

## Глава 6

# АТТРАКТОРЫ ДИСКРЕТНЫХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

К настоящему времени проблема аттракторов нелинейных гиперболических уравнений в локальной постановке в случае одной или двух пространственных переменных изучена достаточно подробно (см. монографии [56, 73, 103] и обзорные статьи [57, 64, 66]). Анализ различных математических моделей (главным образом, из радиофизики) показал, что, как правило, даже устойчивые двумерные торы наблюдаются в них весьма редко. Типична же ситуация, когда имеются устойчивые циклы, количество которых за счет подходящего выбора параметров может быть сделано сколь угодно большим. Это явление, отмечавшееся еще А. А. Виттом [20], впоследствии было названо *буферностью*.

Результаты данной главы позволяют по-новому взглянуть на природу аттракторов гиперболических краевых задач. А именно, ниже устанавливается следующий весьма неожиданный феномен. Как оказывается, аттракторы нелинейного волнового уравнения могут существенно отличаться от аттракторов его конечномерного аналога, получающегося в результате замены производных по пространственным переменным соответствующими разностными операторами, причем, что характерно, *уменьшение шага дискретизации не только не устраняет, а напротив, усиливает это отличие*.

Изложение ведется на уровне рассмотрения ряда типовых примеров. Точнее говоря, исследуется краевая задача для волнового уравнения ван-дер-полевского типа на отрезке, окружности и в единичном квадрате. Как известно (см. [73, 103]), в случае единичного квадрата при нулевых граничных условиях Неймана и при некоторой общности положения упомянутая задача допускает только устойчивые периодические по времени движения, зависящие от одной пространственной переменной  $x$  или  $y$ , и таких решений может быть достаточно много. При переходе же от нее к соответствующей аппроксимирующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений ситуация принципиально меняется: все периодические движения (за исключением одного или четырех) становятся неустойчивыми, а вместо них появляются устойчивые инвариантные торы размерности 2, 3 и 4. Аналогичные эффекты имеют место и в случае одной пространственной переменной.

## 17. Эффекты дискретизации в пространственно одномерном случае

**17.1. Базовая модель и ее свойства.** В качестве простейшей базовой модели, на которой будет проиллюстрирован интересный нас феномен, возьмем нелинейное телеграфное уравнение:

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a^2 u_{xx}. \quad (17.1)$$

Здесь  $\varepsilon$  — малый положительный параметр,  $a = \text{const} > 0$ ,  $u = u(t, x)$  — вещественная скалярная функция, зависящая от времени  $t \in \mathbb{R}_+$  и пространственной переменной  $x \in \mathbb{R}$ .

Динамические свойства уравнения (17.1), дополненного различными граничными условиями, подробно изучены в монографиях [73, 103]. Поэтому приведем лишь сводку необходимых нам результатов.

Обратимся сначала к краевой задаче вида

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a^2 u_{xx}, \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0 \quad (17.2)$$

на отрезке  $0 \leq x \leq 1$ . Точнее говоря, будем рассматривать динамическую систему, порождаемую решениями этой краевой задачи в фазовом пространстве  $(u, u_t) \in \overset{\circ}{W}_2^2(0, 1) \times W_2^1(0, 1)$ . Здесь, как обычно, через  $\overset{\circ}{W}_2^2$  обозначено замыкание в метрике соболевского пространства  $W_2^2$  линейала гладких функций, удовлетворяющих граничным условиям из (17.2).

Анализ краевой задачи (17.2) существенно опирается на тот факт, что при  $\varepsilon = 0$  ее общее решение записывается в виде тригонометрического ряда

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \xi_k \exp(i\omega_k t) + \bar{\xi}_k \exp(-i\omega_k t) \right] \cos \pi k x, \quad (17.3)$$

где

$$\omega_k = \sqrt{1 + a^2 \pi^2 k^2}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (17.4)$$

а  $\xi_k$ ,  $k \geq 0$ , — произвольные комплексные амплитуды, удовлетворяющие требованию  $\sum_k \omega_k^4 |\xi_k|^2 < \infty$ . Действительно, данное обстоятельство позволяет для изучения аттракторов задачи (17.2) воспользоваться бесконечномерным аналогом асимптотического метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, который уже использовался нами в пп. 5.3, 6.2 и который, напомним, имеет специальное название — *метод квазинормальных форм*. Согласно идеологии указанного метода возможные автоколебательные режимы исходной задачи ищутся в виде асимптотического ряда

$$u = u_0(t, \tau, x) + \varepsilon u_1(t, \tau, x) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (17.5)$$



где первое слагаемое  $u_0$  определяется формулами (17.3), (17.4), в которых комплекснозначные функции  $\xi_k = \xi_k(\tau)$ ,  $k \geq 0$ , пока произвольны.

После подстановки соотношений (17.3), (17.5) в (17.2) и приравнивания коэффициентов при  $\varepsilon$ , для нахождения  $u_1$  получаем линейную неоднородную краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_0 - \frac{u_0^3}{3} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = 0, \quad (17.6)$$

в которой переменная  $\tau$  рассматривается как параметр. Заметим, далее, что необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (17.6) в классе формальных тригонометрических рядов переменных  $\omega_k t$ ,  $k \geq 0$  является отсутствие в ее правой части слагаемых, пропорциональных гармоникам  $\exp(\pm i \omega_k t) \cos \pi k x$ ,  $k \geq 0$ . Поэтому приравняем упомянутые слагаемые к нулю. В результате для амплитуд  $\xi_k$ , которые до этого момента были произвольными, приходим к некоторой счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую принято называть *квазинормальной формой*.

На завершающем этапе распорядимся выбором параметра  $a$  таким образом, чтобы между собственными частотами (17.4) отсутствовали всевозможные резонансные соотношения третьего порядка, т. е. чтобы было исключено одновременное выполнение равенств

$$\omega_{n_0} = m_1 \omega_{n_1} + m_2 \omega_{n_2} + m_3 \omega_{n_3}, \quad n_0 = \pm n_1 \pm n_2 \pm n_3 \quad (17.7)$$

для любого набора индексов  $n_j$ ,  $j = 0, \dots, 3$ , для любого целочисленного вектора  $(m_1, m_2, m_3)$ :  $|m_1| + |m_2| + |m_3| = 3$ , и при любой расстановке знаков «+» и «-» во втором из этих соотношений (тождественные резонансы  $\omega_{n_0} = \omega_{n_0} + \omega_m - \omega_m$  из рассмотрения, как обычно, исключаются). Тогда, как показывает несложная проверка, интересующая нас квазинормальная форма записывается в виде

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi_0}{d\tau} &= \xi_0 \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} |\xi_k|^2 \right], \\ 2 \frac{d\xi_n}{d\tau} &= \xi_n \left[ 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} |\xi_k|^2 - 2|\xi_0|^2 - \frac{3}{4} |\xi_n|^2 \right], \quad n > 0. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Остановимся на объеме информации, которую можно извлечь из системы (17.8). В связи с этим, полагая  $\eta_n = |\xi_n|^2$ ,  $n \geq 0$ , перейдем от нее к более удобной для последующего анализа вещественной амплитудной системе

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \eta_0 \left[ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \eta_k \right], \quad \frac{d\eta_n}{d\tau} = \eta_n \left[ 1 - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \eta_k - 2\eta_0 - \frac{3}{4} \eta_n \right], \quad n > 0, \quad (17.9)$$

в фазовом пространстве  $l$ , состоящем из векторов  $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$  с нормой  $\|\eta\| = \sum_{n \geq 0} \omega_n^4 |\eta_n| < \infty$ . Из установленных в [73] общих теорем следует, что любому гиперболическому положению равновесия получившейся системы, принадлежащему конусу  $K \subset l$  векторов с неотрицательными координатами и имеющему конечное число ненулевых компонент, отвечает инвариантный тор исходной задачи (17.2) с теми же свойствами устойчивости. Размерность этого тора равна количеству ненулевых координат у рассматриваемого состояния равновесия.

Фиксируем произвольно натуральные числа  $n_1 < \dots < n_s$ , где  $s \geq 2$ . Нетрудно увидеть, что данному набору индексов соответствует единственное состояние равновесия системы (17.9) из конуса  $K$  с координатами  $\eta_{n_j} > 0$ ,  $j = 1, \dots, s$ ,  $\eta_m = 0$  при  $m \neq n_j$ . Точнее говоря, для ненулевых компонент этого состояния равновесия справедливы равенства

$$\eta_{n_j} = (s - 1/4)^{-1}, \quad j = 1, \dots, s, \quad (17.10)$$

а вопрос об его устойчивости сводится к аналогичному вопросу в рамках конечномерной системы

$$d\eta/d\tau = \eta - \eta * A\eta, \quad (17.11)$$

где  $\eta = \text{colon}(\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_s})$ ,  $*$  — покомпонатное умножение векторов,

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}. \quad (17.12)$$

В свою очередь, матрица линеаризации системы (17.11) на состоянии равновесия (17.10) получается из (17.12) при умножении на  $-(s - 1/4)^{-1}$ . А так как матрица (17.12) имеет собственные значения  $\lambda = -1/4$  (кратности  $s - 1$ ) и  $\lambda = s - 1/4$ , то рассматриваемое состояние равновесия будет неустойчивым.

Предположим теперь, что в наборе индексов  $n_1 < \dots < n_s$ , где попрежнему  $s \geq 2$ , присутствует значение  $n_1 = 0$ . Тогда такому набору соответствует единственное состояние равновесия из  $K$  с компонентами

$$\begin{aligned} \eta_{n_1} &= (4s - 3)^{-1}, \quad \eta_{n_j} = 4(4s - 3)^{-1}, \quad j = 2, \dots, s; \\ \eta_n &= 0 \quad \text{при } \forall n \neq n_j, \end{aligned} \quad (17.13)$$



за устойчивость которого отвечает аналогичная (17.11) конечномерная система с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 2 & 3/4 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1 & 3/4 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & \dots & 1 & 3/4 \end{pmatrix}. \quad (17.14)$$

Заметим, далее, что матрица линеаризации этой системы на рассматриваемом состоянии равновесия получается из (17.14) в результате умножения первой строки на  $-(4s-3)^{-1}$ , а всех остальных строк — на величину  $-4(4s-3)^{-1}$ . А отсюда несложно вывести, что она имеет собственные значения  $\lambda = (4s-3)^{-1}$  (кратности  $s-1$ ) и  $\lambda = -1$ . Следовательно, как и в предыдущем случае, состояние равновесия (17.13) является неустойчивым.

Итак, все инвариантные торы краевой задачи (17.2), размерности которых больше единицы, неустойчивы. Устойчивыми же здесь оказываются только циклы, которым в системе (17.9) отвечают экспоненциально устойчивые состояния равновесия с одной ненулевой компонентой  $\eta_n = 4/3$ ,  $n \geq 1$ , или  $\eta_0 = 1$ . А так как указанных состояний равновесия счетное число, то в рамках задачи (17.2) реализуется хорошо известное явление буферности. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение [73, 103].

**Теорема 17.1.** *Для любого фиксированного  $n_0 \in \mathbb{N}$  найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  краевая задача (17.2) имеет набор экспоненциально орбитально устойчивых циклов*

$$u = u_n(\varphi, x, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_n(1 + \varepsilon\delta_n(\varepsilon)), \quad n = 0, 1, \dots, n_0. \quad (17.15)$$

Здесь  $u_n(\varphi, x, \varepsilon)$ ,  $u_n(\varphi + 2\pi, x, \varepsilon) \equiv u_n(\varphi, x, \varepsilon)$  и  $\delta_n = \delta_n(\varepsilon)$  — достаточно гладкие по своим переменным функции, причем

$$\delta_n(0) = 0, \quad u_n(\varphi, x, 0) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi \cos \pi n x & \text{при } n > 0, \\ 2 \cos \varphi & \text{при } n = 0. \end{cases} \quad (17.16)$$

Наш следующий объект — краевая задача

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a^2 u_{xx}, \quad u(t, x + 2) \equiv u(t, x) \quad (17.17)$$

на окружности  $x \in \mathbb{R}/2\mathbb{Z}$ . Как и ранее, будем интересоваться аттракторами динамической системы, порождаемой решениями этой краевой задачи в фазовом пространстве  $(u, u_t) \in W_2^2 \times W_2^1$ , где теперь  $W_2^2$ ,  $W_2^1$  — соответствующие соболевские пространства 2-периодических функций.

Для получения как можно более полного представления об автоколебаниях задачи (17.17) снова воспользуемся методом квазинормальных форм. В данном случае ее стационарные режимы будем искать в виде ряда (17.5), в котором

$$u_0 = \xi_0(\tau) \exp(it) + \bar{\xi}_0(\tau) \exp(-it) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\tau, x) \exp(i\omega_k t) + \bar{v}_k(\tau, x) \exp(-i\omega_k t), \quad (17.18)$$

$$v_k(\tau, x) = \xi_{k,1}(\tau) \exp(i\pi k x) + \xi_{k,2}(\tau) \exp(-i\pi k x), \quad k \geq 1,$$

частоты  $\omega_k$  задаются равенствами (17.4), а неизвестные (подлежащие определению в дальнейшем) комплексные амплитуды  $\xi_0(\tau)$ ,  $\xi_{k,j}(\tau)$ ,  $k \geq 1$ ,  $j = 1, 2$ , таковы, что  $\sum_k \omega_k^4 (|\xi_{k,1}|^2 + |\xi_{k,2}|^2) < \infty$ .

Последующий способ действий стандартен: подставляя соотношения (17.5), (17.18) в (17.17) и приравнивая коэффициенты при  $\varepsilon$ , для нахождения  $u_1$  приходим к аналогичной (17.6) линейной краевой задаче, которая, в свою очередь, оказывается разрешимой в классе формальных тригонометрических рядов в том и только в том случае, когда в ее неоднородности отсутствуют гармоники

$$\exp(\pm it), \exp(i\omega_k t \pm i\pi k x), \exp(-i\omega_k t \pm i\pi k x), \quad k \geq 1.$$

Поэтому, как и выше, занулим коэффициенты при указанных гармониках. В итоге для имеющихся в запасе амплитуд  $\xi_0$ ,  $\xi_{k,j}$  получаем соответствующую квазинормальную форму, которую в данном случае не приводим. Обратимся сразу к системе для  $\eta_0 = |\xi_0|^2$ ,  $\eta_{n,j} = |\xi_{n,j}|^2$  и заметим, что при подходящем выборе параметра  $a$ , гарантирующем отсутствие резонансов (17.7), она приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\tau} &= \eta_0 \left( 1 - \eta_0 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} (\eta_{k,1} + \eta_{k,2}) \right), \\ \frac{d\eta_{n,1}}{d\tau} &= \eta_{n,1} \left( 1 - \eta_{n,1} - 2\eta_{n,2} - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} (\eta_{k,1} + \eta_{k,2}) - 2\eta_0 \right), \\ \frac{d\eta_{n,2}}{d\tau} &= \eta_{n,2} \left( 1 - \eta_{n,2} - 2\eta_{n,1} - 2 \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} (\eta_{k,1} + \eta_{k,2}) - 2\eta_0 \right), \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Непосредственная проверка показывает, что система (17.19) имеет счетное число устойчивых состояний равновесия с одной ненулевой координатой, равной единице. А отсюда, снова опираясь на результаты из [73], получаем следующее утверждение, аналогичное теореме 17.1.

**Теорема 17.2.** По любому фиксированному  $n_0 \in \mathbb{N}$  можно указать такое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  краевая задача



(17.17) допускает экспоненциально орбитально устойчивые циклы (бегущие волны)

$$u = u_n(y, \varepsilon), \quad y = \varphi \pm \pi n x, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_n(1 + \varepsilon \delta_n(\varepsilon)), \quad n = 0, 1, \dots, n_0. \quad (17.20)$$

Здесь достаточно гладкие по своим переменным функции  $u_n(y, \varepsilon)$ ,  $\delta_n(\varepsilon)$  обладают свойствами

$$u_n(y + 2\pi, \varepsilon) \equiv u_n(y, \varepsilon), \quad u_n(y, 0) = 2 \cos y, \quad \delta_n(0) = 0. \quad (17.21)$$

В дополнение к сформулированной теореме отметим, что, как и в предыдущем случае, все состояния равновесия системы (17.19) с количеством ненулевых компонент  $s \geq 2$  неустойчивы. Тем самым, неустойчивыми будут и отвечающие им инвариантные торы исходной задачи (17.17).

**17.2. Анализ дискретной модели для отрезка.** Рассмотрим сначала дискретный аналог краевой задачи (17.2). В связи с этим разобьем отрезок  $0 \leq x \leq 1$  на  $N$  частей точками  $x_n = n/N$ ,  $n = 1, \dots, N$ , и введем в рассмотрение функции  $u_n(t) = u(t, x_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ . Заменяя, далее, в (17.2) частные производные по  $x$  разностными соотношениями

$$\begin{aligned} u_{xx}(t, x_n) &\approx N^2(u_{n+1}(t) - 2u_n(t) + u_{n-1}(t)), \\ u_x(t, 0) &\approx N(u_1(t) - u_0(t)), \\ u_x(t, 1) &\approx N(u_{N+1}(t) - u_N(t)) \end{aligned}$$

и полагая  $u_0(t) = u_1(t)$ ,  $u_{N+1}(t) = u_N(t)$ , получаем интересующую нас конечномерную систему, которая имеет вид

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(u_n^2 - 1)\dot{u}_n + u_n = a^2 \Delta_N(u_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (17.22)$$

Здесь точками обозначены производные по  $t$ , а разностный оператор  $\Delta_N$  определен равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_N(u_n) &= N^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \\ n &= 1, \dots, N, \quad u_0 = u_1, \quad u_{N+1} = u_N. \end{aligned} \quad (17.23)$$

При анализе системы (17.22) нам потребуются так называемые разностные моды

$$e_n^k = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2n-1)\right), \quad n = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (17.24)$$

являющиеся аналогами пространственных мод  $\cos \pi k x$ ,  $k \geq 0$ , и обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \Delta_N(e_n^k) &= -\lambda_k e_n^k, \quad \lambda_k = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right), \\ k &= 0, 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17.25)$$

Точнее говоря, для нас существенно то обстоятельство, что общее решение линейной системы, получающейся из (17.22) при  $\varepsilon = 0$ , является линейной комбинацией волновых решений

$$u_n = e_n^k \exp(\pm i \sigma_k t), \quad n = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (17.26)$$

где  $\sigma_k = \sqrt{1 + a^2 \lambda_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

Формулы (17.23)–(17.26) позволяют для исследования аттракторов системы (17.22) воспользоваться асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского. Опираясь на общую идеологию этого метода [15], в данном случае возможные автоколебания системы (17.22) будем искать в виде асимптотических рядов

$$u_n = u_{n,0}(t, \tau) + \varepsilon u_{n,1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.27)$$

коэффициенты которых являются тригонометрическими полиномами переменных  $\sigma_k t$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Что же касается нулевых приближений  $u_{n,0}(t, \tau)$ , то, как обычно, они записываются в виде

$$u_{n,0} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ \xi_k(\tau) \exp(i \sigma_k t) + \bar{\xi}_k(\tau) \exp(-i \sigma_k t) \right] e_n^k, \quad (17.28)$$

где  $\xi_k(\tau)$  — подлежащие определению комплексные амплитуды.

