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max} \approx 1,01$.

Еще один способ избавиться от устойчивого цикла — переход от системы (13.30) к дискретному ее аналогу, т. е. к отображению вида

$$u_j \rightarrow a u_j - \mu g(u_{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (13.33)$$

где $u_0 = u_3$, $a \in (0, 1)$, $\mu > 0$, $g(u)$ — функция (13.25). Контрольный расчет, выполненный при $a = 0,5$, $\mu = 1$, $b_1 = 3,9$, $b_2 = 4,1$, показывает, что в этом случае система (13.33) имеет единственный самосимметричный хаотический аттрактор с ляпуновскими показателями $\lambda_1 \approx 0,319$, $\lambda_2 \approx 0,126$, $\lambda_3 \approx -1,038$. Аналогичная динамика реализуется в рассматриваемом отображении и при других значениях параметров a , μ , b_1 , b_2 .

В заключение добавим, что хаос в системе (13.30) может наблюдаться и при нелинейной характеристике, отличной от (13.25). Для примера рассмотрим функцию

$$g(u) = |u + b_1| - |u - b_1| + \frac{1}{2}(|u - b_2| - |u + b_2|), \quad b_1, b_2 > 0, \quad (13.34)$$

заимствованную из [35]. Численный анализ, проделанный при $\mu = 8$, $b_1 = 9,2$, $b_2 = 25,2$, обнаруживает у системы (13.30), (13.34) самосимметричный хаотический аттрактор со старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max} \approx 0,44$. Однако и здесь хаос сосуществует с регулярными аттракторами, а именно, с двумя устойчивыми состояниями равновесия $(u_1, u_2, u_3) = \pm(54,4; 54,4; 54,4)$.

14. Механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом 1 : 2

14.1. Общая постановка проблемы. В пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{u} = A_0 u + F(u). \quad (14.1)$$

Будем предполагать, что у матрицы A_0 имеются простые чисто мнимые пары собственных значений $\pm i\omega_0$, $\pm 2i\omega_0$, где $\omega_0 > 0$, а весь остальной ее спектр находится в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Что же касается нелинейности $F(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, то считаем, что ее тейлоровское разложение в точке $u = 0$ имеет вид:

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (14.2)$$

где F_2, F_3, \dots — симметричные квадратичная, кубическая и т. д. формы.

Следующее ограничение носит более специальный характер и связано с фигурирующей в (14.2) квадратичной нелинейностью F_2 . Для его формулировки введем в рассмотрение собственные векторы

$$a_j, b_j, \quad j = 1, 2; \quad A_0 a_1 = i\omega_0 a_1, \quad A_0 a_2 = 2i\omega_0 a_2;$$

$$A_0^* b_1 = -i\omega_0 b_1, \quad A_0^* b_2 = -2i\omega_0 b_2,$$

нормированные условиями $(a_j, b_k) = \delta_{jk}$, $(\bar{a}_j, b_k) = 0$, где δ_{jk} — символ Кронекера, а $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^n . Рассмотрим, далее, величины

$$\kappa_1 = 2(F_2(\bar{a}_1, a_2), b_1), \quad \kappa_2 = (F_2(a_1, a_1), b_2) \quad (14.3)$$

и будем предполагать, что

$$\kappa_1 \neq 0, \quad \kappa_2 \neq 0, \quad \kappa_1 \kappa_2 \notin \{\lambda: \operatorname{Im} \lambda = 0, \operatorname{Re} \lambda < 0\}. \quad (14.4)$$

Остановимся на смысле ограничений (14.4). В связи с этим напомним, что при сформулированных условиях система (14.1) в некоторой достаточно малой окрестности нуля имеет гладкое устойчивое четырехмерное инвариантное центральное многообразие (см., например, [134]), задающееся равенством

$$u = z_1 a_1 + z_2 a_2 + \bar{z}_1 \bar{a}_1 + \bar{z}_2 \bar{a}_2 + \Phi(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2): (\Phi, b_j) \equiv (\Phi, \bar{b}_j) \equiv 0, \\ j = 1, 2. \quad (14.5)$$

Движения же на многообразии (14.5) описываются системой

$$\dot{z}_1 = i\omega_0 z_1 + \kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + \Psi_1(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2), \\ \dot{z}_2 = 2i\omega_0 z_2 + \kappa_2 z_1^2 + \Psi_2(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2). \quad (14.6)$$

Здесь z_1, z_2 — комплексные параметры на многообразии, связанные с исходной переменной u посредством равенств $z_j = (u, b_j)$, $j = 1, 2$,

а тейлоровские разложения в нуле вектор-функции Φ и комплекснозначных функций Ψ_j , $j = 1, 2$, по переменным $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2$ начинаются с квадратичных и кубических слагаемых соответственно. Что же касается условий (14.4) на коэффициенты (14.3) нормальной формы (14.6), то их роль двояка. С одной стороны, они характеризуют некоторую общность положения, а с другой — гарантируют неустойчивость нулевого решения системы (14.6) (см. [129]).

Итоговое ограничение хотя и нелокально, но вполне естественно. А именно, считаем, что $u = 0$ — единственное состояние равновесия системы (14.1), а сама она является диссипативной. В этом случае в силу неустойчивости нулевого решения (см. (14.4)) у нее с необходимостью должен существовать хотя бы один нетривиальный (отличный от состояния равновесия) аттрактор Ω . Считаем также, что точка $u = 0$ не принадлежит множеству Ω (как будет ясно из дальнейшего, аттрактор, удовлетворяющий этому дополнительному требованию, имеется практически всегда).

На заключительном этапе возмутим линейную часть системы (14.1) надлежащим образом, т. е. рассмотрим систему

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1) u + F(u), \quad (14.7)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, а матрица A_1 такова, что

$$\operatorname{Re}(A_1 a_1, b_1) < 0, \quad \operatorname{Re}(A_1 a_2, b_2) < 0. \quad (14.8)$$

Нетрудно увидеть, что неравенства (14.8) обеспечивают экспоненциальную устойчивость нулевого решения. Нелокальный же аттрактор Ω , о котором говорилось чуть выше, при этом сохранится. Тем самым, в системе (14.7) реализуется ситуация, характерная для жесткого возбуждения автоколебаний: наряду с устойчивым нулевым состоянием равновесия имеются устойчивые автоколебательные режимы амплитуды порядка единицы.

В общем случае исследовать вопрос об аттракторах системы (14.7) не представляется возможным, поскольку он сводится к поиску нелокальных автоколебаний при $\varepsilon = 0$. Однако некоторое представление о последних все же удастся получить при дополнительном предположении о малости квадратичной нелинейности в тейлоровском разложении (14.2). Соответствующий анализ проводится ниже.

14.2. Локальная постановка задачи. В этом пункте объектом изучения является аналогичная (14.1) система

$$\dot{u} = A_0 u + \mu F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \Delta(u), \quad (14.9)$$

где $\mu > 0$ — малый параметр, матрица A_0 и функции F_2, F_3 — те же, что и в (14.1), (14.2), а тейлоровское разложение в нуле остатка $\Delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ начинается с членов четвертого порядка малости.

Для формулировки ограничений, при которых будут исследоваться аттракторы системы (14.9), обратимся к ее нормальной форме на

аналогичном (14.5) устойчивом четырехмерном инвариантном многообразии, которое в данном случае зависит, естественно, от параметра μ . Учитывая это обстоятельство и проводя нормализацию до кубических слагаемых включительно, убеждаемся, что движения на указанном многообразии описываются системой

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= i\omega_0 z_1 + \mu \kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + H_1, \\ \dot{z}_2 &= 2i\omega_0 z_2 + \mu \kappa_2 z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + H_2.\end{aligned}\quad (14.10)$$

Здесь коэффициенты κ_1, κ_2 задаются прежними формулами (14.3),

$$\begin{aligned}d_{11} &= 3(F_3(a_1, a_1, \bar{a}_1), b_1), & d_{12} &= 6(F_3(a_2, \bar{a}_2, a_1), b_1), \\ d_{21} &= 6(F_3(a_1, \bar{a}_1, a_2), b_2), & d_{22} &= 3(F_3(a_2, a_2, \bar{a}_2), b_2),\end{aligned}\quad (14.11)$$

а тејлоровские разложения в нуле достаточно гладких функций

$$H_j = H_j(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \mu), \quad H_j(0, 0, 0, 0, \mu) \equiv 0, \quad j = 1, 2, \quad (14.12)$$

по совокупности всех переменных $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \mu$ начинаются с членов четвертой степени.

Условие 14.1. Считаем, что коэффициенты κ_1, κ_2 нормальной формы (14.10) удовлетворяют требованиям (14.4).

Как и в предыдущем пункте, данное условие обеспечивает неустойчивость нулевого решения системы (14.10) при любом достаточно малом $\mu > 0$. Что же касается случая $\mu = 0$, то здесь устойчивость нуля определяется уже по кубическим слагаемым нормальной формы. Будем считать, что соответствующие условия устойчивости — так называемые условия Каменкова [129] — выполняются, а значит, справедливо следующее ограничение на коэффициенты (14.11).

Условие 14.2. Предполагаем, что $\operatorname{Re} d_{11} < 0, \operatorname{Re} d_{22} < 0$. В случае же, когда одновременно $\operatorname{Re} d_{12} > 0$ и $\operatorname{Re} d_{21} > 0$, считаем еще, что

$$\operatorname{Re} d_{11} \cdot \operatorname{Re} d_{22} - \operatorname{Re} d_{21} \cdot \operatorname{Re} d_{12} > 0. \quad (14.13)$$

Сформулированные условия имеют прозрачный геометрический смысл: первое из них обеспечивает слабое «отталкивание» траекторий системы (14.9) от нуля, а второе гарантирует локальную диссипативность. Как будет установлено ниже, противоборство этих двух противоположно направленных чисто нелинейных эффектов приводит к возникновению в системе (14.9) устойчивых автоколебательных режимов амплитуды порядка μ .

Приступим к описанию основной конструкции. В связи с этим обратимся сначала к системе

$$\dot{u} = A_0 u + F_3(u, u, u) + \Delta(u), \quad (14.14)$$

получающейся из (14.9) при $\mu = 0$. Поскольку в силу условия 14.2 ее нулевое состояние равновесия асимптотически устойчиво, то заведомо найдется некоторая ограниченная окрестность \mathcal{U} точки $u = 0$ (не обя-

зательно малая), лежащая в области притяжения нуля и обладающая следующими свойствами. Во-первых, при всех $t > 0$ справедливо включение

$$\overline{\varphi^t(\mathcal{U})} \subset \mathcal{U}, \quad (14.15)$$

где $\varphi^t(*)$ — фазовый поток, порожденный системой (14.14). Во-вторых, граница $\partial\mathcal{U}$ области \mathcal{U} представляет собой гладкую замкнутую поверхность, не имеющую контактов с траекториями потока φ^t . Рассмотрим, далее, поток $\varphi_\mu^t(*)$, порожденный системой (14.9). В силу малости μ его траектории также не будут иметь контактов с $\partial\mathcal{U}$. Тем самым, сохраняется аналогичное (14.15) включение $\overline{\varphi_\mu^t(\mathcal{U})} \subset \mathcal{U}$, $t > 0$. А это, в свою очередь, позволяет определить нелокальный аттрактор $\Sigma(\mu)$ системы (14.9) посредством равенства

$$\Sigma(\mu) = \bigcap_{t \geq 0} \varphi_\mu^t(\mathcal{U}). \quad (14.16)$$

Термин «нелокальный» в данном случае означает, что аттрактор (14.16) притягивает все точки из независимой от μ инвариантной области \mathcal{U} . В связи с этим и саму систему (14.9) в дальнейшем будем рассматривать только в этой области.

Из формулы (14.16) следует, что заведомо $0 \in \Sigma(\mu)$. Нас же, напомним, интересуют аттракторы системы (14.9), не включающие точку $u = 0$. Поэтому возникает необходимость в изучении детальной структуры множества $\Sigma(\mu)$ с целью нахождения в нем инвариантных подмножеств, также являющихся аттракторами, но уже не содержащих нулевое состояние равновесия.

Обозначим через $D(\mu)$ диаметр множества $\Sigma(\mu)$. Очевидно, что $D(0) = 0$, так как при $\mu = 0$ аттрактор (14.16) состоит из одной точки $u = 0$. Однако для дальнейшего анализа необходимо знать характер стремления к нулю величины $D(\mu)$ при $\mu \rightarrow 0$. Ответ на этот вопрос содержится в следующем утверждении.

Теорема 14.1. *Найдутся такие положительные постоянные μ_0 и C , что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ справедливо неравенство*

$$D(\mu) \leq C\mu. \quad (14.17)$$

Доказательство. Обращаем внимание, что аттрактор (14.16) содержится, очевидно, в четырехмерном инвариантном центральном многообразии системы (14.9). Поэтому проблема сводится к установлению аналогичной оценки для аттрактора нормальной формы (14.10).

Воспользуемся в очередной раз условием 14.2, которое гарантирует существование достаточно малой постоянной $r_0 > 0$ и функции Ляпунова:

$$V(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = m_1|z_1|^2 + m_2|z_2|^2, \quad m_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad (14.18)$$

со следующими свойствами:

$$\dot{V} < 0 \text{ при } (z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) \in B(r_0) \setminus (0, 0, 0, 0), \quad (14.19)$$

где $B(r_0) = \{(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) : |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq r_0^2\}$, \dot{V} — производная в силу системы (14.10), вычисленная при $\mu = 0$. Далее, из структуры правых частей этой системы и из описанных выше свойств остатков (14.12) заключаем, что в случае $0 < \mu \ll 1$ неравенство (14.19) заведомо сохраняется при

$$(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) : M^2 \mu^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 \leq r_0^2,$$

где постоянная $M > 0$ фиксирована и достаточно велика. Таким образом, траектории системы (14.10) с начальными условиями из шара $B(r_0)$ с течением времени втекают в некоторый шар радиуса порядка μ и остаются в нем при дальнейшем увеличении t . А отсюда, в свою очередь, следует справедливость требуемой оценки (14.17). Теорема доказана.

Установленная оценка гарантирует, что все возможные автоколебания на аттракторе (14.16) имеют амплитуду порядка не выше μ . Поэтому для изучения их характера воспользуемся приемом, который назовем степенной лупой. А именно, выполним в нормальной форме (14.10) последовательно замены

$$\begin{aligned} z_1 \exp(-i\omega_0 t) &\rightarrow z_1, \quad z_2 \exp(-2i\omega_0 t) \rightarrow z_2; \\ z_j/\mu &\rightarrow z_j, \quad j = 1, 2; \quad \mu^2 t \rightarrow t, \end{aligned} \quad (14.20)$$

в результате которых она преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1 + O(\mu), \\ \dot{z}_2 &= \kappa_2 z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2 + O(\mu), \end{aligned} \quad (14.21)$$

а затем отбросим в правых частях получившейся системы остатки порядка μ . В результате приходим к следующей модельной системе:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= \kappa_2 z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2, \end{aligned} \quad (14.22)$$

которая, в принципе, содержит всю информацию об аттракторе (14.16) и, что самое главное, не зависит от малого параметра μ .

Нетрудно увидеть, что система (14.22) обладает теми же свойствами, что и исходная система (14.9). Действительно, из условия 14.2 заключаем, что все ее траектории втекают в инвариантное множество $(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) : V(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq R$, где V — функция Ляпунова (14.18), а постоянная $R > 0$ достаточно велика. Далее, взяв это множество в качестве поглощающей окрестности \mathcal{U} , убеждаемся в существовании у системы (14.22) глобального аттрактора Σ_{\max} , который определяется посредством аналогичной (14.16) формулы. И наконец, заметим, что хотя (по построению) аттрактор Σ_{\max} и включает точку $(0, 0, 0, 0)$, но

не исчерпывается ею одной, поскольку в силу условия 14.1 нулевое решение системы (14.22) неустойчиво.

Итак, проблема отыскания в аттракторе (14.16) меньших аттракторов, не содержащих нулевое решение, сводится к аналогичному вопросу для аттрактора Σ_{\max} , который представляет собой «увеличенный» образ $\Sigma(\mu)$ под действием степенной лупы (14.20).

В первую очередь будем интересоваться специальными режимами из аттрактора Σ_{\max} — так называемыми автомодельными циклами и торами. В связи с этим дадим следующие определения, аналогичные определениям 13.1, 13.2.

Определение 14.1. *Автомодельным циклом системы (14.22) назовем ее периодическое решение вида*

$$z_1 = z_1^0 \exp(i\sigma t), \quad z_2 = z_2^0 \exp(2i\sigma t), \quad (14.23)$$

где $z_1^0, z_2^0 \in \mathbb{C}$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ — некоторые постоянные.

Определение 14.2. *Двумерным автомодельным тором системы (14.22) будем называть ее квазипериодическое решение вида*

$$z_1 = z_1^0(t) \exp(i\sigma t), \quad z_2 = z_2^0(t) \exp(2i\sigma t), \quad (14.24)$$

где σ — вещественная постоянная, а комплекснозначные функции $z_j^0(t)$, $j = 1, 2$, периодичны по t с некоторым периодом $T_0 > 0$. Предполагаем еще, что решение (14.24) не приводится к виду (14.23).

Из способа получения системы (14.22) (см. (14.20), (14.21)) вытекает следующее стандартное утверждение о соответствии, представляющее собой аналог теоремы 13.1.

Теорема 14.2. *Любому автомодельному циклу (тору) системы (14.22), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (14.9) при всех достаточно малых $\mu > 0$ отвечает цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости.*

Реализуемость условий сформулированной теоремы в части существования и устойчивости двумерных торов будет установлена ниже с помощью численных методов. Что же касается автомодельных циклов (14.23), то, как показывается в следующем пункте, при выполнении условий 14.1, 14.2 они существуют у системы (14.22) всегда.

Подводя итог, остановимся на вопросе о сохранении утверждений теоремы 14.2 при отходе от критического случая. В связи с этим возмутим линейную часть системы (14.9) слагаемыми порядка ε , т. е. рассмотрим аналогичную (14.7) систему

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + \mu F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \Delta(u), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (14.25)$$

Как и ранее, предполагаем выполненными условия (14.8), обеспечивающие устойчивость ее нулевого решения. Что же касается малых параметров ε и μ , то будем считать, что они подчинены требованию

$$\nu = \varepsilon/\mu^2 \ll 1. \quad (14.26)$$

Система (14.25) моделирует описанную в п. 14.1 нелокальную ситуацию, так как наряду с устойчивым нулевым состоянием равновесия у нее заведомо существуют устойчивые автоколебательные режимы амплитуды порядка μ . Для того чтобы убедиться в этом, обратимся к ее нормальной форме на устойчивом многообразии вида (14.5) и выпишем последнюю с точностью до кубических по $z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \mu$ слагаемых. В результате приходим к аналогичной (14.10) системе

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= (i\omega_0 + \varepsilon\gamma_1)z_1 + \mu\kappa_1 \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= (2i\omega_0 + \varepsilon\gamma_2)z_2 + \mu\kappa_2 z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2, \end{aligned} \quad (14.27)$$

где $\gamma_j = (A_1 a_j, b_j)$, $j = 1, 2$, и отброшены дополнительно слагаемые порядка

$$\varepsilon^2(|z_1| + |z_2|), \quad \varepsilon(|z_1| + |z_2|)^3, \quad \varepsilon\mu(|z_1| + |z_2|)^2. \quad (14.28)$$

Дальнейший способ действий стандартен. Выполним в (14.27) замены (14.20) и отбросим слагаемые порядка ν , которые в силу (14.26) являются малыми (малыми будут и все отброшенные ранее слагаемые вида (14.28)). В итоге снова получаем прежнюю систему (14.22). Таким образом, при условии (14.26) теорема 14.2 остается в силе и для системы (14.25). Более того, из всей совокупности проделанных выше построений следует, что эта система имеет аналогичный (14.16) аттрактор $\Sigma(\mu, \varepsilon)$, $\Sigma(\mu, 0) = \Sigma(\mu)$, который помимо устойчивого нулевого решения заведомо содержит устойчивые автоколебания амплитуды порядка μ . Как будет установлено ниже с помощью численного анализа, при определенных условиях последние могут оказаться хаотическими.

14.3. Исследование автомодельных циклов. Для удобства дальнейшего анализа будем считать, что в (14.22) $\kappa_1 = 1$ (этого всегда можно добиться посредством замены $\kappa_1 z_2 \rightarrow z_2$). Таким образом, всюду ниже имеем дело с системой

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= \kappa z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2, \end{aligned} \quad (14.29)$$

где в силу условия 14.1 комплексный параметр κ отличен от нуля и не является вещественным отрицательным числом, а постоянные d_{jk} , $j, k = 1, 2$, по-прежнему удовлетворяют условию 14.2.

При нахождении автомодельных циклов системы (14.29) уместно воспользоваться следующим обстоятельством. Поскольку каждый такой цикл определяется с точностью до сдвига по времени, то можно считать, что, например, амплитуда z_1^0 вещественна и положительна.

Тем самым, после подстановки в (14.29) соотношений (14.23) вместе с равенствами

$$z_1^0 = \rho_1, \quad z_2^0 = \rho_2 \exp(i\gamma), \quad \rho_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad (14.30)$$

проблема сводится к отысканию вещественных постоянных $\rho_1, \rho_2, \gamma, \sigma$ из системы

$$i\sigma = \rho_2 \exp(i\gamma) + d_{11}\rho_1^2 + d_{12}\rho_2^2, \quad 2i\sigma = \frac{\kappa\rho_1^2}{\rho_2} \exp(-i\gamma) + d_{21}\rho_1^2 + d_{22}\rho_2^2. \quad (14.31)$$

Последовательность дальнейших действий такова. Сначала выразим из первого уравнения системы (14.31)

$$\exp(-i\gamma) = -(i\sigma + \bar{d}_{11}\rho_1^2 + \bar{d}_{12}\rho_2^2)/\rho_2 \quad (14.32)$$

и подставим получившееся соотношение во второе уравнение. В итоге после некоторых преобразований приходим к равенству

$$\frac{i\sigma}{\rho_2^2} = \frac{-\kappa y(\bar{d}_{11}y + \bar{d}_{12}) + d_{21}y + d_{22}}{2 + \kappa y}, \quad (14.33)$$

где $y = \rho_1^2/\rho_2^2$. Подчеркнем, что знаменатель в (14.33) заведомо отличен от нуля при любом $y \geq 0$ в силу условий на коэффициент κ .

Обращаем внимание, что левая часть в (14.33) является чисто мнимой. Это обстоятельство позволяет сначала определить y из уравнения

$$P(y) \stackrel{\text{def}}{=} -|\kappa|^2 \operatorname{Re} d_{11} \cdot y^3 + \operatorname{Re} (\bar{\kappa} d_{21} - 2\kappa \bar{d}_{11} - |\kappa|^2 \bar{d}_{12}) y^2 + \\ + \operatorname{Re} (\bar{\kappa} d_{22} + 2d_{21} - 2\kappa \bar{d}_{12}) y + 2 \operatorname{Re} d_{22} = 0, \quad (14.34)$$

а затем выразить σ через ρ_2^2 :

$$\sigma = Q(y)\rho_2^2, \quad \text{где } Q(y) = \operatorname{Im} \left\{ \frac{-\kappa y(\bar{d}_{11}y + \bar{d}_{12}) + d_{21}y + d_{22}}{2 + \kappa y} \right\}. \quad (14.35)$$

Следует отметить, что поскольку $\operatorname{Re} d_{11} < 0$ и $\operatorname{Re} d_{22} < 0$ (см. условие 14.2), то многочлен (14.34) заведомо имеет хотя бы один вещественный положительный корень. Добавим еще, что при $\operatorname{Im} \kappa = 0$, $\operatorname{Re} \kappa > 0$ данный корень единственный, так как в этом случае после сокращения на множитель $2 + \kappa y$ уравнение (14.34) преобразуется к виду

$$-\kappa y(\operatorname{Re} d_{11} y + \operatorname{Re} d_{12}) + \operatorname{Re} d_{21} y + \operatorname{Re} d_{22} = 0.$$

Для определения оставшихся параметров автомодельного цикла (14.23), (14.30) снова обратимся к равенству (14.32) и подставим в него соотношение (14.35), считая, что в качестве y взят какой-либо из положительных корней уравнения (14.34). В результате получаем выражение

$$\frac{1}{\rho_2} \exp(-i\gamma) = -(iQ(y) + \bar{d}_{11}y + \bar{d}_{12}). \quad (14.36)$$

А так как правая часть в (14.36) уже известна, то отсюда автоматически находим ρ_2 и γ .

Итак, имеет место взаимно однозначное соответствие между автомодельными циклами системы (14.29) и положительными корнями уравнения (14.34). Тем самым, при любых допустимых значениях параметров \varkappa , d_{jk} , $j, k = 1, 2$, существует один или три таких цикла.

