

ДИСКРЕТНЫЕ АВТОВОЛНЫ В СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В данной главе излагается теория релаксационных колебаний для нелинейного скалярного дифференциально-разностного уравнения с запаздыванием, представляющего собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона из экологии. Устанавливается, в частности, что в одномерной цепочке диффузионно связанных уравнений такого типа наблюдается известное явление буферности. А именно, при согласованном увеличении числа звеньев рассматриваемой цепочки и уменьшении коэффициента связи происходит неограниченный рост количества ее сосуществующих устойчивых периодических движений.

19. О некоторых модификациях уравнения Хатчинсона

19.1. Постановка проблемы. Теория релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений берет свое начало с заметки Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко [100], послужившей основой для последующих работ (см. [96, 101, 102, 116]). К настоящему времени эта теория приняла достаточно законченный характер и в суммированном виде изложена в монографиях [98, 99]. Необходимо также отметить монографию [54] и статью [55], в которых основные идеи и методы из [98, 99] были перенесены на некоторые классы сингулярно возмущенных дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием. Что же касается результатов настоящей главы, то их можно рассматривать как продолжение начатых в [54, 55] исследований.

Приступим к описанию объекта дальнейшего анализа. В связи с этим обратимся к базовому экологическому уравнению (8.5) и перепишем его в традиционных для данной тематики обозначениях, заменяя \mathcal{N} на N и τ на λ . В результате получим уравнение

$$\dot{N} = \lambda[1 - N(t - 1)]N, \quad (19.1)$$

где $N(t) \geq 0$ — плотность численности популяции млекопитающих в текущий момент времени, $\lambda = \text{const} > 0$ — мальтузианский коэффициент линейного роста.

Остановимся несколько более подробно, чем это было сделано в п. 8.3, на свойствах уравнения (19.1). Уместно напомнить, что это уравнение было предложено в 1948 г. американским биологом Г. Хат-

чинсоном [154] и позднее получило его имя. Следует также отметить, что согласно результатам из [149, 156, 182] при всех $\lambda > \pi/2$ оно

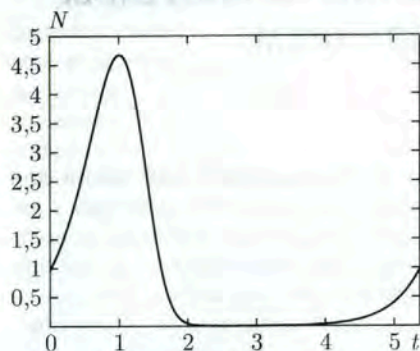


Рис. 19.1

имеет медленно осциллирующий цикл $N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(t, \pi/2) \equiv 1$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$ периода $T_*(\lambda)$, $T_*(\pi/2) = 4$ (медленная осцилляция означает, что расстояние между любыми соседними нулями функции $N_*(t, \lambda) - 1$ больше единицы). Упомянутый цикл рождается из состояния равновесия $N \equiv 1$ при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ в результате бифуркации Андронова-Хопфа, а при последующем увеличении λ довольно быстро приобретает релаксационную форму (см.

рис. 19.1, где показан график $N_*(t, \lambda)$ при $\lambda = 2.5$). В случае же $\lambda \gg 1$ справедливы следующие уточненные версии асимптотических равенств (8.28), (8.29):

$$\max_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp(\lambda - 1) + (2e)^{-1} + O(\exp(-\lambda)), \quad (19.2)$$

$$\min_{0 \leq t \leq T_*} N_*(t, \lambda) = \exp \left[-\exp \lambda + 2\lambda - 1 + \frac{1 + (1 + \lambda) \ln \lambda}{\lambda} + O\left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda^2}\right) \right], \quad (19.3)$$

$$T_*(\lambda) = (1 + \exp \lambda)/\lambda + O(\exp(-\lambda)/\lambda). \quad (19.4)$$

Добавим еще, что, как показывают численные эксперименты, цикл $N_*(t, \lambda)$ является экспоненциально орбитально устойчивым (в метрике фазового пространства $C[-1, 0]$) при всех $\lambda > \pi/2$. Однако строго доказать этот факт удастся лишь при $0 < \lambda - \pi/2 \ll 1$ и $\lambda \gg 1$.

Формулы (19.2)–(19.4) свидетельствуют о том, что закон $N_*(t, \lambda)$ изменения плотности популяции при больших λ биологически нереализуем. Действительно, излишне большой период колебаний и излишне глубокий минимум фактически означают, что после первого же всплеска численности произойдет полное вымирание вида и следующий всплеск просто не наступит. В связи с этим возникает необходимость в подходящей модификации уравнения (19.1), улучшающей биологические характеристики его релаксационного цикла.

На сегодняшний день известны по крайней мере два различных способа решения поставленной проблемы. Один из них, предложенный в статье [63], состоит в следующем.

Рассмотрим вместо (19.1) уравнение вида

$$\dot{N} = \lambda f(N(t-1))N. \quad (19.5)$$

Здесь, как и выше, параметр λ предполагается большим, а бесконечно дифференцируемая на полуоси $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ функция $f(x)$ обладает свойствами

$$f(0) = 1, \quad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad a_0 > 0. \quad (19.6)$$

Считаем еще, что фигурирующий в (19.6) асимптотический ряд можно дифференцировать по x любое число раз. Типовым примером такой функции служит

$$f(x) = (1-x)/(1+cx), \quad c = \text{const} > 0. \quad (19.7)$$

Как показано в [63], замена уравнения (19.1) на (19.5) приводит к желаемой цели: модифицированное уравнение Хатчинсона (19.5) допускает устойчивый релаксационный цикл $N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$ периода $T_*(\lambda)$: $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = T_0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, где $T_0 = 2 + a_0 + 1/a_0$. Что же касается формул (19.2), (19.3), то теперь их аналоги имеют вид

$$\max_t N_*(t, \lambda) \sim c_1 \exp \lambda, \quad \min_t N_*(t, \lambda) \sim c_2 \exp(-a_0 \lambda), \quad (19.8)$$

где $c_1, c_2 = \text{const} > 0$. Таким образом, налицо требуемое улучшение биологических характеристик релаксационных автоколебаний уравнения (19.5) по сравнению с уравнением (19.1) (меньше период функции $N_*(t, \lambda)$ и больше ее минимум). Более того, сопоставляя рис. 19.1 с графиком цикла $N_*(t, \lambda)$ уравнения (19.5), (19.7) при $\lambda = 2.5$, $c = 0.2$ (см. рис. 19.2), убеждаемся, что это улучшение проявляется даже при $\lambda \sim 1$.

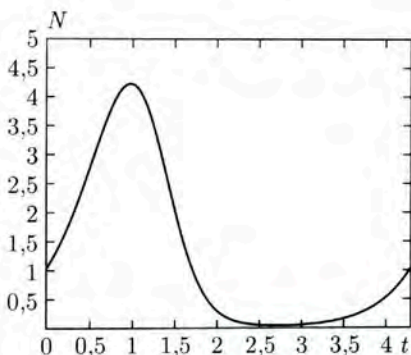


Рис. 19.2

Второй способ модификации уравнения Хатчинсона заключается в переходе от (19.1) к уравнению

$$\dot{N} = \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1-N) - N(t-1)]N, \quad (19.9)$$

где по-прежнему $\lambda \gg 1$, $a = \text{const} \in (0, 1)$. Уравнение (19.9) было предложено Ю. С. Колесовым в [54] для моделирования динамики популяции млекопитающих с учетом каннибализма (здесь a — коэффициент каннибализма). Предпринятый в [54] асимптотический анализ показал, что это уравнение имеет устойчивый релаксационный цикл

$N_*(t, \lambda) > 0$, $N_*(0, \lambda) \equiv 1$ периода $T_*(\lambda)$, причем справедливы предельные равенства

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_*(\lambda) = 1 + 1/a, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{t \in [\delta, 1-\delta]} |N_*(t, \lambda) - 1 - 1/a| = 0, \\ \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{t \in [1+\delta, 1+1/a-\delta]} N_*(t, \lambda) = 0, \quad \min_t N_*(t, \lambda) = O(\exp(-(1/a - 1)\lambda)), \quad (19.10)$$

где произвольное $\delta > 0$ фиксировано и достаточно мало.

Свойства (19.10) свидетельствуют о том, что асимптотические характеристики релаксационного цикла уравнения (19.9) отличаются в лучшую сторону (в биологическом смысле) от соответствующих характеристик (19.2)–(19.4) и (19.8) циклов уравнений (19.1) и (19.5). Действительно, в данном случае функция $N_*(t, \lambda)$ устроена достаточно просто: при $\lambda \rightarrow \infty$ она поточечно сходится к ступенчатой T_0 -периодической функции $N_0(t)$, где $T_0 = 1 + 1/a$, $N_0(t) \equiv 1 + 1/a$ при $0 < t < 1$, $N_0(t) \equiv 0$ при $1 < t < T_0$, $N_0(t + T_0) \equiv N_0(t)$. Что же касается более детальной информации об асимптотическом поведении периодического решения $N_*(t, \lambda)$ уравнения (19.9), то она приводится в следующих трех пунктах.

19.2. Теорема о существовании и устойчивости цикла. Для формулировки интересующей нас теоремы о периодическом решении уравнения (19.9) выполним следующие предварительные действия. Во-первых, сделаем в этом уравнении замену $N = (1 + 1/a) \exp(\lambda x)$, преобразующую его к более удобному для дальнейшего анализа виду:

$$\dot{x} = 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp(x(t-1)/\varepsilon), \quad (19.11)$$

где $\varepsilon = 1/\lambda \ll 1$, $\gamma = 1/a > 1$. Во-вторых, фиксируем постоянную

$$\sigma_0: \quad 0 < \sigma_0 < \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}\right). \quad (19.12)$$

В-третьих, введем в рассмотрение периодическую с периодом $T_0 = 1 + \gamma$ функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ -(\gamma-1)(t-1) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ t-1-\gamma & \text{при } 2 \leq t \leq T_0, \end{cases} \quad x_0(t+T_0) \equiv x_0(t). \quad (19.13)$$

Основной результат настоящего раздела, касающийся вопросов существования и устойчивости релаксационного цикла уравнения (19.11), звучит так.

Теорема 19.1. При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ уравнение (19.11) имеет единственный орбитально экспоненциально устойчивый (в метрике фазового пространства $C[-1, 0]$) цикл $x_*(t, \varepsilon)$,

$x_*(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$ периода $T_*(\varepsilon)$, удовлетворяющий предельным равенствам

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{0 \leq t \leq T_*(\varepsilon)} |x_*(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_0. \quad (19.14)$$

Доказательство сформулированной теоремы опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания наряду с константой σ_0 (см. (19.12)) фиксируем постоянные $q_1 > \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$ и обозначим через $S(\sigma_0, q_1, q_2) \subset C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ замкнутое, ограниченное и выпуклое множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих требованиям

$$-q_1 \leq \varphi(t) \leq -q_2, \quad \varphi(-\sigma_0) = -\sigma_0. \quad (19.15)$$

Далее, для произвольной функции $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ рассмотрим решение $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $t \geq -\sigma_0$, уравнения (19.11) с начальным условием $\varphi(t)$ при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а через $t = T_\varphi$ обозначим второй положительный корень уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ (если он существует). И наконец, зададим оператор $\Pi_\varepsilon: S(\sigma_0, q_1, q_2) \rightarrow C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$ с помощью равенства

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) = x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (19.16)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы установим асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ на различных промежутках изменения t , из которых будет следовать, что при подходящем выборе параметров σ_0, q_1, q_2 оператор (19.16) определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и преобразует его в себя. Затем проведем анализ уравнения в вариациях на решении $x_\varphi(t, \varepsilon)$ и покажем, что Π_ε является сжимающим.

19.3. Доказательство существования релаксационного цикла.

Построение асимптотики функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq \leq \sigma_0$. Так как в силу (19.12) его длина не превосходит единицы, то в этом случае $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$ и, следовательно, на указанном отрезке $x_\varphi(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp(\varphi(t - 1)/\varepsilon), \quad x|_{t=-\sigma_0} = -\sigma_0. \quad (19.17)$$

При асимптотическом исследовании задачи (19.17) существенным является то обстоятельство, что в силу неравенств из (19.15) равномерно по $t \in [-\sigma_0, \sigma_0]$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ имеем

$$\exp(\varphi(t - 1)/\varepsilon) = O(\exp(-q_2/\varepsilon)). \quad (19.18)$$

Далее, опираясь на соотношение (19.18), отбросим в (19.17) экспоненциально малое по ε (т.е. имеющее порядок $\exp(-q/\varepsilon)$, $q = \text{const} > 0$) слагаемое и в получившемся уравнении для x выполним замены $x = \varepsilon u(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$. В результате приходим к независящему от ε модельному скалярному уравнению

$$\frac{du}{d\tau} = 1 - \exp u, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (19.19)$$

В дальнейшем нас будет интересовать специальное решение $u_0(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, уравнения (19.19), задающееся равенством

$$u_0(\tau) = \tau - \ln(1 + \exp \tau) \quad (19.20)$$

и обладающее асимптотическими свойствами

$$u_0(\tau) = \tau + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad u_0(\tau) = O(\exp(-\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (19.21)$$

Как оказывается, функция (19.20) играет существенную роль при асимптотическом анализе задачи Коши (19.17). А именно, убедимся, что решение $x_\varphi(t, \varepsilon)$ этой задачи допускает представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\tau)|_{\tau=t/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0, \quad (19.22)$$

где через $\Delta_{1,\varphi}$, $\Delta_{2,\varphi}$ и т. д. здесь и ниже обозначаются остатки, имеющие экспоненциальный по ε порядок малости равномерно по φ, t .