Итак, подставим соотношения (17.27), (17.28) в (17.22) и приравняем коэффициенты при  $\varepsilon$ . В результате приходим к аналогичной (17.6) линейной неоднородной системе

$$\frac{d^2 u_{n,1}}{dt^2} + u_{n,1} - a^2 \Delta_N(u_{n,1}) = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_{n,0} - \frac{u_{n,0}^3}{3} - 2 \frac{\partial u_{n,0}}{\partial \tau} \right), \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.29)$$

в которой, как и ранее, переменная  $\tau$  считается параметром. Ее решение будем искать в классе тригонометрических полиномов той же структуры, что и структура неоднородности, а именно, в виде

$$\begin{aligned} u_{n,1} = & \sum_{k=0}^{N-1} u_{n,1}^k(\tau) \exp(i \sigma_k t) + \overline{u_{n,1}^k}(\tau) \exp(-i \sigma_k t) + \\ & + \sum_{\substack{(m_0, \dots, m_{N-1}): \\ |m_0| + \dots + |m_{N-1}| = 3}} u_{n,1}^{m_0, \dots, m_{N-1}}(\tau) \exp[i(m_0 \sigma_0 + \dots + m_{N-1} \sigma_{N-1})t], \\ & n = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (17.30)$$

В связи с этим предположим, что для любого целочисленного вектора  $(m_0, \dots, m_{N-1}): |m_0| + \dots + |m_{N-1}| = 3$ , выполняются неравенства

$$\sigma_k \neq m_0 \sigma_0 + \dots + m_{N-1} \sigma_{N-1}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (17.31)$$

справедливости которых всегда можно добиться за счет надлежащего выбора параметра  $a$ .

Указанный способ действий сводит проблему нахождения  $u_{n,1}$  к решению линейных неоднородных алгебраических систем для входящих



в (17.30) коэффициентов  $u_{n,1}^k$ ,  $u_{n,1}^{m_0, \dots, m_{N-1}}$ . Начнем с рассмотрения систем для  $u_{n,1}^k$ , которые имеют вид

$$\begin{aligned} -a^2(\lambda_k u_{n,1}^k + \Delta_N(u_{n,1}^k)) &= i\sigma_k \left( \xi_k - 2 \frac{d\xi_k}{d\tau} \right) e_n^k - i\sigma_k (e_n^k)^3 |\xi_k|^2 \xi_k - \\ &- 2i\sigma_k \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} e_n^k (e_n^m)^2 |\xi_m|^2 \xi_k, \quad n = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (17.32)$$

и в силу равенств (17.25) являются вырожденными.

Проблема разрешимости получившихся уравнений (17.32) заключается в том, чтобы выделить и занулить коэффициенты при модах  $e_n^k$  в их неоднородностях. При этом, однако, необходимо учитывать специфику разностных мод, а именно, свойство

$$e_n^{k+N} = -e_n^{N-k}, \quad (17.33)$$

которым не обладают пространственные моды  $\cos \pi kx$ . Действительно, обратимся сначала к равенству

$$(e_n^k)^3 = \frac{3}{4} e_n^k + \frac{1}{4} e_n^{3k} \quad (17.34)$$

и зададимся вопросом о том, чему равен коэффициент  $d_{k,k}$  при  $e_n^k$  в его правой части. Для пространственных мод ответ на этот вопрос очевиден:  $d_{k,k} = 3/4$  при  $k > 0$ ,  $d_{0,0} = 1$ . В случае же разностных мод ситуация несколько иная. Действительно, в силу свойства (17.33) второе слагаемое из (17.34) будет давать вклад в  $d_{k,k}$  при условии, что  $3k = k \pmod{2N}$  или  $3k = -k \pmod{2N}$ . Остается заметить, что первое из этих условий реализуется только при  $k = 0$ , а второе — при  $k = 0$  или  $k = N/2$  (в случае четного  $N$ ). Таким образом, окончательно получаем

$$d_{k,k} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 3/4 & \text{при } 1 \leq k \leq N-1, \quad k \neq N/2, \\ 1/2 & \text{при } k = N/2 \text{ и четном } N. \end{cases} \quad (17.35)$$

Обратимся теперь к равенству

$$2e_n^k (e_n^m)^2 = e_n^k + \frac{1}{2} e_n^{k+2m} + \frac{1}{2} e_n^{k-2m} \quad (17.36)$$

в случае  $m \neq k$  и обозначим через  $d_{k,m}$  коэффициент при  $e_n^k$  в его правой части. Рассуждения, аналогичные изложенным выше, приводят к выводу, что

$$d_{k,m} = \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ 1 & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \quad m \neq k, N-k, \\ 1/2 & \text{при } 1 \leq k \leq N-1, \quad m = N-k, \quad m \neq k. \end{cases} \quad (17.37)$$

Вернемся к уравнениям (17.32). Как уже говорилось ранее, они являются разрешимыми при отсутствии в их неоднородностях слагаемых, пропорциональных модам  $e_n^k$ . Добиться же равенства нулю упомянутых слагаемых удастся за счет надлежащего выбора комплексных амплитуд  $\xi_k(\tau)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , из (17.28). Соответствующие вычисления с учетом формул (17.33)–(17.37) показывают, что на этом пути для  $\xi_k$  получаем систему

$$2 \frac{d\xi_k}{d\tau} = \xi_k \left( 1 - d_{k,k} |\xi_k|^2 - \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} d_{k,m} |\xi_m|^2 \right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (17.38)$$

Закрывая вопрос о разрешимости системы (17.29) в классе тригонометрических полиномов, отметим, что оставшиеся коэффициенты  $u_{n,1}^{m_0, \dots, m_{N-1}}$  из (17.30) удовлетворяют линейным неоднородным алгебраическим системам вида

$$\begin{aligned} [1 - (m_0 \sigma_0 + \dots + m_{N-1} \sigma_{N-1})^2] u_{n,1}^{m_0, \dots, m_{N-1}} - a^2 \Delta_N (u_{n,1}^{m_0, \dots, m_{N-1}}) = \\ = f_n^{m_0, \dots, m_{N-1}}, \end{aligned}$$

каждая из которых в силу условий нерезонансности (17.31) оказывается невырожденной.

Последующий анализ связан с рассмотрением системы (17.38), которую в данном случае уместно назвать *нормальной формой исходной системы* (17.22). Как обычно, полагая  $\eta_k = |\xi_k|^2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , перейдем от нее к соответствующей вещественной амплитудной системе, имеющей вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\tau} &= \eta_0 \left[ 1 - \sum_{m=0}^{N-1} \eta_m \right], \\ \frac{d\eta_k}{d\tau} &= \eta_k \left[ 1 - \frac{3}{4} \eta_k - 2\eta_0 - \frac{1}{2} \eta_{N-k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_m \right], \\ 1 \leq k \leq N-1, \quad k \neq N/2, \end{aligned} \quad (17.39)$$

$$\frac{d\eta_{N/2}}{d\tau} = \eta_{N/2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \eta_{N/2} - 2\eta_0 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_m \right] \quad \text{при четном } N. \quad (17.40)$$

Отдельного упоминания заслуживает вопрос о соответствии между стационарными режимами систем (17.22) и (17.39), (17.40). Из содержащихся в монографиях [14, 15] результатов следует, что любому состоянию равновесия  $(\eta_0^0, \eta_1^0, \dots, \eta_{N-1}^0)$ :  $\eta_k^0 \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , амплитудной системы (17.39), (17.40), экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (17.22) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отвечает инвариантный тор той же устойчивости и размерности  $r$ , равной количеству ненулевых координат  $\eta_k^0$ . Впрочем, для обоснования



этого факта можно воспользоваться в очередной раз построениями из [73], относящимися к более общему бесконечномерному случаю.

Приступим непосредственно к отысканию аттракторов системы (17.39), (17.40). Для этого введем в рассмотрение натуральное  $k_0 = k_0(N)$ , определяющееся по правилу

$$k_0(N) = \begin{cases} [N/2] & \text{при нечетном } N, \\ N/2 - 1 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (17.41)$$

где  $[*]$  — целая часть. Заметим, далее, что интересующая нас система имеет набор экспоненциально устойчивых состояний равновесия  $O_k^{(2)}$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$  с двумя ненулевыми координатами  $\eta_k = \eta_{N-k} = 4/5$ . А отсюда и из упомянутого чуть выше результата о соответствии вытекает следующая

**Теорема 17.3.** Для любого натурального  $N \geq 3$  найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  исходная система (17.22) имеет набор экспоненциально орбитально устойчивых двумерных инвариантных торов  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ , допускающих параметрические представления вида

$$T_k: \begin{aligned} u_n &= \frac{4}{\sqrt{5}} (\cos \varphi_1 e_n^k + \cos \varphi_2 e_n^{N-k}) + \varepsilon \mathcal{U}_{n,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon), \quad n = 1, \dots, N, \\ \frac{d\varphi_1}{dt} &= \sigma_k + \varepsilon^2 \Psi_{1,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \sigma_{N-k} + \varepsilon^2 \Psi_{2,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon). \end{aligned} \quad (17.42)$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi] \pmod{2\pi}$  — отвечающие этим торам циклические координаты, а  $2\pi$ -периодические по  $\varphi_1, \varphi_2$  функции  $\mathcal{U}_{n,k}$ ,  $\Psi_{1,k}$ ,  $\Psi_{2,k}$  достаточно гладко зависят от своих переменных.

В дополнение к установленной теореме отметим, что помимо инвариантных торов система (17.22) имеет также набор циклов, аналогичных циклам (17.15), (17.16) распределенной модели (17.2). В амплитудной системе (17.39), (17.40) этим циклам отвечают неподвижные точки

$$\begin{aligned} O_0^{(1)} &= \{\eta_0 = 1, \eta_m = 0 \text{ при } m > 0\}, \\ O_k^{(1)} &= \{\eta_k = 4/3, \eta_m = 0 \text{ при } m \neq k\}, \\ k &= 1, \dots, N-1, \quad k \neq N/2, \end{aligned} \quad (17.43)$$

а в случае четного  $N$  к ним добавляется еще одна, имеющая вид

$$O_{N/2}^{(1)} = \{\eta_{N/2} = 2, \eta_m = 0 \text{ при } m \neq N/2\}. \quad (17.44)$$

Устойчивыми же среди состояний равновесия (17.43), (17.44) оказываются только  $O_0^{(1)}$  и  $O_{N/2}^{(1)}$ .

Суммируя полученные результаты, проведем сравнительный анализ динамических свойств краевой задачи (17.2) и ее дискретного аналога — системы (17.22). В связи с этим напомним, что аттракторами распределенной модели (17.2) служат циклы (17.15), (17.16), а все ее

инвариантные торы размерности 2 и более экспоненциально неустойчивы. Однако при переходе от (17.2) к дискретной модели (17.22) ситуация принципиально меняется.

Действительно, с одной стороны, аналоги циклов (17.15), (17.16) в системе (17.22) сохраняются, хотя, как уже было сказано выше, за исключением одного или двух случаев (при четном  $N$ ) все они неустойчивы.

С другой стороны, и это самое главное, в дискретной модели (17.22) возникают аттракторы, которым нет аналогов в краевой задаче (17.2). Таковыми являются двумерные инвариантные торы (17.42). Подчеркнем, что данные торы не имеют пределов при  $N \rightarrow \infty$ , так как с ростом  $N$  неограниченно увеличивается по крайней мере одна из фигурирующих в (17.42) частот, а именно,  $\sigma_{N-k}$ . Добавим еще, что в силу (17.41) при  $N \rightarrow \infty$  неограниченно увеличивается и количество самих торов (17.42).

В заключение полученные теоретические результаты проиллюстрируем с помощью численного анализа системы (17.22) при

$$a = 1, \quad N = 10 \quad (17.45)$$

и при значениях  $0,1 \leq \varepsilon \leq 3$ .

Для описания соответствующего численного эксперимента сначала перейдем стандартным образом от (17.22) к системе уравнений первого порядка, имеющей вид

$$\dot{u}_n = v_n + \varepsilon(u_n - u_n^3/3), \quad \dot{v}_n = -u_n + a^2 \Delta_N(u_n), \quad n = 1, \dots, N. \quad (17.46)$$

Применяя, далее, к получившейся системе теорему 17.3, убеждаемся, что при условиях (17.45) и при  $\varepsilon \ll 1$  у нее должно существовать четыре устойчивых двумерных инвариантных тора. Кроме того, полагая в (17.42)  $\varepsilon = 0$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , приходим к выводу, что для начальных условий, соответствующих этим торам, с точностью до  $\varepsilon$  справедливы равенства

$$(u_n, v_n)|_{t=0} = \left( \frac{4}{\sqrt{5}} (e_n^k + e_n^{10-k}), 0 \right), \quad n = 1, \dots, 10, \quad k = 1, \dots, 4. \quad (17.47)$$

Как оказывается, построенная нами асимптотическая теория заведомо работает при  $\varepsilon = 0,1$ . Действительно, в этом случае все четыре устойчивых инвариантных тора удается обнаружить посредством численного интегрирования системы (17.46) с начальными условиями (17.47). Проекция найденных торов на плоскость  $(u_1, u_5)$  представлены на рисунках 17.1–17.4, соответствующих значениям  $k = 1, \dots, 4$ .

При последующем увеличении  $\varepsilon$ , а именно, на промежутке  $0,1 \leq \varepsilon \leq 3$  каждый из устойчивых торов, о которых говорилось выше, сохраняется. Происходит лишь усложнение его геометрической формы. Отметим также, что при увеличении  $N$  динамика системы (17.46) не претерпевает существенных изменений. Например, при  $a = 1$ ,  $N = 20$ ,



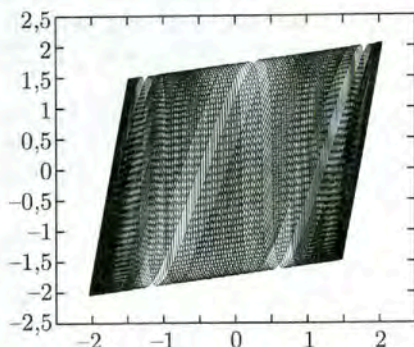


Рис. 17.1

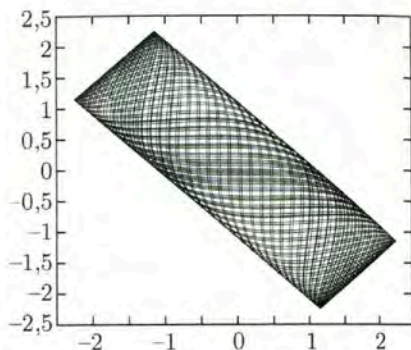


Рис. 17.2

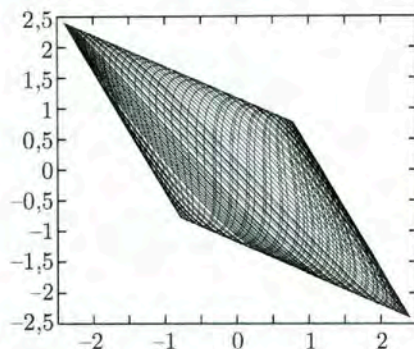


Рис. 17.3

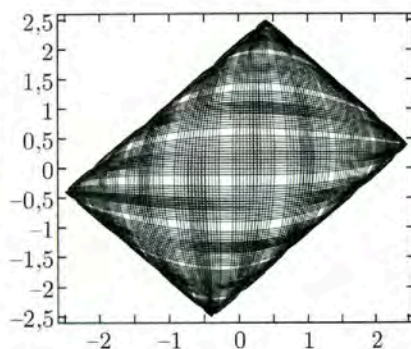


Рис. 17.4

$0,1 \leq \varepsilon \leq 3$  в соответствии с теорией было выявлено девять сосуществующих устойчивых инвариантных двумерных торов (для их поиска привлекались начальные условия, задающиеся аналогичными (17.47) равенствами).

**17.3. Кольцевая дискретная модель.** В данном пункте изучим аттракторы дискретного аналога краевой задачи (17.17). Для его получения разобьем отрезок  $0 \leq x \leq 2$  на  $2N$  частей точками  $x_n = n/N$ ,  $n = 1, \dots, 2N$ , и заменим в (17.17) вторую производную по  $x$  соответствующим разностным выражением. В результате приходим к дискретной модели

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(u_n^2 - 1)\dot{u}_n + u_n = a^2 \Delta_N(u_n), \quad n = 1, \dots, 2N, \quad (17.48)$$

в которой оператор  $\Delta_N$  задается равенствами

$$\begin{aligned} \Delta_N(u_n) &= N^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}), \quad n = 1, \dots, 2N, \\ u_0 &= u_{2N}, \quad u_{2N+1} = u_1. \end{aligned} \quad (17.49)$$

Как и в предыдущем пункте, для исследования автоколебаний системы (17.48) оказываются полезными разностные аналоги пространственных мод  $\exp(\pm i\pi kx)$ ,  $k \geq 0$ , имеющие вид

$$g_n^0 = 1, \quad g_n^N = (-1)^{n-1}, \quad g_n^k = \exp\left(\frac{i\pi k}{2N}(2n-1)\right), \quad (17.50)$$

$$g_n^{-k} = \overline{g_n^k}, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

и удовлетворяющие соотношениям

$$\Delta_N(g_n^N) = -\lambda_N g_n^N, \quad \Delta_N(g_n^{\pm k}) = -\lambda_k g_n^{\pm k}, \quad (17.51)$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1, \quad n = 1, \dots, 2N,$$

где  $\lambda_k = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ .

Действительно, формулы (17.49)–(17.51) позволяют выписать общее решение линейной системы, получающейся из (17.48) при  $\varepsilon = 0$ . Упомянутое решение допускает представление в виде тригонометрического полинома

$$u_n = \xi_0 \exp(i\sigma_0 t) + \bar{\xi}_0 \exp(-i\sigma_0 t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N-1} [(\xi_{k,1} g_n^k + \xi_{k,2} g_n^{-k}) \exp(i\sigma_k t) + (\bar{\xi}_{k,1} g_n^{-k} + \bar{\xi}_{k,2} g_n^k) \exp(-i\sigma_k t)] +$$

$$+ (\xi_N \exp(i\sigma_N t) + \bar{\xi}_N \exp(-i\sigma_N t)) g_n^N, \quad (17.52)$$

где  $\sigma_k = \sqrt{1 + a^2 \lambda_k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ , а  $\xi_0$ ,  $\xi_{k,1}$ ,  $\xi_{k,2}$ ,  $\xi_N$  — произвольные комплексные постоянные.

Обыгрывая существование при  $\varepsilon = 0$  тригонометрического решения (17.52) и снова опираясь на изложенную в [15] методику, для отыскания автоколебательных процессов системы (17.48) привлечем асимптотические ряды

$$u_n = u_{n,0}(t, \tau) + \varepsilon u_{n,1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad n = 1, \dots, 2N. \quad (17.53)$$

Как и ранее, считаем, что нулевые приближения  $u_{n,0}$  задаются равенствами (17.52), в которых амплитуды  $\xi_0$ ,  $\xi_{k,1}$ ,  $\xi_{k,2}$ ,  $\xi_N$  зависят от медленного времени  $\tau$ . Что же касается фигурирующих в (17.53) функций  $u_{n,1}$ , то они имеют аналогичный (17.30) вид

$$u_{n,1} = \sum_{k=0}^N u_{n,1}^k(\tau) \exp(i\sigma_k t) + \overline{u_{n,1}^k}(\tau) \exp(-i\sigma_k t) +$$

$$+ \sum_{\substack{(m_0, \dots, m_N): \\ |m_0| + \dots + |m_N| = 3}} u_{n,1}^{m_0, \dots, m_N}(\tau) \exp[i(m_0 \sigma_0 + \dots + m_N \sigma_N) t],$$

$$n = 1, \dots, 2N. \quad (17.54)$$

Считаем также, что собственные частоты  $\sigma_0, \dots, \sigma_N$  удовлетворяют условиям нерезонансности, подобным (17.31).