Для исследования устойчивости автомодельных циклов (14.23), (14.30) перейдем в (14.29) к полярным координатам $z_j = \xi_j \exp(i\varphi_j)$, $\xi_j > 0$, $j = 1, 2$, и заметим, что от получающейся в итоге четырехмерной системы отщепляется трехмерная система для ξ_1 , ξ_2 , $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_1 \xi_2 \cos \psi + \xi_1 (\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2), \\ \dot{\xi}_2 &= d \xi_1^2 \cos(\psi + \delta) + \xi_2 (\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2), \\ \dot{\psi} &= -2 \xi_2 \sin \psi - d \frac{\xi_1^2}{\xi_2} \sin(\psi + \delta) + c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2,\end{aligned}\tag{14.37}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \operatorname{Re} d_{11}, \quad \alpha_2 = \operatorname{Re} d_{12}, \quad \beta_1 = \operatorname{Re} d_{21}, \quad \beta_2 = \operatorname{Re} d_{22}, \\ c_1 &= 2 \operatorname{Im} d_{11} - \operatorname{Im} d_{21}, \quad c_2 = 2 \operatorname{Im} d_{12} - \operatorname{Im} d_{22}, \quad d = |\varkappa|,\end{aligned}\tag{14.38}$$

а через δ обозначен аргумент комплексного числа \varkappa .

Каждому автомодельному циклу или тору исходной системы (14.29) в системе (14.37) отвечает состояние равновесия или цикл. В частности, циклу (14.23), (14.30) соответствует состояние равновесия вида

$$\xi_1 = \rho_1, \quad \xi_2 = \rho_2, \quad \psi = -\gamma,\tag{14.39}$$

где постоянные ρ_1 , ρ_2 , γ заимствованы из (14.30). Таким образом, интересующая нас проблема сводится к исследованию расположения собственных значений матрицы линеаризации G системы (14.37) на состоянии равновесия (14.39).

Опуская вполне понятные, но достаточно громоздкие вычисления, приведем итоговое равенство:

$$\operatorname{sign}(\det G) = -\operatorname{sign} P'(y),\tag{14.40}$$

где, напомним, y — положительный корень уравнения (14.34), соответствующий выбранному автомодельному циклу. Из соотношения (14.40) автоматически следует, что устойчивыми могут быть только состояния равновесия (14.39), для которых $P'(y) > 0$. Однако, как показывает проделанный ниже численный анализ, и это условие в общем случае является лишь необходимым.

Для того чтобы убедиться в принципиальной возможности существования у системы (14.29) хотя бы одного устойчивого автомодельного цикла, рассмотрим простейшую ситуацию

$$c_1 = c_2 = 0, \quad \delta = 0,\tag{14.41}$$

которая реализуется, например, в случае вещественности всех коэффициентов нормальной формы.

Как уже отмечалось выше, при $\delta = 0$, т.е. в случае вещественного λ , исходная система (14.29) имеет единственный автомодельный цикл. При условиях (14.41) в системе (14.37) этому циклу отвечает состояние равновесия, лежащее на устойчивом двумерном инвариантном многообразии $\psi = 0$. Движения на указанном многообразии описываются уравнениями

$$\dot{\xi}_1 = \xi_1(\xi_2 + \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2), \quad \dot{\xi}_2 = d \xi_1^2 + \xi_2(\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2). \quad (14.42)$$

Что же касается системы (14.42), то, как нетрудно убедиться, в конусе $K = \{(\xi_1, \xi_2): \xi_1 > 0, \xi_2 > 0\}$ у нее существует единственное экспоненциально устойчивое состояние равновесия (ξ_1^*, ξ_2^*) , где

$$\xi_1^* = \sqrt{-(\xi_2 + \alpha_2 \xi_2^2)/\alpha_1} \Big|_{\xi_2 = \xi_2^*}, \quad (14.43)$$

а ξ_2^* — корень уравнения

$$R(\xi_2) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\alpha_1} (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \xi_2^2 - \frac{1}{\alpha_1} (d \alpha_2 + \beta_1) \xi_2 - \frac{d}{\alpha_1} = 0.$$

Подчеркнем, что поскольку (см. условие 14.2) $R(0) > 0$, $R(\xi_2) \rightarrow -\infty$ при $\xi_2 \rightarrow +\infty$, то ξ_2^* определяется однозначно и, более того, подкоренное выражение в (14.43), вычисленное при $\xi_2 = \xi_2^*$, оказывается положительным.

14.4. Результаты численного анализа. Компьютерное исследование аттракторов системы (14.37) проведем для набора параметров

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0,125, \quad \beta_1 = 0,8, \quad \beta_2 = -0,25, \quad \delta = 1, \quad c_1 = 12, \quad c_2 = -3, \quad (14.44)$$

выбор которых продиктован двумя обстоятельствами. Во-первых, при условиях (14.44) реализуется самый сложный случай, когда возникает необходимость в неравенстве (14.13) и, что не менее важно, левая часть этого неравенства в данной ситуации достаточно мала. Во-вторых, при указанных в (14.44) значениях δ , c_1 , c_2 мы заведомо далеки от тривиального случая (14.41).

Численный анализ показал, что при условиях (14.44) и при увеличении параметра d в системе (14.37) наблюдается следующая динамика (точнее говоря, речь пойдет о фрагментах динамики, которые удалось выявить с той или иной степенью достоверности).

Пусть сначала $0 < d \ll 1$. В этом случае система (14.37) имеет два устойчивых состояния равновесия: O_1 и O_2 , причем при $d \rightarrow 0$ компоненты ξ_1 , ξ_2 первого из них стремятся к ненулевым конечным пределам, а для второго $\lim_{d \rightarrow 0} (\xi_1^2 + \xi_2^2) = 0$. Действительно, проследить

за эволюцией O_2 позволяет система

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1 v_2 \cos \psi + \alpha_1 v_1^3, \quad \dot{v}_2 = v_1^2 \cos(\psi + \delta) + \beta_1 v_1^2 v_2, \\ \dot{\psi} &= -2 v_2 \sin \psi - \frac{v_1^2}{v_2} \sin(\psi + \delta) + c_1 v_1^2, \end{aligned} \quad (14.45)$$

получающаяся из (14.37) в результате замен $\xi_1 = \sqrt{d} v_1$, $\xi_2 = d v_2$, $dt \rightarrow t$ и последующего предельного перехода при $d \rightarrow 0$. Численные расчеты показывают, что в интересующем нас случае (см. (14.44)) система (14.45) имеет устойчивое состояние равновесия.

При увеличении d судьба состояний равновесия O_1 и O_2 оказывается различной. Устойчивая неподвижная точка O_1 существует в диапазоне $0 < d < d_*$, где $d_* \approx 0,314$. Далее, при прохождении d через критическое значение d_* она сливается с неустойчивым состоянием равновесия и исчезает. Что же касается положения равновесия O_2 , то оно сохраняет устойчивость при $0 < d < d_{**}$, $d_{**} \approx 3,015$, а при $d = d_{**}$ претерпевает обратную бифуркацию Андронова-Хопфа (т.е. в него втягивается неустойчивый цикл).

Итак, при $0 < d < d_*$ в системе (14.37) сосуществуют два устойчивых состояния равновесия O_1 и O_2 , а при значениях d , чуть больших d_* , остается лишь O_2 . Однако при дальнейшем увеличении параметра d ситуация меняется: при $d \approx 1,034$ из уплотнения траекторий рождаются устойчивый и неустойчивый циклы и в диапазоне $1,034 < d < 1,894$ состояние равновесия O_2 сосуществует уже с устойчивым циклом. Вид последнего при $d = 1,572$ представлен на рис. 14.1 (здесь и далее на всех рисунках показаны проекции соответствующих режимов на плоскость (ξ_1, ξ_2)).

Последующее увеличение d в полном соответствии со сценарием Фейгенбаума приводит к возникновению хаоса через каскад бифуркаций удвоения периода. А именно, первая бифуркация удвоения происходит с устойчивым циклом, о котором говорилось чуть выше, при $d \approx 1,894$, вторая — при $d \approx 1,955$, третья — при $d \approx 1,967$ и т.д. В итоге при $d = 1,975$ имеем хаотический аттрактор с положительным

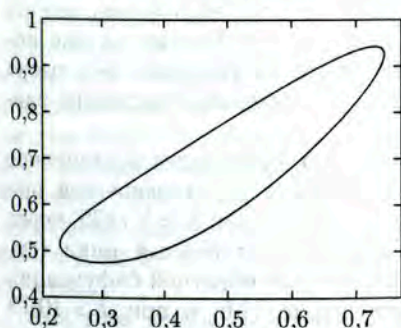


Рис. 14.1. $d = 1,572$

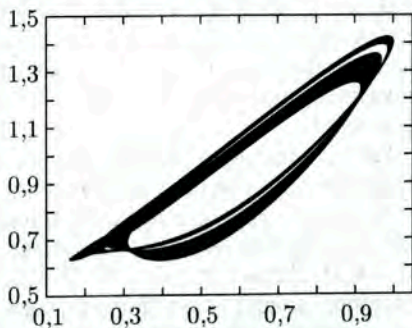


Рис. 14.2. $d = 1,975$

старшим ляпуновским показателем $\lambda_{\max} \approx 0,031$. Вид этого аттрактора, сосуществующего, напомним, с устойчивым положением равновесия O_2 , изображен на рис. 14.2.

При $1,975 \leq d \leq 5$ с ростом d наблюдается большое, возможно счетное, число переходов вида

$$\text{хаос} \rightarrow \text{устойчивый цикл} \rightarrow \text{хаос}. \quad (14.46)$$

Во всяком случае, с уменьшением шага h изменения параметра d удастся обнаружить все возрастающее их число. Например, при $h = 0,001$ диагностируется не менее 42 окон периодичности.

Следует отметить, что при перестройках (14.46), как правило, устойчивый цикл порождает очередной хаотический аттрактор, подобный изображенному на рис. 14.3 или 14.4, по сценарию Фейгенбаума. Возникновению же самого цикла предшествует так называемый режим перемежаемости [13], когда довольно длительные промежутки «периодического» движения фазовой точки (ξ_1, ξ_2) сменяются хаотическими выбросами.

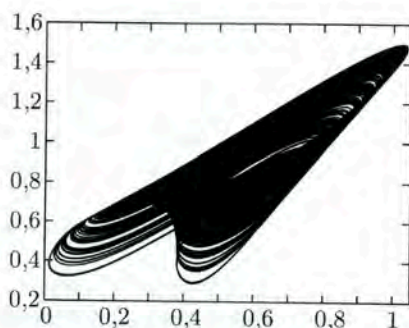


Рис. 14.3. $d = 2,027$

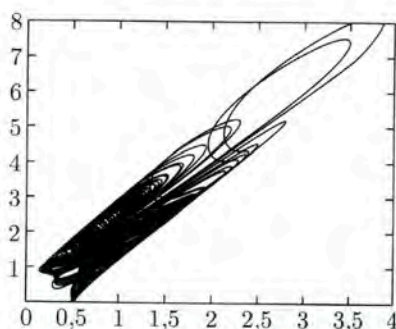
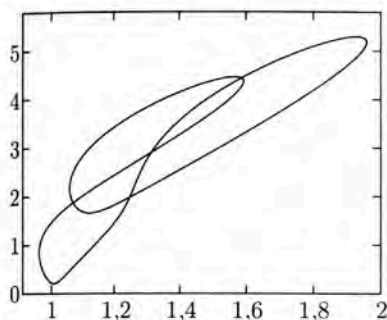
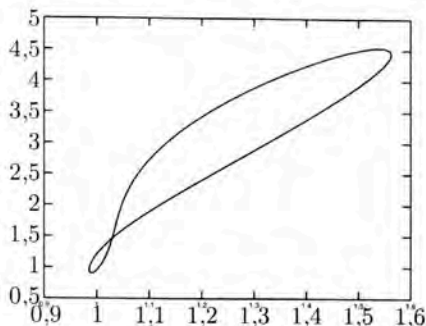


Рис. 14.4. $d = 3,065$

Еще одна характерная особенность динамики системы (14.37) при условиях (14.44) заключается в наличии на отрезке $2,549 \leq d \leq 2,887$ некоторого количества лакун, в которых, по всей видимости, нет ни устойчивых циклов, ни хаотических аттракторов. В этом случае после довольно длительного переходного процесса (порядка 2–3 тысяч временных единиц) траектории выходят на устойчивое состояние равновесия O_2 .

На оставшемся промежутке, т. е. при $d \geq 5$, происходит постепенное упрощение динамики: из хаотического аттрактора, имеющегося при $d = 5$, при последующем увеличении d , а именно, при $d \approx 5,1485$, через режим перемежаемости возникает очередной устойчивый цикл (см. рис. 14.5). Далее, при $d \approx 10,73$ этот цикл за счет обратной бифуркации удвоения приобретает форму, показанную рис. 14.6, и при $d > 10,73$ уже не претерпевает принципиальных изменений, оставаясь единственным аттрактором системы (14.37). Заслуживает внимания, пожалуй,

Рис. 14.5. $d = 9$ Рис. 14.6. $d = 10,8$

лишь тот факт, что при $d \rightarrow \infty$ координата ξ_1 данного цикла стремится к нулю, а ξ_2 является величиной порядка единицы. Для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при значениях параметров из (14.44) единственный устойчивый цикл имеет предельная система

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= v_1 v_2 \cos \psi + \alpha_2 v_1 v_2^2, \quad \dot{v}_2 = v_1^2 \cos(\psi + \delta) + \beta_2 v_2^3, \\ \dot{\psi} &= -2 v_2 \sin \psi - \frac{v_1^2}{v_2} \sin(\psi + \delta) + c_2 v_2^2, \end{aligned} \quad (14.47)$$

получающаяся из (14.37) после нормировок $\xi_1 = v_1/\sqrt{d}$, $\xi_2 = v_2$ и отбрасывания слагаемых порядка $1/d$.

Завершая описание динамики системы (14.37) при условиях (14.44), приведем ряд аргументов в пользу гипотезы о существовании счетного числа окон периодичности (14.46). С этой целью обозначим через $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(d)$ старший ляпуновский показатель аттрактора системы (14.37), отличного от положения равновесия O_2 (в случае, когда такой аттрактор имеется). Если же параметр d принадлежит одной из упомянутых выше лагун, то в качестве λ_{\max} берем старший ляпуновский показатель O_2 . График функции $\lambda_{\max}(d)$ на отрезке $1,8 \leq d \leq 5$, построенный по точкам с шагом 0,01, показан на рис. 14.7.

Основываясь на представленной визуальной информации, можно выделить три характерных диапазона изменения параметра d . Действительно, существует промежуток $4,514 \lesssim d \leq 5$, на котором, по всей видимости, нет окон периодичности и который в связи с этим уместно назвать зоной стабильного хаоса. Далее, слева к упомянутой зоне примыкает самое широкое окно периодичности $3,634 \lesssim d \lesssim 4,514$. И наконец, еще левее, т. е. при $1,96 \leq d \lesssim 3,634$, располагается зона «дышащего» хаоса (этот термин используется здесь в том же смысле, что и в п. 10.4, 13.2), которая, собственно говоря, требует дальнейшего изучения.

Для того чтобы детальнее разобраться со структурой зоны «дышащего» хаоса, возьмем отрезки $3,32 \leq d \leq 3,64$ и $1,97 \leq d \leq 2,001$, длины которых соответственно в десять и в сто раз меньше длины

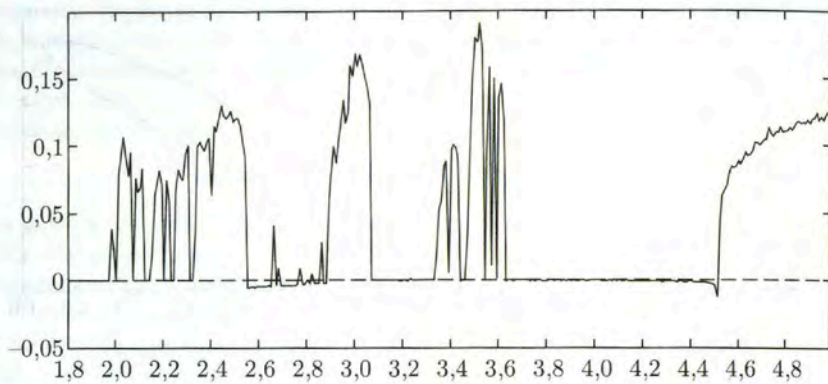


Рис. 14.7

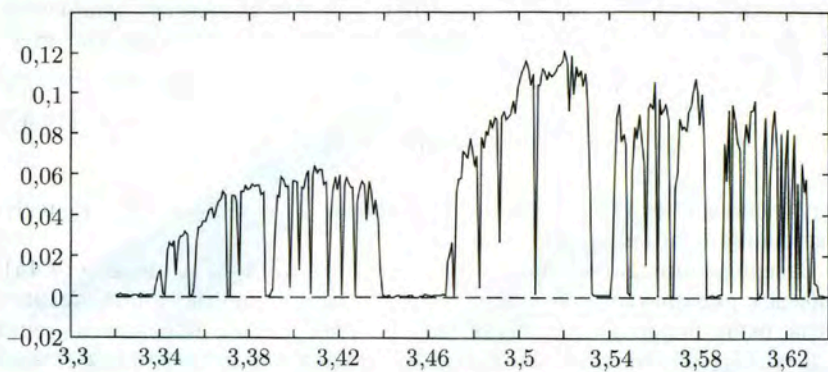


Рис. 14.8

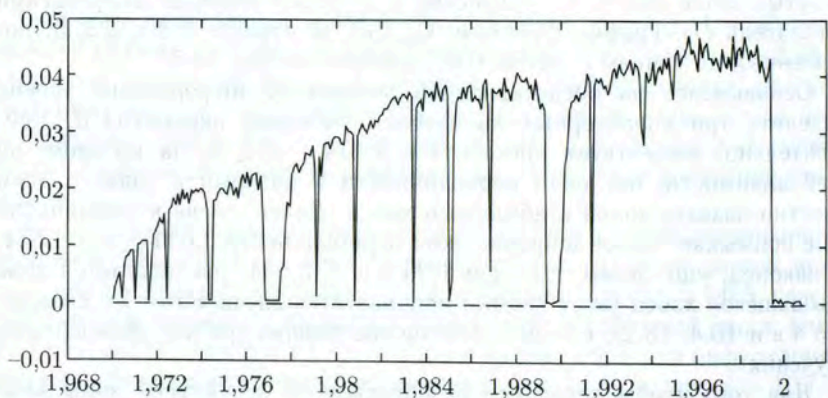


Рис. 14.9

исходного промежутка $1,8 \leq d \leq 5$. Графики функции $\lambda_{\max}(d)$, построенные на этих отрезках по точкам с шагами 0,001 и 0,0001, изображены на рисунках 14.8 и 14.9. Из этих рисунков следует, что при надлежащем увеличении становятся видны все более узкие окна периодичности. Тем самым, есть основания ожидать, что количество последних счетно.

Наличие «дышащего» хаоса представляет собой характерную особенность динамики системы (14.37), наблюдающуюся не только при условиях (14.44). Например, при наборе параметров

$$\alpha_1 = -0,5, \quad \alpha_2 = 0,8, \quad \beta_1 = 0,5, \quad \beta_2 = -1, \quad \delta = -11, \quad c_1 = 5, \quad c_2 = -8, \quad (14.48)$$

выбор которых продиктован теми же причинами, что и выше, и при $0,27 \leq d \leq 1,431$ удастся обнаружить (двигаясь по d с шагом 0,001) не менее 34 окон периодичности. Что же касается тривиальной динамики, имеющей место при $d \ll 1$ и $d \gg 1$, то в случае (14.48) она мало чем отличается от варианта (14.44). В самом деле, при $d \gg 1$ и при условиях (14.48) в исходной системе (14.37) существует устойчивый цикл, аналогичный показанному на рис. 14.6, так как устойчивый цикл по-прежнему имеет соответствующая предельная система (14.47). Следует заметить, однако, что теперь компанию ему составляет устойчивое состояние равновесия с координатами $\xi_j \sim d$, $j = 1, 2$.

При $d \ll 1$, как и в предыдущем варианте, имеется устойчивое состояние равновесия с компонентами $\xi_1, \xi_2 \sim 1$. Но кроме этого есть еще и устойчивый цикл, стягивающийся к нулю при $d \rightarrow 0$. Для того чтобы убедиться в последнем, достаточно заметить, что при значениях параметров из (14.48) устойчивый цикл существует в предельной системе (14.45).

В заключение добавим, что при $\alpha_2 < 0$, $\beta_1 < 0$ обнаружить хаос в системе (14.37) не удалось. В широкой области изменения параметров, удовлетворяющих данным условиям, ее аттракторами оказываются состояния равновесия или циклы.

14.5. Заключение. Предложенный в п. 14.2 способ моделирования нелокальной динамики, возникающей при резонансе 1 : 2, не является единственно возможным. Другой вариант, также позволяющий изучить интересующую нас проблему локальными методами, заключается в следующем. Рассмотрим аналогичную (14.9) систему

$$\dot{u} = A_0 u + F_2(u, u, \mu) + F_3(u, u, u) + \Delta(u), \quad (14.49)$$

считая, что A_0 и $\Delta(u)$ удовлетворяют прежним ограничениям. Что же касается квадратичной нелинейности F_2 , то здесь она уже не пропорциональна малому параметру $\mu > 0$, а гладко зависит от него более сложным образом (о характере этой зависимости будет сказано чуть ниже).

Первая группа ограничений относится к системе (14.49) при $\mu = 0$. Обозначим через $\varkappa_1^0, \varkappa_2^0$ — постоянные, вычисленные с помощью фор-

мул (14.3) по $F_2(u, u, 0)$. Будем считать, что в данном случае условие 14.1 нарушено, т. е. $\kappa_1^0 \kappa_2^0 = -\gamma$, $\gamma > 0$. Тогда после соответствующего масштабирования переменных z_1, z_2 нормальная форма системы (14.49) при $\mu = 0$ на центральном многообразии (14.5), выписанная с точностью до кубических слагаемых включительно, принимает вид

$$\dot{z}_1 = \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \quad \dot{z}_2 = -z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2. \quad (14.50)$$

Считаем также, что фигурирующие в (14.50) коэффициенты d_{jk} удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} d_{22} < 0, \quad 4 \operatorname{Re} d_{11} + 2(\operatorname{Re} d_{12} + \operatorname{Re} d_{21}) + \operatorname{Re} d_{22} < 0, \quad (14.51)$$

которые (см. [130]) представляют собой критерий асимптотической устойчивости нулевого решения системы (14.49) при $\mu = 0$.

Остановимся, далее, на способе введения малого параметра μ . Будем предполагать, что при $\mu > 0$ аналогичная (14.50) укороченная нормальная форма имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{z}_1 z_2 + (d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= -(1 + i\mu)z_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Тогда, очевидно, ее нулевое решение устойчиво (неустойчиво) при $\mu = 0$ ($\mu > 0$).

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что система (14.49) обладает теми же общими свойствами, что и рассмотренная ранее система (14.9). Действительно, при $\mu > 0$ ее нулевое решение слабо неустойчиво за счет квадратичной нелинейности, а условия (14.51) обеспечивают локальную диссипативность. Тем самым, для данной системы сохраняются теорема 14.1 и все предшествующие построения. В частности, у нее существует аналогичный (14.16) «нелокальный» аттрактор $\Sigma(\mu)$, колебания на котором имеют амплитуду порядка не выше μ .

Вопрос о структуре аттрактора $\Sigma(\mu)$ системы (14.49) решается несколько иначе, чем в случае системы (14.9). В самом деле, выполняя в (14.52) аналогичные (14.20) замены

$z_1 \exp(-i\omega_0 t) \rightarrow z_1, \quad z_2 \exp(-2i\omega_0 t) \rightarrow z_2; \quad z_j/\mu \rightarrow z_j, \quad j = 1, 2; \quad \mu t \rightarrow t,$
убеждаемся, что движения на аттракторе $\Sigma(\mu)$ описываются модельными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \bar{z}_1 z_2 + \mu(d_{11}|z_1|^2 + d_{12}|z_2|^2)z_1, \\ \dot{z}_2 &= -z_1^2 + \mu(-iz_1^2 + (d_{21}|z_1|^2 + d_{22}|z_2|^2)z_2), \end{aligned} \quad (14.53)$$

в которых в отличие от (14.22) сохраняется зависимость от μ .

Для того чтобы получить некоторое представление о динамике системы (14.53), сначала, как и в случае (14.22), перейдем в ней

к полярным координатам. В итоге от исходной четырехмерной системы отщепляется трехмерная система

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_1 &= \xi_1 \xi_2 \cos \psi + \mu(\alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2) \xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= -\xi_1^2 \cos \psi + \mu(\xi_1^2 \sin \psi + (\beta_1 \xi_1^2 + \beta_2 \xi_2^2) \xi_2), \\ \dot{\psi} &= \left(\frac{\xi_1^2}{\xi_2} - 2 \xi_2 \right) \sin \psi + \mu \left(\frac{\xi_1^2}{\xi_2} \cos \psi + c_1 \xi_1^2 + c_2 \xi_2^2 \right),\end{aligned}\quad (14.54)$$

где параметры α_j , β_j , c_j , $j = 1, 2$, задаются прежними формулами (14.38).