Подставляя соотношение (19.22) в (19.17), для отыскания $\Delta_{1,\varphi}$ получаем задачу Коши

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_{1,\varphi} &= \exp(u_0(\tau)|_{\tau=t/\varepsilon})(1 - \exp(\Delta_{1,\varphi}/\varepsilon)) - \gamma \exp(\varphi(t-1)/\varepsilon), \\ \Delta_{1,\varphi}|_{t=-\sigma_0} &= \delta_\varphi(\varepsilon), \end{aligned} \quad (19.23)$$

где $\delta_\varphi(\varepsilon) = -\sigma_0 - \varepsilon u_0(\tau)|_{\tau=-\sigma_0/\varepsilon}$. Ее анализ базируется на следующих трех фактах. Во-первых, в силу первого асимптотического равенства из (19.21) имеем

$$\delta_\varphi(\varepsilon) = O(\exp(-\sigma_0/\varepsilon)); \quad (19.24)$$

во-вторых, после замены $h = \exp(-\Delta_{1,\varphi}/\varepsilon) - 1$ задача (19.23) преобразуется к линейной задаче Коши

$$\dot{h} = a(t, \varepsilon)h + b(t, \varepsilon), \quad h|_{t=-\sigma_0} = h_\varphi(\varepsilon), \quad (19.25)$$

где

$$\begin{aligned} a(t, \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon} \exp(u_0(t/\varepsilon)) + \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp(\varphi(t-1)/\varepsilon), \\ b(t, \varepsilon) &= \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp(\varphi(t-1)/\varepsilon), \\ h_\varphi(\varepsilon) &= \exp(-\delta_\varphi(\varepsilon)/\varepsilon) - 1; \end{aligned} \quad (19.26)$$

в-третьих, на интересующем нас отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} \exp \left\{ \int_s^t a(\theta, \varepsilon) d\theta \right\} &\leq M_1 \quad \forall t, s: -\sigma_0 \leq s \leq t \leq \sigma_0, \\ |b(t, \varepsilon)| &\leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-q_2/\varepsilon), \end{aligned} \quad (19.27)$$

где здесь и ниже буквами M , M_1 , M_2 и т. д. обозначаются некоторые универсальные (не зависящие от t , φ , ε) положительные константы, точные значения которых несущественны. Действительно, оба нера-

венства (19.27) непосредственно следуют из явных формул для $a(t, \varepsilon)$, $b(t, \varepsilon)$ (см. (19.26)) с учетом соотношений (19.18), (19.20).

Дальнейший анализ не вызывает затруднений. Выписывая явно решение задачи (19.25) и опираясь на свойства (19.24), (19.27), приходим к выводу, что равномерно по $-\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0$, $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$ имеет место требуемая экспоненциальная малость остатка $\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)$ из (19.22). Точнее говоря, справедлива оценка вида

$$|\Delta_{1,\varphi}(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q_2/\varepsilon), \quad -\sigma_0 \leq t \leq \sigma_0. \quad (19.28)$$

Рассмотрим теперь промежуток времени $\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. На нем по-прежнему $x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varphi(t - 1)$, а значит, сохраняется асимптотическое равенство (19.18). Что же касается функции $x_\varphi(t, \varepsilon)$, то она определяется из задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp(\varphi(t - 1)/\varepsilon), \\ x|_{t=\sigma_0} &= \varepsilon u_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(\sigma_0, \varepsilon), \end{aligned} \quad (19.29)$$

которая, как и в предыдущем случае, после замены $h = \exp(-x/\varepsilon) - 1$ приводится к линейной задаче

$$\dot{h} = a(t, \varepsilon)h + b(t, \varepsilon), \quad h|_{t=\sigma_0} = \exp(-x|_{t=\sigma_0}/\varepsilon) - 1, \quad (19.30)$$

где

$$a(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}(1 - \gamma \exp(\varphi(t - 1)/\varepsilon)), \quad b(t, \varepsilon) = \frac{\gamma}{\varepsilon} \exp(\varphi(t - 1)/\varepsilon). \quad (19.31)$$

Обратим внимание, что в силу (19.21), (19.28) начальное условие из (19.29) имеет порядок $\exp(-q_2/\varepsilon)$. А отсюда, в свою очередь, выводим, что

$$h|_{t=\sigma_0} = O\left(\frac{1}{\varepsilon} \exp(-q_2/\varepsilon)\right). \quad (19.32)$$

Далее, для коэффициента $a(t, \varepsilon)$ на отрезке $\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$ из (19.18), (19.31) получаем оценку

$$\exp\left\{\int_s^t a(\theta, \varepsilon) d\theta\right\} \leq M \exp\left(-\frac{t-s}{\varepsilon}\right), \quad \sigma_0 \leq s \leq t \leq 1 - \sigma_0, \quad (19.33)$$

а для $b(t, \varepsilon)$ очевидным образом сохраняется прежнее неравенство из (19.27). И наконец, объединяя свойства (19.32), (19.33) с явным выражением для h (которое легко выписывается в силу линейности задачи Коши (19.30)), приходим к выводу, что

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \Delta_{2,\varphi}(t, \varepsilon), \quad |\Delta_{2,\varphi}(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q_2/\varepsilon), \quad \sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0. \quad (19.34)$$

Перейдем к рассмотрению отрезка $1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0$. Отличие этого случая от двух предыдущих состоит в том, что здесь согласно (19.22)

$$x_\varphi(t - 1, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t - 1, \varepsilon).$$

Функция же $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при указанных t определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp[u_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{1,\varphi}(t-1, \varepsilon)/\varepsilon], \quad (19.35)$$

$$x|_{t=1-\sigma_0} = \Delta_{2,\varphi}(1 - \sigma_0, \varepsilon). \quad (19.36)$$

При анализе задачи (19.35), (19.36) поступим следующим образом. Сначала отбросим в правой части уравнения (19.35) экспоненциально малую по ε добавку, обусловленную присутствием $\Delta_{1,\varphi}(t-1, \varepsilon)/\varepsilon$, а затем выполним замены $x = \varepsilon v(\tau)$, $\tau = (t-1)/\varepsilon$. В результате получаем аналогичное (19.19) модельное уравнение

$$\frac{dv}{d\tau} = 1 - \exp v - \gamma \exp \tau / (1 + \exp \tau), \quad -\infty < \tau < +\infty.$$

Согласно (19.36) нас должно интересовать его решение $v_0(\tau)$, удовлетворяющее условию $v_0(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow -\infty$. Нетрудно увидеть, что требуемое решение существует, задается формулой

$$v_0(\tau) = -\ln \left\{ \frac{1}{\gamma-1} \frac{\exp \tau + 1}{\exp \tau} [(\exp \tau + 1)^{\gamma-1} - 1] \right\} \quad (19.37)$$

и обладает при $\tau \rightarrow \pm\infty$ асимптотическими свойствами

$$v_0(\tau) = O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$v_0(\tau) = \ln(\gamma-1) - (\gamma-1)\tau + O(\exp(-\min(1, \gamma-1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (19.38)$$

Возвращаясь к задаче (19.35), (19.36), отметим, что ее решение допускает асимптотическое представление

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(t, \varepsilon), \quad 1 - \sigma_0 \leq t \leq 1 + \sigma_0. \quad (19.39)$$

Действительно, после подстановки в (19.35), (19.36) соотношения (19.39) для $\Delta_{3,\varphi}$ выходит аналогичная (19.23) задача Коши, сводящаяся посредством замены $h = \exp(-\Delta_{3,\varphi}/\varepsilon) - 1$ к линейной. Анализ же последней, как и в двух предыдущих случаях, приводит к выводу об экспоненциальной малости остатка $\Delta_{3,\varphi}(t, \varepsilon)$ из (19.39).

На очередном отрезке $1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$ рассмотрению подлежит задача Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp(\Delta_{2,\varphi}(t-1, \varepsilon)/\varepsilon), \\ x|_{t=1+\sigma_0} &= \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=\sigma_0/\varepsilon} + \Delta_{3,\varphi}(1 + \sigma_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (19.40)$$

Ее анализ проведем при априорном предположении

$$x_\varphi(t, \varepsilon) \leq -M, \quad (19.41)$$

где, как и ранее, буквой M обозначена некоторая универсальная положительная постоянная. Объединяя это неравенство с формулами (19.34), (19.37), (19.38), убеждаемся, что задача (19.40) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(\gamma-1) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x|_{t=1+\sigma_0} &= -(\gamma-1)\sigma_0 + \varepsilon \ln(\gamma-1) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \end{aligned}$$

А отсюда очевидным образом имеем

$$x_{\varphi}(t, \varepsilon) = -(\gamma - 1)(t - 1) + \varepsilon \ln(\gamma - 1) + \Delta_{4, \varphi}(t, \varepsilon), \quad 1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0. \quad (19.42)$$

Напомним, однако, что формула (19.42) получена нами при априорном предположении (19.41). Но из (19.42), в свою очередь, следует, что условие (19.41) будет выполняться при любом фиксированном $M \in (0, (\gamma - 1)\sigma_0)$ и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Таким образом, асимптотическое представление (19.42) обретает законную силу.

Следующий временной промежуток $2 - \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$ характерен тем, что здесь в силу (19.39) справедлива формула

$$x_{\varphi}(t - 1, \varepsilon) = \varepsilon v_0(\tau)|_{\tau=(t-2)/\varepsilon} + \Delta_{3, \varphi}(t - 1, \varepsilon).$$

Учитывая эту информацию вместе с априорной оценкой вида (19.41) (которую по-прежнему считаем выполненной) в правой части уравнения (19.11), приходим к выводу, что на рассматриваемом отрезке времени $x_{\varphi}(t, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 - \gamma \exp(v_0(\tau)|_{\tau=(t-2)/\varepsilon}) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ x|_{t=2-\sigma_0} &= -(\gamma - 1)(1 - \sigma_0) + \varepsilon \ln(\gamma - 1) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ q &= \text{const} > 0. \end{aligned}$$

Несложный анализ этой задачи приводит к очередному асимптотическому представлению:

$$x_{\varphi}(t, \varepsilon) = -(\gamma - 1) + \varepsilon w_0(\tau)|_{\tau=(t-2)/\varepsilon} + \Delta_{5, \varphi}(t, \varepsilon), \quad 2 - \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0, \quad (19.43)$$

где функция $w_0(\tau)$ определена равенством

$$w_0(\tau) = (\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + \tau - \gamma \ln \frac{(1 + \exp \tau)^{\gamma-1} - 1}{(1 + \exp \tau)^{\gamma-1}}, \quad -\infty < \tau < +\infty \quad (19.44)$$

и при $\tau \rightarrow \pm\infty$ обладает асимптотическими свойствами

$$w_0(\tau) = -(\gamma - 1)\tau + \ln(\gamma - 1) + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty;$$

$$w_0(\tau) = \tau + (\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + O(\exp(-\min(1, \gamma - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty. \quad (19.45)$$

Подчеркнем, что, как и в предыдущем случае, равенство (19.43) носит пока условный характер, поскольку оно было выведено при априорном предположении (19.41). Но учитывая в (19.43) свойства (19.45) функции (19.44), нетрудно увидеть, что это предположение выполняется при любом фиксированном M из промежутка $(0, \min[(\gamma - 1)(1 - \sigma_0), \gamma - 1 - \sigma_0])$.

На заключительном этапе построения асимптотики решения $x_{\varphi}(t, \varepsilon)$ рассмотрим отрезок $2 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$, считая выполненными на нем априорные неравенства

$$x_{\varphi}(t, \varepsilon) \leq -M, \quad x_{\varphi}(t - 1, \varepsilon) \leq -M. \quad (19.46)$$

Из этих оценок, в свою очередь, следует, что здесь имеем дело с уравнением вида

$$\dot{x} = 1 + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0, \quad (19.47)$$

которое в силу (19.43)–(19.45) необходимо дополнить начальным условием

$$x|_{t=2+\sigma_0} = -(\gamma - 1) + \sigma_0 + \varepsilon(\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (19.48)$$

Решая получившуюся задачу Коши (19.47), (19.48), приходим к равенству

$$x_\varphi(t, \varepsilon) = t - T_0 + \varepsilon(\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + \Delta_{6,\varphi}(t, \varepsilon), \quad (19.49)$$

$$2 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2.$$

Что же касается априорных предположений (19.46), то они будут выполняться при соответствующем выборе M . Действительно, уже установленные асимптотические формулы для $x_\varphi(t, \varepsilon)$ при $1 + \sigma_0 \leq t \leq 2 - \sigma_0$, $2 - \sigma_0 \leq t \leq 2 + \sigma_0$ (см. (19.42)–(19.45)) и само равенство (19.49) свидетельствуют о том, что требуемые оценки (19.46) на $x_\varphi(t, \varepsilon)$, $x_\varphi(t - 1, \varepsilon)$ имеют место при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и при любом фиксированном M : $0 < M < \min\{(\gamma - 1)\sigma_0, \sigma_0/2\}$.

Подведем некоторый итог. Неравенство $\sigma_0 < (\gamma - 1)/2$ из (19.12) гарантирует принадлежность точки $t = T_0 - \sigma_0$ отрезку $2 + \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2$. Этот факт позволяет для нахождения интересующего нас корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ воспользоваться соотношениями (19.47), (19.49). Из указанных формул очевидным образом следует, что T_φ определяется однозначно, причем равномерно по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$

$$T_\varphi = T_0 - \varepsilon(\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + O(\exp(-q/\varepsilon)), \quad q = \text{const} > 0. \quad (19.50)$$

Далее, объединяя все полученные выше асимптотические представления для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ (см. (19.22), (19.34), (19.39), (19.42), (19.43), (19.49)), приходим к заключению, что

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0/2} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad (19.51)$$

где $x_0(t)$ — функция (19.13), а остаток равномерен по $\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)$.