После подстановки выражений (17.53) в (17.48) и приравнивания коэффициентов при  $\varepsilon$  для  $u_{n,1}$  получается линейная неоднородная система вида (17.29), решение которой ищем в классе тригонометрических полиномов (17.54). В результате, как и в предыдущем пункте, проблема сводится к определению коэффициентов  $u_{n,1}^k, u_{n,1}^{m_0, \dots, m_N}$  из соответствующих линейных неоднородных алгебраических систем. Отметим сразу, что в силу упомянутых чуть выше условий нерезонансности все системы для  $u_{n,1}^{m_0, \dots, m_N}$  оказываются невырожденными. Системы же для  $u_{n,1}^k, k = 0, 1, \dots, N$ , напротив, с необходимостью вырождены и имеют аналогичный (17.32) вид:

$$-a^2 \Delta_N(u_{n,1}^0) = i\xi_0 \left( 1 - |\xi_0|^2 - 2|\xi_N|^2 - 2 \sum_{m=1}^{N-1} |v_n^m|^2 \right) - 2i \frac{d\xi_0}{d\tau},$$

$$n = 1, \dots, 2N; \quad (17.55)$$

$$-a^2 (\lambda_k u_{n,1}^k + \Delta_N(u_{n,1}^k)) =$$

$$= i\sigma_k v_n^k \left( 1 - |v_n^k|^2 - 2|\xi_0|^2 - 2|\xi_N|^2 - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N-1} |v_n^m|^2 \right) - 2i\sigma_k \frac{dv_n^k}{d\tau},$$

$$n = 1, \dots, 2N, \quad k = 1, \dots, N-1; \quad (17.56)$$

$$-a^2 (\lambda_N u_{n,1}^N + \Delta_N(u_{n,1}^N)) =$$

$$= i\sigma_N \xi_N \left( 1 - |\xi_N|^2 - 2|\xi_0|^2 - 2 \sum_{m=1}^{N-1} |v_n^m|^2 \right) g_n^N - 2i\sigma_N \frac{d\xi_N}{d\tau} g_n^N,$$

$$n = 1, \dots, 2N, \quad (17.57)$$

где  $v_n^k = \xi_{k,1} g_n^k + \xi_{k,2} g_n^{-k}, k = 1, \dots, N-1$ .

Вопрос о разрешимости системы (17.55) сводится к нахождению и приравниванию к нулю коэффициента при нулевой моде  $g_n^0 = 1$  в ее правой части. На этом пути получается уравнение для  $\xi_0$ , имеющее вид

$$2 \frac{d\xi_0}{d\tau} = \xi_0 \left( 1 - |\xi_0|^2 - 2|\xi_N|^2 - 2 \sum_{m=1}^{N-1} (|\xi_{m,1}|^2 + |\xi_{m,2}|^2) \right). \quad (17.58)$$

Аналогичным образом, приравнивая к нулю коэффициент при моде  $g_n^N$  в правой части из (17.57), приходим к уравнению

$$2 \frac{d\xi_N}{d\tau} = \xi_N \left( 1 - |\xi_N|^2 - 2|\xi_0|^2 - 2 \sum_{m=1}^{N-1} (|\xi_{m,1}|^2 + |\xi_{m,2}|^2) \right). \quad (17.59)$$

Фиксируем, далее, натуральное  $k, 1 \leq k \leq N-1$ , и рассмотрим линейную систему из (17.56) с номером  $k$ . Из свойств (17.51) оператора  $\Delta_N$  заключаем, что она разрешима в том и только в том случае, когда в ее правой части отсутствуют слагаемые, пропорциональные модам  $g_n^{\pm k}$ . Поэтому необходимо приравнять коэффициенты  $c_{\pm k}$  при

упомянутых модах к нулю. Следует, однако, помнить, что в силу аналогичных (17.33) свойств

$$g_n^{s+N} = -g_n^{N-s}, \quad s \in \mathbb{Z}, \quad (17.60)$$

вклад в  $c_{\pm k}$  могут давать слагаемые, пропорциональные модам  $g_n^{\pm 3k}$ ,  $g_n^{k \pm 2m}$ ,  $g_n^{-k \pm 2m}$ ,  $m \neq k$ . Последнее имеет место в случае выполнения соответствующих равенств

$$\pm 3k = k \pmod{2N}, \quad k \pm 2m = k \pmod{2N}, \quad k \pm 2m = -k \pmod{2N}. \quad (17.61)$$

Несложный анализ показывает, что из (17.61) разрешимы только уравнения  $-3k = k \pmod{2N}$  (при четном  $N$ ) и  $k + 2m = -k \pmod{2N}$ , а их решения задаются формулами  $k = N/2$  и  $m = N - k$ . Учитывая это обстоятельство и опираясь на соотношения (17.60), из условий разрешимости  $c_{\pm k} = 0$  систем (17.56) после некоторых преобразований выводим недостающие уравнения для  $\xi_{k,1}$ ,  $\xi_{k,2}$ . Упомянутые уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\xi_{k,1}}{d\tau} &= \xi_{k,1} \left( 1 - |\xi_{k,1}|^2 - 2|\xi_{k,2}|^2 - 2|\xi_0|^2 - 2|\xi_N|^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N-1} (|\xi_{m,1}|^2 + |\xi_{m,2}|^2) \right) + d_k \xi_{N-k,2} \bar{\xi}_{N-k,1} \xi_{k,2}, \\ 2 \frac{d\xi_{k,2}}{d\tau} &= \xi_{k,2} \left( 1 - |\xi_{k,2}|^2 - 2|\xi_{k,1}|^2 - 2|\xi_0|^2 - 2|\xi_N|^2 - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N-1} (|\xi_{m,1}|^2 + |\xi_{m,2}|^2) \right) + d_k \xi_{N-k,1} \bar{\xi}_{N-k,2} \xi_{k,1}, \end{aligned} \quad (17.62)$$

где  $d_k = 2$  при  $k = 1, \dots, N-1$ ,  $k \neq N/2$ , и  $d_{N/2} = 1$  в случае четного  $N$ .

На следующем этапе обратимся к системе (17.58), (17.59), (17.62), являющейся нормальной формой исходной системы (17.48), и поставим вопрос об ее аттракторах. Отметим в первую очередь, что она допускает набор трехмерных тороидальных многообразий  $\tilde{T}_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ , целиком состоящих из неподвижных точек. Здесь  $k_0$  задано равенством (17.41), а сами многообразия  $\tilde{T}_k$  имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{k,1} &= \exp(i\varphi_1)/\sqrt{5}, \quad \xi_{N-k,1} = \exp(i\varphi_2)/\sqrt{5}, \quad \xi_{k,2} = \exp(i\varphi_3)\xi_{k,1}, \\ \xi_{N-k,2} &= \exp(-i\varphi_3)\xi_{N-k,1}, \quad \xi_0 = \xi_N = 0, \\ \xi_{m,1} &= \xi_{m,2} = 0 \quad \forall m \neq k, N-k, \end{aligned} \quad (17.63)$$

где  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  — произвольные вещественные постоянные.

Для исследования устойчивости введенных выше многообразий дополним уравнения (17.58), (17.59), (17.62) соответствующими комплексно сопряженными уравнениями и линеаризуем получившуюся



систему на произвольном состоянии равновесия из семейства (17.63). В результате для переменных

$$h_0, \bar{h}_0, h_N, \bar{h}_N, h_{m,1}, \bar{h}_{m,1}, h_{m,2}, \bar{h}_{m,2}, m = 1, \dots, N-1, \quad (17.64)$$

получим линейную систему с треугольной матрицей. Точнее говоря, если положить

$$v = \text{colop} (h_{k,1}, \bar{h}_{k,1}, h_{k,2}, \bar{h}_{k,2}, h_{N-k,1}, \bar{h}_{N-k,1}, h_{N-k,2}, \bar{h}_{N-k,2}),$$

а оставшиеся компоненты из (17.64) записать в виде вектора  $w$ , то в новых переменных  $v, w$  после замен

$$\tau/5 \rightarrow \tau, \quad h_{k,1} \exp(-i\varphi_1) \rightarrow h_{k,1}, \quad h_{k,2} \exp(-i(\varphi_1 + \varphi_3)) \rightarrow h_{k,2},$$

$$h_{N-k,1} \exp(-i\varphi_2) \rightarrow h_{N-k,1}, \quad h_{N-k,2} \exp(i(\varphi_3 - \varphi_2)) \rightarrow h_{N-k,2}$$

и аналогичных комплексно сопряженных замен для  $\bar{h}_{k,j}, \bar{h}_{N-k,j}, j = 1, 2$ , интересующая нас система примет вид

$$dv/d\tau = Av + Bw, \quad dw/d\tau = -3w. \quad (17.65)$$

Здесь матрица  $A$  имеет блочную структуру:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_2 \\ A_2 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_3 & A_2 & A_1 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \quad (17.66)$$

где

$$A_1 = -\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (17.67)$$

а явное выражение для матрицы  $B$  нам не потребуется.

Нетрудно заметить, что система (17.65) обладает экспоненциально устойчивым инвариантным многообразием  $\{(v, w): w = 0\}$ , движения на котором описываются системой  $dv/d\tau = Av$ . А это значит, что за устойчивость исходного тороидального многообразия (17.63) в конечном итоге отвечает расположение спектра восьмимерной матрицы  $A$ . Соответствующие вычисления с использованием формул (17.66), (17.67) показывают, что данная матрица имеет трехкратное нулевое собственное значение (это естественно, поскольку (17.65) — линеаризация на трехмерном торе). Остальной же спектр  $A$  определяется из уравнения  $\lambda^5 + 24\lambda^4 + 200\lambda^3 + 704\lambda^2 + 1104\lambda + 640 = 0$ , корни которого в силу критерия Рауса–Гурвица лежат в левой комплексной полуплоскости:  $\{\lambda: \text{Re } \lambda < 0\}$ .

Итак, установлено, что все инвариантные торы (17.63) системы (17.58), (17.59), (17.62) экспоненциально орбитально устойчивы. А отсюда, опираясь в очередной раз на результаты из [73], получаем следующее утверждение, аналогичное теореме 17.3.

**Теорема 17.4.** По любому натуральному  $N \geq 3$  можно указать такое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  система (17.48) допускает набор экспоненциально орбитально устойчивых трехмерных инвариантных торов  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ . Для этих торов справедливы параметрические представления

$$u_n = \frac{2}{\sqrt{5}} \left[ \cos \left( \varphi_1 + \frac{\pi k}{2N} (2n-1) \right) + \cos \left( \varphi_1 + \varphi_3 - \frac{\pi k}{2N} (2n-1) \right) + \right. \\ \left. + \cos \left( \varphi_2 + \frac{\pi(N-k)}{2N} (2n-1) \right) + \cos \left( \varphi_2 - \varphi_3 - \frac{\pi(N-k)}{2N} (2n-1) \right) \right] + \\ + \varepsilon \mathcal{U}_{n,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon), \quad n = 1, \dots, 2N, \quad k = 1, \dots, k_0(N), \quad (17.68)$$

а движения на них описываются соответствующими системами уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} &= \sigma_k + \varepsilon^2 \Psi_{1,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi_2}{dt} &= \sigma_{N-k} + \varepsilon^2 \Psi_{2,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon), \\ \frac{d\varphi_3}{dt} &= \varepsilon^2 \Psi_{3,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon). \end{aligned} \quad (17.69)$$

Здесь, как и в (17.42),  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [0, 2\pi] \pmod{2\pi}$  — циклические координаты, а функции  $\mathcal{U}_{n,k}$ ,  $\Psi_{j,k}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , достаточно гладко зависят от  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varepsilon)$  и являются  $2\pi$ -периодическими по  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Отдельно остановимся на свойствах симметрии, характерных для кольцевой системы (17.48). В связи с этим будем считать, что любое ее решение  $u_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, 2N$ , продолжено по  $n$  на всю целочисленную решетку  $\mathbb{Z}$  согласно закону периодичности  $u_{n \pm 2N}(t) = u_n(t)$ . Тогда наряду с решением  $\{u_n(t), n \in \mathbb{Z}\}$  данной системы ее решениями являются  $\{u_{n+s}(t), n \in \mathbb{Z}\}$  при любом фиксированном  $s \in \mathbb{Z}$ , а также  $\{u_{N+1-n}(t), n \in \mathbb{Z}\}$ . Приведенные свойства означают, что кольцевая модель (17.48) выдерживает поворотную и зеркальную симметрии.

Как оказывается, тory  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ , о которых говорится в теореме 17.4, инвариантны по отношению к описанным выше симметриям. Точнее говоря, представление (17.68) и система (17.69) не меняются при независимом выполнении замен

$$\begin{aligned} n &\rightarrow N+1-n, & \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_1 + \varphi_3 - \pi k, \\ \tilde{\varphi}_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 - \pi(N-k), & \tilde{\varphi}_3 &= -\varphi_3; \end{aligned} \quad (17.70)$$

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n+s, & \tilde{\varphi}_1 &= \varphi_1 + \frac{\pi k s}{N}, & \tilde{\varphi}_2 &= \varphi_2 + \frac{\pi(N-k)s}{N}, \\ \tilde{\varphi}_3 &= \varphi_3 - \frac{2\pi k s}{N}, & s &\in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (17.71)$$

и при последующих переобозначениях  $\tilde{\varphi}_j \rightarrow \varphi_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .



Для обоснования перечисленных фактов достаточно отметить, что, во-первых, каждая из замен (17.70), (17.71) переводит тор  $T_k$  в некоторое тороидальное многообразие  $T_k^*$ , также являющееся инвариантным для траекторий системы (17.48); во-вторых, как показывает непосредственная проверка, при  $\varepsilon = 0$  соотношения (17.68), (17.69) обладают требуемыми свойствами, т.е. остаются неизменными при заменах (17.70), (17.71). А отсюда в силу единственности тора с фиксированным нулевым приближением (17.52), (17.63) заключаем, что  $T_k = T_k^*$ .

Подводя итог, добавим, что в нормальной форме (17.58), (17.59), (17.62) помимо инвариантных торов (17.63) существуют и другие аттракторы. Таковыми являются однопараметрические семейства ее состояний равновесия с одной ненулевой компонентой  $\xi_m = \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $m = 0, N$ , или  $\xi_{m,j} = \exp(i\alpha)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $m = 1, \dots, N-1$ ,  $m \neq N/2$ ,  $j = 1, 2$ . В исходной системе (17.48) этим семействам отвечают устойчивые циклы, инвариантные по отношению к поворотной симметрии. Указанные циклы представляют собой аналоги устойчивых бегущих волн (17.20), (17.21) распределенной модели (17.17). Что же касается трехмерных торов (17.68), (17.69), то, напротив, аналогичных им аттракторов в краевой задаче (17.17) нет.

**17.4. Дискретное уравнение Гинзбурга–Ландау.** Убедимся теперь, что обнаруженные выше динамические эффекты, связанные с дискретизацией по пространству, могут наблюдаться при определенных условиях и в параболических системах типа реакция–диффузия. В связи с этим рассмотрим систему (8.15), являющуюся дискретным аналогом краевой задачи (8.8) для уравнения Гинзбурга–Ландау. Далее, положим в ней  $\nu c_1 = 1/\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $c_2 = c$ ,  $c = \text{const} \in \mathbb{R}$ , и выполним замену времени  $t/\varepsilon \rightarrow t$ . В результате приходим к системе

$$\dot{w}_n + i \mathcal{L} w_n = \varepsilon (\nu \mathcal{L} w_n + w_n - d |w_n|^2 w_n), \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.72)$$

где  $d = 1 + ic$ ,  $\mathcal{L} w_n = N^2(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$ ,  $w_0 = w_1$ ,  $w_{N+1} = w_N$ . Как будет показано ниже, при всех достаточно малых  $\varepsilon$ ,  $\nu$  аттракторами получившейся системы являются синхронный цикл  $w_1 = \dots = w_N = \exp(-i\varepsilon c t)$  и двумерные инвариантные торы, количество которых неограниченно увеличивается с ростом  $N$  и уменьшением  $\nu$ .

При анализе системы (17.72) существенно то обстоятельство, что общее решение линейной системы, получающейся из нее при  $\varepsilon = 0$ , допускает представление

$$w_n = \sum_{k=0}^{N-1} \xi_k e_n^k \exp(i\omega_k t), \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.73)$$

где  $e_n^k$  — дискретные пространственные моды (17.24), частоты  $\omega_k$  задаются равенствами  $\omega_k = \lambda_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$  (см. (17.25)), а  $\xi_k$  — произвольные комплексные постоянные.

Формула (17.73) позволяет для исследования аттракторов системы (17.72) воспользоваться в очередной раз асимптотическим методом Крылова–Боголюбова–Митропольского. Как и в случае двух предыдущих дискретных моделей (17.22), (17.48), возможные автоколебания системы (17.72) будем искать в виде асимптотических рядов

$$w_n = w_{n,0}(t, \tau) + \varepsilon w_{n,1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad n = 1, \dots, N. \quad (17.74)$$

Как обычно, предполагаем, что коэффициенты этих рядов являются тригонометрическими полиномами переменных  $\omega_k t$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , а нулевые приближения  $w_{n,0}(t, \tau)$  задаются равенствами (17.73), в которых  $\xi_k = \xi_k(\tau)$  — подлежащие определению комплексные амплитуды.

Итак, подставим соотношения (17.74) в (17.72) и приравняем коэффициенты при  $\varepsilon$ . В результате для  $w_{n,1}$  приходим к линейной неоднородной системе

$$\frac{dw_{n,1}}{dt} + i \mathcal{L} w_{n,1} = f_n(t, \tau), \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.75)$$

где  $f_n = -\partial w_{n,0}/\partial \tau + \nu \mathcal{L} w_{n,0} + w_{n,0} - d|w_{n,0}|^2 w_{n,0}$ , а переменная  $\tau$  считается параметром. Ее решение будем искать в классе тригонометрических полиномов той же структуры, что и неоднородность, а именно, в виде:

$$w_{n,1} = \sum_{k=0}^{N-1} w_{n,1}^k(\tau) \exp(i\omega_k t) + \sum_{(k_1, k_2, k_3) \in \Lambda} w_{n,1}^{k_1, k_2, k_3}(\tau) \exp(i(\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3})t), \quad (17.76)$$

где через  $\Lambda$  обозначена совокупность наборов индексов

$$(k_1, k_2, k_3): \quad 0 \leq k_j \leq N-1, \quad j = 1, 2, 3, \quad k_1 \neq k_3, \quad k_2 \neq k_3,$$

для которых  $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} - \omega_{k_3} \neq \omega_k$  при всех  $0 \leq k \leq N-1$ .

Указанный способ действий сводит проблему нахождения  $w_{n,1}$  к решению линейных неоднородных алгебраических систем для входящих в (17.76) коэффициентов  $w_{n,1}^k$ ,  $w_{n,1}^{k_1, k_2, k_3}$ . Как обычно, для  $w_{n,1}^{k_1, k_2, k_3}$  на этом пути получаем невырожденные системы, из которых данные коэффициенты однозначно определяются. Системы же для  $w_{n,1}^k$ , напротив, с необходимостью вырождены и имеют вид

$$\begin{aligned} i(\mathcal{L} w_{n,1}^k + \omega_k w_{n,1}^k) &= g_n^k(\tau), \\ g_n^k &= \left( (1 - \nu \omega_k) \xi_k - \frac{d\xi_k}{d\tau} \right) e_n^k - d(e_n^k)^3 |\xi_k|^2 \xi_k - \\ &- 2d \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} e_n^m (e_n^m)^2 |\xi_m|^2 \xi_k - d \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \Omega_k} e_n^{m_1} e_n^{m_2} e_n^{m_3} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \bar{\xi}_{m_3}, \\ &k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (17.77)$$



где  $\Omega_k$  — резонансное множество наборов индексов  $\{(m_1, m_2, m_3): 0 \leq m_j \leq N-1, j=1, 2, 3; m_1 \neq m_3, m_2 \neq m_3, \omega_{m_1} + \omega_{m_2} - \omega_{m_3} = \omega_k\}$ . Что же касается условий разрешимости систем (17.77), то они задаются равенствами

$$l(g_n^k e_n^k) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g_n^k e_n^k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (17.78)$$

Получившиеся соотношения (17.78) будем рассматривать как систему уравнений для определения комплексных амплитуд  $\xi_k(\tau)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , которые до этого момента были произвольными. Несложный подсчет с использованием известных свойств

$$l((e_n^0)^2) = 1, \quad l((e_n^k)^2) = 1/2, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad l(e_n^k e_n^m) = 0 \quad \text{при } k \neq m \quad (17.79)$$

показывает, что интересующая нас система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_k}{d\tau} = & (1 - \nu\omega_k)\xi_k - d \left( \alpha_{k,k} |\xi_k|^2 + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq k}}^{N-1} \alpha_{k,m} |\xi_m|^2 \right) \xi_k - \\ & - d \sum_{(m_1, m_2, m_3) \in \Omega_k} \alpha_k^{m_1, m_2, m_3} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \bar{\xi}_{m_3}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (17.80)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{k,k} &= c_k l((e_n^k)^4), \quad \alpha_{k,m} = 2c_k l((e_n^m e_n^k)^2), \\ \alpha_k^{m_1, m_2, m_3} &= c_k l(e_n^{m_1} e_n^{m_2} e_n^{m_3} e_n^k), \\ c_0 &= 1, \quad c_k = 2 \quad \text{при } 1 \leq k \leq N-1. \end{aligned} \quad (17.81)$$

Отметим, что система (17.80) в силу ее вывода представляет собой укороченную нормальную форму исходной системы (17.72). Следовательно, она содержит определенную информацию об аттракторах последней. Однако для получения этой информации сначала необходимо установить следующее утверждение.