Непосредственная проверка показывает, что при $\mu = 0$ система (14.54) допускает два интеграла движения:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = r_1, \quad \xi_1^2 \xi_2 \sin \psi = r_2, \quad (14.55)$$

где $r_1 > 0$, $r_2 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные. А отсюда, в свою очередь, заключаем, что при $\mu = 0$ все ее возможные решения — это циклы, получающиеся в результате пересечения различных поверхностей (14.55), и состояния равновесия. В частности, имеются два однопараметрических семейства состояний равновесия:

$$(\xi_1, \xi_2, \psi): \psi = \pi/2, \quad \xi_1 = \sqrt{2} \xi_2; \quad (\xi_1, \xi_2, \psi): \psi = 3\pi/2, \quad \xi_1 = \sqrt{2} \xi_2, \quad (14.56)$$

где $\xi_2 > 0$ произвольно.

Из отмеченных свойств системы (14.54) следует, что проблема ее аттракторов сводится к вопросу о том, какие из упомянутых выше циклов или состояний равновесия «выживают» при малых $\mu > 0$. В случае семейств (14.56) ответ на этот вопрос достаточно прост: при $\mu > 0$ сохраняется единственное состояние равновесия $S(\mu)$ с координатами

$$\xi_1 = \xi_1^0 + O(\mu), \quad \xi_2 = \xi_2^0 + O(\mu), \quad \psi = \pi/2 + \mu \xi_2^0 (2\alpha_1 + \alpha_2) + O(\mu^2), \quad (14.57)$$

где

$$\xi_1^0 = \sqrt{2} \xi_2^0, \quad \xi_2^0 = -2/(2\beta_1 + \beta_2 + 4\alpha_1 + 2\alpha_2). \quad (14.58)$$

Подчеркнем, что знаменатель в формуле для ξ_2^0 отрицателен в силу второго неравенства из (14.51).

Приведенной информации о состоянии равновесия $S(\mu)$ (см. (14.57), (14.58)) достаточно для исследования его устойчивости. Действительно, несложные вычисления показывают, что характеристический многочлен отвечающей ему матрицы линеаризации записывается в виде

$$\lambda^3 + p(\mu)\lambda^2 + q(\mu)\lambda + r(\mu) = 0, \quad (14.59)$$

где

$$\begin{aligned}p(\mu) &= \mu[2\xi_2^0 - (\xi_2^0)^2(4\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\beta_2)] + O(\mu^2), \\ q(\mu) &= 12(\xi_2^0)^2 + O(\mu), \quad r(\mu) = 8(\xi_2^0)^3\mu + O(\mu^2).\end{aligned}\quad (14.60)$$

Из формул (14.60) очевидным образом следует, что полином (14.59) является гурвицевым при условии

$$4/3 - \xi_2^0(4\alpha_1 + 2\beta_1 + 3\beta_2) > 0, \quad (14.61)$$

а при выполнении строго противоположного неравенства у него имеется пара комплексно сопряженных корней в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$. Необходимо отметить, что условие (14.61) заведомо совместно с неравенствами (14.51), так как все они справедливы, например, в случае, когда $|\beta_2| \gg 1$, $\beta_2 < 0$, а остальные параметры фиксированы. Добавим еще, что для состояния равновесия $S(\mu)$ остается в силе аналог теоремы 14.2 о соответствии, т.е. в исходной системе (14.49) при всех достаточно малых $\mu > 0$ ему отвечает цикл с теми же свойствами устойчивости.

Вопрос о существовании у системы (14.54) при малых $\mu > 0$ устойчивых циклов остается открытым. Можно лишь высказать предположение, что таковые имеются при условиях (14.51) и при выполнении строго противоположного (14.61) неравенства.

Еще один нерешенный вопрос связан с системой (14.25). Напомним, что при надлежащем согласовании малых параметров ε и μ (см. (14.26)) у нее всегда есть устойчивые автоколебательные режимы амплитуды порядка μ , которые с некоторой долей условности можно назвать нелокальными. Однако при отказе от неравенств (14.8), гарантирующих устойчивость нуля, в системе (14.25) наряду с нелокальными режимами могут существовать устойчивые автоколебания амплитуды порядка ε/μ . Последние по аналогии с вышесказанным назовем локальными.

Выполняя в нормальной форме (14.27) замены

$$\begin{aligned} z_1 \exp(-i\omega_0 t) &\rightarrow z_1, & z_2 \exp(-2i\omega_0 t) &\rightarrow z_2; \\ \mu z_j / \varepsilon &\rightarrow z_j, & j &= 1, 2; & \varepsilon t &\rightarrow t, \end{aligned}$$

и отбрасывая асимптотически малые слагаемые, убеждаемся, что за локальную динамику исходной системы (14.25) отвечает система

$$\dot{z}_1 = \gamma_1 z_1 + \kappa_1 \bar{z}_1 z_2, \quad \dot{z}_2 = \gamma_2 z_2 + \kappa_2 z_1^2. \quad (14.62)$$

В случае $\operatorname{Re} \gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma_2 = 0$ анализ ее автомодельных периодических решений проделан в статье [127]. В общем же случае проблема исследования аттракторов системы (14.62) остается открытой.

Среди возможных физических приложений, в которых возникает описанный нами механизм жесткого возбуждения автоколебаний, отметим известную задачу о нелинейном панельном флаттере в потоке газа [16]. Общая идея о привлечении простейших галеркинских аппроксимаций для феноменологического описания автоколебаний в данной задаче в случае малого затухания высказывалась Ю. С. Колесовым в еще начале 90-х годов прошлого столетия. В последующем эта

идея была реализована в статье [86], где рассматривалась двухмодовая галеркинская аппроксимация, т. е. система вида

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + (A + vB)u = f(u, \dot{u}). \quad (14.63)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^2$,

$$A = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, 2, \quad \delta_2/\delta_1 > 4; \quad (14.64)$$

f — гладкая вектор-функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого; $\varepsilon > 0$ — коэффициент затухания, который предполагается малым; $v > 0$ — приведенная скорость набегающего потока.

За устойчивость нулевого состояния равновесия системы (14.63) отвечает расположение спектра квадратичного пучка матриц

$$(\lambda^2 + \varepsilon\lambda)I + A + vB, \quad (14.65)$$

где I — единичная матрица. Далее заметим, что в силу наложенных на δ_1, δ_2 ограничений (см. (14.64)) при $\varepsilon = 0, v = v_*$, где

$$v_* = \frac{1}{5} \sqrt{4(\delta_2 - \delta_1)^2 - 9\delta_1\delta_2} > 0,$$

пучок (14.65) имеет чисто мнимые собственные значения

$$\lambda = \pm i\omega_0, \pm 2i\omega_0, \quad \omega_0 = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2 - \sqrt{(\delta_2 - \delta_1)^2 - 4v_*^2}) > 0,$$

которые при $\varepsilon > 0$ и при значениях v , близких к v_* , сдвигаются, очевидно, в левую комплексную полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Таким образом, при $v = v_* + v_0\varepsilon, v_0 = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$ система (14.63) представляет собой частный случай системы (14.7) (в предположении, естественно, что и все остальные перечисленные в п. 14.1 ограничения здесь выполнены). А отсюда можно сделать важный физический вывод: в случае малого коэффициента затухания автоколебания в данной задаче возникают при скоростях v , существенно меньших критической скорости $v = v_{**}$, $v_{**} = (\delta_2 - \delta_1)/2$, при которой происходит потеря устойчивости нулевого решения.

В заключение отметим, что в силу своей универсальности механизм жесткого возбуждения автоколебаний, связанный с резонансом $1:2$, наблюдается не только в обыкновенных дифференциальных уравнениях, но и в системах с бесконечномерным фазовым пространством. Для примера проиллюстрируем его реализуемость в случае простейшего нелинейного волнового уравнения на отрезке $0 \leq x \leq \pi$. А именно, рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} + u = a^2 u_{xx} + (\mu u - u^2)u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (14.66)$$

где $0 < \mu \ll 1, a = \operatorname{const} > 0$. В качестве ее фазового пространства (пространства начальных условий (u, u_t)) возьмем $\dot{W}_2^2 \times \dot{W}_2^1$, где, как

обычно, через $\overset{\circ}{W}_2^j$, $j = 1, 2$, обозначены соболевские пространства функций, удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле. Покажем, что при подходящем выборе параметра a в данной краевой задаче реализуется резонанс $1 : 2$, приводящий, как и в случае системы (14.9), к возникновению устойчивых автоколебательных режимов амплитуды порядка μ .

Рассмотрим сначала отвечающую задаче (14.66) линейную краевую задачу

$$u_{tt} + u = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0 \quad (14.67)$$

и заметим, что она допускает тригонометрические решения

$$u = \exp(\pm i\omega_n t) \sin nx, \quad \omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.68)$$

Фиксируем, далее, произвольно натуральные числа n, k , $k \geq n$ и положим в (14.66)–(14.68)

$$a = a_{n,k} \equiv \sqrt{3/[(2k+1)^2 - 4n^2]}. \quad (14.69)$$

Тогда, как нетрудно увидеть, выполняется равенство $2\omega_n = \omega_{2k+1}$, т.е. имеет место требуемый резонанс.

Следуя изложенному в пункте 14.2, возможные автоколебательные режимы краевой задачи (14.66) при условии (14.69) будем искать в виде

$$u = \mu u_1(t, \tau, x) + \mu^3 u_2(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \mu^2 t, \quad (14.70)$$

где

$$u_1 = [\exp(i\omega_n t) z_1 + \exp(-i\omega_n t) \bar{z}_1] \sin nx + \\ + [\exp(2i\omega_n t) z_2 + \exp(-2i\omega_n t) \bar{z}_2] \sin(2k+1)x, \quad (14.71)$$

а $z_j = z_j(\tau)$, $j = 1, 2$, — некоторые неизвестные (подлежащие определению) комплексные амплитуды.

Подставляя соотношения (14.70), (14.71) в (14.66) и приравнявая коэффициенты при μ^3 , для определения u_2 получаем линейную краевую задачу

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{n,k}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) u_2 + u_2 = g(t, \tau, x), \quad u_2|_{x=0} = u_2|_{x=\pi} = 0, \quad (14.72)$$

с неоднородностью

$$g = \frac{\partial}{\partial t} (u_1^2/2 - u_1^3/3) - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau},$$

являющейся линейной комбинацией гармоник $\exp(\pm is \omega_n t)$, $s = 1, \dots, 6$. Поэтому и решение u_2 задачи (14.72) будем искать в классе тригонометрических полиномов той же структуры:

$$u_2 = \sum_{s=1}^6 B_s(\tau, x) \exp(is \omega_n t) + \bar{B}_s(\tau, x) \exp(-is \omega_n t). \quad (14.73)$$

В результате проблема сводится к решению серии линейных неоднородных краевых задач вида

$$(1 - s^2 \omega_n^2) B_s - a_{n,k}^2 \frac{d^2 B_s}{dx^2} = g_s(\tau, x), \quad B_s|_{x=0} = B_s|_{x=\pi} = 0, \quad (14.74)$$

в которых переменная τ рассматривается как параметр.

Обращаем внимание, что краевые задачи (14.74) при $s = 1, 2$ оказываются заведомо вырожденными, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$\int_0^\pi g_1 \sin nx \, dx = 0, \quad \int_0^\pi g_2 \sin(2k+1)x \, dx = 0. \quad (14.75)$$

Выполнения же соотношений (14.75) можно добиться за счет подходящего выбора имеющихся в запасе комплексных амплитуд z_1, z_2 . Действительно, подставляя в (14.75) явные формулы для g_1, g_2 :

$$\begin{aligned} g_1 &= i\omega_n(z_2 \bar{z}_1 \sin(2k+1)x - 2|z_2|^2 z_1 \sin^2(2k+1)x - \\ &\quad - |z_1|^2 z_1 \sin^2 nx) \sin nx - 2i\omega_n \frac{dz_1}{d\tau} \sin nx, \\ g_2 &= 2i\omega_n \left(\frac{1}{2} z_1^2 \sin^2 nx - 2|z_1|^2 z_2 \sin^2 nx \sin(2k+1)x - \right. \\ &\quad \left. - |z_2|^2 z_2 \sin^3(2k+1)x \right) - 4i\omega_n \frac{dz_2}{d\tau} \sin(2k+1)x, \end{aligned}$$

приходим к выводу, что z_1, z_2 должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= -\gamma \bar{z}_1 z_2 - \left(\frac{3}{8} |z_1|^2 + \frac{1}{2} |z_2|^2 \right) z_1, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= -\frac{\gamma}{2} z_1^2 - \left(\frac{1}{2} |z_1|^2 + \frac{3}{8} |z_2|^2 \right) z_2, \end{aligned} \quad (14.76)$$

где $\gamma = 4n^2 / [\pi(2k+1)((2k+1)^2 - 4n^2)] > 0$.

Подведем итог. Получившаяся система (14.76) удовлетворяет, очевидно, условиям 14.1, 14.2, причем для нее реализуется простейший случай (14.41). А это означает, что она имеет единственный экспоненциально орбитально устойчивый автомодельный цикл с частотой $\sigma = 0$ (см. (14.35)). Далее, опираясь на изложенную в работе [67] методику, можно показать, что при некоторых дополнительных ограничениях на номера n и k упомянутому автомодельному циклу в исходной краевой задаче (14.66) при всех достаточно малых $\mu > 0$ соответствует устойчивый цикл с асимптотикой (14.70), (14.71).

И последнее. Возмутим линейную часть краевой задачи (14.66) слагаемыми порядка ε , т. е. рассмотрим краевую задачу

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + u = (a_{n,k}^2 + \varepsilon \delta) u_{xx} + (\mu u - u^2) u_t, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (14.77)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $\delta = \text{const} \in \mathbb{R}$. Тогда при надлежащем согласовании малых параметров ε и μ , а именно, при условии (14.26), устойчивый

цикл амплитуды порядка μ сохраняется, но теперь он сосуществует с устойчивым нулевым состоянием равновесия. Таким образом, как и в случае системы (14.25), в рамках краевой задачи (14.77) реализуется ситуация, характерная для жесткого возбуждения автоколебаний.

15. Резонансная динамика нелинейных флаттерных систем

15.1. Общие свойства рассматриваемого класса уравнений.

Флаттерной системой будем называть систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + A(\mu)u + F(u, \dot{u}, \mu) = 0. \quad (15.1)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$; ε — малый положительный параметр, характеризующий затухание; $A(\mu)$ — квадратная матрица размера $n \times n$, C^∞ -гладко зависящая от вспомогательного параметра $\mu \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; вектор-функция $F(u, v, \mu)$ класса $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}^n)$ такова, что

$$F(0, 0, \mu) \equiv 0, \quad F'_u(0, 0, \mu) \equiv F'_v(0, 0, \mu) \equiv 0. \quad (15.2)$$

Простейшим примером флаттерной системы является рассмотренная выше система (14.63). Как уже было сказано ранее, уравнения вида (15.1) возникают при галеркинских аппроксимациях нелинейных краевых задач теории аэроупругости (см., например, [16, 32, 132]) и в этом случае параметр μ в них — скорость набегающего потока газа. Если же система (15.1) моделирует работу некоторого автогенератора, то μ представляет собой коэффициент усиления соответствующего нелинейного элемента (один из примеров такого рода рассматривается ниже).

Основное ограничение, при котором мы будем изучать флаттерные системы (15.1) и которое заведомо выполняется в упомянутых физических задачах, состоит в существовании критического значения $\mu = \mu_0 > 0$ параметра μ со следующими свойствами. Во-первых, при всех $\mu \in [0, \mu_0)$ собственные значения $\lambda_k(\mu)$, $k = 1, \dots, n$, матрицы $A(\mu)$ вещественны, положительны и попарно различны, а при каждом $\mu > \mu_0$ эта матрица имеет хотя бы одно собственное значение, не лежащее на полуоси $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda \geq 0, \operatorname{Im} \lambda = 0\}$. Во-вторых, у матрицы $A(\mu)$ при $\mu = \mu_0$ появляется двукратное собственное значение $\lambda = \lambda_0 > 0$, которому отвечают собственный и присоединенный векторы e_0 и $e_{0,1}$, нормированные, как обычно, условиями

$$(e_0, g_{0,1}) = (g_0, e_{0,1}) = 1, \quad (e_0, g_0) = 0, \quad (15.3)$$

где $A^*(\mu_0)g_0 = \lambda_0 g_0$, $A^*(\mu_0)g_{0,1} = \lambda_0 g_{0,1} + g_0$, $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение. Что же касается остальных собственных значений λ_k , $k = 1, \dots, n - 2$, матрицы $A(\mu_0)$, то они по-прежнему положи-

тельны и попарно различны. И наконец, в-третьих, считаем выполненным неравенство

$$a_0 = (A'(\mu_0)e_0, g_0) < 0, \quad (15.4)$$

где штрих — производная по μ .

Остановимся на смысле перечисленных ограничений. В связи с этим обратим внимание, что в силу (15.2) система (15.1) при каждом $\mu \geq 0$ имеет нулевое состояние равновесия, за устойчивость которого отвечают корни уравнений

$$\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \lambda_k(\mu) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (15.5)$$

где, как и выше, $\lambda_k(\mu)$ — собственные значения матрицы $A(\mu)$. А отсюда немедленно заключаем, что, во-первых, при $0 \leq \mu \leq \mu_0$ и при любом $\varepsilon > 0$ (не обязательно малом) все корни уравнений (15.5) находятся в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$; во-вторых, при каждом фиксированном значении параметра $\mu \in (\mu_0, \infty)$ и при надлежащем уменьшении ε хотя бы одно из уравнений (15.5) имеет корень с положительной действительной частью. Таким образом, для полного исследования свойств устойчивости нулевого решения системы (15.1) осталось разобраться со случаем $0 < \mu - \mu_0 \ll 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Несложный подсчет с учетом неравенства (15.4) показывает, что при $0 < \mu - \mu_0 \ll 1$ двукратное собственное значение $\lambda = \lambda_0$, о котором говорилось чуть выше, порождает два комплексных собственных значения $\lambda_*(\mu)$, $\bar{\lambda}_*(\mu)$ матрицы $A(\mu)$ с асимптотикой

$$\lambda_*(\mu) = \lambda_0 + i\sqrt{-a_0(\mu - \mu_0)} + O(\mu - \mu_0). \quad (15.6)$$

Подставляя, далее, соотношение (15.6) в уравнения

$$\lambda^2 + \varepsilon\lambda + \lambda_*(\mu) = 0, \quad \lambda^2 + \varepsilon\lambda + \bar{\lambda}_*(\mu) = 0, \quad (15.7)$$

убеждаемся в существовании критического значения

$$\mu_*(\varepsilon) = \mu_0 - \frac{\lambda_0}{a_0} \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (15.8)$$

параметра μ , при котором эти уравнения имеют соответственно по одному чисто мнимому корню $\lambda = -i\omega(\varepsilon)$ и $\lambda = i\omega(\varepsilon)$, где

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + O(\varepsilon), \quad \omega_0 = \sqrt{\lambda_0}. \quad (15.9)$$

Добавим еще, что при $\mu > \mu_*(\varepsilon)$ упомянутые корни уравнений (15.7) сдвигаются в правую комплексную полуплоскость $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Суммируя все сказанное, приходим к выводу, что нулевое решение системы (15.1) устойчиво (неустойчиво) при $\mu - \mu_*(\varepsilon) < 0$ (> 0), а при возрастании параметра μ и при прохождении его через критическое значение (15.8) потеря устойчивости происходит колебательным образом. В связи с этим естественно возникает задача о бифуркации из нуля нетривиальных автоколебаний системы (15.1) при условии

$$\mu = \mu_0 + \varepsilon^2\gamma, \quad \gamma = \text{const} \in \mathbb{R}. \quad (15.10)$$

Решение поставленной задачи приводится в следующем пункте. Здесь же отметим, что порядок ε^2 отклонения параметра μ от значения μ_0 продиктован асимптотическим представлением (15.8).

15.2. Основная бифуркационная теорема. Учтем в исходной системе (15.1) равенство (15.10) и отбросим несущественные для дальнейшего слагаемые порядка ε^4 в линейной части и ε^2 в нелинейности. В результате получим более удобную для наших целей систему

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + (A_0 + \varepsilon^2 A_1)u + f(u, \dot{u}) = 0, \quad (15.11)$$

в которой $A_0 = A(\mu_0)$, $A_1 = \gamma A'(\mu_0)$, $f(u, v) = F(u, v, \mu_0)$.

Обращаем внимание, что система (15.11) многочастотна, поскольку соответствующая ей линейная система

$$\ddot{u} + A_0 u = 0 \quad (15.12)$$

допускает периодические решения (которые в дальнейшем будем называть автоколебательными модами)

$$u = \exp(\pm i\omega_0 t)e_0, \quad u = \exp(\pm i\omega_k t)e_k, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (15.13)$$

Здесь ω_0 — частота, фигурирующая в (15.9), e_0 — вектор из (15.3), $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$, $k = 1, \dots, n-2$, где, напомним, λ_k — собственные значения матрицы A_0 , отличные от λ_0 , а через e_k , $k = 1, \dots, n-2$, обозначены отвечающие им собственные векторы.

В связи с вышесказанным вопрос о том, на каких именно модах из семейства (15.13) сосредоточены возможные автоколебательные решения системы (15.11), бифурцирующие из нуля при $\varepsilon > 0$, не вполне очевиден. Однако проделанный в п. 15.1 линейный анализ наводит на мысль, что частоты этих решений должны быть близки к частоте самовозбуждения (15.9). Во всяком случае, ниже мы ограничимся отысканием именно таких решений и каждое отдельно взятое из них будем строить в виде формального ряда по целым степеням ε :

$$u = \varepsilon u_0(t, \tau) + \varepsilon^2 u_1(t, \tau) + \varepsilon^3 u_2(t, \tau) + \dots, \quad (15.14)$$

где $\tau = \varepsilon t$, все функции периодичны по t с периодом $2\pi/\omega_0$,

$$u_0(t, \tau) = [z(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{z}(\tau) \exp(-i\omega_0 t)]e_0, \quad (15.15)$$

а $z(\tau)$ — пока произвольная комплексная амплитуда колебаний, подлежащая определению в последующем.

Итак, подставим в (15.11) соотношения (15.14), (15.15) вместе с тейлоровским разложением вектор-функции $f(u, v)$ в нуле, имеющим вид:

$$f(u, v) = f_{21}(u, u) + f_{22}(u, v) + f_{23}(v, v) + f_{31}(u, u, u) + f_{32}(u, u, v) + \\ + f_{33}(u, v, v) + f_{34}(v, v, v) + \dots, \quad (15.16)$$

где $f_{2i}(*, *)$, $i = 1, 2, 3$ и $f_{3j}(*, *, *)$, $j = 1, 2, 3, 4$, — симметричные квадратичные и кубические формы соответственно. В результате после

приравнивания коэффициентов при ε^2 для u_1 получаем аналогичное (15.12) линейное неоднородное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + A_0 u_1 = g_1(t, \tau), \quad (15.17)$$

где

$$g_1 = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - f_{21}(u_0, u_0) - f_{22}\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - f_{23}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right), \quad (15.18)$$

а переменная τ рассматривается как параметр. Нетрудно заметить, что в силу (15.15), (15.18) неоднородность $g_1(t, \tau)$ из (15.17) представляет собой сумму нулевых, первых и вторых гармоник переменной $\omega_0 t$, т. е. записывается в виде:

$$g_1 = v_1(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{v}_1(\tau) \exp(-i\omega_0 t) + |z(\tau)|^2 v_0 + \\ + z^2(\tau) v_2 \exp(2i\omega_0 t) + \bar{z}^2(\tau) \bar{v}_2 \exp(-2i\omega_0 t), \quad (15.19)$$

где $v_1 = -i\omega_0(2dz/d\tau + z)e_0$, а явные выражения для векторов v_0, v_2 , которые, подчеркнем, уже не зависят от τ , опустим.

Дальнейший способ действий вполне понятен: решение u_1 системы (15.17) ищем в той же форме, что и неоднородность (15.19), т. е. в виде

$$u_1 = u_{11}(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{u}_{11}(\tau) \exp(-i\omega_0 t) + |z(\tau)|^2 u_{10} + \\ + z^2(\tau) u_{12} \exp(2i\omega_0 t) + \bar{z}^2(\tau) \bar{u}_{12} \exp(-2i\omega_0 t). \quad (15.20)$$

В результате для определения фигурирующих в (15.20) векторных коэффициентов u_{11}, u_{10}, u_{12} приходим к линейным неоднородным алгебраическим системам

$$(A_0 - \lambda_0 I)u_{11} = v_1(\tau), \quad A_0 u_{10} = v_0, \quad (A_0 - 4\lambda_0 I)u_{12} = v_2, \quad (15.21)$$

где I — единичная матрица.