Формулы (19.50), (19.51) гарантируют, что оператор (19.16) действительно определен на множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ и равномерно по φ

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon). \quad (19.52)$$

Равенство (19.52), в свою очередь, позволяет утверждать, что интересующее нас включение $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$ будет иметь место при условии

$$x_0(t) \in \hat{S}(\sigma_0, q_1, q_2), \quad (19.53)$$

где $\widehat{S}(\sigma_0, q_1, q_2)$ — множество, получающееся из $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ при замене в (19.15) нестрогих неравенств строгими. Напомним, далее, что на параметр σ_0 нами уже наложено ограничение (19.12), обеспечивающее выполнение для функции $x_0(t)$ свойств

$$x_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \quad x_0(t) < 0 \quad \forall t \in [-1 - \sigma_0, -\sigma_0], \\ x_0(-\sigma_0) = -\sigma_0.$$

Поэтому справедливости включения (19.53) добиваемся за счет имеющих в запасе параметров q_1, q_2 , предполагая, что

$$q_1 > -\min_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < -\max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t). \quad (19.54)$$

Итак, оператор Π_ε , являющийся очевидным образом компактным, при выполнении условий (19.12), (19.54) на параметры σ_0, q_1, q_2 преобразует в себя замкнутое, ограниченное и выпуклое множество $S(\sigma_0, q_1, q_2)$. А отсюда в соответствии с известным принципом Шаудера заключаем, что этот оператор имеет в $S(\sigma_0, q_1, q_2)$ по крайней мере одну неподвижную точку $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. Ясно также, что решение $x_*(t, \varepsilon)$ уравнения (19.11) с начальной функцией $\varphi_*(t, \varepsilon)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, оказывается периодическим с периодом $T_*(\varepsilon) = T_\varphi|_{\varphi=\varphi_*}$ и в силу (19.50)–(19.52) удовлетворяет требуемым условиям (19.14). Что же касается цикла

$$N_*(t, \lambda) = (1 + 1/a) \exp(x_*(t, \varepsilon)/\varepsilon)|_{\varepsilon=1/\lambda} \quad (19.55)$$

исходного уравнения (19.9), то для него справедливы свойства (19.10).

19.4. Анализ свойств устойчивости. Перейдем теперь ко второй части обоснования теоремы 19.1, т. е. к доказательству единственности и устойчивости релаксационного цикла $x_*(t, \varepsilon)$ с нулевым приближением (19.13). Из явной формулы (19.16) для оператора Π_ε вытекает, что он непрерывно дифференцируем по φ , а его производная Фреше $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ задается равенством

$$\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)g_0 = g(t + T_\varphi, \varepsilon) - l(g_0) \dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \quad -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \quad (19.56)$$

Здесь функция $g_0(t)$ представляет собой произвольный элемент линейного пространства

$$C_0 = \{g_0(t) \in C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]: g_0(-\sigma_0) = 0\},$$

через $g(t, \varepsilon)$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, обозначено решение линейного уравнения

$$\dot{g} = A(t, \varepsilon)g + B(t, \varepsilon)g(t - 1), \quad A(t, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} \exp x|_{x=x_\varphi(t, \varepsilon)/\varepsilon}, \quad (19.57) \\ B(t, \varepsilon) = -\frac{\gamma}{\varepsilon} \exp x|_{x=x_\varphi(t-1, \varepsilon)/\varepsilon}$$

с начальной функцией $g_0(t)$, $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, а линейный функционал $l: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ определен формулой

$$l(g_0) = g(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon) / \dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon). \quad (19.58)$$

Из соотношений (19.56), (19.58) следует, что проблема оценки нормы линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ в пространстве C_0 с нормой $\|g_0\| = \max_{-1-\sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_0(t)|$ сводится к анализу введенного выше решения $g(t, \varepsilon)$ уравнения (19.57). Покажем, что для этого решения выполняется неравенство вида

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0} |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\| \quad (19.59)$$

с некоторыми универсальными (не зависящими от ε , φ , g_0) постоянными M , $q > 0$.

Из установленных выше асимптотических представлений для решения $x_\varphi(t, \varepsilon)$ вытекают оценки

$$\exp \left\{ \int_s^t A(\theta, \varepsilon) d\theta \right\} \leq 1 \quad \forall t, s: \quad -\sigma_0 \leq s \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0, \quad (19.60)$$

$$\int_{-\sigma_0}^{T_\varphi - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| dt \leq M_1/\varepsilon, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} |B(t, \varepsilon)| \leq M_2 \exp(-q/\varepsilon),$$

где M_1 , M_2 , $q > 0$ — некоторые универсальные константы. Далее, используя свойства (19.60) в формуле

$$g(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t B(s, \varepsilon) g_0(s - 1) \exp \left\{ \int_s^t A(\theta, \varepsilon) d\theta \right\} ds, \quad -\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0,$$

приходим к выводу, что при $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$

$$\max_t |g(t, \varepsilon)| \leq M \exp(-q/\varepsilon) \|g_0\|. \quad (19.61)$$

Для распространения оценки (19.61) на оставшийся промежуток $[1 - \sigma_0, T_\varphi - \sigma_0]$ изменения t воспользуемся методом шагов. А именно, разобьем указанный промежуток на отрезки $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$, $k = 0, 1, \dots, k_0$, и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_\varphi - \sigma_0]$, где $k_0 = [T_\varphi - 2]$, $[*]$ — целая часть. Опираясь, далее, на первые два свойства (19.60), замечаем, что из равенства

$$\begin{aligned} g(t, \varepsilon) &= g(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) \exp \left\{ \int_{1 - \sigma_0 + k}^t A(s, \varepsilon) ds \right\} + \\ &+ \int_{1 - \sigma_0 + k}^t B(s, \varepsilon) g(s - 1, \varepsilon) \exp \left\{ \int_s^t A(\theta, \varepsilon) d\theta \right\} ds, \quad t \geq 1 - \sigma_0 + k, \end{aligned}$$

и из уже полученной оценки (19.61) на $(k-1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t .

Возвращаясь к оператору Π_ε и учитывая неравенство (19.59) в (19.56), (19.58), приходим к выводу, что

$$\sup_{\varphi \in S(\sigma_0, q_1, q_2)} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)\|_{C_0 \rightarrow C_0} \leq M \exp(-q/\varepsilon). \quad (19.62)$$

Остается добавить, что оценка (19.62) обеспечивает как сжимаемость оператора Π_ε (а значит, единственность его неподвижной точки $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ в множестве $S(\sigma_0, q_1, q_2)$), так и экспоненциальную орбитальную устойчивость соответствующего цикла $x_*(t, \varepsilon)$. Последнее обстоятельство обусловлено тем, что согласно (19.62) спектральный радиус оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_*)$ экспоненциально мал. А это значит, что все мультипликаторы μ цикла $x_*(t, \varepsilon)$, являющиеся (за исключением простого единичного) собственными значениями упомянутого оператора, лежат в круге $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq M \exp(-q/\varepsilon)\}$. Теорема 19.1 полностью доказана.

20. Теорема о C^1 -сходимости для биллокальной модели

20.1. Основные теоремы. Уравнение (19.9) описывает динамику изменения плотности популяции, обитающей в однородном ареале, когда пищевая база регулярно восстанавливается до некоторого фиксированного уровня, а миграционный фактор столь велик, что пространственные возмущения гаснут. При этих биологических посылах рассмотрим цепочку из m локальных ареалов, соединенных узкими проходами. В результате придем к системе

$$\begin{aligned} \dot{N}_j &= d(N_{j+1} - 2N_j + N_{j-1}) + \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_j) - N_j(t-1)] N_j, \\ j &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (20.1)$$

где $m \geq 2$, $N_0 = N_1$, $N_{m+1} = N_m$ и по-прежнему $\lambda \gg 1$, $a = \text{const} \in (0, 1)$. Что же касается параметра d , имеющего порядок единицы, то он характеризует глубину связи между ареалами.

Изучение асимптотического поведения решений цепочки (20.1) начнем с ее частного случая

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= d(N_2 - N_1) + \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_1) - N_1(t-1)] N_1, \\ \dot{N}_2 &= d(N_1 - N_2) + \frac{\lambda}{1+a} [1 + a(1 - N_2) - N_2(t-1)] N_2, \end{aligned} \quad (20.2)$$

называемого *билокальной моделью*. Точнее говоря, последующий анализ будем проводить для системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varepsilon d (\exp((x_2 - x_1)/\varepsilon) - 1) + 1 - \exp(x_1/\varepsilon) - \gamma \exp(x_1(t-1)/\varepsilon), \\ \dot{x}_2 &= \varepsilon d (\exp((x_1 - x_2)/\varepsilon) - 1) + 1 - \exp(x_2/\varepsilon) - \gamma \exp(x_2(t-1)/\varepsilon),\end{aligned}\quad (20.3)$$

получающейся из (20.1) при $N_j = (1 + \gamma) \exp(x_j/\varepsilon)$, $j = 1, 2$, $\varepsilon = 1/\lambda$, $\gamma = 1/a$.

Система (20.3) имеет, очевидно, однородный цикл $x_1 = x_2 = x_*(t, \varepsilon)$, где $x_*(t, \varepsilon)$ — релаксационный цикл уравнения (19.11), доставляемый теоремой 19.1. Ниже будет установлено, что, во-первых, этот цикл экспоненциально орбитально устойчив при любом фиксированном $d > 0$ и при $\varepsilon \ll 1$; во-вторых, при надлежащем уменьшении параметра d в биллокальной модели (20.3) наряду с однородным циклом существуют и другие аттракторы. Таковыми являются два ее неоднородных цикла, переходящие друг в друга в результате замены $(x_1, x_2) \rightarrow (x_2, x_1)$. По аналогии с пространственно непрерывным случаем последние будем называть *дискретными автоволнами* или просто *автоволнами*.

По ряду технических причин, которые прояснятся в последующем, асимптотический анализ системы (20.3) будем проводить при дополнительном условии

$$\gamma > 2. \quad (20.4)$$

Кроме того, для удобства дальнейшего асимптотического интегрирования перейдем в (20.3) к новым переменным $x = x_1$, $y = (x_2 - x_1)/\varepsilon$. В результате интересующая нас система примет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon d (\exp y - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y} &= -2d \operatorname{sh} y + G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon),\end{aligned}\quad (20.5)$$

где

$$\begin{aligned}F(x, u, \varepsilon) &= 1 - \exp(x/\varepsilon) - \gamma \exp(u/\varepsilon), \\ G(x, u, y, v, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\gamma}{\varepsilon} \left[\exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + v\right) \right] + \frac{1}{\varepsilon} \left[\exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + y\right) \right].\end{aligned}\quad (20.6)$$

Фиксируем постоянную σ_0 , подчиненную требованиям $0 < \sigma_0 < \min(1, \gamma - 2)$, а также постоянные q_1, q_2 : $q_1 > 1 + \sigma_0$, $q_2 \in (0, \sigma_0)$. Рассмотрим, далее, банахово пространство \mathcal{F} непрерывных при $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ начальных вектор-функций $\varphi(t) = \operatorname{colon} (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ с нормой

$$\|\varphi\|_{\mathcal{F}} = \max_j \left(\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |\varphi_j(t)| \right). \quad (20.7)$$

Всюду ниже нас будут интересовать решения системы (20.5) с начальными условиями из множества

$$S = \{\varphi(t) = \text{colon}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : \varphi_1(t) \in S_1, \varphi_2(t) \in S_2\} \subset \mathcal{F}. \quad (20.8)$$

Здесь через S_1 обозначена введенная при доказательстве теоремы 19.1 совокупность непрерывных функций $S(\sigma_0, q_1, q_2)$, а в качестве S_2 взято произвольное замкнутое и ограниченное подмножество пространства $C[-1 - \sigma_0, -\sigma_0]$.

Формулировка строгих результатов об автоволновых режимах системы (20.5) требует некоторых подготовительных построений. В связи с этим введем в рассмотрение решение $\text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$, $t \geq -\sigma_0$, упомянутой системы, отвечающее произвольному начальному условию $\varphi(t) \in S$. Рассмотрим также второй положительный корень $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ (в случае, когда он существует) и на множестве (20.8) определим оператор $\Pi_\varepsilon: S \rightarrow \mathcal{F}$ посредством аналогичного (19.16) равенства

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon(\varphi) = \text{colon}(x_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), y_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon)), \\ -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \quad (20.9)$$

Помимо (20.9) нам потребуется еще оператор $\Pi_0: S \rightarrow \mathcal{F}$, который зададим формулой

$$\begin{aligned} \Pi_0(\varphi) = \text{colon}(x_0(t), y_0(t + T_0, z)) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \\ -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned} \quad (20.10)$$

Здесь величина T_0 и функция $x_0(t)$ — те же самые, что и в (19.13). Что же касается компоненты $y_0(t, z)$, $z \in \mathbb{R}$, то на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$ она является решением импульсной системы следующего вида:

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=-\sigma_0} = z \quad \text{при} \quad -\sigma_0 \leq t < 0; \quad (20.11)$$

$$y \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1; \quad (20.12)$$

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=1+0} = -(\gamma - 1)y|_{t=-0} \quad \text{при} \quad 1 < t < 2; \quad (20.13)$$

$$\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \quad y|_{t=2+0} = y|_{t=2-0} + \gamma y|_{t=-0} \quad \text{при} \quad 2 < t \leq T_0 - \sigma_0. \quad (20.14)$$

Правила (20.11)–(20.14) определения функции $y_0(t, z)$ свидетельствуют о том, что в моменты времени $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$ она допускает конечные скачки. Однако в силу неравенства (20.4) и оценки $\sigma_0 < \gamma - 2$ фигурирующая в (20.10) функция $y_0(t + T_0, z)$ оказывается непрерывной на нужном отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$. Тем самым, условие (20.4) гарантирует выполнение требуемого включения $\Pi_0(\varphi) \in \mathcal{F}$ при $\forall \varphi \in S$.

Завершая описание подготовительной части, рассмотрим производные Фреше $\partial_\varepsilon \Pi_\varepsilon(\varphi)$, $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi)$ операторов (20.9), (20.10) по переменным φ . Проводя соответствующий подсчет, убеждаемся, что в данном

случае эти производные представляют собой линейные операторы, действующие в пространстве

$$\mathcal{F}_0 = \{g_0(t) = \text{colon}(g_{1,0}(t), g_{2,0}(t)) \in \mathcal{F} : g_{1,0}(-\sigma_0) = 0\} \quad (20.15)$$

с нормой (20.7), а результаты их применения к произвольному элементу $g_0(t) \in \mathcal{F}_0$ задаются соответственно равенствами

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) g_0 &= \text{colon}(g_1(t + T_\varphi, \varepsilon), g_2(t + T_\varphi, \varepsilon)) - \\ &- \frac{g_1(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)}{\dot{x}_\varphi(T_\varphi - \sigma_0, \varepsilon)} \text{colon}(\dot{x}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon), \dot{y}_\varphi(t + T_\varphi, \varepsilon)), \quad (20.16) \\ &-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\varphi \Pi_0(\varphi) g_0 &= \text{colon}\left(0, \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z)\Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}\right) \cdot g_{2,0}(-\sigma_0), \quad (20.17) \\ &-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0. \end{aligned}$$

Здесь $g(t, \varepsilon) = \text{colon}(g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$, $-\sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$, — решение линейной системы

$$\begin{aligned} \dot{g} &= A(t, \varepsilon)g + B(t, \varepsilon)g(t-1), \\ A(t, \varepsilon) &= (a_{ij})_{i,j=1,2}, \quad B(t, \varepsilon) = (b_{ij})_{i,j=1,2}, \end{aligned} \quad (20.18)$$

с начальной функцией $g_0(t)$ из пространства (20.15) и коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{\partial F}{\partial x}, \quad a_{12} = \varepsilon d \exp(y_\varphi(t, \varepsilon)), \\ a_{21} &= \frac{\partial G}{\partial x}, \quad a_{22} = \frac{\partial G}{\partial y} - 2d \operatorname{ch}(y_\varphi(t, \varepsilon)), \\ b_{11} &= \frac{\partial F}{\partial u}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{21} = \frac{\partial G}{\partial u}, \quad b_{22} = \frac{\partial G}{\partial v}, \end{aligned} \quad (20.19)$$

где все производные вычислены при значениях

$$x = x_\varphi(t, \varepsilon), \quad u = x_\varphi(t-1, \varepsilon), \quad y = y_\varphi(t, \varepsilon), \quad v = y_\varphi(t-1, \varepsilon).$$

Зададимся естественно возникающим вопросом о связи между операторами (20.9) и (20.10). Ответ на него дается в следующем утверждении.