**Теорема 17.5.** *Справедливы равенства*

$$\begin{aligned} \alpha_{k,k} &= \begin{cases} 1 & \text{при } k = 0, \\ 3/4 & \text{при } k \geq 1, k \neq N/2, \\ 1/2 & \text{при } k = N/2 \text{ и четном } N, \end{cases} \\ \alpha_{k,m} &= \begin{cases} 2 & \text{при } m = 0, k \geq 1, \\ 1 & \text{при } k \geq 0, m \neq k, N-k, \\ 1/2 & \text{при } k \geq 1, m = N-k, \end{cases} \end{aligned} \quad (17.82)$$

$$\alpha_k^{m_1, m_2, m_3} = 0 \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, N-1 \text{ и } \forall (m_1, m_2, m_3) \in \Omega_k. \quad (17.83)$$

**Доказательство.** Из соотношений (17.79), (17.81) заключаем, что величины  $\alpha_{k,k}$ ,  $\alpha_{k,m}$  представляют собой коэффициенты при моде  $e_n^k$  в правых частях равенств

$$(e_n^k)^3 = \frac{3}{4} e_n^k + \frac{1}{4} e_n^{3k}, \quad 2e_n^k (e_n^m)^2 = e_n^k + \frac{1}{2} e_n^{k+2m} + \frac{1}{2} e_n^{k-2m}. \quad (17.84)$$

Далее, в силу характерного для разностных мод (17.24) свойства (17.33) слагаемые из (17.84), пропорциональные модам  $e_n^{3k}$  и  $e_n^{k\pm 2m}$ , будут давать вклад в  $\alpha_{k,k}$  и  $\alpha_{k,m}$  при выполнении соответствующих условий:

$$3k = \pm k \pmod{2N}, \quad k + 2m = \pm k \pmod{2N}, \quad k - 2m = \pm k \pmod{2N}. \quad (17.85)$$

Однако из всей совокупности (17.85) реализуются только равенства  $3k = \pm k$  (при  $k = 0$ ),  $3k = 2N - k$  (при  $k = N/2$  и четном  $N$ ),  $k + 2m = 2N - k$  (при  $m = N - k$ ,  $k = 1, \dots, N - 1$ ). А отсюда и из (17.33) получаем требуемые формулы (17.82).

Для обоснования свойств (17.83) привлечем соотношения

$$e_n^{m_1} e_n^{m_2} e_n^{m_3} = \frac{1}{4} (e_n^{m_1+m_2+m_3} + e_n^{m_1+m_2-m_3} + e_n^{m_1-m_2+m_3} + e_n^{m_1-m_2-m_3}). \quad (17.86)$$

Заметим, далее, что в силу (17.79), (17.81), (17.86) коэффициент  $\alpha_k^{m_1, m_2, m_3}$  может быть отличен от нуля лишь в том случае, когда набор индексов  $(m_1, m_2, m_3) \in \Omega_k$  удовлетворяет хотя бы одному из следующих дополнительных ограничений:

$$\begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= \pm k \pmod{2N}, & m_1 + m_2 - m_3 &= \pm k \pmod{2N}, \\ m_1 - m_2 + m_3 &= \pm k \pmod{2N}, & m_1 - m_2 - m_3 &= \pm k \pmod{2N}. \end{aligned} \quad (17.87)$$

В свою очередь, каждое из равенств (17.87), объединенное с резонансным соотношением  $\omega_{m_1} + \omega_{m_2} - \omega_{m_3} = \omega_k$ , приводит к соответствующему условию:

$$\begin{aligned} P(m_1, m_2, m_3) &= 0, & P(m_1, m_2, -m_3) &= 0, \\ P(m_1, -m_2, m_3) &= 0, & P(m_1, -m_2, -m_3) &= 0, \end{aligned} \quad (17.88)$$

где

$$P(x, y, z) = \sin \frac{\pi(y+z)}{2N} \cdot \sin \frac{\pi(x+z)}{2N} \cdot \cos \frac{\pi(x+y)}{2N}.$$

При анализе ограничений (17.88) следует учесть, что в силу очевидных оценок

$$0 < \frac{\pi|m_2 \pm m_3|}{2N} < \pi, \quad 0 < \frac{\pi|m_1 \pm m_3|}{2N} < \pi, \quad 0 \leq \frac{\pi|m_1 - m_2|}{2N} < \frac{\pi}{2}$$



выполняться могут только первые два из них и только в случае  $\cos \frac{\pi(m_1 + m_2)}{2N} = 0$ . Таким образом, интересующие нас наборы индексов имеют вид

$$(m_1, m_2, m_3): m_1 + m_2 = N, m_3 = N - k, k \geq 1,$$

и удовлетворяют равенствам  $m_1 + m_2 + m_3 = 2N - k$ ,  $m_1 + m_2 - m_3 = k$ . А отсюда и из (17.79), (17.81), (17.33), (17.86) выводим, что

$$\begin{aligned} \alpha_k^{m_1, m_2, m_3} &= \frac{c_k}{4} \left( l(e_n^{m_1+m_2+m_3} e_n^k) + l(e_n^{m_1+m_2-m_3} e_n^k) \right) = \\ &= \frac{c_k}{4} \left( l(e_n^{2N-k} e_n^k) + l(e_n^k e_n^k) \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема 17.5 доказана.

Остановимся на вопросе о связи между стационарными режимами нормальной формы (17.80) и исходной системы (17.72). С этой целью выполним в (17.80) нормировку времени  $2\tau \rightarrow \tau$  и положим  $\xi_k = \sqrt{\eta_k} \exp(i\psi_k)$ ,  $\eta_k \geq 0$ ,  $0 \leq \psi_k \leq 2\pi \pmod{2\pi}$ . В результате получим  $2N$ -мерную систему для  $\eta_k$ ,  $\psi_k$ , от которой в силу равенств (17.82), (17.83) отщепляется аналогичная (17.39), (17.40)  $N$ -мерная амплитудная система

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_0}{d\tau} &= \eta_0 \left[ 1 - \sum_{m=0}^{N-1} \eta_m \right], \\ \frac{d\eta_k}{d\tau} &= \eta_k \left[ 1 - \nu \omega_k - \frac{3}{4} \eta_k - 2\eta_0 - \frac{1}{2} \eta_{N-k} - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_m \right], \quad (17.89) \\ 1 &\leq k \leq N-1, k \neq N/2, \end{aligned}$$

$$\frac{d\eta_{N/2}}{d\tau} = \eta_{N/2} \left[ 1 - \nu \omega_{N/2} - \frac{1}{2} \eta_{N/2} - 2\eta_0 - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_m \right] \quad \text{при четном } N. \quad (17.90)$$

Добавим еще, что в данном случае очевидным образом остается в силе стандартный результат о соответствии. А именно, любому состоянию равновесия  $(\eta_0^0, \eta_1^0, \dots, \eta_{N-1}^0)$ :  $\eta_k^0 \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ , получившейся системы, экспоненциально устойчивому или дихотомичному, в исходной системе (17.72) при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  отвечает инвариантный тор той же устойчивости и размерности  $r$ , равной количеству ненулевых координат  $\eta_k^0$ .

Приступим непосредственно к отысканию аттракторов системы (17.89), (17.90). Отметим сразу, что она допускает устойчивое состояние равновесия с одной ненулевой координатой  $\eta_0 = 1$ , которому в системе (17.72) соответствует устойчивый синхронный цикл. Однако при достаточно малых  $\nu$  у амплитудной системы существуют и более

интересные аттракторы. Для того чтобы убедиться в этом, в предположении  $N \geq 3$  введем в рассмотрение величину

$$\nu_N^0 = \frac{1}{12N^2 - 5\omega_1}. \quad (17.91)$$

Как показывает непосредственная проверка, при любом фиксированном  $\nu \in [0, \nu_N^0)$  интересующая нас система имеет набор экспоненциально устойчивых состояний равновесия  $O_k^{(2)}$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ , с координатами  $\eta_k = \eta_k^*$ ,  $\eta_{N-k} = \eta_{N-k}^*$ ,  $\eta_m = 0$  при  $m \neq k, N-k$ , где  $k_0(N)$  — величина (17.41),

$$\eta_k^* = \frac{4}{5} (1 + \nu(2\omega_{N-k} - 3\omega_k)) > 0, \quad \eta_{N-k}^* = \frac{4}{5} (1 + \nu(2\omega_k - 3\omega_{N-k})) > 0.$$

А отсюда и из упомянутого чуть выше результата о соответствии вытекает следующая

**Теорема 17.6.** Для любых  $N \geq 3$  и  $\nu_0 \in (0, \nu_N^0)$  найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(N, \nu_0) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $0 \leq \nu \leq \nu_0$  система (17.72) имеет набор экспоненциально орбитально устойчивых двумерных инвариантных торов  $T_k$ ,  $k = 1, \dots, k_0(N)$ . Эти торы допускают параметрические представления

$$T_k: u_n = \sqrt{\eta_k^*} e_n^k \exp(i\varphi_1) + \sqrt{\eta_{N-k}^*} e_n^{N-k} \exp(i\varphi_2) + \varepsilon \mathcal{U}_{n,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon, \nu), \quad n = 1, \dots, N, \quad (17.92)$$

а движения на них описываются системами уравнений вида

$$\dot{\varphi}_j = \sigma_{j,k} - \varepsilon c(1 - \nu \sigma_{j,k}) + \varepsilon^2 \Psi_{j,k}(\varphi_1, \varphi_2, \varepsilon, \nu), \quad j = 1, 2. \quad (17.93)$$

Здесь  $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi] \pmod{2\pi}$  — отвечающие данным торам циклические координаты,  $\sigma_{1,k} = \omega_k$ ,  $\sigma_{2,k} = \omega_{N-k}$ , а  $2\pi$ -периодические по  $\varphi_1, \varphi_2$  функции  $\mathcal{U}_{n,k}$  и  $\Psi_{1,k}, \Psi_{2,k}$  со значениями в  $\mathbb{C}$  и  $\mathbb{R}$  соответственно достаточно гладко зависят от своих переменных.

В дополнение к установленной теореме обратим внимание на следующие два взаимосвязанных обстоятельства. Во-первых, как и в случае (17.42), инвариантные торы (17.92), (17.93) не имеют пределов при  $N \rightarrow \infty$ , поскольку с ростом  $N$  неограниченно увеличивается фигурирующая в (17.93) частота  $\omega_{N-k}$ . Кроме того, в силу (17.41), (17.91) при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\nu < \nu_N^0 \rightarrow 0$  неограниченно увеличивается и количество  $k_0(N)$  самих торов  $T_k$ .

Во-вторых, у краевой задачи

$$u_t + i u_{xx} = \varepsilon(u - d|u|^2 u), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0, \quad (17.94)$$

получающейся из (17.72) при  $N = \infty$ ,  $\nu = 0$  и рассматриваемой в фазовом пространстве  $(\operatorname{Re} u, \operatorname{Im} u) \in W_2^1(0, 1) \times W_2^1(0, 1)$ , аттракторы, аналогичные двумерным торам (17.92), (17.93), отсутствуют. Действительно, в монографии [56] установлено, что устойчивыми в этой задаче являются только циклы, причем количество последних счетно.



Подведем итог. Как показывает проделанный анализ, нами обнаружен диапазон параметров, в котором аттракторы дискретного уравнения Гинзбурга–Ландау существенно отличаются от аттракторов соответствующей непрерывной модели. Нетривиальным здесь является то обстоятельство, что это отличие сохраняется при любом сколь угодно малом шаге  $1/N$  пространственной дискретизации.

Интересно также отметить, что выбирая иной способ стремления  $\nu$  к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , можно добиться и прямо противоположного эффекта — согласования между динамическими свойствами системы (17.72) и краевой задачи (17.94). В самом деле, введем в рассмотрение две стремящиеся к нулю при  $N \rightarrow \infty$  последовательности

$$\nu_N^1 = 1/(3\omega_{N-k_0} - 2\omega_{k_0}), \quad \nu_N^2 = 1/(4\omega_{k_1}),$$

где, напомним,  $k_0(N)$  определено равенством (17.41), а

$$k_1(N) = \max\{k: 4\omega_k < 3\omega_{N-k_0} - 2\omega_{k_0}\}.$$

Нетрудно убедиться, что при  $\nu \in (\nu_N^1, \nu_N^2)$  состояния равновесия  $O_k^{(2)}$  системы (17.89), (17.90) уже не лежат в конусе  $K$  векторов с неотрицательными координатами, а вместо них в  $K$  появляются устойчивые неподвижные точки  $O_k^{(1)}$ ,  $k = 1, \dots, k_1(N)$ , с одной ненулевой компонентой  $\eta_k = 4(1 - \nu\omega_k)/3$ . Остается добавить, что в исходной системе (17.72) этим состояниям равновесия отвечают устойчивые периодические движения, количество  $k_1(N)$  которых при  $N \rightarrow \infty$  неограниченно растет (точнее говоря,  $\lim_{N \rightarrow \infty} k_1(N)/N = (2/\pi) \arcsin(1/\sqrt{8})$ ).

## 18. Аттракторы дискретного волнового уравнения в пространственно двумерном случае

**18.1. Физическая постановка задачи.** Как и в п. 6.1, рассмотрим двумерный массив идентичных осцилляторов, каждый из которых взаимодействует со своими соседями. Предположим, что интересующий нас массив имеет размер  $N \times N$ , где  $N$  — произвольное натуральное число, и состоит из одинаковых ячеек, вид которых показан на рис. 18.1. Как и ранее, считаем, что центр  $O$  каждой такой ячейки связан с землей посредством параллельно подключенных конденсатора  $C_0$ , индуктивности  $L_0$  и туннельного диода с вольт-амперной характеристикой  $i = f(u)$ . Но теперь предполагается, что ячейки взаимодействуют между собой через разные индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно и в связях отсутствуют активные сопротивления  $R$  (ср. рисунки 6.1 и 18.1).

Фиксируем ячейку с номерами  $n, m$  и обозначим через  $u_{n,m}(t)$  напряжение в ее узле  $O$ . Первый закон Кирхгофа для этого узла приводит к равенству вида (6.1) для соответствующих токов  $i_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$

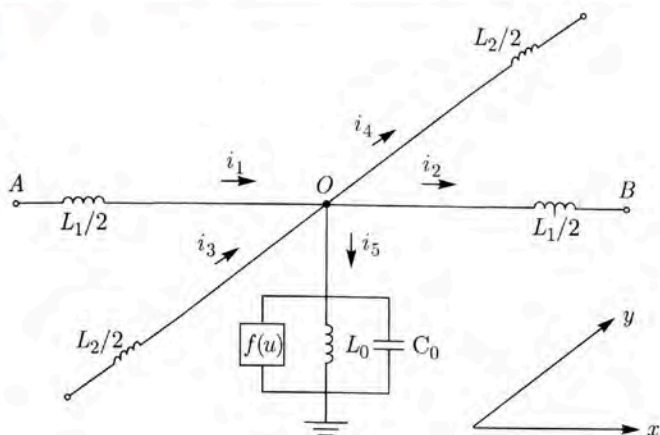


Рис. 18.1

(см. рис. 18.1). Сохраняется в данном случае и равенство вида (6.2). Что же касается равенств (6.3), то теперь они приобретают вид

$$\begin{aligned} i_1 &= -\frac{1}{L_1} \int (u_{n,m} - u_{n-1,m}) dt, & i_2 &= -\frac{1}{L_1} \int (u_{n+1,m} - u_{n,m}) dt, \\ i_3 &= -\frac{1}{L_2} \int (u_{n,m} - u_{n,m-1}) dt, & i_4 &= -\frac{1}{L_2} \int (u_{n,m+1} - u_{n,m}) dt. \end{aligned}$$

Упомянутые соотношения позволяют без труда выписать систему для  $u_{n,m}(t)$ ,  $n, m = 1, \dots, N$ , которая имеет аналогичный (6.4) вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L_1} (u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \frac{1}{L_2} (u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}) = \\ = C_0 \ddot{u}_{n,m} + \frac{d}{dt} f(u_{n,m}) + \frac{1}{L_0} u_{n,m}, \quad n, m = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (18.1)$$

В последующем мы будем рассматривать систему (18.1) вместе с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_{0,m} &= u_{1,m}, & u_{N+1,m} &= u_{N,m}, & m &= 1, \dots, N, \\ u_{n,0} &= u_{n,1}, & u_{n,N+1} &= u_{n,N}, & n &= 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (18.2)$$

или

$$u_{0,m} = u_{N+1,m} = 0, \quad u_{n,0} = u_{n,N+1} = 0, \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (18.3)$$

означающими соответственно, что все граничные ячейки либо одновременно свободны, либо заземлены.

Для приведения модели (18.1) к виду, более удобному для последующего анализа, сделаем ряд упрощающих предположений. Как и в п. 6.1, будем считать, что каждая отдельно взятая ячейка массива имеет одинаковые линейные размеры по осям  $x$ ,  $y$  и, в частности,



расстояние между показанными на рис. 18.1 точками  $A$  и  $B$  равно  $h = 1/N$ . Считаем также, что справедливы аналогичные (6.6) равенства

$$C_0 = C_{0,*} h^2, \quad L_0 = \frac{L_{0,*}}{h^2}, \quad L_1 = L_{1,*}, \quad L_2 = L_{2,*}, \quad (18.4)$$

$$f(u) = -h^2 G_*(u - u^3/3),$$

где электрические параметры  $C_{0,*}$ ,  $L_{0,*}$ ,  $L_{1,*}$ ,  $L_{2,*}$ ,  $G_*$  не зависят от  $h$ . И наконец, предположим, что координаты  $x$ ,  $y$  на плоскости, проходящей через центры всех ячеек, выбраны описанным в п. 6.1 образом.

После подстановки в (18.1) соотношений (18.4), деления на  $h^2$  и последующей нормировки времени  $t/\sqrt{L_{0,*}C_{0,*}} \rightarrow t$  интересующая нас система преобразуется к виду

$$\ddot{u}_{n,m} + \varepsilon(u_{n,m}^2 - 1)\dot{u}_{n,m} + u_{n,m} = a_1^2 N^2(u_{n+1,m} - 2u_{n,m} + u_{n-1,m}) + \\ + a_2^2 N^2(u_{n,m+1} - 2u_{n,m} + u_{n,m-1}), \quad n, m = 1, \dots, N, \quad (18.5)$$

где  $\varepsilon = G_* \sqrt{L_{0,*}/C_{0,*}}$ ,  $a_j = \sqrt{L_{0,*}/L_{j,*}}$ ,  $j = 1, 2$ . Далее, переходя в (18.5) к пределу при  $N \rightarrow \infty$  и учитывая способ введения координат  $x$ ,  $y$ , получаем соответствующую распределенную модель

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = a_1^2 u_{xx} + a_2^2 u_{yy}, \quad (18.6)$$

где  $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$ ,  $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $u = u(t, x, y)$  — вещественная скалярная функция.