Первая из получившихся систем (15.21) хотя и является вырожденной, но заведомо разрешима, а ее решение задается равенством

$$u_{11}(\tau) = -i\omega_0(2dz/d\tau + z)e_{0,1}, \quad (15.22)$$

где $e_{0,1}$ — присоединенный вектор из (15.3). Далее, вторая система (15.21) разрешима однозначно, а аналогичную разрешимость третьей обеспечивают условия

$$2\omega_0 \neq \omega_k, \quad k = 1, \dots, n-2, \quad (15.23)$$

которые всюду ниже считаем выполненными.

Следующий шаг связан с рассмотрением уравнения

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + A_0 u_2 = g_2(t, \tau), \quad (15.24)$$

где

$$\begin{aligned}
 g_2 = & -\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial \tau} - A_1 u_0 - 2f_{21}(u_0, u_1) - \\
 & - f_{22}\left(u_0, \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - f_{22}\left(u_1, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - 2f_{23}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - f_{22}\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial \tau}\right) - \\
 & - 2f_{23}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial \tau}\right) - f_{31}(u_0, u_0, u_0) - f_{32}\left(u_0, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - \\
 & - f_{33}\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - f_{34}\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right), \quad (15.25)
 \end{aligned}$$

получающегося после приравнивания в исходном уравнении (15.11) коэффициентов при ε^3 . Учитывая, далее, в (15.25) соотношения (15.15), (15.20), убеждаемся, что неоднородность g_2 из (15.24) представляет собой линейную комбинацию гармоник $\exp(\pm im\omega_0 t)$, $m = 0, 1, 2, 3$. В том же виде ищем и $u_2(t, \tau)$. На этом пути для коэффициентов данной функции при указанных гармониках выходят аналогичные (15.21) линейные неоднородные алгебраические системы. В частности, для коэффициента u_{21} функции u_2 при гармонике $\exp(i\omega_0 t)$, как и в предыдущем случае, имеем дело с вырожденной линейной неоднородной системой вида

$$(A_0 - \lambda_0 I)u_{21} = g(\tau). \quad (15.26)$$

Обращаем внимание, что в отличие от аналогичной системы из (15.21) уравнение (15.26) не является разрешимым автоматически. Добиться же выполнения условия его разрешимости, т.е. равенства $(g(\tau), g_0) \equiv 0$, где g_0 — вектор из (15.3), можно за счет имеющейся в запасе комплексной амплитуды $z(\tau)$, которая до этого времени была произвольной. Привлекая формулы (15.15), (15.20), (15.22), (15.25), после несложных выкладок приходим к выводу, что упомянутое выше условие эквивалентно дифференциальному уравнению для $z = z(\tau)$:

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} - az + b|z|^2 z = 0, \quad (15.27)$$

где $a = -(1 + \gamma a_0/\omega_0^2)/4$, γ — постоянная из (15.10), a_0 — величина (15.4), b — некоторый комплексный коэффициент, зависящий от выписанных в (15.16) членов тейлоровского разложения нелинейности $f(u, v)$, а $\bar{z}(\tau)$ удовлетворяет комплексно сопряженному уравнению.

Строгий смысл описанным формальным построениям придает следующее утверждение, которое уместно назвать основной бифуркационной теоремой.

Теорема 15.1. Пусть в дополнение к условию (15.23) выполняются неравенства

$$(\omega_k \pm \omega_l)^2 \neq \omega_l^2, \quad k, l = 1, \dots, n-2. \quad (15.28)$$

Предположим, далее, что уравнение (15.27) имеет периодическое решение вида

$$z(\tau) = \rho_0 \exp(i\sigma_0\tau), \quad \rho_0 > 0, \quad \sigma_0 \in \mathbb{R}, \quad (15.29)$$

экспоненциально орбитально устойчивое или дихотомичное. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной системе (15.11) этому решению отвечает цикл, задающийся равенствами:

$$u = \varepsilon \rho_0 [\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi)] e_0 + \varepsilon^2 u_*(\varphi, \varepsilon), \quad \dot{\varphi} = \omega_0 + \varepsilon \sigma_0 + \varepsilon^2 \delta_*(\varepsilon), \quad (15.30)$$

где вектор-функция $u_*(\varphi, \varepsilon)$, $u_*(\varphi + 2\pi, \varepsilon) \equiv u_*(\varphi, \varepsilon)$, и скалярная функция $\delta_*(\varepsilon)$ достаточно гладко зависят от переменных $(\varphi, \varepsilon) \in [0, 2\pi] \times [0, \varepsilon_0]$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ соответственно. Кроме того, при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ свойства устойчивости цикла (15.30) совпадают с аналогичными свойствами решения (15.29).

Доказательство. Отметим, что при $n = 2$ отпадает необходимость в условиях нерезонансности (15.23), (15.28), а система, получающаяся из (15.27) после перехода к переменным z , $w = dz/d\tau$, представляет собой укороченную нормальную форму исходного уравнения (15.11). Таким образом, в этом случае утверждение теоремы 15.1 вполне очевидно.

При $n > 2$ в нормальной форме Пуанкаре–Дюлака системы (15.11) кроме уже упоминавшихся переменных z , w присутствуют еще комплексные переменные z_k , $k = 1, \dots, n-2$, отвечающие колебательным модам с частотами ω_k (см. (15.13)). Сама же нормальная форма в данной ситуации имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega_0 z + w, \quad \dot{w} = i\omega_0 w + (-\varepsilon + \Delta_{1,1}(\varepsilon))w + (\varepsilon^2 a + \Delta_{1,2}(\varepsilon))z + \\ &\quad + \Phi(z, w, \bar{z}, \bar{w}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}, \varepsilon), \\ \dot{z}_k &= i\omega_k z_k + \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \Delta_k(\varepsilon)\right)z_k + \\ &\quad + \Phi_k(z, w, \bar{z}, \bar{w}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Здесь a — постоянная из (15.27), комплекснозначные функции $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{1,2}$, Δ_k , Φ , Φ_k бесконечно дифференцируемы по всем своим аргументам, причем

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1}(\varepsilon) &= O(\varepsilon^2), \quad \Delta_{1,2}(\varepsilon) = O(\varepsilon^3), \quad \Phi(0, \dots, 0, \varepsilon) \equiv 0, \\ \Delta_k(\varepsilon) &= O(\varepsilon^2), \quad \Phi_k(0, \dots, 0, \varepsilon) \equiv 0, \quad k = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (15.32)$$

Более того, тейлоровские разложения функций Φ , Φ_k по переменным z , w , \bar{z} , \bar{w} , z_1, \dots, z_{n-2} , $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}$ в точке

$$(z, w, \bar{z}, \bar{w}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}, \varepsilon) = (0, \dots, 0, \varepsilon)$$

в силу условий (15.23), (15.28) начинаются с кубических и квадратичных слагаемых соответственно. Считаем, естественно, что в упомянутых слагаемых присутствуют только резонансные мономы, т. е. нормализация системы (15.11) проведена именно до этих порядков. Тогда в тейлоровских разложениях функций Φ_k , $k = 1, \dots, n-2$, заведомо не будет членов вида

$$cz^2, \quad c\bar{z}^2, \quad c|z|^2, \quad czz_m, \quad c\bar{z}z_m, \quad cz\bar{z}_m, \quad c\bar{z}\bar{z}_m, \quad (15.33)$$

$$m = 1, \dots, n-2, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Для удобства последующего анализа выполним в системе (15.31) замены

$$\begin{aligned} z \exp(-i\omega_0 t) &\rightarrow z, \quad \bar{z} \exp(i\omega_0 t) \rightarrow \bar{z}, \\ w \exp(-i\omega_0 t) &\rightarrow w, \quad \bar{w} \exp(i\omega_0 t) \rightarrow \bar{w}, \\ z_k \exp(-i\omega_k t) &\rightarrow z_k, \quad \bar{z}_k \exp(i\omega_k t) \rightarrow \bar{z}_k, \quad k = 1, \dots, n-2; \\ z/\varepsilon &\rightarrow z, \quad w/\varepsilon^2 \rightarrow w, \quad z_k/\varepsilon \rightarrow z_k, \quad k = 1, \dots, n-2; \quad \tau = \varepsilon t. \end{aligned} \quad (15.34)$$

В результате с учетом равенств (15.32) и описанных выше свойств функций Φ , Φ_k после сокращения уравнений для z и z_k на ε^2 , а уравнения для w на ε^3 и отбрасывания в каждом из получившихся уравнений слагаемых порядка ε и выше, приходим к так называемой укороченной нормальной форме, имеющей вид

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\tau} &= w, \quad \frac{dw}{d\tau} = -w + az - b|z|^2 z + \Psi_0(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}), \\ \frac{dz_k}{d\tau} &= -\frac{1}{2} z_k + \Psi_k(z, \bar{z}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}), \quad k = 1, \dots, n-2. \end{aligned} \quad (15.35)$$

Здесь коэффициент b тот же самый, что и в (15.27), а функция Ψ_0 представляет собой конечную сумму кубических резонансных мономов переменных $z, \bar{z}, z_1, \dots, z_{n-2}, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-2}$, в которой отсутствует слагаемое, пропорциональное $|z|^2 z$ (оно выписано отдельно). Поэтому, в частности, справедливо равенство $\Psi_0(z, \bar{z}, 0, \dots, 0) \equiv 0$. Что же касается функций Ψ_k , то каждая из них есть конечная сумма квадратичных резонансных мономов, не включающая слагаемые (15.33). А это означает, что на самом деле данные функции не зависят от переменных z, \bar{z} и, следовательно, уравнения для z_k , $k = 1, \dots, n-2$, «отщепляются» от всей системы (15.35).

Из описанных свойств функций Ψ_0, Ψ_k следует, что периодически-му решению (15.29) уравнения (15.27) в системе (15.35) соответствует грубый цикл с теми же свойствами устойчивости, задающийся равенствами

$$z(\tau) = \rho_0 \exp(i\sigma_0 \tau), \quad w(\tau) = i\sigma_0 \rho_0 \exp(i\sigma_0 \tau), \quad z_k = 0, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (15.36)$$

Остается заметить, что при учете в (15.35) отброшенных ранее слагаемых порядка ε и при обращении замен (15.34) цикл (15.36) в силу

его грубости, естественно, сохраняется и переходит в искомый цикл (15.30) исходной системы (15.11). Теорема 15.1 полностью доказана.

В связи с установленной теоремой возникает вопрос о существовании и устойчивости у уравнения (15.27) периодических решений вида (15.29). Ответ на него дан в статье [86], где получено следующее утверждение.

Теорема 15.2. Любому простому корню $y = y_0 > 0$ квадратичного многочлена

$$P(y) = (\operatorname{Im} b)^2 y^2 - \operatorname{Re} b \cdot y + a \quad (15.37)$$

отвечает цикл (15.29) уравнения (15.27) с амплитудой $\rho_0 = \sqrt{y_0}$ и частотой $\sigma_0 = -\operatorname{Im} b \cdot y_0$. Этот цикл экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $P'(y_0) < 0$ (> 0).

Подводя итог, опишем динамику периодических решений уравнения (15.27) по параметру a , который мы можем менять за счет изменения фигурирующего в (15.10) бифуркационного параметра γ . При этом случай $a < 0$, когда устойчиво нулевое состояние равновесия, будем называть *докритическим*, а случай $a > 0$ — *послекритическим*.

Пусть сначала $\operatorname{Re} b < 0$. Тогда, очевидно, полином (15.37) при всех $a < 0$ имеет единственный положительный корень $y = y_0$: $P'(y_0) > 0$ и не имеет корней на полуоси $y > 0$ в послекритической области. А это означает, что при $a < 0$ уравнение (15.27) имеет единственный неустойчивый цикл вида (15.29), который при прохождении a через нуль «влипает» в устойчивое нулевое состояние равновесия. Таким образом, в данном случае при любом a у рассматриваемого уравнения устойчивые периодические решения отсутствуют.

Предположим теперь, что

$$\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Im} b \neq 0. \quad (15.38)$$

Тогда, как и выше, в докритической области полином (15.37) имеет единственный положительный корень $y = y_1$: $P'(y_1) > 0$, которому отвечает неустойчивый цикл уравнения (15.27). Далее, при переходе в послекритическую область у многочлена $P(y)$ появляется второй положительный корень $y_0 \in (0, y_1)$: $P'(y_0) < 0$, которому соответствует устойчивое периодическое решение уравнения (15.27), ответившее от нулевого состояния равновесия. Оба цикла — устойчивый и неустойчивый — сосуществуют на некотором промежутке $0 < a < a_*$, а при прохождении параметра a через критическое значение $a = a_*$ «сливаются» и исчезают.

Оставшийся случай

$$\operatorname{Re} b > 0, \quad \operatorname{Im} b = 0 \quad (15.39)$$

хотя и является вырожденным, но заслуживает отдельного рассмотрения. Связано это с тем, что он может реализовываться в рамках так называемой *квазистационарной теории*, когда нелинейность в (15.1)

не зависит от \dot{u} и вследствие этого коэффициент b из соответствующего уравнения (15.27) с необходимостью оказывается вещественным.

Динамика уравнения (15.27) при условиях (15.39) достаточно проста: при $a < 0$ циклы отсутствуют, а при $a > 0$ имеется единственный устойчивый цикл, родившийся из нулевого состояния равновесия.

15.3. Анализ радиوفизического примера. В этом пункте применимость изложенной выше локальной теории, относящейся к случаю (15.39), проиллюстрируем на одной математической модели из радиопизики. А именно, рассмотрим автогенератор, блок-схема которого представлена на рис. 15.1, а. Предполагаем, что вольт-амперная характеристика его нелинейного элемента (в простейшем случае — классической лампы) имеет вид, изображенный на рис. 15.1, б. Считаем, далее, что в цепь обратной связи этого генератора включен отрезок дискретной линии, состоящей из $N \geq 2$ одинаковых RCL-контуров (см. рис. 15.2). Тогда, как показано в работах [56, 66], при дополнительном предположении об идеальности усилителя математической моделью описанного генератора служит система

$$\begin{aligned} \ddot{u}_n + \varepsilon \dot{u}_n + 2u_n - u_{n+1} - u_{n-1} &= 0, \quad n = 1, \dots, N, \\ u_{N+1} &= u_N, \quad u_0 + \varphi(Ku_N) = 0. \end{aligned} \quad (15.40)$$

Здесь u_n — нормированная переменная составляющая напряжения в n -м контуре, $\varepsilon = R\sqrt{C/L}$ — активные потери в линии, которые всюду ниже предполагаем малыми, $K > 0$ — коэффициент усиления, а функция $\varphi(z) \in C^\infty(\mathbb{R})$ получается из нелинейной характеристики усилителя в результате сдвига рабочей точки A (см. рис. 15.1, б) в на-

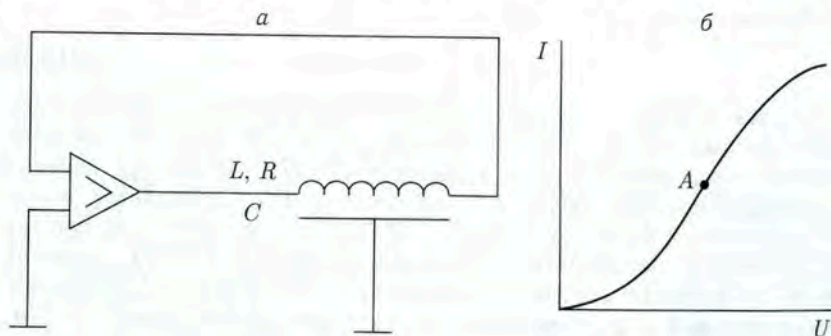


Рис. 15.1

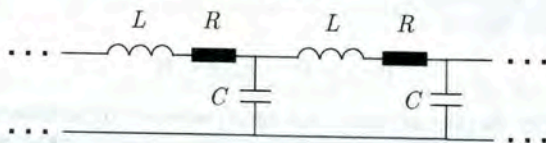


Рис. 15.2

чало координат. В связи с этим считаем, что $\varphi'(z) > 0$ при всех $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(z) \rightarrow \pm 1$ при $z \rightarrow \pm \infty$.

Исследование системы (15.40) проведем в простейшей ситуации, когда

$$N = 2, \quad \varphi(z) = z/\sqrt{1+z^2}. \quad (15.41)$$

Для этого сначала перепишем ее в виде (15.1), полагая $K = \mu$, $u = \text{colon}(u_1, u_2)$,

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} 2 & \mu - 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(u, v, \mu) = \text{colon}(\varphi(\mu u_2) - \mu u_2, 0). \quad (15.42)$$

Заметим, далее, что все условия, наложенные в п. 15.1 на матрицу $A(\mu)$ и нелинейность $F(u, v, \mu)$, в случае (15.42) заведомо выполняются и, в частности, здесь $\mu_0 = 5/4$.

На следующем этапе учтем в (15.42) соотношение (15.10). В результате приходим к системе (15.11), в которой $f(u, v) = f(u)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1/4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.43)$$

$$f(u) = \text{colon} \left(\varphi\left(\frac{5}{4} u_2\right) - \frac{5}{4} u_2, 0 \right).$$

Что же касается собственного и присоединенного векторов e_0 , $e_{0,1}$ матрицы A_0 из (15.43) и собственного вектора g_0 матрицы A_0^* , отвечающих собственному значению $\lambda_0 = 3/2$, то они задаются равенствами

$$e_0 = \text{colon}(1, -2), \quad e_{0,1} = \text{colon}(2, 0), \quad g_0 = \text{colon}(1/2, 1/4). \quad (15.44)$$

Приведенной информации (15.43), (15.44) вполне достаточно для реализации описанного в п. 15.2 алгоритма построения периодических решений. Выполняя соответствующие вычисления, убеждаемся, что в рассматриваемом примере нормальная форма (15.27) имеет вид

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} + \frac{dz}{d\tau} + \left(\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{6}\right)z + \frac{125}{64}|z|^2 z = 0. \quad (15.45)$$

А отсюда и из теорем 15.1, 15.2 следует, что в исходной системе (15.40), (15.41) при

$$K = 5/4 + \varepsilon^2 \gamma, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad \gamma = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (15.46)$$

и при $\gamma > 3/2$ существует устойчивый цикл амплитуды порядка ε .

15.4. Взаимодействие резонансов 1 : 1 и 1 : 2. Как уже отмечалось в п. 15.2, в наиболее интересном случае (15.38) система (15.11) может иметь два цикла амплитуды порядка ε , причем, что характерно, охватывающий цикл всегда неустойчив. В подобной ситуации, как правило, большинство траекторий покидает некоторую фиксированную окрестность начала координат. Таким образом, при естественном условии диссипативности системы (15.11) приходим к выводу о существовании у нее устойчивых автоколебаний амплитуды

порядка единицы, возникающих еще при докритических значениях бифуркационного параметра γ . В общем случае вопрос о нахождении таких автоколебаний, естественно, нелокален. Однако, как показано в разделе 14 при некоторых дополнительных ограничениях, главное из которых — наличие резонанса $1:2$, описанная нелокальная ситуация может быть смоделирована локальными методами. Соответствующий анализ проводится ниже.

В пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, рассмотрим аналогичную (15.11) систему

$$\ddot{u} + \varepsilon \dot{u} + (A_0 + \varepsilon^2 A_1)u + \sqrt{\varepsilon} f_0(u, \dot{u}) + f_1(u, \dot{u}) = 0 \quad (15.47)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$ при следующих ограничениях. Как и ранее, считаем, что матрица A_0 имеет двукратное собственное значение $\lambda_0 > 0$, которому отвечают собственный и присоединенный векторы $e_0, e_{0,1}$ (см. (15.3)), а остальные ее собственные значения λ_k , $k = 1, \dots, n-2$, вещественны, положительны и попарно различны. Единственное дополнительное условие состоит в том, что теперь частоты $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1}$ и $\omega_0 = \sqrt{\lambda_0}$ связаны резонансным соотношением

$$\omega_1 = 2\omega_0. \quad (15.48)$$

Относительно матрицы A_1 из (15.47) — предположения прежние. А именно, считаем, что она пропорциональна бифуркационному параметру γ , т. е. имеет вид

$$A_1 = \gamma A_1^0: \quad \gamma \in \mathbb{R}, \quad (A_1^0 e_0, g_0) < 0. \quad (15.49)$$

Что же касается вектор-функций $f_0(u, v), f_1(u, v) \in C^\infty$, то первая из них задается равенством

$$f_0(u, v) = f_{21}^0(u, u) + f_{22}^0(u, v) + f_{23}^0(v, v), \quad (15.50)$$

где, как и в (15.16), $f_{2j}^0(*, *)$, $j = 1, 2, 3$, — симметричные квадратичные формы, а тейлоровское разложение второй в точке $(u, v) = (0, 0)$ начинается с кубических слагаемых, т. е.

$$f_1(u, v) = f_{31}^1(u, u, u) + f_{32}^1(u, u, v) + f_{33}^1(u, v, v) + f_{34}^1(v, v, v) + \dots \quad (15.51)$$

При сделанных допущениях поставим вопрос об автоколебаниях системы (15.47), бифурцирующих из нуля на модах $\exp(\pm i\omega_0 t)e_0$ и $\exp(\pm 2i\omega_0 t)e_1$, где e_1 — собственный вектор матрицы A_0 , отвечающий собственному значению λ_1 . Следуя изложенной в п. 15.2 методике, асимптотику интересующих нас автоколебательных режимов будем строить в виде ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \varepsilon u_0(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_1(t, \tau) + \varepsilon^2 u_2(t, \tau) + \varepsilon^{5/2} u_3(t, \tau) + \varepsilon^3 u_4(t, \tau) + \dots, \quad (15.52)$$

где $\tau = \epsilon t$, $u_j(t + 2\pi/\omega_0, \tau) \equiv u_j(t, \tau)$, $j \geq 0$,

$$\begin{aligned} u_0(t, \tau) &= [z_1(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{z}_1(\tau) \exp(-i\omega_0 t)]e_0, \\ u_1(t, \tau) &= [z_2(\tau) \exp(2i\omega_0 t) + \bar{z}_2(\tau) \exp(-2i\omega_0 t)]e_1, \end{aligned} \quad (15.53)$$

а $z_1(\tau)$, $z_2(\tau)$ — некоторые пока произвольные комплексные амплитуды.

Подставляя соотношения (15.50)–(15.53) в (15.47) и приравнявая последовательно коэффициенты при ϵ^2 , $\epsilon^{5/2}$ и ϵ^3 , приходим к аналогичным (15.17) линейным неоднородным уравнениям:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} + A_0 u_j = g_j(t, \tau), \quad j = 2, 3, 4, \quad (15.54)$$

в которых переменная τ считается параметром. Заметим, далее, что первое из них фактически уже рассматривалось нами в п. 15.2. Действительно, для $g_2(t, \tau)$ справедливо аналогичное (15.18) равенство $g_2 = -2\partial^2 u_0 / \partial t \partial \tau - \partial u_0 / \partial t$, из которого, в свою очередь, следует, что

$$u_2 = -i\omega_0 [(2dz_1/d\tau + z_1) \exp(i\omega_0 t) - (2d\bar{z}_1/d\tau + \bar{z}_1) \exp(-i\omega_0 t)]e_{0,1}, \quad (15.55)$$

где, напомним еще раз, $e_{0,1}$ — присоединенный вектор матрицы A_0 .

При $j = 3$ неоднородность в уравнении (15.54) имеет вид

$$g_3 = -2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_1}{\partial t} - f_0\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right),$$

а значит, в силу (15.50), (15.53) представляет собой сумму нулевых и вторых гармоник переменной $\omega_0 t$. В таком же виде ищем и $u_2(t, \tau)$. В результате для коэффициентов этой функции при упомянутых гармониках приходим к линейным неоднородным алгебраическим уравнениям, подобным второму и третьему уравнениям (15.21) соответственно. Однако в отличие от случая, рассмотренного в п. 15.2, здесь вследствие равенства (15.48) уравнение для коэффициента при $\exp(2i\omega_0 t)$ с необходимостью оказывается вырожденным. Добиться же выполнения условия его разрешимости можно за счет выбора комплексной амплитуды $z_2 = z_2(\tau)$, для которой на этом пути получаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dz_2}{d\tau} + \frac{1}{2} z_2 = c_2 z_1^2. \quad (15.56)$$

Здесь c_2 — некоторая комплексная постоянная, которую всюду ниже считаем отличной от нуля.