Теорема 20.1 (о C^1 -сходимости). Пусть выполнено условие (20.4) и множество S выбрано описанным выше образом. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(S) > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ оператор Π_ε определен на S и удовлетворяет предельным равенствам

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} &= 0. \end{aligned} \quad (20.20)$$

Доказательству данной теоремы посвятим пп. 20.2, 20.3. Здесь же остановимся на одном важном следствии из C^1 -сходимости, касающемся существования и устойчивости периодических решений системы (20.5).

Заметим, что в силу (20.11)–(20.14) оператор (20.10) является надстройкой над соответствующим одномерным отображением:

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} y_0(t, z)|_{t=T_0-\sigma_0}, \quad (20.21)$$

где $z = \varphi_2(-\sigma_0)$. Действительно, любой неподвижной точке $z = z_*$ этого отображения соответствует неподвижная точка

$$\begin{aligned} \varphi_*(t) = \text{colop}(\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)): \quad \varphi_1^*(t) = x_0(t), \quad \varphi_2^*(t) = y_0(t + T_0, z_*), \\ -1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0, \end{aligned}$$

оператора Π_0 (при условии, конечно, что $\varphi_*(t)$ принадлежит введенному выше множеству (20.8)). Последнее же требование не является ограничением, поскольку в силу выбора постоянных q_1, q_2 включение $x_0(t) \in S_1 = S(\sigma_0, q_1, q_2)$ выполняется автоматически, а справедливости включения $\varphi_2^*(t) \in S_2$ можно добиться за счет подходящего выбора множества S_2 .

Верно и обратное утверждение: если $\varphi_*(t) = \text{colop}(\varphi_1^*(t), \varphi_2^*(t)) \in S$ есть неподвижная точка оператора Π_0 , то с необходимостью $\varphi_1^*(t) = x_0(t)$, а величина $z_* = \varphi_2^*(-\sigma_0)$ такова, что $\Phi(z_*) = z_*$. Кроме того, в силу (20.17) спектр линейного оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ состоит из двух точек: собственного значения $\mu = 0$ бесконечной кратности и собственного значения $\mu = \Phi'(z_*)$ (в общем случае простого).

Суммируя изложенные факты, приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Теорема 20.2 (о соответствии). *Каждой неподвижной точке $z = z_*$, $|\Phi'(z_*)| \neq 1$, отображения (20.21) соответствует релаксационный цикл системы (20.5), существующий при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ и являющийся экспоненциально орбитально устойчивым (неустойчивым) в случае $|\Phi'(z_*)| < 1$ (> 1).*

Доказательство. Пусть $\varphi_*(t) \in S$ — неподвижная точка оператора (20.10), отвечающая неподвижной точке $z = z_*$ отображения (20.21). Рассмотрим, далее, уравнение

$$\Pi_\varepsilon(\varphi) - \varphi = 0, \quad (\varphi, \varepsilon) \in S \times \mathbb{R}, \quad (20.22)$$

и заметим, что в силу предельных равенств (20.20) и отмеченных выше спектральных свойств оператора $\partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)$ к данному уравнению в точке $(\varphi, \varepsilon) = (\varphi_*(t), 0)$ пространства $\mathcal{F} \times \mathbb{R}$ применима теорема о неявном отображении по переменной φ . Таким образом, из (20.22) однозначно определяется неподвижная точка

$$\varphi = \varphi_*^\varepsilon(t) \in S, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varphi_*^\varepsilon(t) - \varphi_*(t)\|_{\mathcal{F}} = 0$$

оператора (20.9), а отвечающее ей решение

$$\operatorname{colon} (x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon)) \Big|_{\varphi=\varphi_\varepsilon}$$

системы (20.5) будет, очевидно, периодическим с периодом $T_* = T_\varphi \Big|_{\varphi=\varphi_\varepsilon}$.

Перейдем теперь к вопросу об устойчивости найденного периодического решения. Из проделанных выше построений следует, что все его мультипликаторы (за исключением простого единичного) являются собственными значениями оператора $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon)$. Последний же в силу вытекающего из (20.20) равенства $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi_\varepsilon) - \partial_\varphi \Pi_0(\varphi_*)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} = 0$ имеет одно собственное значение, асимптотически близкое к $\Phi'(z_*)$, а остальной его спектр лежит в круге $\{\mu \in \mathbb{C}: |\mu| \leq r_0\}$ асимптотически малого по ε радиуса $r_0 = r_0(\varepsilon)$. Таким образом, свойства устойчивости рассматриваемого цикла совпадают с аналогичными свойствами неподвижной точки $z = z_*$ отображения (20.21). Теорема 20.2 доказана.

Установленная теорема сводит интересующую нас проблему периодических движений системы (20.5) к поиску неподвижных точек одномерного отображения (20.21). Вопрос же о количестве и устойчивости последних будет изучен в разделе 21.

20.2. Обоснование C-сходимости. Доказательство равенств (20.20) базируется на построении равномерной по $\varphi \in S$ асимптотики решения $\operatorname{colon} (x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ системы (20.5) с начальным условием φ . Как будет показано ниже, при всех $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$, где $\delta = \operatorname{const} \in (0, 1)$, справедливо равномерное по φ, t асимптотическое представление

$$\begin{aligned} \operatorname{colon} (x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon)) &= \\ &= \operatorname{colon} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.23)$$

Здесь $q = \operatorname{const} > 0$, а через $\operatorname{colon} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))$ обозначено решение системы (20.5) со специальным начальным условием $\varphi(t) \equiv \equiv \operatorname{colon} (-\sigma_0, z)$, $z = \operatorname{const} \in \mathbb{R}$.

Для обоснования равенства (20.23) прежде всего необходимо разобратся с асимптотикой функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ при условии, что параметр z меняется на некотором компактном подмножестве числовой оси. Соответствующий анализ начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq -\varepsilon^\delta$, считая выполненными на нем априорные оценки

$$x(t, z, \varepsilon) \leq -M_1 \varepsilon^\delta, \quad |y(t, z, \varepsilon)| \leq M_2 \quad (20.24)$$

(здесь и далее в аналогичных (20.23) асимптотических представлениях и в неравенствах вида (20.24) через q , M_1 , M_2 и т. д. обозначаются различные универсальные, т. е. не зависящие от t , φ , z , ε , положительные постоянные, точные значения которых несущественны).

Объединяя свойства (20.24) с равенствами $x(t-1, z, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$, $y(t-1, z, \varepsilon) \equiv z$ (справедливость которых вытекает из оценки $\sigma_0 < 1$) и опираясь на явные формулы (20.6) для функций F и G , приходим к выводу, что на рассматриваемом отрезке равномерно по t, z

$$\begin{aligned} F(x, x(t-1), \varepsilon) &= 1 + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ G(x, x(t-1), y, y(t-1), \varepsilon) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.25)$$

А отсюда и из (20.5) очевидным образом выводим, что равномерно по t, z

$$\begin{aligned} \text{colon}(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) &= \\ &= \text{colon}(\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \end{aligned} \quad (20.26)$$

где

$$\tilde{x} = t + \varepsilon d \int_{-\sigma_0}^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad \tilde{y} = y_0(t, z), \quad (20.27)$$

а $y_0(t, z)$ — решение задачи Коши (20.11)–(20.14).

Напомним, далее, что формула (20.26) носит пока условный характер, поскольку она была получена при априорных предположениях (20.24). Но, как нетрудно увидеть, при подходящем выборе постоянных M_1, M_2 требуемые оценки (20.24) для правых частей из (20.26), (20.27) действительно выполняются. А это значит, что асимптотическое представление (20.26) обретает законную силу.

На следующем этапе убедимся, что равенство (20.26) сохраняется при дифференцировании по z . Обозначим

$$g_1(t, z, \varepsilon) = \partial x(t, z, \varepsilon) / \partial z, \quad g_2(t, z, \varepsilon) = \partial y(t, z, \varepsilon) / \partial z$$

и заметим, что компоненты g_1, g_2 удовлетворяют линейной системе (20.18), коэффициенты которой вычисляются по аналогичным (20.19) формулам при $x = x(t, z, \varepsilon)$, $u = x(t-1, z, \varepsilon)$, $y = y(t, z, \varepsilon)$, $v = y(t-1, z, \varepsilon)$, а начальные функции, заданные на отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$, имеют вид $g_1 \equiv 0, g_2 \equiv 1$. Далее, проводя те же рассуждения, что и при выводе равенств (20.25), убеждаемся, что для коэффициентов этой системы справедливы равномерные по t, z асимптотические представления

$$\begin{aligned} a_{11}, a_{21}, b_{11}, b_{21}, b_{22} &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad a_{12} = \varepsilon d \exp(y(t, z, \varepsilon)), \\ a_{22} &= -2d \operatorname{ch}(y(t, z, \varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.28)$$

А отсюда несложно вывести, что имеет место асимптотическое равенство

$$\text{colon}\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right) = \text{colon}\left(\frac{\partial \tilde{x}}{\partial z}(t, z, \varepsilon), \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z}(t, z, \varepsilon)\right) + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad (20.29)$$

которое, как и соотношения (20.28), выполняется равномерно по t, z .

Перейдем к рассмотрению отрезка $-\varepsilon^\delta \leq t \leq \varepsilon^\delta$. Поскольку при указанных t по-прежнему имеем $x(t-1, z, \varepsilon) \equiv -\sigma_0$, $y(t-1, z, \varepsilon) \equiv z$, то в данном случае

$$\begin{aligned} \exp(x(t-1, z, \varepsilon)/\varepsilon) &= O(\exp(-q/\varepsilon)), \\ \exp(x(t-1, z, \varepsilon)/\varepsilon + y(t-1, z, \varepsilon)) &= O(\exp(-q/\varepsilon)). \end{aligned} \quad (20.30)$$

Далее, учитывая соотношения (20.30), отбросим в правых частях системы (20.5) добавки порядка $\exp(-q/\varepsilon)$. В результате после замен $x = \varepsilon u_1(\tau)$, $x/\varepsilon + y = u_2(\tau)$, $\tau = t/\varepsilon$ она примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(u_2 - u_1) - 1) + 1 - \exp u_1, \\ \frac{du_2}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(u_1 - u_2) - 1) + 1 - \exp u_2. \end{aligned} \quad (20.31)$$

Получившуюся систему (20.31) будем рассматривать на отрезке $\tau \in J_0(\varepsilon)$, где $J_0(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$, с начальными условиями

$$u_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{u}_1(z, \varepsilon), \quad u_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{u}_2(z, \varepsilon). \quad (20.32)$$

Здесь $\bar{u}_1 = \tilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon$, $\bar{u}_2 = \tilde{x}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon + \tilde{y}(-\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x} , \tilde{y} — функции (20.27).

Пусть $u_1(\tau, z, \varepsilon)$, $u_2(\tau, z, \varepsilon)$ — компоненты решения задачи Коши (20.31), (20.32). Для отыскания главных членов асимптотики функций $u_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, положим в (20.31) $\varepsilon = 0$. В итоге приходим к системе

$$\frac{du_1}{d\tau} = 1 - \exp u_1, \quad \frac{du_2}{d\tau} = 1 - \exp u_2,$$

общее решение которой, как нетрудно увидеть, задается равенствами

$$u_j = \ln \frac{a_j \exp \tau}{1 + a_j \exp \tau}, \quad a_j > 0, \quad j = 1, 2. \quad (20.33)$$

Далее, распорядимся выбором свободных параметров a_1 , a_2 таким образом, чтобы функции (20.33) удовлетворяли (хотя бы приближенно) начальным условиям (20.32). Как оказывается, такой выбор возможен. Действительно, если положить $a_j = \exp(\kappa_j(z))$, $j = 1, 2$, где

$$\begin{aligned} \kappa_1(z) &= d \int_{-\sigma_0}^0 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \\ \kappa_2(z) &= \kappa_1(z) + y_0(-0, z), \end{aligned} \quad (20.34)$$

то упомянутые условия будут выполняться с точностью до $O(\varepsilon^\delta)$ по невязке.

Строгий смысл описанным эвристическим соображениям придает следующее утверждение.