Как будет показано ниже, при  $0 < \varepsilon \ll 1$ ,  $a_1, a_2 = \text{const} \sim 1$  динамические свойства системы (18.1) и уравнения (18.6) существенно различны и это различие сохраняется при любом фиксированном  $N$ .

## 18.2. Случай свободной границы. Обратимся сначала к системе

$$\ddot{u}_{s_1, s_2} + \varepsilon(u_{s_1, s_2}^2 - 1)\dot{u}_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2} = \mathcal{L}u_{s_1, s_2}, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (18.7)$$

получающейся из (18.5) при учете граничных условий (18.2). Здесь  $\mathcal{L} = a_1^2 \mathcal{L}_1 + a_2^2 \mathcal{L}_2$ , а разностные операторы  $\mathcal{L}_1$ ,  $\mathcal{L}_2$  задаются равенствами

$$\mathcal{L}_1 u_{s_1, s_2} = N^2(u_{s_1+1, s_2} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1-1, s_2}), \\ u_{0, s_2} = u_{1, s_2}, \quad u_{N+1, s_2} = u_{N, s_2}; \quad (18.8)$$

$$\mathcal{L}_2 u_{s_1, s_2} = N^2(u_{s_1, s_2+1} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2-1}), \\ u_{s_1, 0} = u_{s_1, 1}, \quad u_{s_1, N+1} = u_{s_1, N}. \quad (18.9)$$

Будем интересоваться вопросом об аттракторах системы (18.7) при условии, что  $\varepsilon > 0$  — малый положительный параметр, а коэффициенты  $a_1$ ,  $a_2$  имеют порядок единицы и удовлетворяют некоторым дополнительным ограничениям, о которых скажем ниже.

При исследовании системы (18.7) нам потребуются аналогичные (17.24), но уже двумерные разностные моды

$$\begin{aligned} e_{s_1, s_2}^{n, k} &= 2e_{s_1}^n e_{s_2}^k, \quad e_{s_1}^n = \cos\left(\frac{\pi n}{2N}(2s_1 - 1)\right), \\ e_{s_2}^k &= \cos\left(\frac{\pi k}{2N}(2s_2 - 1)\right), \\ s_1, s_2 &= 1, \dots, N, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (18.10)$$

обладающие свойствами

$$\begin{aligned} \mathcal{L}e_{s_1, s_2}^{n, k} &= -(a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \\ n, k &= 0, 1, \dots, N-1, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (18.11)$$

где  $\lambda_m, m = 0, 1, \dots, N-1$ , определены в (17.25). Точнее говоря, в дальнейшем будет обыграно то обстоятельство, что общее решение линейной системы, получающейся из (18.7) при  $\varepsilon = 0$ , допускает представление в виде тригонометрического полинома

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{n, k=0}^{N-1} (\xi_{n, k} \exp(i\sigma_{n, k} t) + \bar{\xi}_{n, k} \exp(-i\sigma_{n, k} t)) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad (18.12)$$

где  $\sigma_{n, k} = \sqrt{1 + a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k}$ , а  $\xi_{n, k}$  — произвольные комплексные постоянные.

Отталкиваясь от формул (18.10)–(18.12) и опираясь в очередной раз на общую идеологию метода Крылова–Боголюбова–Митропольского, возможные автоколебания системы (18.7) будем искать в виде асимптотических рядов

$$u_{s_1, s_2} = u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau) + \varepsilon u_{s_1, s_2, 1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N. \quad (18.13)$$

Как обычно, предполагаем, что коэффициенты этих рядов являются тригонометрическими полиномами переменных  $\sigma_{n, k} t$ ,  $n, k = 0, 1, \dots, N-1$ , а нулевые приближения  $u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau)$  задаются формулами (18.12), в которых  $\xi_{n, k} = \xi_{n, k}(\tau)$  — пока произвольные (подлежащие определению в последующем) комплексные амплитуды.

После подстановки соотношений (18.12), (18.13) в (18.7) и приравнивания коэффициентов при  $\varepsilon$  для нахождения  $u_{s_1, s_2, 1}$  получаем линейную неоднородную систему

$$\frac{d^2 u_{s_1, s_2, 1}}{dt^2} + u_{s_1, s_2, 1} - \mathcal{L}u_{s_1, s_2, 1} = f_{s_1, s_2}(t, \tau), \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (18.14)$$

где

$$f_{s_1, s_2}(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial t} \left( u_{s_1, s_2, 0} - \frac{u_{s_1, s_2, 0}^3}{3} - 2 \frac{\partial u_{s_1, s_2, 0}}{\partial \tau} \right), \quad (18.15)$$



а переменная  $\tau$ , как обычно, считается параметром. Ее решение будем искать в классе тригонометрических полиномов той же структуры, что и неоднородность (18.15), а именно, в виде:

$$u_{s_1, s_2, 1} = \sum_{n, k=0}^{N-1} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(i\sigma_{n, k} t) + \overline{u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}}(\tau) \exp(-i\sigma_{n, k} t) + \sum_m u_{s_1, s_2, 1}^m(\tau) \exp\left(i \sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2} t\right), \quad (18.16)$$

где через  $m$  обозначаются всевозможные матрицы  $\|m_{r_1, r_2}\|_{r_1, r_2=0}^{N-1}$  с целочисленными элементами, удовлетворяющие равенству  $\sum_{r_1, r_2} |m_{r_1, r_2}| = 3$ .

В связи с этим предположим, что для любой такой матрицы выполняются условия нерезонансности

$$\sigma_{n, k} \neq \sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (18.17)$$

справедливости которых всегда можно добиться за счет надлежащего выбора параметров  $a_1, a_2$ .

Проблема нахождения  $u_{s_1, s_2, 1}$  сводится очевидным образом к решению линейных неоднородных алгебраических систем для входящих в (18.16) коэффициентов  $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}, u_{s_1, s_2, 1}^m$ . Рассмотрим сначала системы для  $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$ , которые имеют вид

$$-(\mathcal{L} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k} + (a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}) = g_{s_1, s_2}^{n, k}(\tau), \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N, \quad (18.18)$$

где

$$g_{s_1, s_2}^{n, k} = i\sigma_{n, k} \left( \xi_{n, k} - 2 \frac{d\xi_{n, k}}{d\tau} \right) e_{s_1, s_2}^{n, k} - i\sigma_{n, k} (e_{s_1, s_2}^{n, k})^3 |\xi_{n, k}|^2 \xi_{n, k} - 2i\sigma_{n, k} \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m, r) \neq (n, k)}}^{N-1} e_{s_1, s_2}^{n, k} (e_{s_1, s_2}^{m, r})^2 |\xi_{m, r}|^2 \xi_{n, k}, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (18.19)$$

Отметим, далее, что в силу свойств (18.11) разностного оператора  $\mathcal{L}$  все системы (18.18) оказываются вырожденными, а условия их разрешимости задаются равенствами

$$l(g_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{n, k}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{s_1, s_2=1}^N g_{s_1, s_2}^{n, k} e_{s_1, s_2}^{n, k} = 0, \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (18.20)$$

В случае коэффициентов  $u_{s_1, s_2, 1}^m$  реализуется более простая ситуация. Нетрудно увидеть, что они удовлетворяют линейным неодно-

родным алгебраическим системам

$$\left[1 - \left(\sum_{r_1, r_2=0}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2}\right)^2\right] u_{s_1, s_2, 1}^m - \mathcal{L} u_{s_1, s_2, 1}^m = F_{s_1, s_2}^m, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N,$$

каждая из которых в силу условий (18.17) является невырожденной.

Суммируя вышесказанное, приходим к выводу, что для разрешимости системы (18.14) в классе тригонометрических полиномов необходимо и достаточно выполнение условий (18.20). В связи с этим будем рассматривать данные соотношения как систему для определения комплексных амплитуд  $\xi_{n,k}(\tau)$ ,  $n, k = 0, 1, \dots, N-1$ , которые до этого момента были произвольными. Несложный подсчет с использованием явных формул (18.19) для  $g_{s_1, s_2}^{n,k}$  и известных свойств

$$l(e_{s_1, s_2}^{n,k} e_{s_1, s_2}^{m,r}) = 0 \text{ при } (n, k) \neq (m, r), \quad c_{n,k} = l((e_{s_1, s_2}^{n,k})^2) > 0 \quad (18.21)$$

показывает, что интересующая нас система преобразуется к виду:

$$2 \frac{d\xi_{n,k}}{d\tau} = \xi_{n,k} \left[ 1 - d_{n,k}^{n,k} |\xi_{n,k}|^2 - \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m,r) \neq (n,k)}}^{N-1} d_{n,k}^{m,r} |\xi_{m,r}|^2 \right], \quad (18.22)$$

$$n, k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где

$$d_{n,k}^{n,k} = l((e_{s_1, s_2}^{n,k})^4) / c_{n,k}, \quad d_{n,k}^{m,r} = 2l((e_{s_1, s_2}^{n,k} e_{s_1, s_2}^{m,r})^2) / c_{n,k}. \quad (18.23)$$

Остановимся, далее, на естественно возникающем вопросе о связи между стационарными режимами систем (18.7) и (18.22). С этой целью положим в (18.22)

$$\xi_{n,k} = \sqrt{\eta_{n,k}} \exp(i\psi_{n,k}), \quad \eta_{n,k} \geq 0, \quad 0 \leq \psi_{n,k} \leq 2\pi \pmod{2\pi}.$$

В результате получим  $2N^2$ -мерную систему для  $\eta_{n,k}$ ,  $\psi_{n,k}$ , от которой отщепляется  $N^2$ -мерная амплитудная система

$$\frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} = \eta_{n,k} \left( 1 - d_{n,k}^{n,k} \eta_{n,k} - \sum_{\substack{m, r=0 \\ (m,r) \neq (n,k)}}^{N-1} d_{n,k}^{m,r} \eta_{m,r} \right), \quad n, k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (18.24)$$

Из содержащихся в монографии [73] результатов вытекает следующее утверждение.

**Теорема 18.1.** *Зафиксируем некоторый набор индексов  $\gamma = \{(n_1, k_1), \dots, (n_p, k_p)\}$ , где  $0 \leq n_j \leq N-1$ ,  $0 \leq k_j \leq N-1$ ,  $j = 1, \dots, p$ , а порядок следования пар  $(n_j, k_j)$ , не играет роли. Предположим, далее, что в амплитудной системе (18.24) этому набору соответствует экспоненциально устойчивое или дихотомичное состояние равновесия*

$$O_\gamma^{(p)} = \{\eta_{n_j, k_j} = \eta_{n_j, k_j}^0 > 0, \quad \eta_{n,k} = 0 \text{ при } (n, k) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p\} \quad (18.25)$$



с количеством ненулевых координат, равным  $p$ . Тогда найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  в исходной системе (18.7) состоянию равновесия (18.25) отвечает  $p$ -мерный инвариантный тор  $T_\gamma^{(p)}$  с теми же свойствами устойчивости. Указанный тор допускает параметрическое представление

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{j=1}^p 2\sqrt{\eta_{n_j, k_j}^0} \cos \varphi_j e_{s_1, s_2}^{n_j, k_j} + \varepsilon \mathcal{U}_{s_1, s_2}(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varepsilon), \quad (18.26)$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N,$$

а движения на нем описываются системой уравнений

$$\frac{d\varphi_j}{dt} = \sigma_{n_j, k_j} + \varepsilon^2 \Psi_j(\varphi_1, \dots, \varphi_p, \varepsilon), \quad j = 1, \dots, p. \quad (18.27)$$

Здесь  $\varphi_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , — соответствующие этому тору циклические координаты, а  $2\pi$ -периодические по векторному аргументу  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  функции  $\mathcal{U}_{s_1, s_2}$ ,  $\Psi_j$  достаточно гладко зависят от  $(\varphi, \varepsilon) \in \mathbb{R}^p \times [0, \varepsilon_0]$ .

Сформулированная теорема сводит вопрос об аттракторах системы (18.7) к поиску устойчивых состояний равновесия амплитудной системы (18.24), лежащих в конусе  $K$  векторов с неотрицательными координатами. В связи с этим возникает необходимость в получении более конструктивных формул для ее коэффициентов (18.23).

**Теорема 18.2.** При  $0 \leq n \leq N-1$ ,  $0 \leq k \leq N-1$ ,  $n \neq N/2$ ,  $k \neq N/2$ , соответствующие уравнения для компонент  $\eta_{n, k}$  системы (18.24) записываются в виде

$$\frac{d\eta_{0,0}}{d\tau} = \eta_{0,0} \left( 1 - 4\eta_{0,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{0,r} - 2 \sum_{m,r=1}^{N-1} \eta_{m,r} \right), \quad (18.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,0}}{d\tau} = & \eta_{n,0} \left( 1 - 3\eta_{n,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,0} - 2\eta_{N-n,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0,m} - \right. \\ & \left. - 3 \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{n,r} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{r=1}^{N-1} \eta_{N-n,r} - 8\eta_{0,0} \right), \\ & n = 1, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (18.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{0,k}}{d\tau} = & \eta_{0,k} \left( 1 - 3\eta_{0,k} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0,m} - 2\eta_{0,N-k} - \right. \\ & \left. - 3 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,N-k} - 8\eta_{0,0} \right), \\ & k = 1, \dots, N-1; \end{aligned} \quad (18.30)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} = & \eta_{n,k} \left( 1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{n,m} - \frac{3}{2} \eta_{n,N-k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,k} - \right. \\
& - \frac{3}{2} \eta_{N-n,k} - 6 \eta_{n,0} - 6 \eta_{0,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N-n,r} - \\
& - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,N-k} - \frac{1}{2} \eta_{N-n,N-k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0,m} - 2 \eta_{0,N-k} - \\
& \left. - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,0} - 2 \eta_{N-n,0} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad n, k = 1, \dots, N-1. \quad (18.31)
\end{aligned}$$

В случае же четного  $N$  к системе (18.28)–(18.31) добавляются еще уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{N/2,0}}{d\tau} = & \eta_{N/2,0} \left( 1 - 2 \eta_{N/2,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0,m} - \right. \\
& \left. - 2 \sum_{m,r=1}^{N-1} \eta_{m,r} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad (18.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{0,N/2}}{d\tau} = & \eta_{0,N/2} \left( 1 - 2 \eta_{0,N/2} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{0,m} - \right. \\
& \left. - 2 \sum_{m,r=1}^{N-1} \eta_{m,r} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad (18.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{N/2,k}}{d\tau} = & \eta_{N/2,k} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta_{N/2,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,N-k} - \right. \\
& - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,k} - 6 \eta_{0,k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{0,m} - 2 \eta_{0,N-k} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m,0} - 8 \eta_{0,0} \Big), \\
& k = 1, \dots, N-1, \quad k \neq N/2; \quad (18.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\eta_{n,N/2}}{d\tau} = & \eta_{n,N/2} \left( 1 - \frac{3}{2} \eta_{n,N/2} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{n,m} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,r} - \right. \\
& - \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{N-n,m} - 6 \eta_{n,0} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0,m} - 2 \eta_{N-n,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,0} - 8 \eta_{0,0} \Big),
\end{aligned}$$



$$n = 1, \dots, N-1, \quad n \neq N/2; \quad (18.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{N/2, N/2}}{d\tau} = & \eta_{N/2, N/2} \left( 1 - \eta_{N/2, N/2} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ (m, r) \neq (N/2, N/2)}}^{N-1} \eta_{m, r} - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{m, 0} - \right. \\ & \left. - 4 \sum_{m=1}^{N-1} \eta_{0, m} - 8 \eta_{0, 0} \right). \end{aligned} \quad (18.36)$$

**Доказательство.** Обоснование теоремы сводится к подсчету коэффициентов (18.23). В связи с этим обратим внимание, что согласно равенствам (18.21), (18.23) величина  $d_{n, k}^{n, k}$  представляет собой коэффициент при моде  $e_{s_1, s_2}^{n, k}$  в правой части формулы

$$(e_{s_1, s_2}^{n, k})^3 = \frac{1}{4} (9e_{s_1, s_2}^{n, k} + 3e_{s_1, s_2}^{n, 3k} + 3e_{s_1, s_2}^{3n, k} + e_{s_1, s_2}^{3n, 3k}). \quad (18.37)$$

Далее, в силу характерных для разностных косинусов  $e_{s_1}^n, e_{s_2}^k$  свойств (см. (17.33))

$$e_{s_1}^{2N-n} = -e_{s_1}^n, \quad e_{s_2}^{2N-k} = -e_{s_2}^k \quad (18.38)$$

слагаемые из (18.37), пропорциональные модам  $e_{s_1, s_2}^{n, 3k}, e_{s_1, s_2}^{3n, k}, e_{s_1, s_2}^{3n, 3k}$ , будут давать вклад в  $d_{n, k}^{n, k}$  при выполнении соответствующих условий  $3k = \pm k \pmod{2N}$ ,  $3n = \pm n \pmod{2N}$ . Остается заметить, что из этих условий реализуются только равенства  $3k = \pm k$  (при  $k = 0$ ),  $3n = \pm n$  (при  $n = 0$ ),  $3k = 2N - k$  (при  $k = N/2$  и четном  $N$ ),  $3n = 2N - n$  (при  $n = N/2$  и четном  $N$ ). Таким образом, опираясь на формулы (18.37), (18.38) и перебирая все возможные комбинации индексов  $n, k$ , для  $d_{n, k}^{n, k}$  получаем именно те значения, которые фигурируют в уравнениях (18.28)–(18.36).

Вычисление величин  $d_{n, k}^{m, r}$ ,  $(m, r) \neq (n, k)$ , проводится по той же схеме, что и выше. В самом деле, как и в предыдущем случае, из (18.21), (18.23) заключаем, что  $d_{n, k}^{m, r}$  — коэффициент при моде  $e_{s_1, s_2}^{n, k}$  в правой части формулы

$$\begin{aligned} 2e_{s_1, s_2}^{n, k} (e_{s_1, s_2}^{m, r})^2 = & 2 \left( e_{s_1, s_2}^{n, k} + \frac{1}{2} e_{s_1, s_2}^{n, k+2r} + \frac{1}{2} e_{s_1, s_2}^{n, k-2r} + \frac{1}{2} e_{s_1, s_2}^{n+2m, k} + \right. \\ & + \frac{1}{4} e_{s_1, s_2}^{n+2m, k+2r} + \frac{1}{4} e_{s_1, s_2}^{n+2m, k-2r} + \frac{1}{2} e_{s_1, s_2}^{n-2m, k} + \frac{1}{4} e_{s_1, s_2}^{n-2m, k+2r} + \\ & \left. + \frac{1}{4} e_{s_1, s_2}^{n-2m, k-2r} \right). \end{aligned} \quad (18.39)$$

Ясно также, что слагаемые из (18.39), пропорциональные модам  $e_{s_1, s_2}^{n, k \pm 2r}, e_{s_1, s_2}^{n \pm 2m, k}, e_{s_1, s_2}^{n \pm 2m, k \pm 2r}, e_{s_1, s_2}^{n \pm 2m, k \mp 2r}$ , могут давать вклад в  $d_{n, k}^{m, r}$  при соответствующих комбинациях условий:

$$\begin{aligned} k + 2r &= \pm k \pmod{2N}, \quad k - 2r = \pm k \pmod{2N}, \\ n + 2m &= \pm n \pmod{2N}, \quad n - 2m = \pm n \pmod{2N}. \end{aligned} \quad (18.40)$$

В свою очередь, из всей совокупности (18.40) разрешимы только уравнения  $k \pm 2r = k$  (при  $r = 0$ ),  $k - 2r = -k$  (при  $r = k$ ),  $k + 2r = -k$  (при  $r = k = 0$ ),  $k + 2r = 2N - k$  (при  $r = N - k$ ), а также уравнения, получающиеся из указанных при заменах  $k \rightarrow n$ ,  $r \rightarrow m$ . А отсюда после надлежащего перебора различных вариантов сочетания индексов  $(n, k)$  и  $(m, r)$  делаем вывод о справедливости требуемых равенств для  $d_{n,k}^{m,r}$ . Теорема 18.2 доказана.