На заключительном этапе, т. е. при $j = 4$, рассмотрению подлежит уравнение (15.54) с неоднородностью

$$\begin{aligned} g_4 = & -\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial \tau} - A_1 u_0 - f_0\left(u_0, \frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \\ & - f_0\left(u_1, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - f_{31}^1(u_0, u_0, u_0) - f_{32}^1\left(u_0, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - \\ & - f_{33}^1\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right) - f_{34}^1\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}, \frac{\partial u_0}{\partial t}\right), \end{aligned} \quad (15.57)$$

где $f_{3j}^1(*, *, *)$, $j = 1, 2, 3, 4$, — симметричные кубические формы, взятые из тейлоровского разложения вектор-функции $f_1(u, v)$ в нуле (см. (15.51)). Учитывая, далее, в (15.57) формулы (15.50), (15.53), (15.55), приходим к выводу, что g_4 — линейная комбинация гармоник $\exp(\pm i\omega_0 t)$ и $\exp(\pm 3i\omega_0 t)$. А это означает, что, как и в случае (15.24), для коэффициента функции u_4 при $\exp(i\omega_0 t)$ с необходимостью получается вырожденная линейная неоднородная система, подобная (15.26). Условие же разрешимости упомянутой системы приводит к уравнению

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \frac{dz_1}{d\tau} - az_1 + b|z_1|^2 z_1 = c_1 \bar{z}_1 z_2, \quad (15.58)$$

где, как и в (15.27), параметр $a = -(1 + \gamma(A_1^0 e_0, g_0)/\omega_0^2)/4$ — вещественный, а c_1, b — комплексные коэффициенты.

Построенная система (15.56), (15.58), которая после замены $z_2/c_2 \rightarrow z_2$ преобразуется к виду

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \frac{dz_1}{d\tau} - az_1 + b|z_1|^2 z_1 = c \bar{z}_1 z_2, \quad \frac{dz_2}{d\tau} + \frac{1}{2} z_2 = z_1^2, \quad (15.59)$$

где $c = c_1 c_2$, играет здесь ту же роль, что и уравнение (15.27), т. е. отвечает за автоколебания исходного уравнения (15.47), расположенные в ε -окрестности нулевого состояния равновесия. В формулируемом ниже утверждении, являющемся аналогом бифуркационной теоремы 15.1, под автомодельным циклом или двумерным тором понимаются автоколебательные режимы из определений 14.1 и 14.2 соответственно.

Теорема 15.3. Любому автомодельному циклу (тору) системы (15.59), экспоненциально орбитально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (15.47) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает цикл (двумерный инвариантный тор) с теми же свойствами устойчивости.

Обоснование сформулированной теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 15.1. Единственное отличие состоит в том, что в силу малости квадратичной нелинейности в (15.47) здесь отпадает необходимость в неравенствах вида (15.28).

Реализуемость условий теоремы 15.3 в части существования и устойчивости двумерных торов будет установлена ниже с помощью численных методов. Что же касается автомодельных циклов вида (14.23), то в квазистационарном случае, когда функции $f_0(u, v)$ и $f_1(u, v)$ не зависят от v , их анализ проводится в следующем пункте.

15.5. Квазистационарная динамика. Из способа вывода уравнений (15.56) и (15.58) следует, что в квазистационарном случае коэффициент b из (15.59) оказывается вещественным, а c — чисто мнимым. Поэтому при условии $b > 0$, которое в дальнейшем считаем выполнен-

ным, после надлежащих нормировок и переобозначений интересующая нас система (15.59) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 z_1}{d\tau^2} + \frac{dz_1}{d\tau} - a z_1 + |z_1|^2 z_1 = i\kappa \bar{z}_1 z_2, \quad \frac{dz_2}{d\tau} + \frac{1}{2} z_2 = z_1^2, \quad (15.60)$$

где $\kappa > 0$.

Из структуры входящих в систему (15.60) нелинейных слагаемых вытекает, что каждый возможный ее автомодельный цикл задается равенствами

$$z_1 = \rho \exp(i\sigma\tau), \quad z_2 = \rho^2 \exp(2i\sigma\tau)/(1/2 + 2i\sigma), \quad (15.61)$$

где $\rho > 0$ и $\sigma \in \mathbb{R}$ — подлежащие определению постоянные. Подставляя, далее, формулы (15.61) в (15.60), убеждаемся, что эти постоянные должны удовлетворять системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\rho^2 = 2\sigma(1/4 + 4\sigma^2)/\kappa, \quad P(\sigma) = 0, \quad (15.62)$$

где

$$P(\sigma) = 5\sigma^2 - \frac{\sigma}{2\kappa} - \frac{8\sigma^3}{\kappa} + a. \quad (15.63)$$

Таким образом, проблема существования циклов (15.61) сводится в конечном итоге к отысканию положительных корней многочлена (15.63). Что же касается устойчивости этих циклов, то здесь справедливо следующее утверждение, представляющее собой аналог теоремы 15.2.

Теорема 15.4. Любому простому корню $\sigma = \sigma_0 > 0$ многочлена (15.63) соответствует автомодельный цикл (15.61) системы (15.60) с частотой $\sigma = \sigma_0$ и амплитудой $\rho = \rho_0$, определяющейся из первого равенства (15.62). Этот цикл экспоненциально орбитально устойчив (неустойчив) при $P'(\sigma_0) < 0$ (> 0).

Доказательство. Исследование устойчивости автомодельного цикла (15.61), отвечающего любому корню $\sigma = \sigma_0 > 0$ многочлена (15.63), сводится к анализу характеристических показателей системы в вариациях

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h_1}{d\tau^2} + (1 + 2i\sigma_0) \frac{dh_1}{d\tau} &= \\ = (i\sigma_0 - \sigma_0^2 - a + \rho_0^2)(\bar{h}_1 - h_1 + h_2) - \rho_0^2(h_1 + \bar{h}_1), \\ \frac{dh_2}{d\tau} &= (1/2 + 2i\sigma_0)(2h_1 - h_2), \end{aligned} \quad (15.64)$$

получающейся из исходной системы (15.60) при подстановке в нее соотношений

$$z_1 = \rho_0 \exp(i\sigma_0\tau)(1 + h_1), \quad z_2 = \frac{\rho_0^2 \exp(2i\sigma_0\tau)}{1/2 + 2i\sigma_0}(1 + h_2)$$

и последующем отбрасывании нелинейных по h_1, h_2 слагаемых.

Нетрудно увидеть, что система (15.64) всегда имеет нулевой ляпуновский показатель, которому отвечает решение $h_1 = i, h_2 = 2i$.

Для отыскания же остальных ее показателей λ поступим следующим образом. Сначала дополним (15.64) уравнениями для \bar{h}_1, \bar{h}_2 , а затем положим

$$\begin{aligned} h_1 &= w_1 \exp(\lambda \tau), \quad \bar{h}_1 = w_2 \exp(\lambda \tau), \\ h_2 &= w_3 \exp(\lambda \tau), \quad \bar{h}_2 = w_4 \exp(\lambda \tau), \end{aligned} \quad (15.65)$$

считая $w_j, j = 1, \dots, 4$, независимыми комплексными постоянными. В результате для w_j приходим к линейной однородной алгебраической системе, а возможные значения λ будем находить из условия равенства нулю определителя этой системы.

Описанный способ действий приводит к выводу, что ляпуновские показатели λ из (15.65) — это корни уравнения

$$Q(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda^5 + q_1 \lambda^4 + q_2 \lambda^3 + q_3 \lambda^2 + q_4 \lambda + q_5 = 0, \quad (15.66)$$

коэффициенты $q_j, j = 1, \dots, 5$, которого являются функциями переменных $x = \rho_0^2, y = \sigma_0^2$ и задаются равенствами

$$\begin{aligned} q_1 &= 3, \quad q_2 = \frac{13}{4} + 16y + 2x, \quad q_3 = \frac{3}{2} + 32y + 4x, \\ q_4 &= \frac{1}{4} + 16y + 2x + q_5, \\ q_5 &= -5y + \frac{x}{2} + 24xy - 80y^2. \end{aligned} \quad (15.67)$$

Далее, непосредственно проверяется, что

$$q_5 = -2\sigma_0(1/4 + 4\sigma_0^2)P'(\sigma_0), \quad (15.68)$$

а отсюда автоматически вытекает неустойчивость рассматриваемого автомодельного цикла при условии $P'(\sigma_0) > 0$.

Обратимся теперь к случаю $P'(\sigma_0) < 0$, который эквивалентен выполнению неравенства

$$x > x_0(y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{10y(1 + 16y)}{1 + 48y} \quad (15.69)$$

и в котором в силу (15.67), (15.68) все коэффициенты полинома $Q(\lambda)$ из (15.66) оказываются положительными. Тогда, как известно, необходимые и достаточные условия гурвицевости этого полинома имеют вид

$$\begin{aligned} q_1 q_2 - q_3 &> 0, \\ 3 q_2 q_3 q_4 + q_2 q_3 q_5 + 6 q_4 q_5 - q_3^2 q_4 - 9 q_4^2 - 3 q_2^2 q_5 - q_5^2 &> 0. \end{aligned} \quad (15.70)$$

Заметим, что в силу (15.67)–(15.69) первое из условий (15.70) справедливо автоматически, а второе после некоторых преобразований записывается в виде

$$H(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_0(y) x^3 + \delta_1(y) x^2 + \delta_2(y) x + \delta_3(y) > 0, \quad (15.71)$$

где

$$\begin{aligned}\delta_0 &= 18 + 96y, \quad \delta_1 = \frac{63}{2} + 36y - 1088y^2, \\ \delta_2 &= \frac{513}{32} + \frac{441}{2}y + 2928y^2 + 16384y^3, \\ \delta_3 &= \frac{81}{32} + \frac{4563}{16}y + 4167y^2 + 10752y^3 - 46080y^4.\end{aligned}\quad (15.72)$$

Таким образом, в конечном итоге обоснование теоремы 15.4 сводится к проверке выполнения при всех $y \geq 0$ неравенства

$$G(y) = \min_{x \geq x_0(y)} H(x, y) > 0. \quad (15.73)$$

Дальнейший анализ базируется на свойстве монотонности по x функции (15.71). Для проверки данного свойства предположим сначала, что $0 \leq y \leq y_*$, где $y_* = 0.1875$ — положительный корень уравнения $\delta_1(y) = 0$. Тогда, очевидно, $\delta_1(y) \geq 0$ и вследствие этого

$$H'_x(x, y) = 3\delta_0(y)x^2 + 2\delta_1(y)x + \delta_2(y) > 0 \quad (15.74)$$

при всех $x \geq 0$. Если же $y > y_*$, то требуемое неравенство (15.74) выполняется по причине отрицательности дискриминанта

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(y) &= 4\delta_1^2(y) - 12\delta_0(y)\delta_2(y) = \\ &= \frac{2025}{4} - 57024y - 1155456y^2 - 7225344y^3 - 14139392y^4\end{aligned}$$

соответствующего квадратичного многочлена. Таким образом, в любом случае минимум в (15.73) достигается при $x = x_0(y)$, а значит, в силу (15.69), (15.71), (15.72) имеем

$$\begin{aligned}(1/2 + 24y)G(y) &= (1/2 + 24y)H(x_0(y), y) = \frac{81}{256} + \frac{405}{4}y + \\ &+ 10755y^2 + 503424y^3 + 10806016y^4 + 99434496y^5 + 321978368y^6 > 0\end{aligned}$$

при всех $y \geq 0$. Теорема 15.4 полностью доказана.

Подводя итог, опишем динамику автомодельных циклов системы (15.60) при увеличении параметра a , который, как и в п. 15.2, мы можем менять за счет фигурирующего в (15.49) бифуркационного параметра γ . При этом ограничимся наиболее интересным случаем $\kappa > 4/5$. Действительно, данное неравенство гарантирует существование у полинома (15.63) при $a = 0$ кроме нулевого корня, для которого $P'(0) = -1/(2\kappa) < 0$, еще двух корней $0 < \sigma_1 < \sigma_2$: $P'(\sigma_1) > 0$, $P'(\sigma_2) < 0$. А отсюда, в свою очередь, вытекает существование двух критических значений $a_* < 0$ и $a_{**} > 0$ параметра a со следующими свойствами.

1). При всех $a < a_*$ полином (15.63) вообще не имеет положительных корней, а значит, у системы (15.60) в этом случае автомодельные

циклы отсутствуют (существует только устойчивое нулевое состояние равновесия).

2). При последующем увеличении параметра a и при прохождении его через критическое значение a_* у полинома (15.63) появляются два положительных корня

$$\sigma_1(a) < \sigma_2(a): \sigma_1(a_*) = \sigma_2(a_*) > 0, \quad P'(\sigma_1(a_*)) = 0, \quad P''(\sigma_1(a_*)) < 0, \\ P'(\sigma_1(a)) > 0, \quad P'(\sigma_2(a)) < 0 \quad \text{при всех } a_* < a < a_{**}. \quad (15.75)$$

Напомним, далее, что в исходной системе (15.60) корням (15.75) отвечают два автомодельных цикла (15.61) — неустойчивый, имеющий меньшую амплитуду ρ , и устойчивый. Подчеркнем, что при $a_* < a < 0$ последний сосуществует с устойчивым нулевым состоянием равновесия, а значит, реализуется эффект жесткого возбуждения автоколебаний, о котором говорилось в начале п. 15.4.

3). В диапазоне $a \in (0, a_{**})$ к корням (15.75) добавляется еще один положительный корень $\sigma_0(a) \in (0, \sigma_1(a))$, $\sigma_0(0) = 0$, $P'(\sigma_0(a)) < 0$, которому согласно теореме 15.4 соответствует устойчивый цикл, ответивший от нулевого состояния равновесия. Таким образом, при $0 < a < a_{**}$ система (15.60) имеет три автомодельных цикла — два устойчивых и один неустойчивый.

4). При прохождении параметра a через критическое значение a_{**} корни $\sigma_0(a)$, $\sigma_1(a)$, а значит, и отвечающие им циклы, сливаются и исчезают. В итоге при всех $a > a_{**}$ у полинома (15.63) остается единственный положительный корень $\sigma_2(a)$: $P'(\sigma_2(a)) < 0$, а у системы (15.60) — единственный устойчивый автомодельный цикл.

15.6. Результаты численного анализа нормальной формы в случае взаимодействия резонансов. В квазистационарном случае установленная выше теорема 15.4 налагает запрет на бифуркацию устойчивого двумерного тора из какого-либо автомодельного цикла. Однако в общей ситуации, когда $\text{Im } b \neq 0$ и $\text{Re } c \neq 0$, такие бифуркации в системе (15.59) становятся возможными. Для того чтобы убедиться в этом, приведем фрагменты динамики данной системы по параметру a , которые удалось выявить с помощью численного анализа при фиксированных значениях

$$\text{Re } b = 1, \quad \text{Im } b = 0,1, \quad \text{Re } c = -1,26, \quad \text{Im } c = 3,3. \quad (15.76)$$

Численное интегрирование показало, что при условиях (15.76) и при увеличении параметра a в системе (15.59) наблюдаются следующие фазовые перестройки.

1). При $a < a_1$, где $a_1 \approx -2,551$, единственным аттрактором рассматриваемой системы является нулевое состояние равновесия.

2). При дальнейшем увеличении параметра a и при прохождении его через пороговое значение a_1 нелокально возникает устойчивый автомодельный цикл.

3). В диапазоне $a_1 < a < a_2$, где $a_2 \approx -2.15$, упомянутый выше устойчивый цикл сосуществует с устойчивым нулевым состоянием равновесия. Таким образом, как и в квазистационарном случае, здесь сталкиваемся с эффектом жесткого возбуждения автоколебаний.

4). При $a = a_2$ автомодельный цикл теряет устойчивость колебательным образом и от него ответвляется устойчивый двумерный автомодельный тор. Последний наблюдается в диапазоне $a_2 < a < a_3$, где $a_3 \approx 0,1$, а затем, в свою очередь, теряет устойчивость и порождает устойчивый трехмерный тор.

5). Дальнейшее увеличение параметра a приводит к разрушению трехмерного тора и к возникновению хаотического аттрактора по сценарию Рюэля–Тakensа. Некоторое представление о происходящих при этом фазовых перестройках дают изображенные на рисунках 15.3, 15.4 графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(a)$ аттрактора системы (15.59) на отрезках $0 \leq a \leq 3,8$ и $3,8 \leq a \leq 8$ (построение данных графиков проводилось по точкам с шагом по параметру a , равным 0,01). Характерные «провалы» функции $\lambda_{\max}(a)$ до нулевого значения соответствуют так называемым окнам квазипериодичности, когда хаос сменяется устойчивым двумерным автомодельным тором. Из вида полученных графиков можно заключить, что на отрезке $0 \leq a \leq 8$ существует достаточно большое (не исключено, что счетное) число упомянутых окон.

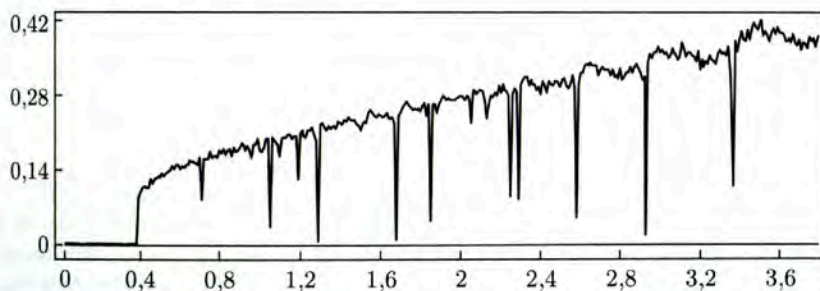


Рис. 15.3

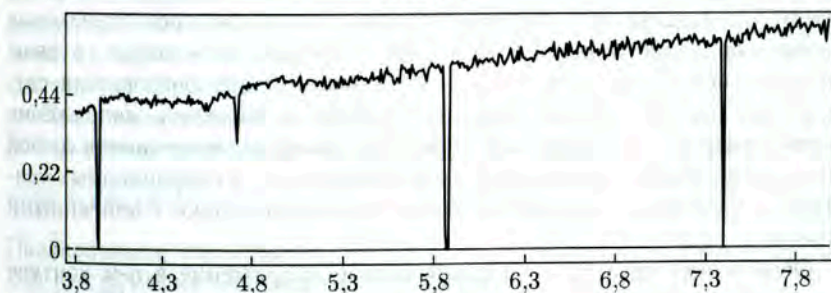


Рис. 15.4

15.7. Однонаправленное взаимодействие флаттерных систем.

В данном пункте на примере флаттерных систем в очередной раз иллюстрируется общая идея создания кольцевых генераторов хаотических колебаний, описанная в разделе 13. А именно, ниже мы ограничимся простейшей ситуацией, когда все три парциальные системы одинаковы и совпадают с автогенератором, описанным в п. 15.3.

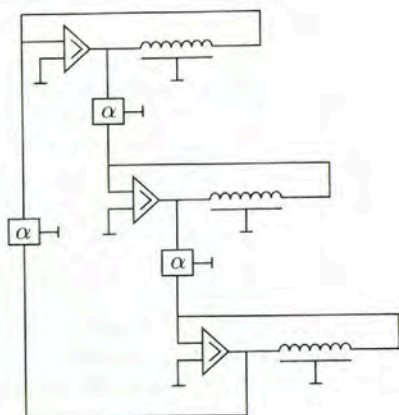


Рис. 15.5

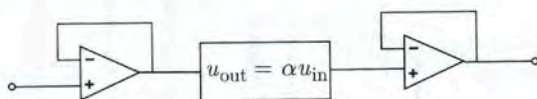


Рис. 15.6

Итак, рассмотрению подлежит кольцевая система, принципиальная схема которой представлена на рис. 15.5. Будем считать, что связи между отдельными звеньями установлены с помощью трех одинаковых блоков показанного на рис. 15.6 вида, каждый из которых, в свою очередь, состоит из трех элементов: линейного преобразователя сигнала $u_{out} = \alpha u_{in}$, где u_{in} , u_{out} — входное и выходное напряжения соответственно, а коэффициент преобразования α может иметь любой знак, и двух буферных каскадов, реализованных на операционных усилителях. Считаем, что свойства этих каскадов совпадают с описанными ранее в п. 13.2.

Обозначим через u_n^j — нормированное напряжение в n -м контуре j -го парциального генератора. Тогда в простейшем случае (15.41) интересующий нас кольцевой автогенератор (см. рис. 15.5) моделируется

аналогичной (15.40) дифференциально-алгебраической системой

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_n^j}{dt^2} + \varepsilon \frac{du_n^j}{dt} + 2u_n^j - u_{n+1}^j - u_{n-1}^j &= 0, \quad n = 1, 2, \\ u_3^j &= u_2^j, \quad u_0^j + \varphi(Ku_2^j + \alpha u_0^{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (15.77)$$

где $u_0^0 = u_0^3$. Однако в предположении $|\alpha| \ll 1$, при котором и будет изучаться эта система, можно выразить (с точностью до α^2) u_0^j через u_2^j и u_2^{j-1} посредством формул

$$u_0^j = -\varphi(Ku_2^j) + \alpha \varphi'(Ku_2^j) \varphi(Ku_2^{j-1}), \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.78)$$

где $u_2^0 = u_2^3$, и перейти от (15.77) к обычной системе дифференциальных уравнений.

Итак, учтем в (15.77) соотношения (15.46), (15.78) вместе с равенством $\alpha = \alpha_0 \varepsilon^2$, где $\alpha_0 = \text{const} \in \mathbb{R}$. В результате после отбрасывания ряда несущественных для последующего анализа асимптотически малых слагаемых получим цепочку из трех однонаправленно связанных флаттерных систем, имеющую вид

$$\frac{d^2 u_j}{dt^2} + \varepsilon \frac{du_j}{dt} + (A_0 + \varepsilon^2 A_1) u_j + f(u_j) - \alpha_0 \varepsilon^2 g(u_j, u_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (15.79)$$

Здесь $u_j = \text{colon}(u_1^j, u_2^j)$, $j = 1, 2, 3$, матрицы A_0 , A_1 и вектор-функция $f(u_j)$ заданы равенствами (15.43) (в последнем из которых следует заменить u_2 на u_2^j), а вектор-функция $g(u_j, u_{j-1})$ определена формулой

$$g(u_j, u_{j-1}) = \text{colon} \left(\varphi' \left(\frac{5}{4} u_2^j \right) \varphi \left(\frac{5}{4} u_2^{j-1} \right), 0 \right). \quad (15.80)$$

Дальнейшие наши действия таковы. Сначала с помощью развитой в п. 15.2 методики строится нормальная форма системы (15.79), которая, как будет показано ниже, представляет собой систему из трех однонаправленно связанных комплексных уравнений (15.45). После этого посредством численного анализа устанавливается существование у получившейся нормальной формы хаотического аттрактора при достаточно больших по модулю значениях параметра связи α_0 . Показывается также, что аналогичный аттрактор может иметь и исходная система (15.79), (15.80).

Приступим к реализации описанной программы. Возможные автоколебательные режимы системы (15.79) будем искать в виде рядов

$$u_j = \varepsilon u_{j,1}(t, \tau) + \varepsilon^2 u_{j,2}(t, \tau) + \varepsilon^3 u_{j,3}(t, \tau) + \dots, \quad j = 1, 2, 3. \quad (15.81)$$

Предполагаем, как обычно, что $\tau = \varepsilon t$, $u_{j,k}(t + 2\pi/\omega_0, \tau) \equiv u_{j,k}(t, \tau)$, $k \geq 1$, а функции $u_{j,1}$ заданы равенствами

$$u_{j,1}(t, \tau) = [z_j(\tau) \exp(i\omega_0 t) + \bar{z}_j(\tau) \exp(-i\omega_0 t)] e_0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.82)$$

где $\omega_0 = \sqrt{3/2}$, e_0 — собственный вектор из (15.44), $z_j = z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$, — подлежащие определению комплексные амплитуды. Подставим, далее, соотношения (15.81), (15.82) в (15.79) и приравняем коэффициенты при ε^2 . В результате для функций $u_{j,2}$ получаются аналогичные (15.54) линейные неоднородные системы, из которых находим:

$$u_{j,2} = -i\omega_0[(2dz_j/d\tau + z_j) \exp(i\omega_0 t) - (2d\bar{z}_j/d\tau + \bar{z}_j) \exp(-i\omega_0 t)]e_{0,1}, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.83)$$

где, как и в (15.55), $e_{0,1}$ — присоединенный вектор матрицы A_0 (см. (15.44)).

На следующем шаге, т.е. после приравнивания в (15.79) коэффициентов при ε^3 , для $u_{j,3}$ также выходят аналогичные (15.54) линейные системы, но теперь неоднородности в них представляют собой линейные комбинации гармоник $\exp(\pm i\omega_0 t)$ и $\exp(\pm 3i\omega_0 t)$. Главное отличие от предыдущего шага состоит в том, что при попытке отыскания $u_{j,3}$ в виде комбинации указанных гармоник для коэффициентов этих функций при $\exp(i\omega_0 t)$ получаются вырожденные линейные неоднородные алгебраические системы, не являющиеся разрешимыми автоматически. Добиться же выполнения условий их разрешимости удастся за счет имеющихся в запасе комплекснозначных амплитуд $z_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3$.