Лемма 20.1. На отрезке $\tau \in J_0(\varepsilon)$ для компонент $u_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, решения задачи Коши (20.31), (20.32) справедливы представления

$$u_j(\tau, z, \varepsilon) = \ln \frac{a_j(\tau, z, \varepsilon) \exp \tau}{1 + a_j(\tau, z, \varepsilon) \exp \tau}, \quad j = 1, 2, \quad (20.35)$$

где функции $a_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, допускают равномерные по $\tau \in J_0(\varepsilon)$ и по рассматриваемым z асимптотические равенства

$$\begin{aligned} a_j(\tau, z, \varepsilon) &= \exp(\kappa_j(z)) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial a_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) &= \exp(\kappa_j(z)) \kappa_j'(z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (20.36)$$

Доказательство. Перейдем в (20.31), (20.32) к новым переменным a_1, a_2 , исходя из формул (20.35). В результате получим задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\tau} &= \varepsilon d \frac{1 + a_1 \exp \tau}{1 + a_2 \exp \tau} (a_2 - a_1), \quad \frac{da_2}{d\tau} = \varepsilon d \frac{1 + a_2 \exp \tau}{1 + a_1 \exp \tau} (a_1 - a_2), \\ a_1|_{\tau = -\varepsilon^{\delta-1}} &= \bar{a}_1(z, \varepsilon), \quad a_2|_{\tau = -\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{a}_2(z, \varepsilon), \end{aligned} \quad (20.37)$$

где новые начальные условия $\bar{a}_j(z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, определяются из уравнений

$$\bar{u}_j(z, \varepsilon) = \ln \frac{\bar{a}_j \exp(-\varepsilon^{\delta-1})}{1 + \bar{a}_j \exp(-\varepsilon^{\delta-1})}, \quad j = 1, 2. \quad (20.38)$$

Далее, учитывая в (20.38) явные выражения для $\bar{u}_j(z, \varepsilon)$, после несложных преобразований приходим к равномерным по z асимптотическим представлениям

$$\begin{aligned} \bar{a}_j(z, \varepsilon) &= \exp(\kappa_j(z)) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) &= \exp(\kappa_j(z)) \kappa_j'(z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (20.39)$$

Таким образом, нужные соотношения (20.36) заведомо выполняются при $\tau = -\varepsilon^{\delta-1}$.

Последующий анализ базируется на методе дифференциальных неравенств. А именно, при априорных предположениях

$$0 < M_1 \leq a_j \leq M_2, \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J_0(\varepsilon) \quad (20.40)$$

из (20.37) имеем

$$-M_3 \varepsilon \leq \frac{da_j}{d\tau} \leq M_4 \varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (20.41)$$

где постоянные $M_3, M_4 > 0$, вообще говоря, зависят от M_1, M_2 из (20.40). А отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$\begin{aligned} \bar{a}_j(z, \varepsilon) - \varepsilon M_3(\tau + \varepsilon^{\delta-1}) &\leq a_j(\tau, z, \varepsilon) \leq \bar{a}_j(z, \varepsilon) + \varepsilon M_4(\tau + \varepsilon^{\delta-1}), \\ j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (20.42)$$

Вспомним, далее, что неравенства (20.42) получены нами при априорных условиях (20.40). Но учитывая в (20.42) представления (20.39),

нетрудно убедиться, что константы M_1, M_2 с требуемыми свойствами действительно существуют. Остается добавить, что из (20.39), (20.42) первая группа асимптотических формул (20.36) вытекает очевидным образом.

Перейдем теперь к обоснованию асимптотических представлений (20.36) для функций $h_j = \partial a_j / \partial z$, $j = 1, 2$. Дифференцируя правые части из (20.37) по z , для h_1, h_2 получаем некоторую линейную систему, из которой при априорных предположениях

$$|h_j| \leq M, \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J_0(\varepsilon) \quad (20.43)$$

выводим аналогичные (20.41) дифференциальные неравенства

$$-M_1 \varepsilon \leq \frac{dh_j}{d\tau} \leq M_2 \varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (20.44)$$

где, как и ранее, $M_1, M_2 > 0$ — некоторые универсальные константы (зависящие от M из (20.43)). Дальнейшие же рассуждения вполне аналогичны описанному выше: сначала из (20.44) выводим оценки

$$\frac{\partial \bar{a}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) - \varepsilon M_1(\tau + \varepsilon^{\delta-1}) \leq h_j(\tau, z, \varepsilon) \leq \frac{\partial \bar{a}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) + \varepsilon M_2(\tau + \varepsilon^{\delta-1}),$$

а затем, учитывая в них вторую группу асимптотических равенств (20.39), убеждаемся одновременно в справедливости как априорных предположений (20.43) (при подходящем выборе M), так и требуемых асимптотических представлений для $\partial a_j / \partial z$ из (20.36). Лемма 20.1 доказана.

Заканчивая рассмотрение отрезка времени $-\varepsilon^\delta \leq t \leq \varepsilon^\delta$, учтем в правых частях системы (20.31) и в начальных условиях (20.32) отброшенные ранее остатки порядка $\exp(-q/\varepsilon)$ и $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$ соответственно. В результате, опираясь на описанный выше метод дифференциальных неравенств, приходим к равномерным по $t \in [-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta]$ и z асимптотическим представлениям

$$\begin{aligned} & \text{colon}(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) = \\ & = \text{colon}(\varepsilon u_1(\tau, z, \varepsilon), u_2(\tau, z, \varepsilon) - u_1(\tau, z, \varepsilon)) \Big|_{\tau=t/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ & \text{colon}\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right) = \text{colon}\left(\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial z}, \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) \Big|_{\tau=t/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.45)$$

Из формул (20.45), в частности, следует, что на изученном выше асимптотически малом промежутке изменения t компонента $y(t, z, \varepsilon)$ меняется существенно. А именно, из (20.11), (20.26), (20.27), (20.35), (20.36) и (20.45) вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=-\varepsilon^\delta} &= y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=\varepsilon^\delta} &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.46)$$

Тем самым, придерживаясь принятой в теории релаксационных колебаний терминологии, данный отрезок будем называть *участком быстрых движений*.

При рассмотрении следующего промежутка времени $\varepsilon^\delta \leq t \leq 1 - \varepsilon^\delta$, опираясь на аналогичные (20.30) асимптотические представления

$$\begin{aligned} \exp(x(t-1, z, \varepsilon)/\varepsilon) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \exp(x(t-1, z, \varepsilon)/\varepsilon + y(t-1, z, \varepsilon)) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \end{aligned}$$

справедливые в силу уже установленных формул (20.26), (20.27), отбросим в правых частях из (20.5) соответствующие слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$. Выполним затем в получившейся системе замены $x = \varepsilon u_1(\tau)$, $x/\varepsilon + y = u_2(\tau)$, $\tau = (t - \varepsilon^\delta)/\varepsilon$. В результате приходим к прежней системе (20.31), которую, однако, теперь будем рассматривать на отрезке $\tau \in J_1(\varepsilon) = [0, (1 - 2\varepsilon^\delta)/\varepsilon]$ с начальными условиями

$$u_1|_{\tau=0} = \tilde{u}_1(z, \varepsilon), \quad u_2|_{\tau=0} = \tilde{u}_2(z, \varepsilon), \quad (20.47)$$

где $\tilde{u}_1(z, \varepsilon) = x(\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon$, $\tilde{u}_2(z, \varepsilon) = x(\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon + y(\varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$. Далее, обратим внимание, что, во-первых, система (20.31) допускает экспоненциально устойчивое нулевое состояние равновесия; во-вторых, начальные условия (20.47) в силу вытекающих из (20.35), (20.36), (20.45) равномерных по z асимптотических представлений

$$\tilde{u}_j(z, \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad j = 1, 2,$$

заведомо находятся в области притяжения этого состояния равновесия. А отсюда и из способа перехода от (20.5) к (20.31) заключаем, что равномерно по $t \in [\varepsilon^\delta, 1 - \varepsilon^\delta]$ и z имеют место асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{colon}(x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \operatorname{colon}\left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z}\right) &= O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.48)$$

Обратимся теперь к очередному отрезку времени $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$ и заметим, что при указанных t согласно (20.45) функции $x(t-1)$ и $y(t-1)$ в системе (20.5) задаются равенствами

$$\begin{aligned} x(t-1) &= \varepsilon u_1(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ y(t-1) &= (u_2(\tau, z, \varepsilon) - u_1(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.49)$$

Подставляя, далее, соотношения (20.49) в (20.5), отбрасывая в правых частях получившейся системы слагаемые порядка малости $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$ и выполняя замены $x = \varepsilon v_1(\tau)$, $x/\varepsilon + y = v_2(\tau)$,

$\tau = (t - 1)/\varepsilon$, приходим в конечном итоге к системе

$$\begin{aligned}\frac{dv_1}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_2 - v_1) - 1) + 1 - \exp v_1 - \gamma \exp(u_1(\tau, z, \varepsilon)), \\ \frac{dv_2}{d\tau} &= \varepsilon d(\exp(v_1 - v_2) - 1) + 1 - \exp v_2 - \gamma \exp(u_2(\tau, z, \varepsilon)),\end{aligned}\quad (20.50)$$

которую, как и аналогичную ей систему (20.31), будем рассматривать на отрезке $\tau \in J_0(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ с начальными условиями

$$v_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_1(z, \varepsilon), \quad v_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{v}_2(z, \varepsilon). \quad (20.51)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\bar{v}_1(z, \varepsilon) &= x(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon, \\ \bar{v}_2(z, \varepsilon) &= x(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)/\varepsilon + y(1 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon),\end{aligned}$$

причем в силу (20.48) равномерно по z имеем

$$\bar{v}_j(z, \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) = O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \quad j = 1, 2. \quad (20.52)$$

При исследовании задачи (20.50), (20.51) существенную роль играют специальные функции

$$v_1^0(\tau, z) = v_0(\tau + \kappa_1(z)), \quad v_2^0(\tau, z) = v_0(\tau + \kappa_2(z)), \quad (20.53)$$

удовлетворяющие системе (20.50) при $\varepsilon = 0$. Здесь $v_0(\tau)$ — функция (19.37), а $\kappa_j = \kappa_j(z)$, $j = 1, 2$, определены равенствами (20.34). Отметим еще, что в силу (19.37), (19.38) имеют место равномерные по z (и допускающие дифференцирование по z) асимптотические представления

$$\begin{aligned}v_j^0(\tau, z) &= O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \\ v_j^0(\tau, z) &= \ln(\gamma - 1) - (\gamma - 1)(\tau + \kappa_j(z)) + O(\exp(-\min(1, \gamma - 1)\tau)), \\ &\quad \tau \rightarrow +\infty.\end{aligned}\quad (20.54)$$

Перечисленные свойства функций (20.53) позволяют установить следующее утверждение.

Лемма 20.2. Для решения *colon* $(v_1(\tau, z, \varepsilon), v_2(\tau, z, \varepsilon))$ задачи Коши (20.50), (20.51) равномерно по $\tau \in J_0(\varepsilon)$ и по параметру z справедливы асимптотические формулы

$$v_j(\tau, z, \varepsilon) = v_j^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial v_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) = \frac{\partial v_j^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2. \quad (20.55)$$

Доказательство. Как и в случае леммы 20.1, обоснование асимптотических представлений (20.55) базируется на методе дифференциальных неравенств. В связи с этим сделаем априорное предположение

$$|v_1 - v_2| \leq M, \quad \tau \in J_0(\varepsilon), \quad (20.56)$$

в рамках которого из (20.35), (20.36), (20.50) вытекают оценки вида

$$\frac{dv_j}{d\tau} \geq 1 - M_1\varepsilon - \exp v_j - \gamma \frac{(1 + M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j)}{1 + (1 + M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j)}, \quad j = 1, 2;$$

$$\frac{dv_j}{d\tau} \leq 1 + M_1\varepsilon - \exp v_j - \gamma \frac{(1 - M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j)}{1 + (1 - M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j)}, \quad j = 1, 2,$$

где универсальные постоянные $M_1, M_2 > 0$ зависят от выбора M в (20.56). А отсюда, в свою очередь, заключаем, что

$$v_{j, \min}(\tau, z, \varepsilon) \leq v_j(\tau, z, \varepsilon) \leq v_{j, \max}(\tau, z, \varepsilon), \quad \tau \in J_0(\varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad (20.57)$$

где

$$v_{j, \min} = -\ln \left\{ \frac{(1 + (1 + M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j))^\gamma}{\exp[(1 - M_1\varepsilon)\tau]} \right\} - \\ - \ln \left\{ c_{j, \min} + \int_{-\varepsilon^\delta - 1}^{\tau} \frac{\exp[(1 - M_1\varepsilon)s]}{(1 + (1 + M_2\varepsilon^\delta) \exp(s + \kappa_j))^\gamma} ds \right\}, \quad (20.58)$$

$$v_{j, \max} = -\ln \left\{ \frac{(1 + (1 - M_2\varepsilon^\delta) \exp(\tau + \kappa_j))^\gamma}{\exp[(1 + M_1\varepsilon)\tau]} \right\} - \\ - \ln \left\{ c_{j, \max} + \int_{-\varepsilon^\delta - 1}^{\tau} \frac{\exp[(1 + M_1\varepsilon)s]}{(1 + (1 - M_2\varepsilon^\delta) \exp(s + \kappa_j))^\gamma} ds \right\}, \quad (20.59)$$

а $c_{j, \min}, c_{j, \max}$ задаются равенствами

$$c_{j, \min} = \exp(-\bar{v}_j(z, \varepsilon)) \cdot \frac{\exp[(1 - M_1\varepsilon)s]}{(1 + (1 + M_2\varepsilon^\delta) \exp(s + \kappa_j))^\gamma} \Big|_{s=-\varepsilon^\delta - 1}, \\ c_{j, \max} = \exp(-\bar{v}_j(z, \varepsilon)) \cdot \frac{\exp[(1 + M_1\varepsilon)s]}{(1 + (1 - M_2\varepsilon^\delta) \exp(s + \kappa_j))^\gamma} \Big|_{s=-\varepsilon^\delta - 1}. \quad (20.60)$$

На следующем этапе вспомним, что неравенства (20.57) были выведены в предположении (20.56). Однако из явных формул (20.58)–(20.60) и свойств (20.52) вытекает, что

$$|v_{1, \min}(\tau, z, \varepsilon) - v_{2, \max}(\tau, z, \varepsilon)| + |v_{2, \min}(\tau, z, \varepsilon) - v_{1, \max}(\tau, z, \varepsilon)| \leq M, \\ |v_{j, \min}(\tau, z, \varepsilon) - v_j^0(\tau, z)| + |v_{j, \max}(\tau, z, \varepsilon) - v_j^0(\tau, z)| \leq M\varepsilon^\delta, \quad j = 1, 2. \quad (20.61)$$

Таким образом, объединяя оценки (20.57), (20.61), убеждаемся сразу, что выполняются как априорное условие (20.56) при соответствующем выборе постоянной M , так и первая группа асимптотических представлений (20.55).