Приступим непосредственно к отысканию аттракторов системы (18.28)–(18.36) в конусе  $K$ . Начнем с анализа ее устойчивых состояний равновесия, имеющих две ненулевые координаты. Для этого нам потребуются натуральные  $m_0(N)$  и  $m_1(N)$ , определяющиеся по правилам

$$m_0(N) = \begin{cases} (N-1)/2 & \text{при нечетном } N, \\ (N-2)/2 & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad m_1(N) = 2m_0^2(N). \quad (18.41)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 18.3.** При любом фиксированном  $N \geq 3$  система (18.28)–(18.36) имеет в конусе  $K$  наборы устойчивых состояний равновесия  $O_\gamma^{(2)}$  вида (18.25), где

$$\gamma = \{(n, 0), (N-n, 0)\}, \quad \eta_{n,0} = \eta_{N-n,0} = \frac{1}{5}, \quad n = 1, \dots, m_0(N); \quad (18.42)$$

$$\gamma = \{(0, k), (0, N-k)\}, \quad \eta_{0,k} = \eta_{0,N-k} = \frac{1}{5}, \quad k = 1, \dots, m_0(N), \quad (18.43)$$

а также  $m_1(N)$  устойчивых состояний равновесия  $O_\gamma^{(2)}$ , для которых

$$\gamma = \{(n, k), (N-n, N-k)\}, \quad \eta_{n,k} = \eta_{N-n,N-k} = \frac{4}{11}, \quad (18.44)$$

$$n, k \geq 1, \quad n, k \neq N/2.$$

**Доказательство.** Начнем с ряда замечаний общего характера. Обратим внимание, что любое состояние равновесия системы (18.28)–(18.36) вида (18.25) порождает неподвижную точку  $\tilde{O}_\gamma^{(p)} = \{\eta_{n_j, k_j} = \eta_{n_j, k_j}^0, j = 1, \dots, p\}$  вспомогательной системы

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \eta - \eta * \mathcal{D}\eta, \quad \eta = \text{colon}(\eta_{n_1, k_1}, \dots, \eta_{n_p, k_p}), \quad \mathcal{D} = \|d_{n_j, k_j}^{n_s, k_s}\|_{j,s=1}^p, \quad (18.45)$$

где символом  $*$  обозначается покомпонентное умножение векторов. Далее, нетрудно убедиться, что система в вариациях на состоянии равновесия (18.25) имеет треугольную структуру. Точнее говоря, если положить  $\eta_{(1)} = \eta$ , где  $\eta$  — вектор из (18.45),  $\eta_{(2)} = \{\eta_{m,r} : (m,r) \neq (n_j, k_j), j = 1, \dots, p\}$ , то в переменных  $\eta_{(1)}, \eta_{(2)}$  она принимает вид

$$\frac{d\eta_{(1)}}{d\tau} = A\eta_{(1)} + B\eta_{(2)}, \quad \frac{d\eta_{(2)}}{d\tau} = C\eta_{(2)}. \quad (18.46)$$



Здесь  $A$  — матрица линеаризации вспомогательной системы (18.45) на состоянии равновесия  $\tilde{O}_\gamma^{(p)}$ , а явное выражение для  $B$  не приводим, поскольку в дальнейшем оно не потребуется. Что же касается подсистемы для  $\eta_{(2)}$  из (18.46), то ее матрица  $C$  оказывается диагональной. Точнее говоря, в по координатной форме записи эта подсистема допускает представление

$$\frac{d\eta_{m,r}}{d\tau} = \alpha_{m,r}\eta_{m,r}, \quad (m,r) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p,$$

где

$$\alpha_{m,r} = 1 - \sum_{j=1}^p d_{m,r}^{n_j, k_j} \eta_{n_j, k_j}^0, \quad (18.47)$$

$$m, r = 0, 1, \dots, N-1, \quad (m, r) \neq (n_j, k_j), \quad j = 1, \dots, p.$$

Из приведенных соображений следует, что устойчивость любого состояния равновесия вида (18.25) определяется в конечном итоге по расположению спектра матрицы  $A$  и по знакам величин (18.47).

Перейдем теперь непосредственно к обоснованию теоремы. Фиксируем номер  $n$ ,  $1 \leq n \leq m_0(N)$ , и рассмотрим вспомогательную систему (18.45) для вектора  $\eta = \text{colop}(\eta_{n,0}, \eta_{N-n,0})$ , в которой согласно (18.29) матрица  $\mathcal{D}$  имеет вид

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Далее, нетрудно проверить, что получившаяся система допускает экспоненциально устойчивое состояние равновесия с координатами  $\eta_{n,0} = \eta_{N-n,0} = 1/5$ , которому в исходной системе (18.28)–(18.36) отвечает требуемое состояние равновесия  $O_\gamma^{(2)}$  из семейства (18.42). Устойчивость этого состояния равновесия определяется по знакам соответствующих величин (18.47), для которых в данном случае справедливы формулы

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{1}{5} (d_{m,r}^{n,0} + d_{m,r}^{N-n,0}), \quad (m,r) \neq (n,0), \quad (N-n,0).$$

И наконец, перебирая различные варианты  $m, r$ , приходим к выводу, что во всех ситуациях правые части этих формул выдают одно и то же значение  $-3/5$ .

Итак, мы убедились в устойчивости состояний равновесия  $O_\gamma^{(2)}$  из семейства (18.42). Оставшиеся случаи (18.43) и (18.44) разбираются аналогично. Отметим только некоторые относительно новые моменты, возникающие во втором из них. Как показывает несложный комбинаторный подсчет, количество неподвижных точек (18.44) равно  $m_1(N)$  (см. (18.41)). Далее, каждой из них отвечает вспомогательная система (18.45) с матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 1/2 \\ 1/2 & 9/4 \end{pmatrix},$$

допускающая экспоненциально устойчивое состояние равновесия  $\eta_{n,k} = \eta_{N-n,N-k} = 4/11$ . Что же касается чисел  $\alpha_{m,r}$ , то здесь они задаются равенствами

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{11} \left( d_{m,r}^{n,k} + d_{m,r}^{N-n,N-k} \right), \quad (m,r) \neq (n,k), (N-n, N-k),$$

из которых, в свою очередь, выводим, что

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = \alpha_{N-n,k} = \alpha_{n,N-k} = -1/11.$$

Теорема 18.3 доказана.

Обратимся, далее, к вопросу о существовании у системы (18.28)–(18.36) устойчивых состояний равновесия с тремя ненулевыми компонентами. В связи с этим фиксируем набор индексов вида

$$\gamma = \{(n,k), (N-n,k), (0, N-k)\}, \quad n, k \geq 1, \quad n, k \neq N/2, \quad (18.48)$$

и рассмотрим соответствующую ему вспомогательную систему (18.45) с матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & 9/4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (18.49)$$

Непосредственная проверка показывает, что система (18.45), (18.49) имеет состояние равновесия  $\eta_0 = \text{colon}(4/29, 4/29, 7/29)$ , а отвечающая ему матрица линеаризации

$$A = -\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 8 \\ 7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

гурвицева (ее собственные значения задаются равенствами  $\lambda = -3/29, -1$  и  $-7/29$ ). Более того, отрицательными являются и все величины (18.47), вычисленные на данном состоянии равновесия. В самом деле, из формул

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{29} \left( d_{m,r}^{n,k} + d_{m,r}^{N-n,k} \right) - \frac{7}{29} d_{m,r}^{0,N-k},$$

$$(m,r) \neq (n,k), \quad (N-n,k), \quad (0, N-k)$$

и из явного вида коэффициентов системы (18.28)–(18.36) вытекает, что

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = -9/29 \quad (18.50)$$

(максимум здесь достигается при  $(m,r) = (m,k)$ ,  $m \neq n, N-n$ ).

В дополнение к вышесказанному отметим, что все перечисленные факты остаются в силе и для набора индексов

$$\gamma = \{(n,k), (n, N-k), (N-n, 0)\}, \quad n, k \geq 1, \quad n, k \neq N/2. \quad (18.51)$$

Точнее говоря, для  $\eta = \text{colon}(\eta_{n,k}, \eta_{n,N-k}, \eta_{N-n,0})$  получается система (18.45) с той же самой матрицей (18.49), а для величин  $\alpha_{m,r}$ , вы-



численных по ее состоянию равновесия  $\eta = \eta_0$ , сохраняется равенство (18.50). Таким образом, установлена следующая

**Теорема 18.4.** При каждом  $N \geq 3$  система (18.28)–(18.36) имеет два семейства по  $m_1(N)$  устойчивых положений равновесия  $O_\gamma^{(3)}$ , где  $\gamma$  — наборы индексов (18.48) и (18.51) соответственно.

Завершая поиск возможных аттракторов системы (18.28)–(18.36), изучим вопрос о существовании у нее устойчивых состояний равновесия с четырьмя ненулевыми координатами. С этой целью введем в рассмотрение наборы индексов

$$\gamma = \{(n_1, k_1), (n_2, k_2), (N - n_1, N - k_2), (N - n_2, N - k_1)\}, \quad n_j, k_j \geq 1, \\ n_j, k_j \neq N/2, \quad j = 1, 2, \quad n_1 \neq n_2, \quad k_1 \neq k_2, \quad n_1 + n_2 \neq N, \quad k_1 + k_2 \neq N, \quad (18.52)$$

количество которых, как нетрудно подсчитать, равно

$$m_2(N) = 4m_0^2(N)(m_0(N) - 1)^2. \quad (18.53)$$

Рассмотрим затем отвечающие указанным наборам вспомогательные системы, каждая из которых в силу (18.31) имеет вид (18.45) с одной и той же матрицей

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 9/4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 9/4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 9/4 \end{pmatrix}. \quad (18.54)$$

Обратим внимание, что система (18.45), (18.54) допускает состояние равновесия  $\eta_0 = \text{colop}(4/25, 4/25, 4/25, 4/25)$ . Тем самым, каждый набор индексов  $\gamma$  из семейства (18.52) однозначно задает состояние равновесия  $O_\gamma^{(4)}$  исходной системы (18.28)–(18.36) с четырьмя ненулевыми координатами  $\eta_{n_1, k_1} = \eta_{n_2, k_2} = \eta_{N-n_1, N-k_2} = \eta_{N-n_2, N-k_1} = 4/25$ . Далее, как уже говорилось выше, устойчивость такого положения равновесия определяется по расположению собственных значений соответствующей матрицы линеаризации  $A = -(4/25)\mathcal{D}$  и по знакам величин

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{25} \left( d_{m,r}^{n_1, k_1} + d_{m,r}^{n_2, k_2} + d_{m,r}^{N-n_1, N-k_2} + d_{m,r}^{N-n_2, N-k_1} \right). \quad (18.55)$$

Остается заметить, что в данном случае матрица  $A$  оказывается гурвицевой (ее собственные значения равны  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/25$ ,  $\lambda_3 = -1$ ,  $\lambda_4 = -9/25$ ), а из (18.55) с учетом явных формул для  $d_{m,r}^{n,k}$  имеем:

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = \alpha_{n_1, N-k_1} = \alpha_{n_2, N-k_2} = \alpha_{n_2, N-k_1} = \alpha_{n_1, N-k_2} = \alpha_{N-n_1, k_1} = \\ = \alpha_{N-n_2, k_2} = \alpha_{N-n_2, k_1} = \alpha_{N-n_1, k_2} = -1/5.$$

Еще одна группа экспоненциально устойчивых состояний равновесия системы (18.28)–(18.36) с четырьмя ненулевыми координатами получается следующим образом. Обозначим через  $\gamma'$  всевозможные

наборы индексов вида (18.52), для которых  $n_1 + n_2 = N$ ,  $k_1 + k_2 \neq N$  или  $n_1 + n_2 \neq N$ ,  $k_1 + k_2 = N$ , т. е. нарушается ровно одно из прежних ограничений. Нетрудно убедиться, что количество таких наборов равно

$$m_3(N) = 4 m_0^2(N) (m_0(N) - 1), \quad (18.56)$$

при этом в случае  $n_1 + n_2 = N$  всем им отвечают системы (18.45) с одной и той же матрицей  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1$ , а в случае  $k_1 + k_2 = N$  — с матрицей  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_2$ , где

$$\mathcal{D}_1 = \begin{pmatrix} 9/4 & 1 & 1 & 3/2 \\ 1 & 9/4 & 3/2 & 1 \\ 1 & 3/2 & 9/4 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 & 9/4 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}_2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 1 & 3/2 & 1 \\ 1 & 9/4 & 1 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 9/4 & 1 \\ 1 & 3/2 & 1 & 9/4 \end{pmatrix}. \quad (18.57)$$

Далее, обе системы (18.45), (18.57) имеют положение равновесия

$$\eta_0 = \text{colon}(4/23, 4/23, 4/23, 4/23),$$

а спектр соответствующих ему матриц линеаризации  $A_j = -(4/23)\mathcal{D}_j$ ,  $j = 1, 2$ , состоит из собственных значений  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3/23$ ,  $\lambda_3 = -1$ ,  $\lambda_4 = -7/23$ . Таким образом, установлено, что любой набор индексов  $\gamma'$  порождает свое состояние равновесия  $O_{\gamma'}^{(4)}$  исходной системы (18.28)–(18.36) с четырьмя ненулевыми компонентами, равными  $4/23$ . Более того, все эти неподвижные точки оказываются устойчивыми, поскольку для вычисленных по ним величин

$$\alpha_{m,r} = 1 - \frac{4}{23} \left( d_{m,r}^{n_1, k_1} + d_{m,r}^{n_2, k_2} + d_{m,r}^{N-n_1, N-k_2} + d_{m,r}^{N-n_2, N-k_1} \right)$$

в каждой из ситуаций  $n_1 + n_2 = N$  или  $k_1 + k_2 = N$  справедливо одно и то же равенство:

$$\max_{m,r} \alpha_{m,r} = -9/23. \quad (18.58)$$

В случае  $n_1 + n_2 = N$  максимум в (18.58) достигается при

$$(m, r) = (n_1, k_2), (n_2, k_1), (n_1, N - k_2), (n_2, N - k_1),$$

а в случае  $k_1 + k_2 = N$  — при

$$(m, r) = (n_1, k_2), (n_2, k_1), (N - n_1, k_2), (N - n_2, k_1).$$

Суммируя проделанные построения, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 18.5.** При любом  $N \geq 5$  система (18.28)–(18.36) имеет совокупность из  $m_2(N)$  устойчивых состояний равновесия  $O_{\gamma'}^{(4)}$ , где  $\gamma'$  пробегает множество наборов индексов (18.52), и имеется  $m_3(N)$  устойчивых неподвижных точек вида  $O_{\gamma'}^{(4)}$ .

В дополнение к установленной теореме отметим, что состояния равновесия  $O_{\gamma'}^{(4)}$  с наборами индексов (18.52), для которых  $n_1 + n_2 = N$  и  $k_1 + k_2 = N$ , у системы (18.28)–(18.36) также существуют, но ока-



зываются неустойчивыми (у соответствующих им матриц линеаризации  $A$  имеется положительное собственное значение). Отметим также, что помимо состояний равновесия, о которых говорится в теоремах 18.3–18.5, система (18.28)–(18.36) допускает некоторое количество устойчивых положений равновесия с одной ненулевой компонентой. К таковым относится ее неподвижная точка

$$O_{(0,0)}^{(1)} = \{\eta_{0,0} = 1/4, \quad \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m,r) \neq (0,0)\}, \quad (18.59)$$

а в случае четного  $N$  к ней добавляются еще три, имеющие вид

$$\begin{aligned} O_{(N/2,0)}^{(1)} &= \{\eta_{N/2,0} = 1/2, \quad \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m,r) \neq (N/2,0)\}, \\ O_{(0,N/2)}^{(1)} &= \{\eta_{0,N/2} = 1/2, \quad \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m,r) \neq (0,N/2)\}, \\ O_{(N/2,N/2)}^{(1)} &= \{\eta_{N/2,N/2} = 1, \quad \eta_{m,r} = 0 \text{ при } (m,r) \neq (N/2,N/2)\}. \end{aligned} \quad (18.60)$$

Другие же состояния равновесия вида  $O_{\gamma}^{(1)}$ , отличные от (18.59) и (18.60), являются неустойчивыми.

Вопрос о существовании у системы (18.28)–(18.36) устойчивых состояний равновесия  $O_{\gamma}^{(p)}$  при  $p \geq 5$  остается открытым. Во всяком случае, нам не удалось обнаружить их ни аналитическими методами, ни с помощью компьютерного анализа, который проводился для амплитудной системы (18.28)–(18.36) при  $N = 5$  и  $7$ .

Подведем некоторый итог. Теоремы 18.1–18.5 гарантируют сосуществование у системы (18.7) большого числа устойчивых инвариантных торов. Точнее говоря, для их количества  $m_*(N)$  справедлива оценка снизу:

$$m_*(N) \geq 2m_0(N) + 3m_1(N) + m_2(N) + m_3(N), \quad N \geq 5,$$

где, напомним, натуральные  $m_j(N)$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ , определены формулами (18.41), (18.53), (18.56). Из этих формул, в частности, следует, что при  $N \rightarrow \infty$  величина  $m_*(N)$  растет не медленнее, чем  $O(N^4)$ . Например, уже в самом простейшем случае имеем  $m_*(5) \geq 60$ . Точнее говоря, при  $N = 5$ , при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$  и при некоторой общности положения, связанной с выбором параметров  $a_1, a_2$ , в системе (18.7) сосуществует не менее 60 устойчивых инвариантных торов, среди которых 12 двумерных, 16 трехмерных и 32 четырехмерных.

Характерная особенность всех найденных выше инвариантных торов заключается в том, что, как и в пространственно одномерном случае, они не имеют пределов при  $N \rightarrow \infty$ , т.е. при переходе от дискретной решетки осцилляторов к непрерывной. Для того чтобы убедиться в этом, для каждого решения  $u_{s_1, s_2}(t)$ ,  $s_1, s_2 = 1, \dots, N$ , системы (18.7) введем понятие *энергии*, которое определяется следую-

щим образом: рассмотрим функцию

$$E(t) = \sum_{n,k=0}^{N-1} (\dot{\beta}_{n,k}(t))^2 + \sigma_{n,k}^2 \beta_{n,k}^2(t), \quad (18.61)$$

где  $\beta_{n,k}(t)$  — коэффициенты разложения  $u_{s_1,s_2}(t) = \sum_{n,k} \beta_{n,k}(t) e_{s_1,s_2}^{n,k}$ , и положим

$$E_0 = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t E(\tau) d\tau. \quad (18.62)$$

Получившуюся в итоге величину (18.62) назовем *энергией выбранного решения*  $u_{s_1,s_2}(t)$ .