Несложный подсчет с учетом уже найденных функций (15.83) показывает, что упомянутые чуть выше условия разрешимости приводят к системе

$$\ddot{z}_j + \dot{z}_j + az_{j-1} + bz_j + \frac{125}{64} |z_j|^2 z_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.84)$$

где $z_0 = z_3$, $a = 5\alpha_0/24$, $b = 1/4 - \gamma/6$, которая и является искомой нормальной формой исходной системы (15.79). В дальнейшем, однако, удобнее работать с системой

$$\ddot{z}_j + \dot{z}_j + az_{j-1} + bz_j + |z_j|^2 z_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.85)$$

получающейся из (15.84) в результате нормировок $\sqrt{125} z_j/8 \rightarrow z_j$, $j = 1, 2, 3$. Кроме того, всюду ниже считаем, что $b > 0$ (в этом случае каждый парциальный генератор недовозбужден), а знак параметра a произволен.

Необходимо отметить, что для систем (15.85) и (15.79) аналогии теорем 15.1 и 15.3 о соответствии очевидным образом сохраняются. А именно, каждому грубому автомодельному циклу

$$z_j = z_j^0 \exp(i\sigma\tau), \quad \dot{z}_j^0 = \text{const} \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \sigma = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (15.86)$$

или двумерному автомодельному тору

$$z_j = z_j^0(\tau) \exp(i\sigma\tau), \quad z_j^0(\tau + T) \equiv z_j^0(\tau), \quad j = 1, 2, 3, \quad T > 0, \quad \sigma = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad (15.87)$$

нормальной формы (15.85) в исходной системе (15.79) при всех достаточно малых ε отвечает цикл или двумерный инвариантный тор с теми же свойствами устойчивости.

Как будет показано ниже с помощью численного анализа, при определенном выборе параметров a и b система (15.85) может иметь устойчивые двумерные торы (15.87). Что же касается автомодельных циклов (15.86), то при условии

$$a \in \mathbb{R} \setminus [a_-, a_+], \quad a_{\pm} = (-1 \pm \sqrt{1 + 12b})/3 \quad (15.88)$$

существуют по крайней мере два из них — C_0 и C_1 , где

$$\begin{aligned} C_0: (z_1, z_2, z_3) &= \left(1, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho_0 \exp(i\sigma_0 \tau), \\ C_1: (z_1, z_2, z_3) &= \left(1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rho_0 \exp(-i\sigma_0 \tau), \quad (15.89) \\ \rho_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 + 2a - 4b}, \quad \sigma_0 = a\sqrt{3}/2. \end{aligned}$$

Для выявления свойств устойчивости циклов (15.89) нам потребуется полином

$$S(\lambda) = \lambda^8 + s_1 \lambda^7 + s_2 \lambda^6 + s_3 \lambda^5 + s_4 \lambda^4 + s_5 \lambda^3 + s_6 \lambda^2 + s_7 \lambda + s_8 \quad (15.90)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} s_1 &= 4, \quad s_2 = 9a^2 + 5a + 6 - 4b, \quad s_3 = 30a^2 + 15a + 4 - 12b, \\ s_4 &= \frac{81}{4}a^4 + \frac{99}{4}a^3 + \frac{89}{2}a^2 + 15a + 1 - (18a^2 + 13a + 12)b + 4b^2, \\ s_5 &= 54a^4 + \frac{123}{2}a^3 + 35a^2 + 5a - (42a^2 + 26a + 4)b + 8b^2, \quad (15.91) \\ s_6 &= \frac{81}{8}a^5 + \frac{279}{4}a^4 + \frac{213}{4}a^3 + \frac{23}{2}a^2 - (18a^3 + 42a^2 + 13a)b + (6a + 4)b^2, \\ s_7 &= \frac{135}{8}a^5 + \frac{99}{2}a^4 + \frac{33}{2}a^3 - (27a^3 + 18a^2)b + 6ab^2, \\ s_8 &= \frac{27}{16}a^6 + 9a^5 + \frac{57}{4}a^4 - \left(\frac{9}{2}a^4 + 12a^3\right)b + 3a^2b^2. \end{aligned}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15.5. Пусть выполнено требование (15.88), гарантирующее существование циклов (15.89). Тогда эти циклы экспоненциально орбитально устойчивы при условии гурвицевости полинома (15.90) и неустойчивы в случае, когда данный полином имеет хотя бы один корень в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Доказательство. В первую очередь обратим внимание на следующее обстоятельство: так как циклы (15.89) переходят друг в друга при замене

$$\bar{z}_j \rightarrow z_j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (15.92)$$

а сама система (15.85) инвариантна относительно указанной замены, то свойства устойчивости этих циклов одинаковы. Поэтому для определенности всюду ниже будем рассматривать только цикл C_0 и отвечающую ему систему в вариациях

$$\ddot{h}_j + (1 + 2i\sigma_0)\dot{h}_j + a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(h_j - h_{j-1}) + \rho_0^2(h_j + \bar{h}_j) = 0, \quad (15.93)$$

$$j = 1, 2, 3,$$

где $h_0 = h_3$ (по поводу вывода этой системы см. аналогичное место в доказательстве теоремы 15.4).

При анализе свойств устойчивости системы (15.93) поступим так же, как и в случае системы (15.64). А именно, сначала дополним ее уравнениями для \bar{h}_j , $j = 1, 2, 3$, а затем положим

$$h_j = h_{j,1} \exp(\lambda\tau), \quad \bar{h}_j = h_{j,2} \exp(\lambda\tau), \quad (15.94)$$

считая $h_{j,1}$, $h_{j,2}$ независимыми комплексными постоянными. В результате для двумерных векторов $r_j = \text{colop}(h_{j,1}, h_{j,2})$, получаем линейную систему

$$\begin{aligned} B_1 r_1 + B_2(r_3 - r_1) &= 0, & B_1 r_2 + B_2(r_1 - r_2) &= 0, \\ B_1 r_3 + B_2(r_2 - r_3) &= 0, \end{aligned} \quad (15.95)$$

в которой

$$B_1 = \begin{pmatrix} \lambda + (1 + 2i\sigma_0)\lambda + \rho_0^2 & \rho_0^2 \\ \rho_0^2 & \lambda^2 + (1 - 2i\sigma_0)\lambda + \rho_0^2 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -a\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & 0 \\ 0 & -a\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (15.96)$$

Далее, нетрудно заметить, что система (15.95) приводится к виду

$$r_1 = (B_3 + I)^2 r_3, \quad r_2 = (B_3 + I) r_3, \quad [I - (B_3 + I)^3] r_3 = 0,$$

где $B_3 = -B_2^{-1} B_1$. А отсюда вытекает, что она может иметь нетривиальные решения в том и только в том случае, когда

$$\det B_3 \det (3I + 3B_3 + B_3^2) = 0. \quad (15.97)$$

Получившееся соотношение (15.97) будем рассматривать как уравнение для нахождения фигурирующих в (15.94) характеристических показателей λ . На этом пути с учетом явного вида (15.96) матриц B_1 , B_2 приходим к двум уравнениям:

$$\lambda(\lambda^3 + 2\lambda^2 + (1 + 2\rho_0^2 + 4\sigma_0^2)\lambda + 2\rho_0^2) = 0, \quad S(\lambda) = 0, \quad (15.98)$$

где $S(\lambda)$ — полином (15.90). Остается заметить, что кроме $\lambda = 0$ остальные три корня первого уравнения из (15.98) всегда имеют от-

рицательные действительные части. Таким образом, свойства устойчивости циклов (15.89) определяются в конечном итоге по характеру расположения корней полинома (15.90) с коэффициентами (15.91). Теорема 15.5 доказана.

Для того чтобы проиллюстрировать применимость установленной теоремы, обратимся к случаю $b = 2$, в котором $a_+ = 4/3$, $a_- = -2$. Анализ корней полинома (15.90), сделанный с помощью пакета программ **Maple 10**, показывает существование при $b = 2$ таких двух критических значений

$$a_* \approx -3,18771, \quad a_{**} \approx 20,8156 \quad (15.99)$$

параметра a , что циклы (15.89) устойчивы при $a \in (a_*, -2) \cup (4/3, a_{**})$ и неустойчивы при $a \in (-\infty, a_*) \cup (a_{**}, +\infty)$.

Приступим теперь к численному анализу нормальной формы. В связи с этим обратим внимание, что при исследовании системы (15.85) не имеет смысла различать аттракторы, переходящие друг в друга в результате замены (15.92). Поэтому ниже мы ограничимся лишь описанием фрагментов динамики, связанных с циклом C_0 (см. (15.89)).

Предположим, что параметр b фиксирован и задан, к примеру, равенством $b = 2$. Тогда при увеличении $|a|$ в системе (15.85) наблюдаются следующие бифуркации.

1). При $-2 < a < 4/3$ устойчиво нулевое состояние равновесия, а при прохождении параметра a через концы указанного интервала из нуля рождается устойчивый автомодельный цикл C_0 .

2). Цикл C_0 сохраняет устойчивость при $a \in (a_*, -2) \cup (4/3, a_{**})$ (см. (15.99)), а при $a = a_*$ или $a = a_{**}$ от него ответвляется устойчивый двумерный автомодельный тор.

3). Устойчивый тор, о котором говорится чуть выше, существует на интервалах $a_{**} < a \lesssim 34,4$, $-10,98 \lesssim a < a_*$, а при последующем увеличении $|a|$ теряет устойчивость и порождает уже трехмерный устойчивый тор.

4). Дальнейшее увеличение $|a|$ в соответствии со сценарием Рюэля–Тakens приводит к возникновению хаотического аттрактора. Общее представление о происходящих при этом бифуркациях дают приведенные на рисунках 15.7, 15.8 графики старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}(a)$ аттрактора системы (15.85) (построение данных графиков проводилось на отрезках $37 \leq a \leq 45$ и $-19 \leq a \leq -11$ по точкам с шагом 0,05). Как и в п. 15.6, здесь удастся отследить некоторое количество окон квазипериодичности, т.е. диапазонов изменения параметра a , в которых хаос сменяется устойчивым двумерным тором. В целом же при увеличении $|a|$ показатель $\lambda_{\max}(a)$ растет, хотя и немонотонно, и при $|a| \geq 38,8$, по всей видимости, отделен от нуля.

В связи с приведенными выше результатами численного счета естественно возникает вопрос о соответствии между хаосом в нормальной

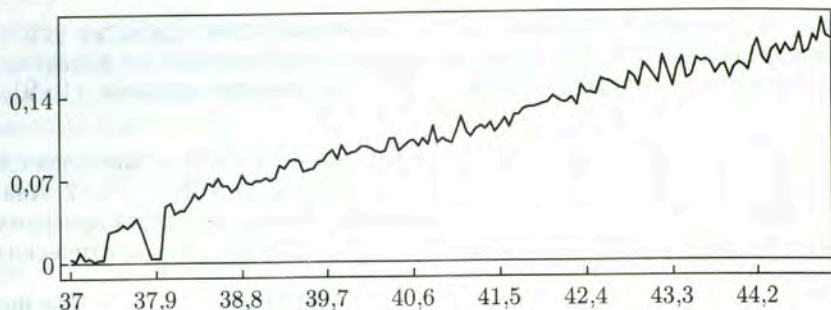


Рис. 15.7

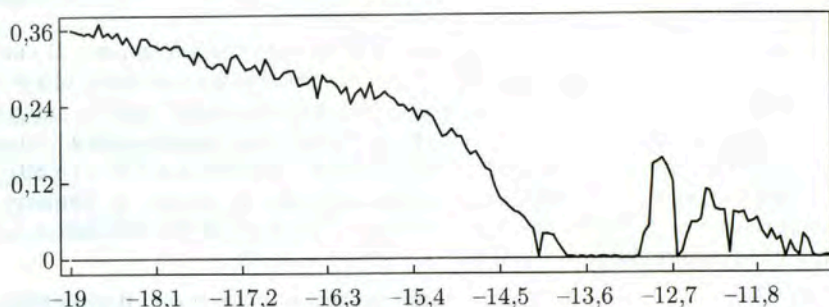


Рис. 15.8

форме (15.85) и каким-либо хаотическим аттрактором исходной системы:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1^j}{dt^2} + \varepsilon \frac{du_1^j}{dt} + 2u_1^j - u_2^j + \varphi(Ku_2^j) - \alpha \varphi'(Ku_2^j) \varphi(Ku_2^{j-1}) &= 0, \\ \frac{d^2 u_2^j}{dt^2} + \varepsilon \frac{du_2^j}{dt} + u_2^j - u_1^j &= 0, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (15.100)$$

в которой, напомним, $u_2^0 = u_2^3$, а нелинейность $\varphi(z)$ определена равенством из (15.41). Ответ на этот вопрос оказывается положительным, о чем свидетельствуют данные численного анализа системы (15.100) при $\varepsilon = 0,01$, $K = 1,25$ и при изменении параметра α (см. табл. 15.1).

Таблица 15.1

α	-0,005	-0,1	-0,2	-0,3	-0,4
$\lambda_{\max,1}$	0,013	0,019	0,025	0,026	0,027
$\lambda_{\max,2}$	0,01	0,013	0,016	0,017	0,018

В табл. 15.1 представлены зависимости от α старших ляпуновских показателей $\lambda_{\max,k}$, $k = 1, 2$, для двух различных сосуществующих хаотических аттракторов Ω_k , $k = 1, 2$, системы (15.100) (вид этих аттракторов в переменных (u_1^1, u_1^2, u_1^3) при $\alpha = -0,2$ показан на рисун-

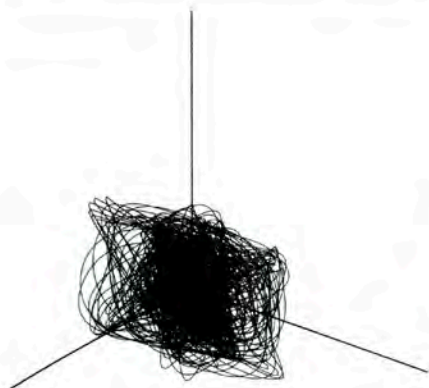


Рис. 15.9

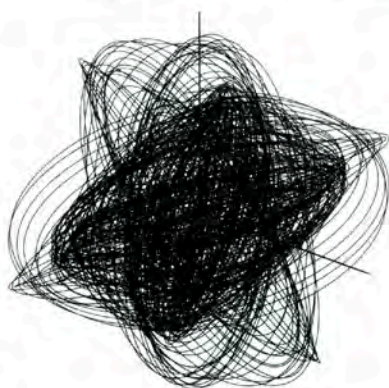


Рис. 15.10

ках 15.9 и 15.10 соответственно). Первый из них характерен тем, что при $|\alpha| \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ его диаметр стремится к нулю. Таким образом, Ω_1 является искомым аттрактором, который при $|\alpha| \ll 1$ доставляет локальная теория. Что же касается аттрактора Ω_2 , то он заведомо нелокален. Кроме того, при некоторых α существуют и другие аттракторы. Например, при $\alpha = -0,1; -0,2$ удалось обнаружить еще устойчивый двумерный тор, а при $\alpha = -0,3$ — хаотический аттрактор с $\lambda_{\max} \approx 0,009$ и устойчивый цикл.

В заключение отметим, что реализующаяся в системе (15.100) ситуация, когда одновременно существуют локальные и нелокальные автоколебания, характерна для флаттерных систем. Предложенный в данном разделе подход, базирующийся на взаимодействии резонансов $1:1$ и $1:2$, позволил смоделировать этот феномен локальными методами и получить, в частности, устойчивые докритические автоколебательные режимы (см. пп. 15.5, 15.6). Следует добавить, впрочем, что изложенная выше локальная теория, вообще говоря, не охватывает всех устойчивых автоколебаний. Действительно, как показано в [74], в ряде случаев при $\varepsilon \rightarrow 0$ и при фиксированных прочих параметрах количество сосуществующих нелокальных аттракторов в флаттерных системах (15.1) неограниченно растет. По всей видимости, именно это и происходит в системе (15.100) при фиксированных α , K и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

16. Аттракторы уравнения Син-Гордона в поле квазипериодической внешней силы

16.1. Общие сведения о многочастотном резонансе. Уравнением Син-Гордона принято называть нелинейное гиперболическое уравнение вида

$$u_{tt} + \sin u = a^2 u_{xx}, \quad (16.1)$$

где $u = u(t, x)$ — скалярная функция, $t, x \in \mathbb{R}$, $a = \text{const} > 0$. Впервые это уравнение появилось при изучении геометрии поверхностей

с гауссовой кривизной, равной -1 , а различные способы нахождения его решений были известны еще в 19-м столетии. Позднее оно нашло применение в релятивистской теории поля, а также в целом ряде других физических задач, среди которых отметим следующие [128].

1. Переход Джозефсона, где $\sin u$ — ток Джозефсона через участок слабой сверхпроводимости между двумя сверхпроводниками.

2. Дислокации в кристаллах, где появление $\sin u$ связано с периодической структурой ряда атомов.

3. Распространение в ферромагнитных материалах волн, связанных с вращением направления намагниченности.

4. Лазерные импульсы в двухфазной среде, где переменные допускают представление через вращающийся вектор.

5. Последовательность жестких маятников, подвешенных через короткие интервалы вдоль натянутой проволоки.

Приведенный список, далеко не являющийся полным, свидетельствует о том, что (16.1) — одно из фундаментальных уравнений математической физики, а значит, исследование различных его свойств весьма актуально. В частности, представляет интерес вопрос об аттракторах этого уравнения, происхождение которых обусловлено наличием многочастотного резонанса. Первые результаты такого рода были получены в работах [68, 73], где рассматривался многочастотный параметрический резонанс. В настоящем разделе, написанном по результатам статьи [60] и продолжающем данную тематику, изучается резонанс вида $1:1$, который принято называть *основным*.

Для удобства последующего изложения проиллюстрируем сначала феномен основного многочастотного резонанса на обыкновенных дифференциальных уравнениях. В связи с этим рассмотрим систему в \mathbb{R}^n , $n \geq 2$:

$$\ddot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u) \quad (16.2)$$

с малым параметром $\varepsilon > 0$, удовлетворяющую стандартным бифуркационным ограничениям. А именно, считаем, что, во-первых, матрица A_0 имеет на мнимой оси m пар простых собственных значений $\pm i\omega_s$, $\omega_s > 0$, $s = 1, \dots, m$ (остальные ее точки спектра предполагаем лежащими в комплексной полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$); во-вторых, для частот ω_s выполняются условия нерезонансности:

$$\omega_s \neq n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \dots + n_m\omega_m, \quad s = 1, \dots, m, \quad (16.3)$$

где (n_1, \dots, n_m) — произвольный целочисленный вектор, удовлетворяющий неравенствам

$$2 \leq |n_1| + |n_2| + \dots + |n_m| \leq 3; \quad (16.4)$$

в-третьих, тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $F(u) \in C^\infty$ имеет вид

$$F(u) = F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (16.5)$$

где F_2, F_3, \dots — симметричные квадратичная, кубическая и т. д. формы. И наконец, в четвертых, фигурирующую в (16.2) матрицу A_1 , характеризующую «отход» от вырождения, считаем таковой, что

$$\operatorname{Re}(A_1 a_s, b_s) < 0, \quad s = 1, \dots, m. \quad (16.6)$$

Здесь $a_s, s = 1, \dots, m$, — собственные векторы матрицы A_0 , отвечающие ее собственным значениям $i\omega_s$ и нормированные условиями $(a_s, b_s) = 1, (\bar{a}_s, b_s) = 0, s = 1, \dots, m$, где $A_0^* b_s = -i\omega_s b_s$, а $(*, *)$ — евклидово скалярное произведение в \mathbb{C}^n .

Неравенства (16.6) означают, что система (16.2) недовозбуждена: при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ее нулевое состояние равновесия экспоненциально устойчиво. Добиться же появления в ней малых устойчивых колебательных режимов можно, например, за счет добавления в правую часть уравнения (16.2) квазипериодической внешней силы малой амплитуды. Для того чтобы убедиться в этом, фиксируем некоторый набор натуральных чисел $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_p \leq m, p \leq m$, и отвечающий ему набор частот $\omega_{s_k}, k = 1, \dots, p$. Затем перейдем от (16.2) к системе

$$\dot{u} = (A_0 + \varepsilon A_1)u + F(u) + \varepsilon^{3/2} f(\varphi), \quad \dot{\varphi} = \omega(\varepsilon), \quad (16.7)$$

где $\varphi = \operatorname{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathbb{R}^p, f(\varphi) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \cos \varphi_k, \alpha_k \in \mathbb{R}^n$, а вектор частот $\omega(\varepsilon)$, задающийся равенством

$$\omega(\varepsilon) = \operatorname{colon}(\omega_{s_1}(1 + \varepsilon\delta_1), \dots, \omega_{s_p}(1 + \varepsilon\delta_p)), \quad (16.8)$$

$$\delta_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, \dots, p,$$

при $\varepsilon = 0$ совпадает с выбранным выше вектором $\operatorname{colon}(\omega_{s_1}, \dots, \omega_{s_p})$ собственных частот невозмущенного уравнения $\dot{u} = A_0 u + F(u)$. Таким образом, в системе (16.7) наблюдается требуемый многочастотный резонанс.

Следуя изложенной в монографии [73] методике, при сделанных допущениях колебательные режимы системы (16.7) малой амплитуды будем искать в виде формального ряда по целым степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \varphi, \tau) + \varepsilon u_1(t, \varphi, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_2(t, \varphi, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (16.9)$$

где $u_0 = u_{0,0}(\varphi, \tau) + u_{0,1}(t, \tau)$,

$$u_{0,0} = \sum_{k=1}^p [\xi_{s_k}(\tau) a_{s_k} \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_{s_k}(\tau) \bar{a}_{s_k} \exp(-i\varphi_k)], \quad (16.10)$$

$$u_{0,1} = \sum_{s \in \tilde{N}_m} [\xi_s(\tau) a_s \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s(\tau) \bar{a}_s \exp(-i\omega_s t)],$$

через \tilde{N}_m обозначено множество номеров $\{1, 2, \dots, m\} \setminus \{s_1, \dots, s_p\}$, а $\xi_{s_k}(\tau), \bar{\xi}_{s_k}(\tau)$ — пока произвольные (подлежащие определению) комплексные амплитуды. Кроме того, считаем, что все входящие в (16.9)

функции u_k , $k \geq 1$, — тригонометрические полиномы переменных $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ и $\omega_s t$, $s \in \tilde{\mathbb{N}}_m$.

Подставляя соотношения (16.9), (16.10) в уравнение (16.7), учитывая тейлоровское разложение (16.5) и приравнявая слева и справа коэффициенты при ε , для отыскания u_1 получаем линейную неоднородную систему вида

$$Lu_1 - A_0 u_1 = g_1(t, \varphi, \tau). \quad (16.11)$$

Здесь $L = \partial/\partial t + \sum_{k=1}^p \omega_{s_k} \partial/\partial \varphi_k$, а неоднородность g_1 представляет собой линейную комбинацию гармоник

$$\exp \left[i \left(n_{s_1} \varphi_1 + \dots + n_{s_p} \varphi_p + \sum_{s \in \tilde{\mathbb{N}}_m} n_s \omega_s t \right) \right], \quad (16.12)$$

где n_j , $j = 1, \dots, m$, — всевозможные целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} 0 &\leq |n_1| + \dots + |n_m| \leq 2, \\ |n_1| + \dots + |n_m| &\neq 1. \end{aligned} \quad (16.13)$$

Что же касается переменной τ , то она рассматривается в (16.11) как параметр.

Решение u_1 системы (16.11) будем искать в виде тригонометрического многочлена той же структуры, что и правая часть g_1 (см. (16.12), (16.13)). В результате проблема сводится к определению коэффициентов этого многочлена из серии линейных неоднородных уравнений вида

$$(i\Omega I - A_0)u = g, \quad \Omega = n_{s_1} \omega_{s_1} + \dots + n_{s_p} \omega_{s_p} + \sum_{s \in \tilde{\mathbb{N}}_m} n_s \omega_s, \quad (16.14)$$

где через I обозначена единичная матрица. Остается добавить, что однозначную разрешимость каждого из уравнений (16.14) обеспечивают условия нерезонансности (16.3), (16.4).