Для обоснования второй группы равенств (20.55) положим $h_j(\tau, z, \varepsilon) = \partial v_j / \partial z$, $j = 1, 2$, и заметим, что функции $h_j(\tau, z, \varepsilon)$ удовлетворяют линейной неоднородной системе, получающейся из (20.50) при формальном дифференцировании по z . Далее, подставим

в упомянутую систему равенства $h_j = \partial v_j^0 / \partial z + \tilde{h}_j$, и будем считать выполненными априорные оценки

$$|\tilde{h}_j| \leq M, \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J_0(\varepsilon). \quad (20.62)$$

В результате с учетом уже установленных асимптотических формул (20.55) для $v_j(\tau, z, \varepsilon)$ и асимптотических представлений (20.35), (20.36) для $u_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, приходим к дифференциальным неравенствам вида

$$\left| \frac{d\tilde{h}_j}{d\tau} + \exp(v_j^0(\tau, z)) \tilde{h}_j \right| \leq M_1 \varepsilon^\delta \exp[-\min(1, \gamma - 1)(\tau + \varepsilon^{\delta-1})] + M_2 \varepsilon, \quad j = 1, 2, \quad (20.63)$$

где, как и ранее в подобных ситуациях, константы $M_1, M_2 > 0$ зависят от M из (20.62). Далее, из (20.63) очевидным образом имеем

$$\tilde{h}_{j,-}(\tau, z, \varepsilon) \leq \tilde{h}_j(\tau, z, \varepsilon) \leq \tilde{h}_{j,+}(\tau, z, \varepsilon), \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J_0(\varepsilon), \quad (20.64)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{j,\pm} = & \left(\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial z}(z, \varepsilon) - \frac{\partial v_j^0}{\partial z}(\tau, z) \Big|_{\tau = -\varepsilon^{\delta-1}} \right) \exp \left\{ - \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \exp(v_j^0(s, z)) ds \right\} \pm \\ & \pm \int_{-\varepsilon^{\delta-1}}^{\tau} \exp \left\{ - \int_s^{\tau} \exp(v_j^0(\theta, z)) d\theta \right\} f(s, \varepsilon) ds, \end{aligned} \quad (20.65)$$

$$f(\tau, \varepsilon) = M_1 \varepsilon^\delta \exp[-\min(1, \gamma - 1)(\tau + \varepsilon^{\delta-1})] + M_2 \varepsilon. \quad (20.66)$$

Что же касается функций (20.65), то для них с учетом асимптотических свойств (20.52), (20.54), а также очевидных неравенств

$$\exp \left\{ - \int_s^{\tau} \exp(v_j^0(\theta, z)) d\theta \right\} \leq 1, \quad j = 1, 2, \quad -\varepsilon^{\delta-1} \leq s \leq \tau \leq \varepsilon^{\delta-1},$$

и формул (20.66), приходим к оценкам вида

$$|\tilde{h}_{j,\pm}| \leq M \varepsilon^\delta, \quad j = 1, 2, \quad \tau \in J_0(\varepsilon). \quad (20.67)$$

И наконец, остается заметить, что как и в аналогичных случаях, рассмотренных выше, неравенства (20.64), (20.67) решают все проблемы, т.е. обеспечивают выполнение условий (20.62) с некоторой константой $M > 0$ и требуемых асимптотических равенств для $\partial v_j / \partial z$ из (20.55). Лемма 20.2 доказана.

Возвращаясь к системе (20.50) и учитывая в ее правых частях отброшенные ранее слагаемые порядка $\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})$, приходим к выводу, что для интересующих нас функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ равномерно

по $t \in [1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta]$ и z выполняются аналогичные (20.45) асимптотические равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{colon} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) &= \\ &= \operatorname{colon} (\varepsilon v_1(\tau, z, \varepsilon), v_2(\tau, z, \varepsilon) - v_1(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \\ &\quad + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ \operatorname{colon} \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right) &= \operatorname{colon} \left(\varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial z}, \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \Big|_{\tau=(t-1)/\varepsilon} + \\ &\quad + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.68)$$

Завершая рассмотрение промежутка $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$, отметим, что в силу вытекающих из (20.13), (20.34), (20.54), (20.55), (20.68) асимптотических формул

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=1-\varepsilon^\delta} &= O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=1+\varepsilon^\delta} &= -(\gamma - 1)y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta) = y_0(1 + 0, z) + O(\varepsilon^\delta) \end{aligned} \quad (20.69)$$

отрезок $1 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 1 + \varepsilon^\delta$ представляет собой очередной участок быстрых движений.

Последующие три шага асимптотического анализа функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$, связанные с рассмотрением отрезков времени $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq 2 - \varepsilon^\delta$, $2 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 2 + \varepsilon^\delta$ и $2 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$, вполне аналогичны четырем предыдущим. Поэтому здесь приведем лишь сводку итоговых результатов.

При $1 + \varepsilon^\delta \leq t \leq 2 - \varepsilon^\delta$ имеют место асимптотические равенства (20.26), (20.29), в которых теперь $\operatorname{colon}(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение задачи Коши

$$\dot{x} = \varepsilon d(\exp y - 1) - (\gamma - 1), \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y,$$

$$x|_{t=1+\varepsilon^\delta} = \varepsilon v_1(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, \quad y|_{t=1+\varepsilon^\delta} = (v_2(\tau, z, \varepsilon) - v_1(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}.$$

Для самих же функций $\tilde{x}(t, z, \varepsilon)$, $\tilde{y}(t, z, \varepsilon)$ справедливы аналогичные (20.27) формулы:

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= -(\gamma - 1)(t - 1) + \varepsilon c_1(z) + \varepsilon d \int_1^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon c_1(z) + \varepsilon d \int_1^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} &= \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad c_1(z) = \ln(\gamma - 1) - (\gamma - 1)\varkappa_1(z), \end{aligned} \quad (20.70)$$

где, напомним, $y_0(t, z)$ — решение системы (20.11)–(20.14), которое в данном случае определяется из задачи Коши (20.13).

При $2 - \varepsilon^\delta \leq t \leq 2 + \varepsilon^\delta$ интересующее нас решение задается равенствами

$$\begin{aligned} & \operatorname{colop} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon)) = \\ & = \operatorname{colop} (-(\gamma - 1) + \varepsilon w_1(\tau, z, \varepsilon), w_2(\tau, z, \varepsilon) - \\ & \quad - w_1(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=(t-2)/\varepsilon} + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})), \\ & \operatorname{colop} \left(\frac{\partial x}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial z} \right) = \operatorname{colop} \left(\varepsilon \frac{\partial w_1}{\partial z}, \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \Big|_{\tau=(t-2)/\varepsilon} + \\ & \quad + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta})). \end{aligned} \quad (20.71)$$

Здесь $\operatorname{colop} (w_1(\tau, z, \varepsilon), w_2(\tau, z, \varepsilon))$ — решение задачи Коши

$$\frac{dw_1}{d\tau} = \varepsilon d(\exp(w_2 - w_1) - 1) + 1 - \gamma \exp(v_1(\tau, z, \varepsilon)),$$

$$\frac{dw_2}{d\tau} = \varepsilon d(\exp(w_1 - w_2) - 1) + 1 - \gamma \exp(v_2(\tau, z, \varepsilon)),$$

$$w_1|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{w}_1(z, \varepsilon), \quad w_2|_{\tau=-\varepsilon^{\delta-1}} = \bar{w}_2(z, \varepsilon),$$

где $\bar{w}_1 = (\tilde{x}(2 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon) + \gamma - 1)/\varepsilon$, $\bar{w}_2 = \bar{w}_1 + \tilde{y}(2 - \varepsilon^\delta, z, \varepsilon)$, а \tilde{x} , \tilde{y} — функции (20.70). Далее, опираясь на уже известные свойства функций $v_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ (см. (20.55)), убеждаемся, что для компонент $w_1(\tau, z, \varepsilon)$, $w_2(\tau, z, \varepsilon)$, в свою очередь, имеют место равномерные по $\tau \in J_0(\varepsilon) = [-\varepsilon^{\delta-1}, \varepsilon^{\delta-1}]$ и z асимптотические представления

$$w_j(\tau, z, \varepsilon) = w_j^0(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad (20.72)$$

$$\frac{\partial w_j}{\partial z}(\tau, z, \varepsilon) = \frac{\partial w_j^0}{\partial z}(\tau, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad j = 1, 2,$$

где

$$\begin{aligned} w_1^0(\tau, z) &= \theta_1(z) + w_0(\tau + \kappa_1(z)), \\ w_2^0(\tau, z) &= \theta_2(z) + w_0(\tau + \kappa_2(z)), \end{aligned} \quad (20.73)$$

$w_0(\tau)$ — функция (19.44), $\kappa_1(z)$, $\kappa_2(z)$ определены равенствами (20.34), а

$$\theta_1(z) = d \int_1^2 [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds, \quad (20.74)$$

$$\theta_2(z) = \theta_1(z) + y_0(2 - 0, z) + (\gamma - 1)y_0(-0, z).$$

Отметим еще вытекающие (20.73), (20.74), (19.44), (19.45) равномерные по z асимптотические формулы

$$w_j^0 = \theta_j(z) - (\gamma - 1)(\tau + \kappa_j(z)) + \ln(\gamma - 1) + O(\exp \tau),$$

$$\frac{\partial w_j^0}{\partial z} = \theta_j'(z) - (\gamma - 1)\kappa_j'(z) + O(\exp \tau), \quad \tau \rightarrow -\infty; \quad (20.75)$$

$$w_j^0 = \theta_j(z) + \tau + \kappa_j(z) + (\gamma + 1) \ln(\gamma - 1) + O(\exp(-\min(1, \gamma - 1)\tau)),$$

$$\frac{\partial w_j^0}{\partial z} = \theta_j'(z) + \kappa_j'(z) + O(\exp(-\min(1, \gamma - 1)\tau)), \quad \tau \rightarrow +\infty,$$

а также аналогичные (20.46), (20.69) соотношения

$$\begin{aligned} y(t, z, \varepsilon)|_{t=2-\varepsilon^\delta} &= y_0(2 - 0, z) + O(\varepsilon^\delta), \\ y(t, z, \varepsilon)|_{t=2+\varepsilon^\delta} &= y_0(2 - 0, z) + \gamma y_0(-0, z) + O(\varepsilon^\delta) = \\ &= y_0(2 + 0, z) + O(\varepsilon^\delta). \end{aligned} \quad (20.76)$$

На последнем из участков, а именно, при $2 + \varepsilon^\delta \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$, для функций $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ в очередной раз справедливы равенства (20.26), (20.29), в которых $\text{colon}(\tilde{x}, \tilde{y})$ — решение задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon d(\exp y - 1) + 1, \quad \dot{y} = -2d \operatorname{sh} y, \\ x|_{t=2+\varepsilon^\delta} &= -(\gamma - 1) + \varepsilon w_1(\tau, z, \varepsilon)|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}, \\ y|_{t=2+\varepsilon^\delta} &= (w_2(\tau, z, \varepsilon) - w_1(\tau, z, \varepsilon))|_{\tau=\varepsilon^\delta-1}. \end{aligned}$$

Используя предшествующую информацию о функциях $w_j(\tau, z, \varepsilon)$, $j = 1, 2$ (см. (20.72)–(20.75)), нетрудно увидеть, что для компонент \tilde{x} , \tilde{y} решения этой задачи выполняются равномерные по t , z асимптотические представления

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= t - \gamma - 1 + \varepsilon c_2(z) + \varepsilon d \int_2^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon c_2(z) + \varepsilon d \int_2^t [\exp(y_0(s, z)) - 1] ds \right) + O(\varepsilon^{1+\delta}), \\ \tilde{y} &= y_0(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \quad \frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} = \frac{\partial y_0}{\partial z}(t, z) + O(\varepsilon^\delta), \end{aligned} \quad (20.77)$$

где $c_2(z) = \theta_1(z) + \kappa_1(z) + (\gamma + 1) \ln(\gamma - 1)$.

Подведем некоторый итог. Как несложно увидеть, все изложенные выше построения остаются в силе при замене специального начального условия $\varphi(t) = \text{colon}(-\sigma_0, z)$, $z = \text{const} \in \mathbb{R}$, на произвольную начальную функцию $\varphi(t) \in S$. Действительно, нетрудно убедиться, что при этом сохраняются все соотношения вида (20.25), (20.30) и т. д. Тем самым, для $\text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ остаются в силе базовые формулы (при $z = \varphi_2(-\sigma_0)$):

$$\text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon)) = \text{colon}(\tilde{x}(t, z, \varepsilon), \tilde{y}(t, z, \varepsilon)) + O(\exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}))$$

в случае, когда $\text{colon}(\tilde{x}, \tilde{y})$ задается равенствами из (20.27), (20.70), (20.77), а также аналогичные формулы на участках быстрых движений (см. (20.45), (20.68), (20.71)) и формулы (20.48). А отсюда требуемое асимптотическое представление (20.23) вытекает очевидным образом.

Суммируя полученную информацию (см. (20.23), (20.26), (20.27), (20.45), (20.46), (20.48), (20.68)–(20.77)), приходим к выводу, что равномерно по $\varphi \in S$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} |x_\varphi(t, \varepsilon) - x_0(t)| = O(\varepsilon), \quad (20.78)$$

$$\max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_\varphi(t, \varepsilon) - y_0(t, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} = O(\varepsilon^\delta), \quad (20.79)$$

где $x_0(t)$ — функция (19.13), $y_0(t, z)$ — решение импульсной системы (20.11)–(20.14), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок времени $[-\sigma_0, T_0 - \varepsilon^\delta]$ с выброшенными интервалами быстрых движений $(-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta)$, $(1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta)$, $(2 - \varepsilon^\delta, 2 + \varepsilon^\delta)$. Далее, из равенства (20.78) заключаем, что для отыскания второго положительного корня $t = T_\varphi$ уравнения $x_\varphi(t - \sigma_0, \varepsilon) = -\sigma_0$ следует воспользоваться асимптотическими представлениями (20.26), (20.77). Из этих формул и из очевидного свойства $\dot{x}_\varphi(t, \varepsilon) = 1 + O(\varepsilon)$, $t \in [2 + \varepsilon^\delta, T_0 - \varepsilon^\delta]$, вытекает, что требуемый корень находится однозначно и допускает равномерную по $\varphi \in S$ асимптотику

$$T_\varphi = T_0 + O(\varepsilon). \quad (20.80)$$

И наконец, объединяя формулы (20.78)–(20.80), убеждаемся в справедливости первого предельного равенства из (20.20).