Как оказывается, энергия каждой траектории системы (18.7), принадлежащей любому из найденных выше устойчивых инвариантных торов, при  $N \rightarrow \infty$  и  $\varepsilon \rightarrow 0$  неограниченно растет. Проверим этот факт на примере четырехмерного тора  $T_\gamma^{(4)}$ , отвечающего состоянию равновесия  $O_\gamma^{(4)}$  амплитудной системы, где  $\gamma$  — набор индексов (18.52). Привлекая соответствующее данному тору параметрическое представление вида (18.26) и учитывая, что движения на нем описываются системой уравнений (18.27), для функции (18.61), вычисленной на любом решении  $u_{s_1,s_2}(t) \in T_\gamma^{(4)}$ , получаем асимптотическое равенство

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{16}{25} (\sigma_{n_1,k_1}^2 + \sigma_{n_2,k_2}^2 + \sigma_{N-n_1,N-k_2}^2 + \sigma_{N-n_2,N-k_1}^2) + O(\varepsilon) = \\ &= \frac{64}{25} (1 + 2N^2(a_1^2 + a_2^2)) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (18.63)$$

равномерно пригодное по  $t \in \mathbb{R}_+$ . Что же касается интересующей нас величины (18.62), то для нее из (18.63) вытекает аналогичное асимптотическое равенство

$$E_0 = \frac{64}{25} (1 + 2N^2(a_1^2 + a_2^2)) + O(\varepsilon), \quad (18.64)$$

из которого, в свою очередь, заключаем, что  $E_0 \rightarrow \infty$  при согласованном стремлении  $N \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

В заключение добавим, что сосуществующие устойчивые инвариантные торы системы (18.7) могут заметно отличаться друг от друга по своей пространственной сложности даже в случае, когда их размерности одинаковы. Для примера обратимся к рисункам 18.2 и 18.3, на которых представлены пространственные профили двух четырехмерных торов, отвечающих наборам индексов (18.52) при  $N = 60$ ,  $(n_1, k_1) = (2, 4)$ ,  $(n_2, k_2) = (5, 1)$  и  $N = 60$ ,  $(n_1, k_1) = (20, 24)$ ,  $(n_2, k_2) = (25, 31)$ . Точнее говоря, для каждого из этих торов в формуле (18.26) полагалось  $\varepsilon = 0$ ,  $\varphi_1 = \dots = \varphi_4 = 0$  и по массивам данных

$$x = s_1/N, \quad y = s_2/N,$$



$$z = \frac{4}{5} (e_{s_1, s_2}^{n_1, k_1} + e_{s_1, s_2}^{n_2, k_2} + e_{s_1, s_2}^{N-n_1, N-k_2} + e_{s_1, s_2}^{N-n_2, N-k_1}),$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N,$$

строилась соответствующая двумерная поверхность.

**18.3. Случай граничных условий Дирихле.** Обратимся теперь к вопросу об аттракторах системы (18.1) с граничными условиями (18.3). Точнее говоря, рассмотрим систему

$$\ddot{u}_{s_1, s_2} + \varepsilon(u_{s_1, s_2}^2 - 1)\dot{u}_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2} = \mathcal{L}u_{s_1, s_2}, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1, \quad (18.65)$$

получающуюся из (18.5) при заменах  $N$  на  $N-1$ ,  $(N-1)a_j$  на  $Na_j$ ,  $j = 1, 2$ . Здесь, как и ранее,  $\mathcal{L} = a_1^2 \mathcal{L}_1 + a_2^2 \mathcal{L}_2$ , а разностные операторы

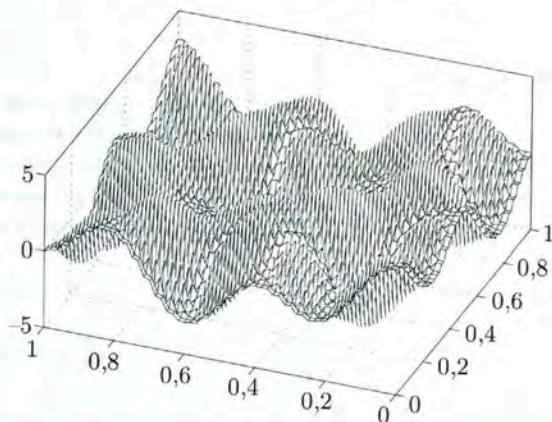


Рис. 18.2

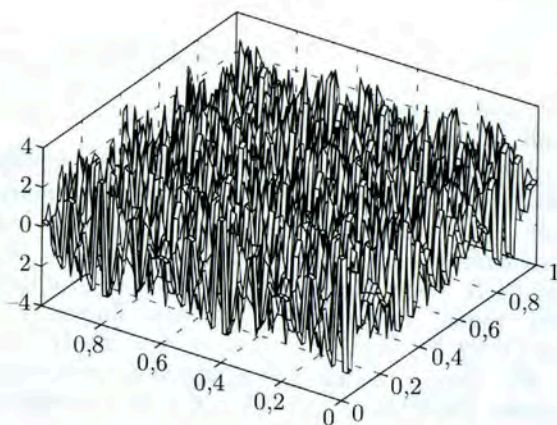


Рис. 18.3

$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$  определяются аналогичными (18.8), (18.9) формулами

$$\mathcal{L}_1 u_{s_1, s_2} = N^2 (u_{s_1+1, s_2} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1-1, s_2}), \quad u_{0, s_2} = u_{N, s_2} = 0; \quad (18.66)$$

$$\mathcal{L}_2 u_{s_1, s_2} = N^2 (u_{s_1, s_2+1} - 2u_{s_1, s_2} + u_{s_1, s_2-1}), \quad u_{s_1, 0} = u_{s_1, N} = 0. \quad (18.67)$$

Как и в предыдущем пункте, для исследования автоколебаний системы (18.65) оказываются полезными разностные аналоги пространственных мод  $2 \sin \pi n x \sin \pi k y$ , задающиеся равенствами

$$e_{s_1, s_2}^{n, k} = 2e_{s_1}^n e_{s_2}^k, \quad e_{s_1}^n = \sin\left(\frac{\pi n}{N} s_1\right), \quad e_{s_2}^k = \sin\left(\frac{\pi k}{N} s_2\right), \quad (18.68)$$

$$s_1, s_2 = 1, \dots, N-1, \quad n, k = 1, \dots, N-1,$$

и удовлетворяющие аналогичным (18.11) соотношениям

$$\mathcal{L} e_{s_1, s_2}^{n, k} = -(a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k) e_{s_1, s_2}^{n, k},$$

$$n, k = 1, \dots, N-1, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1, \quad (18.69)$$

$$\lambda_m = 4N^2 \sin^2\left(\frac{\pi m}{2N}\right), \quad m = 1, \dots, N-1.$$

Действительно, формулы (18.66)–(18.69) позволяют выписать общее решение линейной системы, получающейся из (18.65) при  $\varepsilon = 0$ . Упомянутое решение допускает аналогичное (18.12) тригонометрическое представление

$$u_{s_1, s_2} = \sum_{n, k=1}^{N-1} (\xi_{n, k} \exp(i\sigma_{n, k} t) + \bar{\xi}_{n, k} \exp(-i\sigma_{n, k} t)) e_{s_1, s_2}^{n, k}, \quad (18.70)$$

где по-прежнему  $\sigma_{n, k} = \sqrt{1 + a_1^2 \lambda_n + a_2^2 \lambda_k}$ , а  $\xi_{n, k}$  — произвольные комплексные амплитуды.

Обыгрывая в очередной раз существование при  $\varepsilon = 0$  тригонометрического решения (18.70) и снова опираясь на изложенную в [73] методику, для отыскания автоколебательных процессов системы (18.65) при  $0 < \varepsilon \ll 1$  привлечем асимптотические ряды

$$u_{s_1, s_2} = u_{s_1, s_2, 0}(t, \tau) + \varepsilon u_{s_1, s_2, 1}(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad s_1, s_2 = 1, \dots, N-1. \quad (18.71)$$

Как и ранее, считаем, что нулевые приближения  $u_{s_1, s_2, 0}$  задаются равенствами (18.70), в которых амплитуды  $\xi_{n, k}$  зависят от медленного времени  $\tau$ . Что же касается фигурирующих в (18.71) функций  $u_{s_1, s_2, 1}$ , то для них справедливы аналогичные (18.16) представления:

$$u_{s_1, s_2, 1} = \sum_{n, k=1}^{N-1} u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau) \exp(i\sigma_{n, k} t) + \overline{u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}(\tau)} \exp(-i\sigma_{n, k} t) + \sum_m u_{s_1, s_2, 1}^m(\tau) \exp\left(i \sum_{r_1, r_2=1}^{N-1} m_{r_1, r_2} \sigma_{r_1, r_2} t\right). \quad (18.72)$$



Здесь  $m = \|m_{r_1, r_2}\|_{r_1, r_2=1}^{N-1}$  — всевозможные матрицы с целочисленными элементами, для которых  $\sum_{r_1, r_2} |m_{r_1, r_2}| = 3$ . Считаем также, что собственные частоты  $\sigma_{n,k}$  из (18.72) удовлетворяют условиям нерезонансности, подобным (18.17).

Подставляя выражения (18.70), (18.71) в (18.65) и приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$ , для  $u_{s_1, s_2, 1}$  получаем линейную неоднородную систему вида (18.14), решение которой ищем в классе тригонометрических полиномов (18.72). В результате, как и в п. 18.2, проблема сводится к определению коэффициентов  $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$ ,  $u_{s_1, s_2, 1}^m$  из соответствующих линейных неоднородных алгебраических систем. Отметим сразу, что в силу упомянутых чуть выше условий нерезонансности все системы для  $u_{s_1, s_2, 1}^m$  оказываются невырожденными. Системы же для  $u_{s_1, s_2, 1}^{n, k}$  напротив, с необходимостью вырождены, а условия их разрешимости задаются аналогичными (18.20) равенствами. Как и в предыдущем случае, выполнения указанных равенств добиваемся за счет подходящего выбора комплексных амплитуд  $\xi_{n,k}(\tau)$ . На этом пути для  $\xi_{n,k}(\tau)$  получим аналогичную (18.22) систему:

$$2 \frac{d\xi_{n,k}}{d\tau} = \xi_{n,k} \left[ 1 - d_{n,k}^{n,k} |\xi_{n,k}|^2 - \sum_{\substack{m,r=1 \\ (m,r) \neq (n,k)}}^{N-1} d_{n,k}^{m,r} |\xi_{m,r}|^2 \right], \quad (18.73)$$

$$n, k = 1, \dots, N-1,$$

с коэффициентами

$$d_{n,k}^{n,k} = l((e_{s_1, s_2}^{n,k})^4), \quad d_{n,k}^{m,r} = 2l((e_{s_1, s_2}^{n,k} e_{s_1, s_2}^{m,r})^2), \quad (18.74)$$

где, как и ранее,  $l(*)$  — операция усреднения по индексам  $s_1, s_2 = 1, \dots, N-1$ .

Опуская процесс получения явных выражений для коэффициентов (18.74) нормальной формы (18.73), вполне аналогичный описанному в п. 18.2, приведем сразу итоговую амплитудную систему для  $\eta_{n,k} = |\xi_{n,k}(\tau)|^2$ . В данной ситуации эта система имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} = & \eta_{n,k} \left( 1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{n,m} - \frac{9}{2} \eta_{n, N-k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,k} - \right. \\ & - \frac{9}{2} \eta_{N-n, k} - 2 \sum_{\substack{m, r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - 3 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N-n, r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m, N-k} - \\ & \left. - \frac{9}{2} \eta_{N-n, N-k} \right), \quad n, k = 1, \dots, N-1, \quad n, k \neq N/2. \quad (18.75) \end{aligned}$$

В случае же четного  $N$  к (18.75) следует добавить уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{N/2,k}}{d\tau} = & \eta_{N/2,k} \left( 1 - 3\eta_{N/2,k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{N/2,m} - 6\eta_{N/2,N-k} - \right. \\ & \left. - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,k} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq N/2 \\ r \neq k, N-k}}^{N-1} \eta_{m,r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,N-k} \right), \\ & k = 1, \dots, N-1, \quad k \neq N/2; \end{aligned} \quad (18.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,N/2}}{d\tau} = & \eta_{n,N/2} \left( 1 - 3\eta_{n,N/2} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{n,m} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n, N-n}}^{N-1} \eta_{m,N/2} - \right. \\ & \left. - 6\eta_{N-n,N/2} - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, N-n \\ r \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,r} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{N-n,m} \right), \\ & n = 1, \dots, N-1, \quad n \neq N/2; \end{aligned} \quad (18.77)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{N/2,N/2}}{d\tau} = & \eta_{N/2,N/2} \left( 1 - 4\eta_{N/2,N/2} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{N/2,m} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,N/2} - \right. \\ & \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq N/2, r \neq N/2}}^{N-1} \eta_{m,r} \right). \end{aligned} \quad (18.78)$$

При исследовании состояний равновесия системы (18.75)–(18.78) нам потребуется множество  $S$ , состоящее из целочисленных векторов вида

$$\begin{aligned} (n_1, n_2, \dots, n_{m_0}): \quad & 1 \leq n_j \leq N-1, \quad n_j \neq N/2, \\ & n_j \neq n_r, \quad N - n_r \quad \text{при всех } j \neq r, \end{aligned} \quad (18.79)$$

где  $m_0 = m_0(N)$  определено в (18.41). Характерная особенность любого вектора (18.79) заключается в том, что он обладает свойством максимальности в следующем смысле: для каждого натурального  $n$ ,  $1 \leq n \leq N-1$ ,  $n \neq N/2$ , найдется такой номер  $j_0$  из промежутка  $1 \leq j_0 \leq m_0$ , что либо  $n = n_{j_0}$ , либо  $n = N - n_{j_0}$ .

Описанное выше множество  $S$  позволяет ввести наборы индексов

$$\gamma = \{(n_1, k_1), \dots, (n_{m_0}, k_{m_0})\}: \quad (n_1, \dots, n_{m_0}), (k_1, \dots, k_{m_0}) \in S, \quad (18.80)$$

количество  $s_0(N)$  которых (с учетом того, что порядок следования пар  $(n_j, k_j)$ ,  $j = 1, \dots, m_0$ , не имеет значения) задается формулой

$$s_0(N) = 2^{2m_0(N)} m_0(N)! \quad (18.81)$$



Фиксируем, далее, некоторый набор  $\gamma$  из множества (18.80) и рассмотрим отвечающую ему вспомогательную систему (18.45). Из явного вида уравнений (18.75) и из свойств (18.79) вытекает, что для матрицы  $\mathcal{D}$  этой системы справедливы равенства

$$\mathcal{D} = \|d_{j,r}\|_{j,r=1}^{m_0}, \quad d_{j,j} = \frac{9}{4}, \quad d_{j,r} = 2 \text{ при } j \neq r. \quad (18.82)$$

А отсюда, в свою очередь, следует, что система (18.45), (18.82) допускает состояние равновесия  $\eta_0 = \text{colop}(\eta_*, \dots, \eta_*)$ ,  $\eta_* = 4/(8m_0 + 1)$ , которому в амплитудной системе (18.75)–(18.78) отвечает состояние равновесия  $O_\gamma^{(m_0)}$  вида (18.25) с ненулевыми компонентами  $\eta_{n_1, k_1} = \dots = \eta_{n_{m_0}, k_{m_0}} = \eta_*$ .

Как уже отмечалось в п. 18.2, устойчивость любой неподвижной точки (18.25) определяется по расположению спектра матрицы линеаризации  $A$  вспомогательной системы (18.45) и по знакам величин (18.47). В случае найденного выше состояния равновесия  $O_\gamma^{(m_0)}$  интересующая нас матрица  $A = -\eta_* \mathcal{D}$  в силу (18.82) имеет собственные значения  $\lambda = -\eta_*/4$  (кратности  $m_0 - 1$ ) и  $\lambda = -1$ . Что же касается величин (18.47), то здесь для них получаются равенства

$$\alpha_{m,r} = 1 - \eta_* \sum_{j=1}^{m_0} d_{m,r}^{n_j, k_j}, \quad (m, r) \neq (n_s, k_s), \quad s = 1, \dots, m_0. \quad (18.83)$$

Предположим сначала, что  $m \neq N/2$  и  $r \neq N/2$ . Из явного вида правых частей уравнений (18.75) и из отмеченного выше свойства максимальности векторов (18.79) заключаем, что в этой ситуации среди чисел  $d_{m,r}^{n_j, k_j}$  из (18.83) присутствуют либо два значения, равные 3, либо одно, равное  $9/2$ . Остальные же  $d_{m,r}^{n_j, k_j}$  равны 2. А это значит, что  $\alpha_{m,r} = -7\eta_*/4$  или  $\alpha_{m,r} = -9\eta_*/4$ . Таким образом, при нечетном  $N$  все состояния равновесия  $O_\gamma^{(m_0)}$ , отвечающие наборам индексов (18.80), являются экспоненциально устойчивыми.

При четном  $N$  анализ знаков величин (18.83) уже не исчерпывается рассмотренной выше ситуацией. А именно, здесь необходимо разобрать три новых варианта:  $m = N/2$ ,  $r \neq N/2$ ;  $m \neq N/2$ ,  $r = N/2$ ;  $m = N/2$ ,  $r = N/2$ . Несложный подсчет показывает, что в первых двух из них по-прежнему  $\alpha_{m,r} < 0$ , а в третьем имеем  $\alpha_{N/2, N/2} = \eta_*/4 > 0$ . Таким образом, в случае четного  $N$  все состояния равновесия  $O_\gamma^{(m_0)}$  системы (18.75)–(18.78) одновременно неустойчивы, причем, что характерно, размерность неустойчивого многообразия каждого из них равна единице.

Итак, стало понятно, что при четном  $N$  вопрос об устойчивых состояниях равновесия системы (18.75)–(18.78) нуждается в отдельном рассмотрении. Однако проделанный выше анализ наводит на мысль, что устойчивыми здесь должны быть положения равновесия, получа-

ющиеся из  $O_{\gamma}^{(m_0)}$  при добавлении еще одной ненулевой компоненты  $\eta_{N/2, N/2}$ . Как оказывается, эти эвристические соображения верны.

Действительно, в предположении, что  $N$  четно, рассмотрим расширенные наборы индексов  $\gamma' = \gamma \cup \{(N/2, N/2)\}$ , где  $\gamma$  — произвольный набор из (18.80). Обратимся, далее, к вспомогательной системе (18.45), отвечающей любому набору  $\gamma'$ . Нетрудно заметить, что матрица  $\mathcal{D}$  этой системы задается равенством

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 9/4 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 9/4 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & \dots & 2 & 9/4 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 4 \end{pmatrix}. \quad (18.84)$$

А отсюда очевидным образом следует, что рассматриваемая система допускает состояние равновесия  $\eta_0 = \text{colop}(\eta_*, \dots, \eta_*, \eta_*/8)$ , где теперь  $\eta_* = 2/(4m_0 + 1)$ . В исходной же амплитудной системе (18.75)–(18.78) ему соответствует положение равновесия  $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$  вида (18.25) с ненулевыми компонентами  $\eta_{m_1, k_1} = \dots = \eta_{n_{m_0}, k_{m_0}} = \eta_*$ ,  $\eta_{N/2, N/2} = \eta_*/8$ .

Исследование устойчивости неподвижной точки  $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$  начнем с анализа спектра матрицы  $A$ , получающейся из (18.84) при умножении первых  $m_0$  строк на  $-\eta_*$ , а последней строки — на величину  $-\eta_*/8$ . Непосредственная проверка показывает, что эта матрица имеет собственные значения  $\lambda = -\eta_*/4$  (кратности  $m_0$ ) и  $\lambda = -1$ .