На втором шаге, т. е. после приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$, для u_2 приходим к аналогичному (16.11) уравнению, но с неоднородностью $g_2(t, \varphi, \tau)$, являющейся суммой первых и третьих гармоник. В таком же виде ищем и $u_2(t, \varphi, \tau)$. Однако здесь возникает новый момент: для амплитуд функции u_2 при первых гармониках $\exp(i\varphi_k)$, $k = 1, \dots, p$, и $\exp(i\omega_s t)$, $s \in \tilde{\mathbb{N}}_m$, получаются вырожденные линейные неоднородные уравнения

$$(i\omega_{s_k} I - A_0)u = g_{s_k}(\tau), \quad k = 1, \dots, p;$$

$$(i\omega_s I - A_0)u = g_s(\tau), \quad s \in \tilde{\mathbb{N}}_m,$$

а условия их разрешимости задаются равенствами $(g_{s_k}(\tau), b_{s_k}) \equiv 0$, $k = 1, \dots, p$, и $(g_s(\tau), b_s) \equiv 0$, $s \in \tilde{\mathbb{N}}_m$. Эти условия приводят, в свою

очередь, к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_{s_k}}{d\tau} &= \left[(A_1 a_{s_k}, b_{s_k}) + \sum_{r=1}^m d_{s_k r} |\xi_r|^2 \right] \xi_{s_k} + (\alpha_k, b_{s_k}), \quad k = 1, \dots, p, \\ \frac{d\xi_s}{d\tau} &= \left[(A_1 a_s, b_s) + \sum_{r=1}^m d_{s r} |\xi_r|^2 \right] \xi_s, \quad s \in \tilde{N}_m, \end{aligned} \quad (16.15)$$

для нахождения неизвестных амплитуд ξ_s . Здесь $d_{s r}$, $s, r = 1, \dots, m$, — комплексные постоянные, которые принято называть ляпуновскими величинами, а переменные ξ_s , $s = 1, \dots, m$, удовлетворяют системе, получающейся из (16.15) в результате комплексного сопряжения.

И наконец, следует отметить, что если в качестве фигурирующих в (16.10) функций $\xi_s(\tau)$, $s = 1, \dots, m$, выбрано произвольное решение системы (16.15), то полностью определяются все три выписанных в (16.9) слагаемых. Действительно, однозначную разрешимость линейных неоднородных алгебраических уравнений для коэффициентов функции u_2 при третьих гармониках обеспечивают условия (16.3), отвечающие случаю $|n_1| + \dots + |n_m| = 3$.

Несколько отступая от общепринятой терминологии, систему (16.15) назовем *нормальной формой* исходного уравнения (16.7). Подобное название оправдано тем, что именно она отвечает за бифуркации при $\varepsilon > 0$ инвариантных торов этого уравнения из «нулевого» тора $T_0 = \{(u, \varphi) : u = 0, \varphi \in \mathbb{R}^p / 2\pi\mathbb{Z}^p\}$. При формулировке соответствующих строгих результатов ограничимся наиболее интересным с прикладной точки зрения частным случаем, когда справедливы неравенства

$$\operatorname{Re} d_{s r} \leq 0, \quad s \in \tilde{N}_m, \quad r = 1, \dots, m. \quad (16.16)$$

Смысл приведенных дополнительных ограничений состоит в том, что при их выполнении для любого решения системы (16.15) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} |\xi_s(\tau)| = 0, \quad s \in \tilde{N}_m, \quad (16.17)$$

означающие «вымирание» всех частотных компонент, на которые не действует внешняя сила. В самом деле, в этом случае функции $\eta_s = |\xi_s|^2$ удовлетворяют системе

$$\frac{d\eta_s}{d\tau} = \left[\sigma_s + \sum_{r=1}^m \sigma_{s r} \eta_r \right] \eta_s, \quad s \in \tilde{N}_m,$$

где в силу (16.6), (16.16) $\sigma_s = 2\operatorname{Re}(A_1 a_s, b_s) < 0$, $\sigma_{s r} = 2\operatorname{Re} d_{s r} \leq 0$. Далее, из равенств (16.17), в свою очередь, заключаем, что при условиях (16.6), (16.16) за аттракторы нормальной формы (16.15) отвечает

система

$$\frac{d\xi_{s_k}}{d\tau} = \left[(A_1 a_{s_k}, b_{s_k}) + \sum_{r=1}^p d_{s_k s_r} |\xi_{s_r}|^2 \right] \xi_{s_k} + (\alpha_k, b_{s_k}), \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.18)$$

получающаяся из нее при $\xi_s = 0$, $s \in \tilde{N}_m$.

Предположим, что система (16.18) имеет некоторое состояние равновесия

$$\xi_{s_k} = \xi_k^0 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, p. \quad (16.19)$$

Подставляя его компоненты вместе с равенствами $\xi_s = 0$, $s \in \tilde{N}_m$, в первые три слагаемых ряда (16.9), получим приближенный (с точностью до ε^2 по невязке) инвариантный тор исходной системы (16.7). Таким образом, естественно возникает вопрос о существовании и устойчивости соответствующего ему точного инвариантного тора. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, аналоги которого содержатся в [14, 73, 120].

Теорема 16.1. Пусть система (16.18) имеет состояние равновесия (16.19), экспоненциально устойчивое или дихотомичное. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ исходная система (16.7) имеет p -мерный инвариантный тор той же устойчивости, задающийся равенствами:

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^p [\xi_k^0 a_{s_k} \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_k^0 \bar{a}_{s_k} \exp(-i\varphi_k)] + \varepsilon u_*(\varphi, \varepsilon), \quad (16.20)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varepsilon), \quad (16.21)$$

где 2π -периодическая по φ функция u_* и ее всевозможные частные производные по φ до порядка l включительно ограничены равномерно по ε , φ в метрике \mathbb{R}^n .

В дополнение к сформулированной теореме заметим, что аналогичное утверждение о соответствии справедливо и для любого цикла

$$\xi_{s_k} = \xi_k^0(\tau), \quad \xi_k^0(\tau + \tau_0) \equiv \xi_k^0(\tau), \quad k = 1, \dots, p, \quad \tau_0 > 0, \quad (16.22)$$

системы (16.18), являющегося экспоненциально орбитально устойчивым или дихотомичным. А именно, каждому такому циклу при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ в исходном уравнении (16.7) отвечает $(p+1)$ -мерный инвариантный тор с теми же свойствами устойчивости. Для этого тора справедливо аналогичное (16.20) равенство, в котором, естественно, амплитуды ξ_k^0 , $k = 1, \dots, p$, заменяются компонентами цикла (16.22) и функция $u_*(\varphi, \tau, \varepsilon)$, $u_*(\varphi, \tau + \tau_0, \varepsilon) \equiv u_*(\varphi, \tau, \varepsilon)$ теперь гладко зависит от дополнительной фазовой переменной τ . Кроме того, к системе (16.21) добавляется уравнение для τ :

$$\frac{d\tau}{dt} = \varepsilon + \varepsilon^{3/2} \Delta_*(\varphi, \tau, \varepsilon), \quad (16.23)$$

где скалярная функция Δ_* обладает теми же общими свойствами периодичности и гладкости, что и вектор-функция u_* .

Справедливость всех приведенных фактов вытекает из весьма простых геометрических соображений. В самом деле, при сформулированных выше ограничениях у системы (16.7) в некоторой достаточно малой окрестности нулевого тора T_0 существует $(2m + p)$ -мерное экспоненциально орбитально устойчивое инвариантное многообразие, 2π -периодически зависящее от векторного аргумента φ и представляющее собой некоторый аналог центрального многообразия (см. например, [134]). Что же касается системы (16.15), то в силу своего вывода вместе с уравнениями (16.21) она описывает движения на указанном многообразии (с точностью до отброшенных слагаемых порядка $\sqrt{\varepsilon}$). Таким образом, теорема 16.1 — это стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной системы (16.7) и ее укороченной нормальной формы.

Возвращаясь к уравнению (16.1), напомним, что наша цель состоит в получении для него аналогичных теореме 16.1 результатов. Основная трудность здесь заключается в том, что при их обосновании мы уже не сможем опереться на приведенные выше принципиально конечномерные геометрические соображения (в части, касающейся существования $(2m + p)$ -мерного многообразия). Однако к настоящему времени развита специальная асимптотическая теория колебаний в окрестности бесконечномерного вырождения (см. [73, 103]), позволяющая решать подобного рода проблемы.

16.2. Основные результаты. Приступим к описанию объекта исследования. С этой целью дополним уравнение (16.1) нулевыми граничными условиями Дирихле на отрезке $0 \leq x \leq \pi$, а затем линейризуем получившуюся краевую задачу на нулевом состоянии равновесия. В результате приходим к линейной краевой задаче

$$u_{tt} + u = a^2 u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0, \quad (16.24)$$

которая допускает, очевидно, волновые решения

$$u = \exp(\pm i\omega_n t) \sin nx, \quad \omega_n = \sqrt{1 + a^2 n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (16.25)$$

Обыгрывая этот факт, фиксируем произвольно конечный набор натуральных чисел $s_1 < s_2 < \dots < s_p$ и перейдем от (16.24) к нелинейной краевой задаче

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + \sin u = a^2 u_{xx} + \varepsilon^{3/2} f(\varphi, x), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varepsilon), \quad (16.26)$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0.$$

Здесь, как и в случае уравнения (16.7), $\varphi = \text{colon}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathbb{R}^p$, вектор $\omega(\varepsilon)$ задается равенством (16.8), в котором частоты ω_{s_k} ,

$k = 1, \dots, p$, определяются по формулам из (16.25), а для внешней силы $f(\varphi, x)$ справедливо представление

$$f(\varphi, x) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \cos \varphi_k \sin s_k x, \quad (16.27)$$

где $\alpha_k > 0$, $k = 1, \dots, p$.

Из формул (16.8), (16.27) следует, что в краевой задаче (16.26) наблюдается требуемый многочастотный резонанс: каждая частота внешней силы (16.27) при $\varepsilon = 0$ находится в резонансе $1 : 1$ с некоторой собственной частотой на одной из выбранных пространственных мод $\sin s_k x$, $k = 1, \dots, p$. Поэтому вполне уместен вопрос о существовании и устойчивости инвариантных торов задачи (16.26), бифурцирующих из нуля при $\varepsilon > 0$ на указанных модах. Устойчивость же будем понимать в метрике фазового пространства $(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi) \times \overset{\circ}{W}_2^1(0, \pi)$, где $\overset{\circ}{W}_2^j$, $j = 1, 2$, — соболевские пространства функций, удовлетворяющих граничным условиям из (16.24).

При решении поставленной проблемы воспользуемся бесконечномерным вариантом описанного в п. 16.1 алгоритма. Как и выше, возможные автоколебательные режимы краевой задачи (16.26) будем искать в виде аналогичного (16.9) формального ряда

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_0(t, \varphi, \tau, x) + \varepsilon^{3/2} u_1(t, \varphi, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (16.28)$$

где $u_0 = u_{0,0}(\varphi, \tau, x) + u_{0,1}(t, \tau, x)$,

$$\begin{aligned} u_{0,0} &= \sum_{k=1}^p [\xi_{s_k}(\tau) \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_{s_k}(\tau) \exp(-i\varphi_k)] \sin s_k x, \\ u_{0,1} &= \sum_{s \in \tilde{\mathbb{N}}} [\xi_s(\tau) \exp(i\omega_s t) + \bar{\xi}_s(\tau) \exp(-i\omega_s t)] \sin s x, \end{aligned} \quad (16.29)$$

$\tilde{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \setminus \{s_1, \dots, s_p\}$, а комплексные амплитуды ξ_s , $s \geq 1$, таковы, что сходится ряд с общим членом $\omega_s^4 |\xi_s|^2$ (в этом случае $u_0 \in \overset{\circ}{W}_2^2$ по переменной x). Заметим, что в отличие от (16.9) в асимптотическом представлении (16.28) отсутствует слагаемое порядка ε , поскольку в (16.26) нет квадратичной нелинейности.

Подставляя соотношения (16.28), (16.29) в (16.26) и приравнявая коэффициенты при $\varepsilon^{3/2}$, для определения u_1 получаем краевую задачу

$$L^2 u_1 + u_1 - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = G, \quad u_1|_{x=0} = u_1|_{x=\pi} = 0, \quad (16.30)$$

в которой $L = \partial/\partial t + \sum_{k=1}^p \omega_{s_k} \partial/\partial \varphi_k$,

$$G = 2 \sum_{k=1}^p \delta_k \omega_{s_k}^2 [\xi_{s_k}(\tau) \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_{s_k}(\tau) \exp(-i\varphi_k)] \sin s_k x + \\ + f(\varphi, x) - L u_0 + u_0^3/6 - 2L \frac{\partial u_0}{\partial \tau}, \quad (16.31)$$

а переменная τ , как и в случае (16.11), считается параметром.

Обращаем внимание, что необходимым условием разрешимости краевой задачи (16.30) в классе формальных тригонометрических рядов переменных t, φ является отсутствие в ее правой части (16.31) слагаемых, пропорциональных гармоникам

$$\exp(\pm i\varphi_k) \sin s_k x, \quad k = 1, \dots, m; \quad \exp(\pm i\omega_s t) \sin s x, \quad s \in \tilde{N}.$$

Приравнявая упомянутые слагаемые к нулю, для нахождения неизвестных амплитуд $\xi_s, s \geq 1$, приходим к системе (точка — дифференцирование по τ)

$$2\dot{\xi}_{s_k} = -(1 + 2i\delta_k \omega_{s_k})\xi_{s_k} - \frac{i}{\omega_{s_k}} \left(\frac{3}{8} |\xi_{s_k}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s_k}}^{\infty} |\xi_r|^2 \right) \xi_{s_k} - \frac{i\alpha_k}{\omega_{s_k}}, \\ k = 1, \dots, p, \quad (16.32)$$

$$2\dot{\xi}_s = -\xi_s - \frac{i}{\omega_s} \left(\frac{3}{8} |\xi_s|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq s}}^{\infty} |\xi_r|^2 \right) \xi_s, \quad s \in \tilde{N}. \quad (16.33)$$

Подчеркнем, что в отличие от аналогичной конечномерной системы (16.15) получившаяся счетная система обыкновенных уравнений (16.32), (16.33) не является укороченной нормальной формой исходной краевой задачи (16.26). Связано это с тем, что не существует взаимно однозначного отображения, действующего из пространства последовательностей

$$\Phi = \left\{ \xi = (\xi_1, \bar{\xi}_1, \dots, \xi_s, \bar{\xi}_s, \dots): \xi_s \in \mathbb{C}, s \geq 1; \right. \\ \left. \|\xi\| = \left(\sum_{s=1}^{\infty} \omega_s^4 |\xi_s|^2 \right)^{1/2} < \infty \right\} \quad (16.34)$$

в фазовое пространство $\overset{\circ}{W}_2^2 \times \overset{\circ}{W}_2^1$ и приводящего задачу (16.26) к виду (16.32), (16.33) с точностью до слагаемых порядка $\sqrt{\varepsilon}$ (причины отсутствия такой замены переменных пояснены в [73, гл. 2, раздел 5]). Однако, несмотря на сугубо формальный способ получения, система (16.32), (16.33) все же содержит определенную информацию об аттракторах исходной задачи (16.26) и, в частности, сама она порождает корректную динамическую систему в пространстве (16.34) (под корректностью мы понимаем локальную однозначную разрешимость для нее задачи Коши с произвольным начальным условием $\xi|_{t=0} = \xi^0 \in \Phi$).

Анализ системы (16.32), (16.33) существенно упрощает то обстоятельство, что здесь справедливы аналоги неравенств (16.6), (16.16).

Таким образом, все амплитуды ξ_s , $s \in \tilde{N}$, заведомо стремятся к нулю при $\tau \rightarrow \infty$ и, следовательно, мы можем перейти от (16.32), (16.33) к аналогичной (16.18) конечномерной системе

$$2\dot{\xi}_{s_k} = -(1 + 2i\delta_k \omega_{s_k})\xi_{s_k} - \frac{i}{\omega_{s_k}} \left(\frac{3}{8} |\xi_{s_k}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^p |\xi_{s_r}|^2 \right) \xi_{s_k} - \frac{i\alpha_k}{\omega_{s_k}},$$

$$k = 1, \dots, p,$$
(16.35)

на устойчивом инвариантном многообразии

$$\{\xi: \xi_s = 0, s \in \tilde{N}\} \subset \Phi. \quad (16.36)$$

Предположим, что система (16.35) имеет состояние равновесия (16.19) или цикл (16.22). Тогда при некоторой общности положения, связанной с выбором параметра a , любому такому решению соответствует приближенный (с точностью до $\varepsilon^{5/2}$ по невязке) инвариантный тор исходной задачи (16.26) размерности p (в случае состояния равновесия) или $p + 1$ (в случае цикла). Для того чтобы убедиться в этом, подставим в неоднородность (16.31) компоненты выбранного решения системы (16.35) вместе с равенствами из (16.36). В итоге функция G становится линейной комбинацией конечного числа гармоник вида

$$\exp[i(n_1\varphi_1 + \dots + n_p\varphi_p)] \sin rx, \quad (16.37)$$

где (n_1, \dots, n_p) , $|n_1| + \dots + |n_p| = 3$, — произвольный целочисленный вектор, а $\sin rx$ — любое слагаемое, фигурирующее в разложении по синусам произведения $\sin^{|n_1|} s_1 x \cdot \sin^{|n_2|} s_2 x \cdot \dots \cdot \sin^{|n_p|} s_p x$. Что же касается решения u_1 задачи (16.30), то его отыскание в аналогичном виде возможно в том и только в том случае, когда выполняются условия нерезонансности

$$(n_1\omega_{s_1} + \dots + n_p\omega_{s_p})^2 - \omega_r^2 \neq 0, \quad (16.38)$$

где числа n_j , r — те же самые, что и в (16.37). Остается заметить, что справедливости неравенств (16.38) всегда можно добиться за счет подходящего «шевеления» параметра a .

Как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, каждому приближенному тору, построенному по описанному выше правилу, при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при естественных условиях грубости состояния равновесия (16.19) или цикла (16.22) отвечает точный инвариантный тор краевой задачи (16.26). А именно, справедливы следующие два утверждения.

Теорема 16.2. Пусть выполнены условия (16.38), а система (16.35) имеет цикл (16.22), экспоненциально орбитально устойчивый или дихотомичный. Тогда по любому натуральному l можно указать такое достаточно малое $\varepsilon_l > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_l$ краевая задача (16.26) имеет $(p + 1)$ -мерный инвариантный тор

с теми же свойствами устойчивости. Для этого тора справедливы аналогичные (16.20), (16.21), (16.23) равенства

$$u = \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=1}^p [\xi_k^0(\tau) \exp(i\varphi_k) + \bar{\xi}_k^0(\tau) \exp(-i\varphi_k)] \sin s_k x + \varepsilon^{3/2} u_*(\varphi, \tau, x, \varepsilon), \quad (16.39)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(\varepsilon), \quad \frac{d\tau}{dt} = \varepsilon + \varepsilon^2 \Delta_*(\varphi, \tau, \varepsilon), \quad (16.40)$$

где 2π -периодические по векторному аргументу φ и τ_0 -периодические по τ функции u_* , Δ_* и все их частные производные по φ , τ до порядка l включительно непрерывны и ограничены по ε , φ , τ в метрике пространств $\overset{\circ}{W}_2^2(0, \pi)$ и \mathbb{R} соответственно.

Теорема 16.3. Предположим, что в условиях предыдущей теоремы в качестве решения системы (16.35) взято некоторое состояние равновесия (16.19), экспоненциально устойчивое или дихотомичное. Тогда при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ исходная задача (16.26) имеет p -мерный инвариантный тор с теми же свойствами устойчивости, задающийся равенствами вида (16.39), (16.40), в которых отсутствует переменная τ .

Справедливость сформулированных теорем вытекает из результатов монографии [73], где аналогичные утверждения обоснованы в более общем случае. Однако остается проблема реализуемости условий этих теорем при подходящем выборе параметров внешней силы. К таковым относятся амплитуды $\alpha_k > 0$, частотные расстройки $\delta_k \in \mathbb{R}$ и наборы номеров s_k , $k = 1, \dots, p$, возбуждаемых мод.

Забегая вперед, скажем, что область применимости каждой из теорем 16.2, 16.3 заведомо не пуста, так как при $p = 2$ существование у системы (16.35) устойчивых состояний равновесия и циклов будет установлено в п. 16.3 посредством численного счета. Аналитические же результаты удается получить только для состояний равновесия этой системы и только в двух крайних случаях — когда амплитуды α_k , $k = 1, \dots, p$, внешней силы одновременно малы или велики.

Опишем общую схему отыскания возможных состояний равновесия системы (16.35). С этой целью сначала с помощью замен $\xi_{sk} = \rho_k \exp(i\psi_k)$, $\rho_k > 0$, $0 \leq \psi_k \leq 2\pi \pmod{2\pi}$, $k = 1, \dots, p$, преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} 2\dot{\rho}_k &= -\rho_k - \frac{\alpha_k}{\omega_{s_k}} \sin \psi_k, \\ 2\dot{\psi}_k &= -2\delta_k \omega_{s_k} - \frac{1}{\omega_{s_k}} \left(\frac{3}{8} \rho_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^p \rho_r^2 \right) - \frac{\alpha_k}{\rho_k \omega_{s_k}} \cos \psi_k, \end{aligned} \quad (16.41)$$

$$k = 1, \dots, p.$$

Отметим, далее, что компоненты ρ_k , $k = 1, \dots, p$, любого состояния равновесия получившейся системы определяются из уравнений

$$\rho_k^2 \left[1 + \left(2\delta_k \omega_{s_k} + \frac{1}{2\omega_{s_k}} \left(S - \frac{1}{4} \rho_k^2 \right) \right)^2 \right] - \frac{\alpha_k^2}{\omega_{s_k}^2} = 0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.42)$$

где $S = \sum_{k=1}^p \rho_k^2$. Что же касается фазовых переменных ψ_k , то по уже известным ρ_k , $k = 1, \dots, p$, они находятся однозначно с помощью формул

$$\frac{\alpha_k}{\omega_{s_k}} \sin \psi_k = -\rho_k, \quad \frac{\alpha_k}{\omega_{s_k}} \cos \psi_k = -\rho_k \left(2\delta_k \omega_{s_k} + \frac{1}{2\omega_{s_k}} \left(S - \frac{1}{4} \rho_k^2 \right) \right), \\ k = 1, \dots, p.$$

Итак, проблема поиска состояний равновесия системы (16.41) свелась к отысканию решений системы (16.42). Один из способов анализа последней заключается в следующем. Будем считать, что сумма S в ней является некоторым вспомогательным параметром. Тогда каждое из уравнений (16.42) становится кубическим по переменной ρ_k^2 и имеет, очевидно, хотя бы один положительный корень $\rho_k^2 = \rho_k^2(S)$. В результате для неизвестного параметра $S > 0$ получаем уравнение

$$\sum_{k=1}^p \rho_k^2(S) = S, \quad (16.43)$$

которое в ряде случаев решается достаточно просто.

Предположим, что мы уже нашли какой-либо из корней уравнения (16.43), а значит, нашли и некоторое состояние равновесия $\{\rho_k, \psi_k, k = 1, \dots, p\}$ системы (16.41). Тогда сразу возникает проблема исследования устойчивости этого состояния равновесия, которая сводится к анализу спектра соответствующей матрицы линеаризации B размера $2p \times 2p$. Непосредственная проверка показывает, что упомянутая матрица имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} -I & B_1 \\ B_2 & -I \end{pmatrix}, \quad B_1 = \text{diag} \{b_1, \dots, b_p\}, \quad B_2 = \|b_{kj}\|, \quad k, j = 1, \dots, p, \quad (16.44)$$

где I — единичная квадратная матрица порядка p , а элементы матриц B_1, B_2 задаются равенствами

$$b_k = \rho_k \left(2\delta_k \omega_{s_k} + \frac{1}{2\omega_{s_k}} \left(S - \frac{1}{4} \rho_k^2 \right) \right), \quad k = 1, \dots, p; \quad (16.45)$$

$$b_{kj} = \begin{cases} -\frac{3}{4\omega_{s_k}} \rho_k - b_k / \rho_k^2 & \text{при } j = k, \\ -\frac{1}{\omega_{s_k}} \rho_j & \text{при } j \neq k. \end{cases} \quad (16.46)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что спектр интересующей нас матрицы B определяется в конечном итоге из серии квадратных уравнений

$$(\lambda + 1)^2 + \gamma_r = 0, \quad r = 1, \dots, p, \quad (16.47)$$

где γ_r — собственные значения матрицы

$$\Gamma = \|\gamma_{kj}\|, \quad \gamma_{kj} = -b_{kj}b_j, \quad k, j = 1, \dots, p. \quad (16.48)$$

Изложенную выше общую методику исследования состояний равновесия системы (16.41) проиллюстрируем сначала в простейшей ситуации, когда одновременно малы все амплитуды α_k внешней силы (16.27), а остальные ее параметры фиксированы. В этом случае из (16.42) очевидным образом вытекают асимптотические представления

$$\rho_k = \frac{\alpha_k}{\omega_{s_k} \left[1 + (2\delta_k \omega_{s_k} + \frac{1}{2\omega_{s_k}} S)^2 \right]} + O(\alpha_k^3), \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.49)$$

справедливые равномерно по S из любого ограниченного множества. Подставляя, далее, формулы (16.49) в уравнение (16.43), убеждаемся, что оно допускает единственное решение

$$S = \sum_{k=1}^p \alpha_k^2 / [\omega_{s_k}^2 (1 + 4\delta_k^2 \omega_{s_k}^2)] + O(\alpha_1^4 + \dots + \alpha_p^4). \quad (16.50)$$

А это означает, что при $0 < \alpha_k \ll 1$, $k = 1, \dots, p$, система (16.41) имеет единственное состояние равновесия, которое, как нетрудно увидеть, является экспоненциально устойчивым. В самом деле, используем асимптотические формулы (16.49), (16.50) в соотношениях (16.45)–(16.48), убеждаемся, что все собственные значения матрицы (16.44) близки к -1 , а значит, имеют отрицательные действительные части.