20.3. Доказательство C^1 -сходимости. Обоснование второго предельного соотношения (20.20) помимо асимптотических свойств рассмотренного выше решения $\text{colon}(x_\varphi(t, \varepsilon), y_\varphi(t, \varepsilon))$ требует знания асимптотики при $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ решения $g(t, \varepsilon) = \text{colon}(g_1(t, \varepsilon), g_2(t, \varepsilon))$ линейной системы (20.18) с произвольной начальной функцией $g_0(t) = \text{colon}(g_{1,0}(t), g_{2,0}(t))$ из пространства \mathcal{F}_0 . Как будет показано ниже, на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ имеет место оценка

$$\max_t \|g(t, \varepsilon) - \tilde{g}(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}) \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \quad (20.81)$$

где

$$\tilde{g}(t, \varepsilon) = \text{colon} \left(\frac{\partial x}{\partial z}(t, z, \varepsilon), \frac{\partial y}{\partial z}(t, z, \varepsilon) \right) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} \cdot g_{2,0}(-\sigma_0), \quad (20.82)$$

$M, q > 0$ — некоторые универсальные (не зависящие от $\varepsilon, \varphi, g_0$) постоянные, а символом $\|*\|$ здесь и далее в зависимости от контекста обозначается кубическая векторная норма в \mathbb{R}^2 или индуцированная ею матричная норма.

Для доказательства неравенства (20.81) выполним в (20.18) замену $g = \tilde{g} + h$. Далее, обратим внимание, что вектор-функция $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ удовлетворяет аналогичной (20.18) системе с матрицами $\bar{A}(t, \varepsilon), \bar{B}(t, \varepsilon)$,

вычисленными на решении $\operatorname{colon} (x(t, z, \varepsilon), y(t, z, \varepsilon))|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$. Кроме того, из асимптотического представления (20.23) вытекает, что

$$A(t, \varepsilon) = \bar{A}(t, \varepsilon) + \Delta_1(t, \varepsilon), \quad B(t, \varepsilon) = \bar{B}(t, \varepsilon) + \Delta_2(t, \varepsilon),$$

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|\Delta_j(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}), \quad j = 1, 2. \quad (20.83)$$

Принимая во внимание эти обстоятельства, для отыскания h получаем линейную систему

$$\dot{h} = A(t, \varepsilon) h + B(t, \varepsilon) h(t-1) + F(t, \varepsilon) \quad (20.84)$$

с неоднородностью $F(t, \varepsilon) = \Delta_1(t, \varepsilon) \tilde{g}(t, \varepsilon) + \Delta_2(t, \varepsilon) \tilde{g}(t-1, \varepsilon)$ и начальной функцией

$$h_0(t) = g_0(t) - \operatorname{colon} (0, 1) g_{2,0}(-\sigma_0). \quad (20.85)$$

Исследование системы (20.84) начнем с отрезка $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Как обычно, перейдем от нее к соответствующему интегральному уравнению, которое с учетом вытекающего из (20.85) равенства $h_0(-\sigma_0) = 0$ примет вид

$$h(t, \varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^t K(t, s, \varepsilon) B(s, \varepsilon) h_0(s-1) ds + \int_{-\sigma_0}^t K(t, s, \varepsilon) F(s, \varepsilon) ds, \quad (20.86)$$

где $K(t, \tau, \varepsilon)$ — матрица Коши системы $\dot{h} = A(t, \varepsilon) h$. А отсюда для функции $\gamma(t, \varepsilon) = \|h(t, \varepsilon)\|$ получаем оценку

$$\gamma(t, \varepsilon) \leq \gamma_0(\varepsilon) \cdot \max_{-\sigma_0 \leq \tau \leq t \leq 1 - \sigma_0} \|K(t, \tau, \varepsilon)\|, \quad (20.87)$$

где

$$\gamma_0(\varepsilon) = \int_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|B(s, \varepsilon)\| \cdot \|h_0(s-1)\| ds + \int_{-\sigma_0}^{1-\sigma_0} \|F(s, \varepsilon)\| ds. \quad (20.88)$$

Дальнейший анализ базируется на следующих фактах, вытекающих из проделанных в предыдущем пункте асимптотических построений. Во-первых, в силу оценок из (20.83) и известных асимптотических свойств функции $\tilde{g}(t, \varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|F(t, \varepsilon)\| \leq M \exp(-q/\varepsilon^{1-\delta}) \|g_0\|_{\mathcal{F}}; \quad (20.89)$$

во-вторых, для матрицы $B(t, \varepsilon)$ справедливы оценки

$$\int_{-\sigma_0}^{T_0 - \varepsilon^\delta} \|B(t, \varepsilon)\| dt \leq M_1/\varepsilon^2, \quad \max_{-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0} \|B(t, \varepsilon)\| \leq M_2 \exp(-q/\varepsilon); \quad (20.90)$$

в-третьих, для матрицы $K(t, \tau, \varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\max_{-\sigma_0 \leq \tau \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|K(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M/\varepsilon. \quad (20.91)$$

Обратим внимание, что из перечисленных фактов в некоторых пояснениях нуждается только оценка (20.91) (свойства (20.89) и (20.90) — очевидные следствия проделанного нами асимптотического анализа). Для обоснования же неравенства (20.91) введем в рассмотрение матрицу Коши $\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)$ системы

$$\dot{h} = \tilde{A}(t, \varepsilon) h, \quad \tilde{A}(t, \varepsilon) = C^{-1} A(t, \varepsilon) C, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (20.92)$$

Заметим, далее, что матрица $\tilde{A}(t, \varepsilon)$ из (20.92) записывается в виде

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t, \varepsilon) &= \tilde{A}_1(t, \varepsilon) + \tilde{A}_2(t, \varepsilon), \\ \tilde{A}_1 &= -\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{diag} \{ \exp(x/\varepsilon), \exp(x/\varepsilon + y) \}, \\ \tilde{A}_2 &= d \begin{pmatrix} -\exp y & \exp y \\ \exp(-y) & -\exp(-y) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20.93)$$

где во всех коэффициентах необходимо положить $x = x_\varphi(t, \varepsilon)$, $y = y_\varphi(t, \varepsilon)$.

Равенства (20.93) позволяют написать для $\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)$ следующее интегральное уравнение:

$$\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon) = \tilde{K}_1(t, \tau, \varepsilon) + \int_{\tau}^t \tilde{K}_1(t, s, \varepsilon) \tilde{A}_2(s, \varepsilon) \tilde{K}(s, \tau, \varepsilon) ds. \quad (20.94)$$

Здесь $\tilde{K}_1(t, \tau, \varepsilon)$ — матрица Коши системы $\dot{h} = \tilde{A}_1(t, \varepsilon) h$, которая без труда выписывается в явном виде и допускает оценку

$$\max_{-\sigma_0 \leq \tau \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|\tilde{K}_1(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M. \quad (20.95)$$

Что же касается матрицы $\tilde{A}_2(t, \varepsilon)$, то для нее очевидным образом имеем

$$\max_{-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta} \|\tilde{A}_2(t, \varepsilon)\| \leq M. \quad (20.96)$$

Учитывая, далее, свойства ограниченности (20.95), (20.96) в (20.94), приходим к выводу, что $\|\tilde{K}(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M$. А отсюда и из очевидного соотношения $K(t, \tau, \varepsilon) = C \tilde{K}(t, \tau, \varepsilon) C^{-1}$ получаем нужное неравенство (20.91).

Объединяя соотношения (20.87)–(20.91), приходим к выводу, что требуемое неравенство (20.81) выполняется на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq 1 - \sigma_0$. Для распространения же его на оставшийся промежуток $1 - \sigma_0 \leq t \leq T_0 - \varepsilon^\delta$ воспользуемся описанным в п. 19.4 методом шагов. Как и выше, разобьем указанный отрезок на части $[1 - \sigma_0 + k, 2 - \sigma_0 + k]$,

$k = 0, 1, \dots, k_0$ и $[2 - \sigma_0 + k_0, T_0 - \varepsilon^\delta]$, где $k_0 = \lfloor T_0 - 2 + \sigma_0 - \varepsilon^\delta \rfloor$. Заметим, далее, что из аналогичной (20.86) явной формулы

$$h(t, \varepsilon) = K(t, 1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) h(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) + \\ + \int_{1 - \sigma_0 + k}^t K(t, s, \varepsilon) B(s, \varepsilon) h(s - 1, \varepsilon) ds + \int_{1 - \sigma_0 + k}^t K(t, s, \varepsilon) F(s, \varepsilon) ds$$

вытекает аналогичное (20.87) неравенство

$$\gamma(t, \varepsilon) \leq \gamma_{k+1}(\varepsilon) \cdot \max_{1 - \sigma_0 + k \leq \tau \leq t \leq 2 - \sigma_0 + k} \|K(t, \tau, \varepsilon)\|, \\ 1 - \sigma_0 + k \leq t \leq 2 - \sigma_0 + k,$$

где

$$\gamma_{k+1}(\varepsilon) = \gamma(1 - \sigma_0 + k, \varepsilon) + \\ + \int_{1 - \sigma_0 + k}^{2 - \sigma_0 + k} \|B(s, \varepsilon)\| \cdot \gamma(s - 1, \varepsilon) ds + \int_{1 - \sigma_0 + k}^{2 - \sigma_0 + k} \|F(s, \varepsilon)\| ds.$$

А отсюда и из уже установленной оценки (20.81) на $(k - 1)$ -м отрезке выводим нужную оценку на k -м отрезке изменения t .

Полученная информация позволяет уже достаточно просто завершить обоснование теоремы 20.1. Действительно, при $T_\varphi - 1 - \sigma_0 \leq t \leq T_\varphi - \sigma_0$ в силу неравенства $T_\varphi - 1 - \sigma_0 > 2 + \varepsilon^\delta$ (вытекающего из (20.4) и из условия $\sigma_0 < \gamma - 2$) для $x(t, z, \varepsilon)$, $y(t, z, \varepsilon)$ работают асимптотические представления (20.26), (20.29), в которых функции \bar{x} , \bar{y} задаются формулами (20.77). А отсюда и из (20.81), (20.82) очевидным образом имеем

$$\max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} |g_1(t + T_\varphi, \varepsilon)| \leq M_1 \varepsilon \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \\ \max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} \left| g_2(t + T_\varphi, \varepsilon) - g_{2,0}(-\sigma_0) \frac{\partial y_0}{\partial z}(t + T_0, z) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)} \right| \leq \\ \leq M_2 \varepsilon^\delta \|g_0\|_{\mathcal{F}}, \quad (20.97)$$

где постоянные $M_1, M_2 > 0$ не зависят от $\varepsilon, \varphi, g_0$. И наконец, применяя оценки (20.97) непосредственно к оператору $\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi)$ (см. (20.16)), убеждаемся в справедливости второго предельного равенства из (20.20). Теорема 20.1 полностью доказана.

В заключение обсудим вопрос о справедливости аналогов теорем 20.1, 20.2 при отказе от условия (20.4). Для формулировки соответствующего результата, считая выполненными требования

$$\sigma_0 < \gamma - 1, \quad q_1 > - \min_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t), \quad 0 < q_2 < - \max_{-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0} x_0(t),$$

на множестве S зададим оператор

$$\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi) = \text{colon} (x(t + T_z, z, \varepsilon), y(t + T_z, z, \varepsilon)) \Big|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}, \quad (20.98)$$

$$-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0,$$

где T_z — второй положительный корень уравнения $x(t - \sigma_0, z, \varepsilon) = -\sigma_0$.

Оператор (20.98), несмотря на его зависимость от ε , является некоторым аналогом предельного оператора (20.10). Предпринятый выше асимптотический анализ и, в частности, соотношения (20.23), (20.81) позволяют утверждать, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\Pi_\varepsilon(\varphi) - \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}} = 0, \quad (20.99)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varphi \in S} \|\partial_\varphi \Pi_\varepsilon(\varphi) - \partial_\varphi \tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)\|_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0} = 0.$$

Подчеркнем, что равенства (20.99) выполняются вне зависимости от знака величины $\gamma - 2$. Однако при $\gamma - 2 > 0$ оператор $\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$, в свою очередь, сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к $\Pi_0(\varphi)$ (в C^1 -метрике) и мы можем перейти к более простым соотношениям (20.20).

В случае $1 < \gamma \leq 2$ такой переход уже невозможен, поскольку становится разрывной на отрезке $-1 - \sigma_0 \leq t \leq -\sigma_0$ компонента $y_0(t + T_0, z)|_{z=\varphi_2(-\sigma_0)}$ оператора $\Pi_0(\varphi)$. Но, тем не менее, аналог теоремы 20.2 здесь остается в силе. Причина этого в том, что «предельный» оператор $\tilde{\Pi}_\varepsilon(\varphi)$ является надстройкой над соответствующим одномерным отображением

$$z \rightarrow y(t, z, \varepsilon)|_{t=T_z-\sigma_0}, \quad z = \varphi_2(-\sigma_0).$$

Последнее же при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится (в C^1 -метрике на любом конечном отрезке изменения z) к введенному выше отображению (20.21).

21. Дискретные автоволны

21.1. Базовая теорема. Напомним, что дискретным автоволновым процессом мы условились называть любой периодический или иной стационарный режим системы (20.1), отличный от однородного цикла, для которого $N_1 \equiv \dots \equiv N_m$. В данном разделе изучается проблема существования и устойчивости таких режимов.