Перейдем теперь к анализу знаков величин  $\alpha_{m,r}$ , которые для состояния равновесия  $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$  имеют вид

$$\alpha_{m,r} = 1 - \eta_* \sum_{j=1}^{m_0} d_{m,r}^{n_j, k_j} - \frac{\eta_*}{8} d_{m,r}^{N/2, N/2}, \quad (m, r) \neq (n_j, k_j), \quad (18.85)$$

$$j = 1, \dots, m_0, \quad (m, r) \neq (N/2, N/2).$$

В первую очередь обратим внимание, что при  $m \neq N/2$ ,  $r \neq N/2$  коэффициенты  $d_{m,r}^{n_j, k_j}$  принимают те же значения, что и в случае (18.83), а  $d_{m,r}^{N/2, N/2} = 2$ . Тем самым, и здесь правые части из (18.85) выдают два возможных значения:  $\alpha_{m,r} = -7\eta_*/4$  или  $\alpha_{m,r} = -9\eta_*/4$ . В остальных же двух ситуациях, а именно, при  $m = N/2$ ,  $r \neq N/2$  или  $m \neq N/2$ ,  $r = N/2$ , выполняются равенства  $\alpha_{N/2, r} = \alpha_{m, N/2} = -\eta_*$ . А это означает, что все состояния равновесия  $O_{\gamma'}^{(m_0+1)}$  системы (18.75)–(18.78), как и ожидалось, оказываются экспоненциально устойчивыми.

Подводя итог, остановимся на информации об аттракторах исходной системы (18.65), которую можно извлечь из проделанного анализа. Опираясь на аналогичный теореме 18.1 результат о соответствии, убеждаемся, что при любом фиксированном  $N$ , при всех достаточно



малых  $\varepsilon > 0$  и при некоторой общности положения относительно параметров  $a_1, a_2$  эта система имеет не менее  $s_0(N)$  (см. (18.81)) устойчивых инвариантных торов размерности  $m_0(N)$  или  $m_0(N) + 1$  (в зависимости от четности  $N$ ). В частности, при  $N = 5$  она допускает не менее 32-х устойчивых двумерных торов. Интересно также отметить, что в отличие от ситуации, рассмотренной в п. 18.2, здесь с ростом  $N$  неограниченно увеличивается не только количество сосуществующих устойчивых инвариантных торов, но и размерность каждого из них.

**18.4. Анализ непрерывных моделей.** В этом пункте приведем сводку результатов о динамических свойствах уравнения (18.6) в единичном квадрате  $(x, y) \in \Omega$  с нулевыми граничными условиями Дирихле или Неймана.

Начнем с исследования краевой задачи

$$\begin{aligned} u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u &= Lu, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = u_y|_{y=0} &= u_y|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (18.86)$$

где  $L = a_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + a_2^2 \partial^2 / \partial y^2$ . Как и в случае (17.2), будем интересоваться аттракторами динамической системы, порождаемой решениями этой краевой задачи в фазовом пространстве  $(u, u_t) \in \dot{W}_2^2(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$ .

Нетрудно увидеть, что при  $\varepsilon = 0$  общее решение задачи (18.86) записывается в виде тригонометрического ряда

$$u = \sum_{n,k=0}^{\infty} \left[ \xi_{n,k} \exp(i\omega_{n,k}t) + \bar{\xi}_{n,k} \exp(-i\omega_{n,k}t) \right] e_{n,k}(x, y), \quad (18.87)$$

где

$$\begin{aligned} \omega_{n,k} &= \sqrt{1 + \pi^2(a_1^2 n^2 + a_2^2 k^2)}, \quad e_{n,k}(x, y) = 2 \cos \pi n x \cos \pi k y, \\ n, k &= 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (18.88)$$

а  $\xi_{n,k}$  — произвольные комплексные амплитуды, удовлетворяющие требованию  $\sum_{n,k} \omega_{n,k}^4 |\xi_{n,k}|^2 < \infty$ . Как и в п. 17.1, данное обстоятельство

позволяет для изучения аттракторов задачи (18.86) воспользоваться методом квазинормальных форм. Суть этого метода в том, что возможные автоколебательные режимы исходной задачи ищутся в виде асимптотического ряда

$$u = u_0(t, \tau, x, y) + \varepsilon u_1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (18.89)$$

где первое слагаемое  $u_0$  определяется формулами (18.87), (18.88), в которых комплекснозначные функции  $\xi_{n,k} = \xi_{n,k}(\tau)$ ,  $n, k \geq 0$ , пока произвольны.

Последующие действия вполне понятны. Подставляя соотношение (18.89) в (18.86) и приравнявая коэффициенты при  $\varepsilon$ , для нахождения  $u_1$  получаем линейную неоднородную краевую задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + u_1 - Lu_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left( u_0 - \frac{u_0^3}{3} - 2 \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=1} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial u_1}{\partial y} \Big|_{y=1} = 0, \end{aligned} \quad (18.90)$$

в которой переменная  $\tau$  считается параметром. Далее, из условий разрешимости задачи (18.90) в классе формальных тригонометрических рядов переменных  $\omega_{n,k}t$ ,  $n, k \geq 0$  (т.е. из факта отсутствия в ее правой части слагаемых, пропорциональных гармоникам  $\exp(\pm i\omega_{n,k}t)e_{n,k}(x, y)$ ,  $n, k \geq 0$ ), для амплитуд  $\xi_{n,k}$  приходим к некоторой счетной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которую мы условились называть квазинормальной формой.

Дальнейший анализ проведем в предположении, что между собственными частотами  $\omega_{n,k}$  из (18.88) отсутствуют резонансные соотношения, о которых говорилось в п. 6.2 (этого всегда можно добиться за счет подходящего выбора параметров  $a_1, a_2$ ). Тогда, как показывает несложная проверка, интересующая нас система для  $\eta_{n,k} = |\xi_{n,k}|^2$  принимает наиболее простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,k}}{d\tau} &= \eta_{n,k} \left( 1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{n,m} - 3 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m,k} - 6 \eta_{n,0} - 6 \eta_{0,k} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n, r \neq k}}^{\infty} \eta_{m,r} - 4 \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^{\infty} \eta_{0,r} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m,0} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad n, k \geq 1; \end{aligned} \quad (18.91)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{n,0}}{d\tau} &= \eta_{n,0} \left( 1 - 3 \eta_{n,0} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m,0} - 3 \sum_{r=1}^{\infty} \eta_{m,r} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{0,m} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq n}}^{\infty} \eta_{m,r} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad n \geq 1; \end{aligned} \quad (18.92)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{0,k}}{d\tau} &= \eta_{0,k} \left( 1 - 3 \eta_{0,k} - 4 \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{0,m} - 3 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m,k} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m,0} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \sum_{\substack{m,r=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \eta_{m,r} - 8 \eta_{0,0} \right), \quad k \geq 1; \end{aligned} \quad (18.93)$$

$$\frac{d\eta_{0,0}}{d\tau} = \eta_{0,0} \left( 1 - 4 \eta_{0,0} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{0,m} - 4 \sum_{m=1}^{\infty} \eta_{m,0} - 2 \sum_{m,r=1}^{\infty} \eta_{m,r} \right). \quad (18.94)$$



Рассмотрим какое-либо из возможных состояний равновесия получившейся системы (18.91)–(18.94) с конечным числом ненулевых положительных координат:

$$\eta_{n_1, k_1}, \dots, \eta_{n_p, k_p}, \quad p \geq 1. \quad (18.95)$$

Справедливо следующее утверждение.

**Теорема 18.6.** Среди состояний равновесия (18.95) системы (18.91)–(18.94) устойчивыми являются только неподвижные точки, для которых

$$p = 1, \quad \eta_{n_1, k_1} = \begin{cases} 1/3 & \text{при } n_1 = 0, k_1 \geq 1 \text{ или } n_1 \geq 1, k_1 = 0, \\ 1/4 & \text{при } n_1 = k_1 = 0. \end{cases} \quad (18.96)$$

Все же остальные ее состояния равновесия из семейства (18.95) экспоненциально неустойчивы.

**Доказательство.** Непосредственная проверка показывает, что система в вариациях на любом из состояний равновесия (18.95), (18.96) имеет вид

$$\frac{dh_{n,k}}{d\tau} = \alpha_{n,k} h_{n,k}, \quad n, k \geq 0,$$

где в зависимости от индексов  $n, k$  и  $n_1, k_1$  числа  $\alpha_{n,k}$  принимают значения  $-1$  и  $-1/3$ . Таким образом, убеждаемся в экспоненциальной устойчивости каждой из этих неподвижных точек.

Рассмотрим теперь любое из оставшихся состояний равновесия (18.95) и определим по нему величины

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{s: n_s > 0, k_s > 0} \eta_{n_s, k_s}, & \Sigma_2 &= \sum_{s: n_s > 0, k_s = 0} \eta_{n_s, k_s}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{s: n_s = 0, k_s > 0} \eta_{n_s, k_s}, & \Sigma_4 &= \sum_{s: n_s = k_s = 0} \eta_{n_s, k_s} \end{aligned} \quad (18.97)$$

(если в каком-либо из случаев множество индексов  $s$  оказывается пустым, то соответствующую сумму полагаем равной нулю). Предположим, далее, что заведомо непусто множество  $\{s: n_s > 0, k_s > 0\}$  и зафиксируем принадлежащий ему индекс  $s_0$ . После этого обратимся к уравнению из (18.91) при  $n = n_{s_0}, k = k_{s_0}$  и подставим в него компоненты выбранного состояния равновесия. В результате получаем некоторое верное равенство, из которого с учетом соотношений (18.97) выводим

$$1 - 2\Sigma_1 - 4\Sigma_2 - 4\Sigma_3 - 8\Sigma_4 \geq \frac{1}{4} \eta_{n_{s_0}, k_{s_0}}. \quad (18.98)$$

Установленное неравенство (18.98) влечет неустойчивость интересующего нас состояния равновесия. Действительно, линеаризуем на нем исходную систему (18.91)–(18.94) и из получившейся линейной системы возьмем уравнение для компоненты  $h_{m,r}$  при  $m > \max_{1 \leq s \leq p} n_s$ ,

$r > \max_{1 \leq s \leq p} k_s$ . Нетрудно заметить, что это уравнение записывается в виде

$$\frac{dh_{m,r}}{d\tau} = (1 - 2\Sigma_1 - 4\Sigma_2 - 4\Sigma_3 - 8\Sigma_4)h_{m,r}.$$

А отсюда и из (18.98) требуемый факт вытекает очевидным образом.

Итак, показана неустойчивость любого состояния равновесия (18.95) в случае  $\Sigma_1 > 0$ . Если же  $\Sigma_1 = 0$ , то соответствующее состояние равновесия является одновременно и решением подсистемы, получающейся из (18.91)–(18.94) при  $\eta_{n,k} = 0$  для  $\forall n, k \in \mathbb{N}$ . После нормировок  $4\eta_{n,0} \rightarrow \eta_{n,0}$ ,  $4\eta_{0,k} \rightarrow \eta_{0,k}$ ,  $4\eta_{0,0} \rightarrow \eta_{0,0}$  и последующих переобозначений  $\eta_0 = \eta_{0,0}$ ,  $\eta_n = \eta_{[n/2]+1,0}$ ,  $\eta_{n+1} = \eta_{0,[n/2]+1}$ ,  $n \geq 1$ , где  $[\cdot]$  — целая часть, упомянутая подсистема приобретает вид (17.9). Таким образом, для завершения доказательства теоремы 18.6 остается воспользоваться результатами из п. 17.1.

Предпринятый анализ позволяет заключить, что все инвариантные торы краевой задачи (18.86), отвечающие состояниям равновесия амплитудной системы, отличным от (18.95), (18.96), если и существуют, то заведомо неустойчивы. Устойчивыми же в ней являются только периодические по  $t$  решения, зависящие от одной пространственной переменной  $x$  или  $y$ . В системе (18.91)–(18.94) этим периодическим решениям соответствуют устойчивые неподвижные точки (18.95), (18.96). Остается добавить, что поскольку указанных неподвижных точек имеется счетное число, то в исходной задаче (18.86) реализуется уже неоднократно упоминавшееся ранее явление буферности. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение [73, 103].

**Теорема 18.7.** Для любых фиксированных  $n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $a_{**} > a_* > 0$  найдется такое достаточно малое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n_0, a_*, a_{**}) > 0$ , что при всех  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,  $a_* \leq a_1 \leq a_{**}$ ,  $a_* \leq a_2 \leq a_{**}$  краевая задача (18.86) имеет наборы экспоненциально орбитально устойчивых циклов

$$u = u_n(\varphi, x, a_1, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{n,0}(1 + \varepsilon\delta_n(a_1, \varepsilon)), \quad n = 0, 1, \dots, n_0, \quad (18.99)$$

$$u = u_n(\varphi, y, a_2, \varepsilon), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega_{0,n}(1 + \varepsilon\delta_n(a_2, \varepsilon)), \quad n = 1, \dots, n_0.$$

Здесь  $u_n(\varphi, z, a, \varepsilon)$ ,  $u_n(\varphi + 2\pi, z, a, \varepsilon) \equiv u_n(\varphi, z, a, \varepsilon)$  и  $\delta_n = \delta_n(a, \varepsilon)$  — некоторые достаточно гладкие по своим переменным  $(\varphi, z, a, \varepsilon) \in \mathbb{R} \times [0, 1] \times [a_*, a_{**}] \times [0, \varepsilon_0]$  и  $(a, \varepsilon) \in [a_*, a_{**}] \times [0, \varepsilon_0]$  функции, причем

$$\delta_n(a, 0) \equiv 0, \quad u_n(\varphi, z, a, 0) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{3}} \cos \varphi \cos \pi n z & \text{при } n > 0, \\ 2 \cos \varphi & \text{при } n = 0. \end{cases} \quad (18.100)$$

В случае краевой задачи

$$u_{tt} + \varepsilon(u^2 - 1)u_t + u = Lu, \quad u|_{x=0} = u|_{x=1} = u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0, \quad (18.101)$$



где по-прежнему  $L = a_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + a_2^2 \partial^2 / \partial y^2$ , сталкиваемся с несколько иной ситуацией. Как показано в разделе 6, где рассматривалась более общая задача (6.9), при отсутствии некоторых резонансов отвечающая ей амплитудная система (см. (6.15) при  $\nu = 0$ ) вообще не имеет устойчивых состояний равновесия с конечным числом ненулевых положительных координат. Таким образом, вопрос об аттракторах задачи (18.101) пока остается открытым. Ясно лишь, что эти аттракторы заведомо отличны от циклов и конечномерных инвариантных торов.

**18.5. Итоговые замечания.** Полученные выше результаты свидетельствуют о том, что аттракторы гиперболических краевых задач могут существенно отличаться от аттракторов их дискретных аппроксимаций. Действительно, аттракторами краевой задачи (18.86) являются только циклы (18.99), (18.100) и таковых при подходящем уменьшении  $\varepsilon$  может быть сколь угодно много. Далее, при переходе от (18.86) к соответствующей дискретной модели (18.7) аналоги этих циклов хотя и сохраняются, но в подавляющем большинстве становятся неустойчивыми (в амплитудной системе (18.28)–(18.36) им отвечают состояния равновесия с одной ненулевой координатой, среди которых устойчивы только неподвижные точки (18.59), (18.60)). Что же касается остальных аттракторов системы (18.7), отличных от устойчивых циклов, то их уместно назвать ложными.

Смысл термина «ложные» достаточно ясен из контекста. К таковым будем относить аттракторы дискретной модели, не имеющие аналогов в исходной краевой задаче. В случае системы (18.7) ложными являются устойчивые инвариантные торы размерности 2, 3 и 4, доставляемые теоремами 18.1, 18.3–18.5. В случае же системы (18.65) реализуется крайняя ситуация — все ее аттракторы оказываются ложными.

Природа обнаруженного феномена, на наш взгляд, заключается в следующем. Для гиперболических краевых задач характерна ситуация, когда их аттракторы формируются одновременно как на низких, так и на высоких модах. Однако собственные частоты  $\omega_{n,k}$  распределенной модели, отвечающие высоким модам, отнюдь не близки к соответствующим частотам  $\sigma_{n,k}$  в дискретном случае. В самом деле, для краевой задачи (18.86) и системы (18.7) соответствующие предельные равенства  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_{n,k} = \omega_{n,k}$  имеют место при  $n, k \sim 1$ , но нарушаются при  $n \sim N$  или  $k \sim N$ .

Отмеченное обстоятельство приводит к тому, что часть аттракторов дискретной модели будет заведомо отличаться, по крайней мере на количественном уровне, от соответствующих аттракторов исходной гиперболической задачи. Но, как свидетельствуют разобранные в данной главе примеры, в некоторых случаях количественные изменения перерастают в качественные.

Обратим внимание на еще один весьма неожиданный факт. Казалось бы, наиболее естественный способ борьбы с ложными аттракторами — это повышение точности аппроксимации, т. е. увеличение

количества  $N$  уравнений в дискретной модели. Однако данный путь не приводит к желаемой цели. Действительно, в рассмотренных нами примерах с ростом  $N$  ложные аттракторы не только сохраняются, но и неограниченно увеличиваются в числе.

Один из действенных способов борьбы с ложными аттракторами — это так называемый метод исчезающей вязкости. Для пояснения сути данного метода обратимся к системе

$$\ddot{u}_n + \varepsilon(u_n^2 - 1)\dot{u}_n + u_n = a^2 \Delta_N(u_n) + \varepsilon \nu \Delta_N(\dot{u}_n), \quad (18.102)$$

$$n = 1, \dots, N,$$

получающейся из (17.22) в результате введения дополнительного слагаемого  $\varepsilon \nu \Delta_N(\dot{u}_n)$ ,  $\nu = \text{const} > 0$ , характеризующего малую вязкость.

При отыскании аттракторов системы (18.102) воспользуемся стандартной методикой, неоднократно описанной выше. В результате получим в точности амплитудную систему (17.89), (17.90). А отсюда и из проделанного в п. 17.4 анализа следует, что при согласованном уменьшении  $\nu$  и увеличении  $N$  в системе (18.102) происходит увеличение числа устойчивых периодических движений, отвечающих состояниям равновесия  $O_k^{(1)}$ ,  $k = 1, \dots, k_1(N)$ , амплитудной системы (17.89), (17.90), и в то же время отсутствуют ложные аттракторы. А это означает, что при помощи метода исчезающей вязкости мы смогли добиться требуемого соответствия между динамическими свойствами исходной краевой задачи (17.2) и ее регуляризованного дискретного аналога (18.102).

Итак, стало понятно, что об аттракторах гиперболических краевых задач, вообще говоря, нельзя судить по поведению при  $t \rightarrow \infty$  соответствующих им разностных аппроксимаций. В связи с этим уместно вспомнить приведенные в [81] результаты компьютерного исследования краевой задачи

$$u_{tt} + (2u^2 + bu - 2\varepsilon)u_t + u = a^2 \Delta u, \quad (18.103)$$

$$u(t, x + 2\pi, y) \equiv u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y)$$

при  $\varepsilon = 0,2$ ,  $b = 4$  и при различных значениях параметра  $a$ . На основании численного интегрирования аналогичной (18.7) дискретной модели в работе [81] сделаны следующие выводы о динамике исходной задачи (18.103).

Во-первых, утверждается, что в широком диапазоне изменения параметра  $a$  задача (18.103) имеет целый набор сосуществующих устойчивых автоколебательных режимов, отличающихся друг от друга главным образом пространственной сложностью (в [81] они названы режимами самоорганизации).

Во-вторых, каждый из режимов самоорганизации характеризуется аномально большим значением энергии  $E_0$  (см. (18.62)).



которая, в свою очередь, монотонно убывает с уменьшением коэффициента  $a$ .

Продоланный нами анализ позволяет взглянуть на перечисленные факты с иной точки зрения. По всей видимости, устойчивые режимы, о которых пишут авторы статьи [81], действительно существуют, но только не в самой краевой задаче (18.103), а в отвечающей ей дискретной модели. Подчеркнем, что именно для ложных аттракторов характерны большие значения энергии, которая в силу (18.64) убывает при уменьшении параметров  $a_1, a_2$ .

В заключение скажем несколько слов о прикладной значимости наших результатов. Как оказывается, переход от дискретной модели какого-либо физического процесса к непрерывной правомерен отнюдь не всегда. Например, двумерную дискретную решетку генераторов, рассмотренную в п. 18.1, нельзя заменить на непрерывную. Связано это с тем, что такая замена принципиально меняет динамические свойства системы.