Перейдем теперь к более сложному случаю, когда амплитуды α_k , $k = 1, \dots, p$, внешней силы (16.27) пропорциональны некоторому большому параметру z . Точнее говоря, предположим, что

$$\alpha_k = \alpha_k^0 z, \quad \alpha_k^0 = \text{const} > 0, \quad z \gg 1, \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.51)$$

а все остальные параметры, т.е. расстройки $\delta_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, p$, и номера возбуждаемых мод $s_1 < \dots < s_p$, по-прежнему фиксированы.

Теорема 16.4. При выполнении сформулированных условий система (16.41) имеет единственное состояние равновесия, являющееся экспоненциально устойчивым.

Доказательство. Учитывая соотношения (16.51) в (16.42), приходим к выводу, что компоненты ρ_k любого состояния равновесия системы (16.41) с необходимостью должны быть величинами порядка $z^{1/3}$. Более того, после выполнения в системе (16.42) нормировок

$$\rho_k / z^{1/3} \rightarrow \rho_k, \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.52)$$

сокращения каждого из уравнений на z^2 и последующего предельного перехода при $z \rightarrow \infty$ получаем систему

$$\rho_k \left(S - \frac{1}{4} \rho_k^2 \right) = 2\alpha_k^0, \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.53)$$

где $S = \sum_{k=1}^p \rho_k^2$, которая, собственно говоря, и нуждается в дальнейшем анализе.

Следуя описанной выше общей схеме, будем считать сумму S в (16.53) вспомогательным положительным параметром, что влечет распад нашей системы на серию независимых кубических уравнений. Далее, в каждом из этих уравнений сделаем замену $\rho_k = \sqrt{S} y_k$, предполагая, что $0 \leq y_k \leq 1$. В результате система (16.53) преобразуется к виду

$$P(y_k) = 2\alpha_k^0/S^{3/2}, \quad k = 1, \dots, p, \quad (16.54)$$

где $P(y) = y(1 - y^2/4)$.

При анализе получившихся уравнений существенным образом используется тот факт, что полином $P(y)$ на отрезке $0 \leq y \leq 1$ монотонно возрастает от нуля до $3/4$. Действительно, из перечисленных свойств $P(y)$ следует, что каждое уравнение (16.54) при всех $S \geq S_k^0 = (8\alpha_k^0/3)^{2/3}$ имеет единственное решение

$$y_k(S): y_k(S_k^0) = 1, \quad y'_k(S) < 0 \text{ при } S \geq S_k^0, \quad y_k(\infty) = 0. \quad (16.55)$$

Обратимся теперь к уравнению (16.43) для отыскания параметра S . Подставляя в это уравнение равенства $\rho_k^2 = S y_k^2(S)$, $k = 1, \dots, p$, где $y_k(S)$ — функции (16.55), и сокращая получившееся выражение на S , приходим к уравнению

$$\Psi(S) = 1, \quad (16.56)$$

где $\Psi(S) = \sum_{k=1}^p y_k^2(S)$, $S \geq S_{\max} = \max_{1 \leq k \leq p} S_k^0$. Остается заметить, что в силу (16.55) функция $\Psi(S)$ обладает свойствами

$$\Psi'(S) < 0 \text{ при } S \geq S_{\max}, \quad \Psi(S_{\max}) \geq 1, \quad \Psi(\infty) = 0,$$

из которых, в свою очередь, вытекает существование у уравнения (16.56) единственного решения $S = S_* \geq S_{\max}$.

Просуммируем изложенное. Из проделанных выше построений следует, что система (16.53) имеет единственное решение

$$\rho_k^0 = \sqrt{S_*} y_k(S_*), \quad k = 1, \dots, p; \quad \sum_{k=1}^p (\rho_k^0)^2 = S_*. \quad (16.57)$$

Вспоминая, далее, о связи между уравнениями (16.53) и (16.42) (см. (16.52)), убеждаемся, что, во-первых, при всех достаточно больших значениях параметра z исходная система (16.41) имеет единствен-

ное состояние равновесия; во-вторых, компоненты ρ_k этого состояния равновесия допускают асимптотику

$$\rho_k \sim \rho_k^0 z^{1/3}, \quad k = 1, \dots, p, \quad z \rightarrow \infty. \quad (16.58)$$

Для того чтобы проверить требуемую в теореме 16.4 экспоненциальную устойчивость построенного состояния равновесия, обозначим через $\Gamma(z)$ соответствующую ему матрицу (16.48) и учтем в равенствах (16.45), (16.46) формулы (16.57), (16.58). В результате приходим к выводу, что

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \Gamma(z)/z^{2/3} = \Gamma_0, \quad \Gamma_0 = \|\gamma_{kj}^0\|, \quad k, j = 1, \dots, p, \quad (16.59)$$

где

$$\gamma_{kj}^0 = \begin{cases} \frac{3}{8\omega_{s_k}^2} \rho_k^2 \left(S_* - \frac{1}{4} \rho_k^2\right) + \frac{1}{4\omega_{s_k}^2} \left(S_* - \frac{1}{4} \rho_k^2\right)^2 & \text{при } j = k, \\ \frac{1}{2\omega_{s_k}\omega_{s_j}} \rho_j^2 \left(S_* - \frac{1}{4} \rho_j^2\right) & \text{при } j \neq k, \end{cases} \quad (16.60)$$

а компоненты ρ_k, ρ_j в (16.60) задаются, естественно, соотношениями (16.57). Таким образом, если мы покажем, что все собственные значения фигурирующей в (16.59) матрицы Γ_0 являются действительными и положительными, то тогда корни каждого из уравнений (16.47) автоматически будут лежать в полуплоскости $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, а точнее говоря, на прямой $\{\lambda: \operatorname{Re} \lambda = -1\}$.

Для анализа собственных значений матрицы Γ_0 обратимся к уравнению

$$\det(\Gamma_0 - \lambda I) = 0 \quad (16.61)$$

и проделаем с ним следующие операции. Сначала поделим столбцы фигурирующего в (16.61) определителя на величины

$$\frac{1}{2\omega_{s_j}} \rho_j^2 \left(S_* - \frac{1}{4} \rho_j^2\right), \quad j = 1, \dots, p, \quad (16.62)$$

соответственно (т.е. столбец с номером j делится на постоянную (16.62) с тем же номером). Затем каждую строку получившегося определителя умножим соответственно на ω_{s_k} , $k = 1, \dots, p$. В результате приходим к уравнению

$$\det \begin{pmatrix} 1 + q_1(\lambda) & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 + q_2(\lambda) & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 + q_p(\lambda) \end{pmatrix} = 0, \quad (16.63)$$

в котором

$$\begin{aligned} q_j(\lambda) &= q_{j,0} - \lambda q_{j,1}, \quad q_{j,0} = \frac{1}{2\rho_j^2} \left(S_* - \frac{3}{4} \rho_j^2 \right), \\ q_{j,1} &= \frac{2\omega_{sj}^2}{\rho_j^2 \left(S_* - \frac{1}{4} \rho_j^2 \right)}, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \quad (16.64)$$

Последовательность дальнейших действий такова. Вычтем первый столбец определителя (16.63) из всех остальных столбцов, а после этого прибавим к первой строке получившегося определителя остальные строки, умноженные соответственно на $q_1(\lambda)/q_j(\lambda)$, $j = 2, \dots, p$. В результате интересующее нас уравнение примет вид

$$\left(1 + \sum_{j=1}^p \frac{1}{q_j(\lambda)} \right) \prod_{j=1}^p q_j(\lambda) = 0. \quad (16.65)$$

Рассмотрим сначала случай, когда фигурирующие в (16.64) положительные постоянные $q_{j,0}$, $q_{j,1}$ таковы, что все отношения

$$\sigma_j = q_{j,0}/q_{j,1}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (16.66)$$

различны. Тогда, как нетрудно заметить, числа (16.66) не являются решениями уравнения (16.65), а значит, оно эквивалентно уравнению

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{q_j(\lambda)} = -1. \quad (16.67)$$

Последнее же имеет на полуоси $\lambda > 0$ ровно p различных корней (их количество совпадает с количеством вертикальных асимптот $\lambda = \sigma_j$, $j = 1, \dots, p$, у функции, фигурирующей в левой части этого уравнения).

Предположим теперь, что некоторые из чисел (16.66) совпадают, а точнее говоря, пусть имеется $m < p$ различных значений σ_{j_k} , $k = 1, \dots, m$, каждое из которых повторяется r_k раз, причем $r_1 + \dots + r_m = p$. Тогда уравнение (16.65) имеет, очевидно, корни $\lambda = \sigma_{j_k}$ кратности $r_k - 1$, $k = 1, \dots, m$. Остальные же его корни по-прежнему определяются из уравнения (16.67), которое в данном случае имеет ровно m различных положительных решений. Теорема 16.4 полностью доказана.

Из теорем 16.3, 16.4 вытекает, что при подходящем увеличении амплитуд α_k , $k = 1, \dots, p$, внешней силы (16.27) и при фиксированных прочих параметрах можно добиться существования в исходной краевой задаче (16.26) устойчивого инвариантного тора любой наперед заданной конечной размерности p . Вопрос же о возможных ее аттракторах при «средних» значениях α_k заведомо нелокален. Некоторое представление о нем дает приводимый ниже компьютерный анализ системы (16.41) в случае $p = 2$.

Впрочем, полученные на этом пути выводы о существовании у задачи (16.26) хаоса носят условный характер: они справедливы в рамках гипотезы о том, что каждому (в том числе и хаотическому) аттрактору нормальной формы (16.41) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ отвечает аналогичный аттрактор исходной системы (16.26). В связи с этим напомним, что строго такого типа результаты доказаны только для состояний равновесия и циклов (см. теоремы 16.2, 16.3).

16.3. Численный анализ. Рассмотрим систему (16.41) при $p = 2$ и выполним в ней нормировки $\rho_j / \sqrt{\omega_{s_1}} \rightarrow \rho_j$, $j = 1, 2$, $\tau/2 \rightarrow \tau$. В результате приходим к системе

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= -\rho_1 - \beta_1 \sin \psi_1, \quad \dot{\rho}_2 = -\rho_2 - \beta_2 \sin \psi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= \Delta_1 - \left(\frac{3}{8} \rho_1^2 + \frac{1}{2} \rho_2^2 \right) - \frac{\beta_1 \cos \psi_1}{\rho_1}, \\ \dot{\psi}_2 &= \Delta_2 - \kappa \left(\frac{1}{2} \rho_1^2 + \frac{3}{8} \rho_2^2 \right) - \frac{\beta_2 \cos \psi_2}{\rho_2},\end{aligned}\tag{16.68}$$

где параметры $\beta_1 = \alpha_1 / \omega_{s_1}^{3/2}$, $\beta_2 = \alpha_2 / (\omega_{s_2} \sqrt{\omega_{s_1}})$ могут принимать любые положительные значения, $\Delta_j = -2\delta_j \omega_{s_j}$, $j = 1, 2$, — произвольные вещественные числа, а отношение $\kappa = \omega_{s_1} / \omega_{s_2}$ при увеличении фигурирующего в (16.26) параметра a от 0 до $+\infty$ монотонно убывает от 1 до s_1/s_2 . Но поскольку номера $s_1 < s_2$ возбуждаемых мод также выбираются произвольно, то можно считать, что κ меняется на всем интервале $(0, 1)$.

Как уже было сказано выше, компьютерное исследование системы (16.68) позволяет получить (по крайней мере на эвристическом уровне строгости) некоторое представление об аттракторах исходной краевой задачи (16.26) при $p = 2$ и при не слишком больших амплитудах α_1, α_2 . В данном пункте соответствующий анализ проводится для диапазона параметров

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 20, \quad \kappa = 0.2, \quad \beta_1 = \beta_2 = b, \quad 23 \leq b < \infty,\tag{16.69}$$

выбор которого в значительной степени случаен.

В результате численного интегрирования системы (16.68) при условиях (16.69) было установлено, что при увеличении параметра b в ней наблюдается следующая динамика (как обычно, речь пойдет о фрагментах динамики, выявленных с той или иной степенью достоверности).

При $b = 23$ удалось обнаружить сразу три устойчивых состояния равновесия O_1, O_2 и O_3 , компоненты (ρ_1, ρ_2) которых задаются соответственно равенствами

$$(\rho_1, \rho_2) \approx (1,2241; 1,1631), \quad (7,577; 1,6319), \quad (0,1922; 16,7101).$$

Дальнейшие расчеты показали, что при увеличении параметра b судьба каждого из них складывается по-разному. А именно, устойчивое состояние равновесия O_1 сохраняется до значения $b_* \approx 44,268$, при

прохождении через которое теряет устойчивость жестко (т.е. не порождает при $b > b_*$ других устойчивых режимов). Далее, O_2 остается устойчивым при $23 \leq b < b_{**}$, $b_{**} \approx 23,84$, а при прохождении b через критическое значение b_{**} претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа с последующим рождением устойчивого цикла. И наконец, O_3 оказывается устойчивым при всех $b \geq 23$ (это именно то состояние равновесия, о котором говорится в теореме 16.4).

Итак, при значениях b , немного превышающих b_{**} , в системе (16.68) возникает устойчивый цикл C_0 . Этот цикл сохраняется при $b_{**} < b \lesssim 34,713$ и сосуществует с устойчивыми состояниями равновесия O_1 , O_3 . При $b = 34,5$ его вид представлен на рис. 16.1 (здесь и ниже на всех рисунках показаны проекции соответствующих режимов на плоскость (ρ_1, ρ_2))).

При дальнейшем увеличении b цикл C_0 претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к рождению хаотического аттрактора по фейгенбаумовскому сценарию. Точнее говоря, первая бифуркация удвоения происходит при $b \approx 34,713$ и появляется устойчивый цикл C_1 (см. рис. 16.2, относящийся к случаю $b = 35$). Данный цикл существует при $34,713 \lesssim b \lesssim 36,045$, а при $b \approx 36,045$ в свою очередь претерпевает бифуркацию удвоения — возникает новый устойчивый цикл C_2 (см. рис. 16.3 для случая $b = 36,2$) и т.д. Хаотический

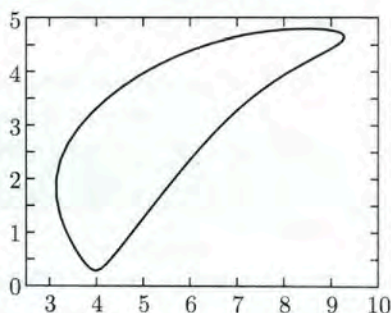


Рис. 16.1

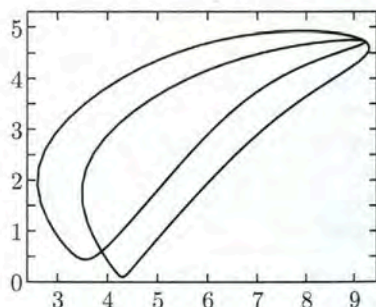


Рис. 16.2

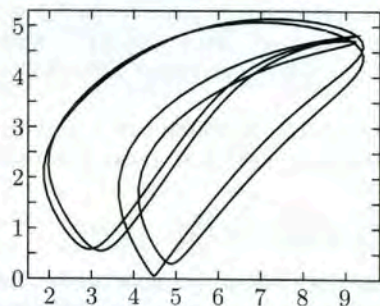


Рис. 16.3

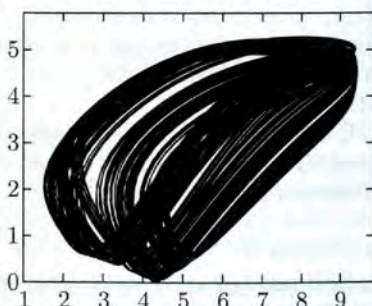


Рис. 16.4

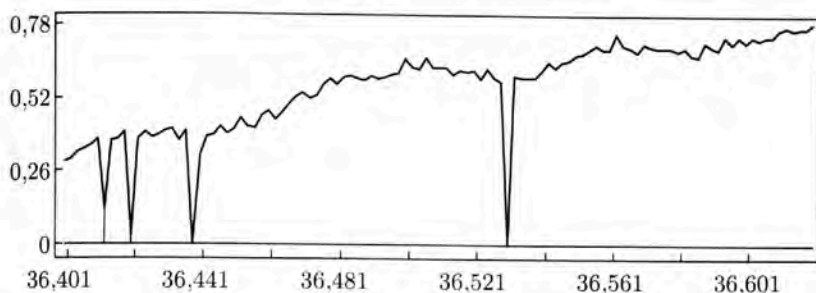


Рис. 16.5

же аттрактор A_1 , являющийся результатом этого каскада, наблюдается при $b \approx 36,356$ и имеет старший ляпуновский показатель λ_{\max} , равный 0,075. При $b = 36,6$ проекция упомянутого аттрактора изображена на рис. 16.4, а график его старшего показателя $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(b)$, построенный на отрезке $36,4 \leq b \leq 36,62$ по точкам с шагом 0,002, представлен на рис. 16.5. Характерные «провалы» на этом графике в окрестностях значений $b = 36,412$; 36,42; 36,438; 36,53 соответствуют окнам периодичности. При вычислении с выбранным выше шагом по параметру b удалось обнаружить четыре таких окна, хотя не исключено, что на самом деле их гораздо больше.

Хаотический аттрактор A_1 сохраняется примерно до значения $b = 36,63$, а после этого, по всей видимости, исчезает. Во всяком случае при $36,63 \lesssim b \lesssim 38,8$ решения системы (16.68) с начальными условиями, взятыми из бассейна притяжения бывшего аттрактора, после довольно длительного переходного процесса, занимающего несколько сотен временных единиц, выходят на состояние равновесия O_1 .

Новый хаотический аттрактор A_2 возникает нелокально при $b \approx 38,8$, по форме значительно отличается от предыдущего (см. рис. 16.6, где он изображен для случая $b = 39,6$) и наблюдается в более широком промежутке изменения параметра b , а именно, при $38,8 \lesssim b \lesssim 47$. Соответствующий ему график старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}(b)$, $39 \leq b \leq 47$, построенный по точкам с шагом 0,01, показан на рис. 16.7. Как

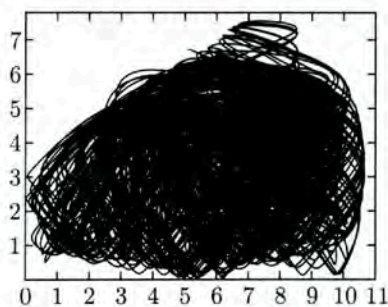


Рис. 16.6

и в предыдущем случае, здесь удастся диагностировать некоторое количество окон периодичности. А именно, существует по крайней мере четыре таких окна, примыкающих к значениям $b = 40,76$; 41,93; 43,1; 43,3. Кроме того, имеется еще так называемая проблемная зона $46,86 \lesssim b \lesssim 47$, в которой траектории системы (16.68) с начальными

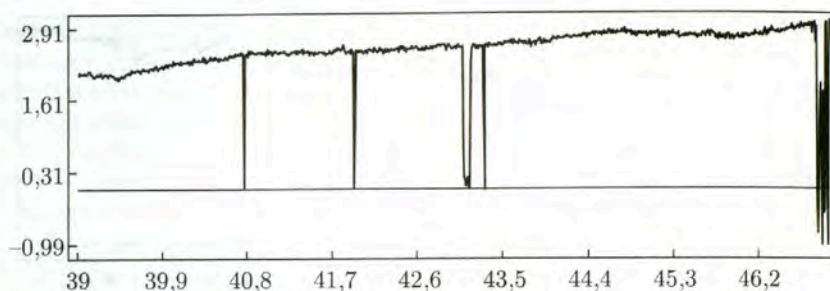


Рис. 16.7

условиями из предполагаемого аттрактора A_2 после переходного процесса, длящегося в некоторых случаях несколько тысяч временных единиц, выходят на состояние равновесия O_3 .

При дальнейшем увеличении параметра b аттрактор A_2 повторяет судьбу своего предшественника A_1 : при $47 \lesssim b \lesssim 48$ обнаружить его уже не удастся, а траектории системы (16.68) с соответствующими начальными условиями после продолжительного переходного процесса стремятся к состоянию равновесия O_3 , которое, напомним, в рассматриваемом диапазоне изменения b оказывается единственным устойчивым.

При $b \approx 48,376$ на месте бывшего аттрактора A_2 возникает устойчивый цикл (см. рис. 16.8, отвечающий значению $b = 48,39$), который при последующем увеличении b претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода (первая бифуркация происходит при $b \approx 48,716$, вторая — при $b \approx 48,817$, третья — при $b \approx 48,84$ и т.д.). В результате по фейгенбаумовскому сценарию возникает очередной хаотический аттрактор A_3 (см. рис. 16.9, соответствующий случаю $b = 48,86$). Данный аттрактор наблюдается при $48,85 \leq b \leq 48,87$, а график его старшего ляпуновского показателя $\lambda_{\max}(b)$, построенный на указанном отрезке по точкам с шагом 0,0002, приведен на рис. 16.10. Из этого рисунка видно,

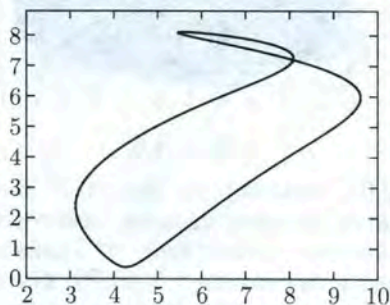


Рис. 16.8

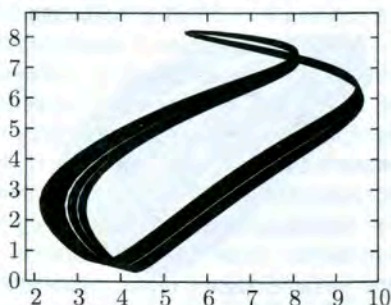


Рис. 16.9

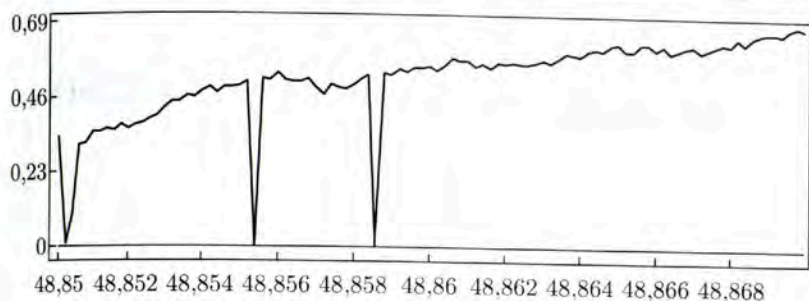


Рис. 16.10

что здесь имеется не менее трех окон периодичности, расположенных в окрестностях точек $b = 48,8502$; $48,8554$; $48,8586$.

При $b \geq 48,88$ происходит окончательное упрощение динамики: хаотический аттрактор A_3 исчезает, а все решения системы (16.68) стремятся к единственному устойчивому состоянию равновесия O_3 .

Подведем некоторый итог. Проведенный численный анализ показывает, что, во-первых, область применимости теоремы 16.2 заведомо не пуста, так как по крайней мере при $p = 2$ и при надлежащем выборе остальных параметров система (16.35) имеет устойчивые циклы. Во-вторых, многочастотный резонанс может приводить к возникновению в уравнении Син-Гордона хаотических колебаний, однако, что типично для данной задачи, последние сосуществуют с устойчивыми квазипериодическими движениями. Действительно, в нормальной форме (16.68) каждый из хаотических аттракторов A_j , $j = 1, 2, 3$, сосуществует, например, с устойчивым состоянием равновесия O_3 .

В заключение остановимся на двух очевидных моментах. Нетрудно заметить, что все полученные выше результаты сохраняются и для независимой от x внешней силы

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^p \alpha_k \cos \varphi_k. \quad (16.70)$$

Единственное отличие заключается в том, что в случае (16.70) номера s_k , $k = 1, \dots, p$, возбуждаемых мод должны быть нечетными. Если же они выбраны таковыми, то за динамику исходной краевой задачи отвечает система вида (16.35), в которой аддитивные добавки $-i\alpha_k/\omega_{s_k}$ заменяются на $-2i\alpha_k/(\pi s_k \omega_{s_k})$.

Другая ситуация, в которой по-прежнему имеем дело с системой (16.35), реализуется в случае, когда в (16.26) вместо граничных условий Дирихле взяты условия

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0,$$

а в (16.27) вместо $\sin s_k x$ фигурируют функции $\cos s_k x$, $k = 1, \dots, p$.