Как и в случае $m = 2$, анализ произвольной диффузионной цепочки (20.1) будем проводить в новых переменных x, y_1, \dots, y_{m-1} , где

$$N_1 = (1 + \gamma) \exp(x/\varepsilon), \quad N_j = (1 + \gamma) \exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right), \quad j = 2, \dots, m,$$

$$\varepsilon = 1/\lambda \ll 1, \quad \gamma = 1/a > 1. \quad (21.1)$$

Подставляя, далее, соотношения (21.1) в (20.1), приходим к релаксационной системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon d(\exp y_1 - 1) + F(x, x(t-1), \varepsilon), \\ \dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})] + \\ &+ G_j(x, x(t-1), y_1, \dots, y_j, y_1(t-1), \dots, y_j(t-1), \varepsilon), \\ &j = 1, \dots, m-1,\end{aligned}\quad (21.2)$$

где $y_0 = y_m = 0$, а функции F, G_j имеют вид

$$\begin{aligned}F(x, u, \varepsilon) &= 1 - \exp\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \gamma \exp\left(\frac{u}{\varepsilon}\right), \\ G_j(x, u, y_1, \dots, y_j, v_1, \dots, v_j, \varepsilon) &= \\ &= \frac{\gamma}{\varepsilon} \left[\exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} v_k\right) - \exp\left(\frac{u}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j v_k\right) \right] + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left[\exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right) - \exp\left(\frac{x}{\varepsilon} + \sum_{k=1}^j y_k\right) \right], \quad j = 1, \dots, m-1.\end{aligned}$$

Фиксируем постоянную σ_0 , такую что $0 < \sigma_0 < \min(1, \gamma - 1)$, и на отрезке $-\sigma_0 \leq t \leq T_0 - \sigma_0$, где, напомним, $T_0 = 1 + \gamma$, обозначим через $y_j^0(t, z)$, $j = 1, \dots, m-1$, $z = (z_1, \dots, z_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, компоненты решения аналогичной (20.11)–(20.14) импульсной системы

$$\begin{aligned}\dot{y}_j &= d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \quad j = 1, \dots, m-1, \\ y_0 &= y_m = 0 \quad \text{при } t \in [-\sigma_0, 0) \cup (1, 2) \cup (2, T_0 - \sigma_0];\end{aligned}\quad (21.3)$$

$$\begin{aligned}y_j &\equiv 0 \quad \text{при } 0 < t < 1, \quad y_j|_{t=1+0} = -(\gamma - 1)y_j|_{t=-0}, \\ y_j|_{t=2+0} &= y_j|_{t=2-0} + \gamma y_j|_{t=-0}, \quad j = 1, \dots, m-1,\end{aligned}\quad (21.4)$$

дополненной начальным условием

$$(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1}). \quad (21.5)$$

Далее, рассмотрим отображение

$$z \rightarrow \Phi(z) \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^0(t, z), \dots, y_{m-1}^0(t, z))|_{t=T_0-\sigma_0}, \quad (21.6)$$

действующее из \mathbb{R}^{m-1} в \mathbb{R}^{m-1} . Справедливо следующее утверждение.

Теорема 21.1. Любой неподвижной точке $z = z_*$ отображения (21.6), экспоненциально устойчивой или дихотомичной, в системе (21.2) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ соответствует релаксационный цикл

$$(x(t, \varepsilon), y_1(t, \varepsilon), \dots, y_{m-1}(t, \varepsilon)), \quad x(-\sigma_0, \varepsilon) \equiv -\sigma_0,$$

периода $T(\varepsilon)$ с теми же свойствами устойчивости. Кроме того, справедливы предельные соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T(\varepsilon) = T_0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{-\sigma_0 \leq t \leq T(\varepsilon) - \sigma_0} |x(t, \varepsilon) - x_0(t)| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{t \in \Sigma(\varepsilon)} |y_j(t, \varepsilon) - y_j^0(t, z_*)| = 0, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

где $x_0(t)$ — функция (19.13), а множество $\Sigma(\varepsilon)$ представляет собой отрезок времени $[-\sigma_0, T(\varepsilon) - \sigma_0]$ с выброшенными интервалами

$$(-\varepsilon^\delta, \varepsilon^\delta), \quad (1 - \varepsilon^\delta, 1 + \varepsilon^\delta), \quad (2 - \varepsilon^\delta, 2 + \varepsilon^\delta), \quad \delta = \text{const} \in (0, 1).$$

Доказательство данной теоремы опустим, поскольку в случае $m = 2$ оно подробно изложено в разделе 20. Единственный новый момент, появляющийся при $m > 2$ и нуждающийся в дополнительном анализе, связан с корректностью определения отображения (21.6).

Действительно, на промежутках

$$-\sigma_0 \leq t < 0, \quad 1 < t < 2, \quad 2 < t \leq T_0 - \sigma_0$$

решение задачи Коши (21.3)–(21.5) удовлетворяет нелинейной системе

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ j &= 1, \dots, m-1, \quad y_0 = y_m = 0. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Таким образом, возникает вопрос о продолжимости решений последней на указанные промежутки времени, длины которых отнюдь не малы.

При $m = 2$ поставленный вопрос тривиален, так как в этом случае система (21.7) переходит в скалярное уравнение $\dot{y} = -2d \operatorname{sh} y$. В случае же $m > 2$ ответ на него дается в следующем утверждении.

Лемма 21.1. *Решение $(y_1(t), \dots, y_{m-1}(t))$ системы (21.7) с произвольным начальным условием $(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=0} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ определено на полуоси $t \geq 0$ и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.*

Для доказательства достаточно заметить, что любое решение системы (21.7) записывается в виде:

$$y_j(t) = \ln(\xi_{j+1}(t)/\xi_j(t)), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad (21.8)$$

где $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ — произвольное решение линейной системы

$$\dot{\xi}_j = d(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m, \quad \xi_0 = \xi_1, \quad \xi_{m+1} = \xi_m, \quad (21.9)$$

принадлежащее инвариантному конусу $K = \{(\xi_1, \dots, \xi_m): \xi_j > 0, j = 1, \dots, m\}$. Учитывая, далее, в равенствах (21.8) известные свойства системы (21.9), касающиеся поведения ее решений при $t \rightarrow +\infty$, получаем требуемый результат.

21.2. Анализ предельного отображения. Для упрощения последующего изложения запишем правую часть из (21.6) в инвариантной

форме, не зависящей от выбора параметра σ_0 . С этой целью обозначим через $P^t(z)$, $t \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{m-1}$, $P^0(z) = z$ оператор сдвига по траекториям системы (21.7) и положим $\bar{z} = \Phi(z)$. Тогда отображение (21.6) может быть представлено в виде

$$\bar{z} = (P^{T_0-2-\sigma_0} \circ P_2 \circ P^1 \circ P_1 \circ P^{\sigma_0})(z), \quad (21.10)$$

где через P_1 , P_2 обозначены операторы пересчета начальных условий в точках $t = 1$ и $t = 2$ соответственно, действующие по правилам:

$$P_1(z) = -(\gamma - 1)z, \quad P_2(z) = z - \frac{\gamma}{\gamma - 1}P^{-1}(z).$$

Далее, применим к левой и правой части получившегося равенства (21.10) оператор P^{σ_0} и выполним замену $P^{\sigma_0}(z) \rightarrow z$. В итоге с учетом соотношения $P^{T_0-2-\sigma_0} = P^{-\sigma_0} \circ P^{T_0-2}$ интересующее нас отображение принимает требуемую инвариантную форму

$$z \rightarrow \Phi_0(z) \stackrel{\text{def}}{=} (P^{T_0-2} \circ P_2 \circ P^1 \circ P_1)(z). \quad (21.11)$$

Поиск аттракторов отображения (21.11) начнем с анализа свойств устойчивости его неподвижной точки $z = 0$.

Лемма 21.2. Нулевая неподвижная точка отображения (21.11) экспоненциально устойчива при любых значениях параметров $\gamma > 1$, $d > 0$.

Доказательство. Несложный подсчет показывает, что отвечающая точке $z = 0$ матрица Якоби $\Phi'_0(0)$ есть оператор сдвига по решениям импульсной системы

$$\dot{h}_j = d(h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}), \quad j = 1, \dots, m-1, \quad h_0 = h_m = 0, \quad (21.12)$$

при $t \in (1, 2) \cup (2, T_0)$;

$$h_j \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \quad h_j|_{t=1+0} = -(\gamma - 1)h_j|_{t=-0}, \quad (21.13)$$

$$h_j|_{t=2+0} = h_j|_{t=2-0} + \gamma h_j|_{t=-0}, \quad j = 1, \dots, m-1,$$

за время от $t = -0$ до $t = T_0 - 0$. Далее, применим к (21.12), (21.13) метод Фурье по собственным векторам разностного оператора Лапласа, а точнее говоря, положим

$$h_j = \sum_{k=1}^{m-1} g_k(t) \sin\left(\frac{\pi k}{m}j\right), \quad j = 1, \dots, m-1. \quad (21.14)$$

В результате убеждаемся, что компоненты $g_k(t)$, $k = 1, \dots, m-1$, из (21.14) являются решениями импульсной системы

$$\dot{g} = -sg \quad \text{при} \quad t \in (1, 2) \cup (2, T_0), \quad g \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 < t < 1, \quad (21.15)$$

$$g|_{t=1+0} = -(\gamma - 1)g|_{t=-0}, \quad g|_{t=2+0} = g|_{t=2-0} + \gamma g|_{t=-0},$$

где $s = s_k$, $s_k = 4d \sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)$, $k = 1, \dots, m-1$.

На завершающем этапе дополним (21.15) начальным условием $g|_{t=-0} = 1$, проинтегрируем получившуюся задачу Коши и положим $\mu_k = g|_{t=T_0-0, s=s_k}$, где s_k — введенные чуть выше дискретные значения параметра s . В итоге получаем набор чисел μ_k , $k = 1, \dots, m-1$, который, как нетрудно увидеть, образует спектр интересующей нас матрицы $\Phi'_0(0)$. Более того, справедливы соотношения

$$\mu_k = \mu(s)|_{s=s_k}, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad \mu(s) = \exp(-\gamma s)(\gamma \exp s + 1 - \gamma).$$

Далее, несложная проверка показывает, что $\mu(0) = 1$, $\mu'(s) < 0$ $\forall s > 0$, $\mu(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow +\infty$. А отсюда очевидным образом следует, что $\mu_k \in (0, 1)$, $k = 1, \dots, m-1$. Лемма 21.2 доказана.

В системе (21.2) неподвижной точке $z = 0$ отвечает цикл с компонентами $x = x_*(t, \varepsilon)$, $y_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, m-1$, где $x_*(t, \varepsilon)$ — устойчивое периодическое решение уравнения (19.11), а в рамках исходной системы (20.1) — однородный цикл $N_1 \equiv \dots \equiv N_m = N_*(t, \lambda)$, где $N_*(t, \lambda)$ — функция (19.55). Лемма 21.2 и теорема 21.1 приводят к выводу, что этот цикл является экспоненциально орбитально устойчивым при любых фиксированных значениях $\gamma > 1$, $d > 0$ и при всех достаточно малых ε .

Отыскание других устойчивых неподвижных точек отображения (21.11) будем проводить в предположении о малости d , что позволяет при $t \in (1, 2) \cup (2, T_0)$ выполнить асимптотический анализ системы (21.7). В связи с этим докажем сначала некоторые подготовительные утверждения, необходимые в последующем.

Лемма 21.3. Для любых натуральных n, s : $1 \leq n \leq m$, $1 \leq s \leq m$, $|n - s| \geq 1$ и любого целого r : $0 \leq r \leq |n - s|$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi k}{m} r\right) e_n^k e_s^k = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{при } 0 \leq r < |n - s|, \\ \frac{m-2}{4} & \text{при } r = |n - s|, \end{cases} \quad (21.16)$$

где $e_n^k = \cos\left(\frac{\pi k}{2m}(2n-1)\right)$, $e_s^k = \cos\left(\frac{\pi k}{2m}(2s-1)\right)$ — так называемые разностные косинусы, аналогичные введенным ранее (см. (17.24)).

Доказательство. Обоснование нужной формулы (21.16) базируется на очевидных соотношениях

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi k}{m} r\right) e_n^k e_s^k &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi k}{m}(r+s+n-1)\right) + \\ &+ \cos\left(\frac{\pi k}{m}(s+n-1-r)\right) + \\ &+ \cos\left(\frac{\pi k}{m}(s-n+r)\right) + \cos\left(\frac{\pi k}{m}(s-n-r)\right), \end{aligned} \quad (21.17)$$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi k}{m} l\right) = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } l \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{при четном } l \in \mathbb{N}, l/m \neq 0 \pmod{2}, \\ m-1 & \text{при } l \in \mathbb{N} \cup \{0\}, l/m = 0 \pmod{2}. \end{cases} \quad (21.18)$$

Принимая во внимание эти факты, рассмотрим сначала случай $0 \leq r < |n-s|$. Тогда каждое из фигурирующих в (21.17) значений

$$l = r + s + n - 1, \quad s + n - 1 - r, \quad |s - n \pm r| \quad (21.19)$$

строго положительно и в силу оценок

$$\begin{aligned} r + s + n - 1 &\leq |s - n| + s + n - 1 = 2 \max(n, s) - 1 \leq 2m - 1, \\ s + n - 1 - r &\leq s + n - 1 \leq 2m - 1, \\ |s - n \pm r| &\leq 2|s - n| \leq 2(m - 1) \end{aligned}$$

удовлетворяет требованию $l/m \neq 0 \pmod{2}$. А отсюда, опираясь на (21.18) и тот факт, что пары $(s + n - 1 - r, |s - n + r|)$, $(r + s + n - 1, |s - n - r|)$ состоят из чисел различной четности, для интересующей нас суммы получаем значение $-1/2$.

Оставшийся случай $r = |n - s|$ разбирается аналогично. Его отличие от предыдущего состоит лишь в том, что здесь ровно одно значение (21.19) обращается в нуль, а остальные по-прежнему удовлетворяют условию $l/m \neq 0 \pmod{2}$. Тем самым, снова опираясь на (21.17), (21.18), для левой части из (21.16) получаем значение $(m - 2)/4$. Лемма доказана.

Лемма 21.4. Пусть натуральные n, s таковы, что $1 \leq n \leq m$, $1 \leq s \leq m$, $|n - s| \geq 1$.

Тогда для каждого натурального ν : $\nu \leq |n - s|$ имеем

$$\frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} (\sigma_k)^\nu e_n^k e_s^k = \begin{cases} 0 & \text{при } 1 \leq \nu < |n - s|, \\ (-1)^{s-n} & \text{при } \nu = |n - s|, \end{cases} \quad (21.20)$$

где $\sigma_k = 4 \sin^2\left(\frac{\pi k}{2m}\right)$, $k = 1, \dots, m - 1$.

Доказательство. Для начала, опираясь на известную формулу

$$\begin{aligned} \sin^{2\nu}\left(\frac{\pi k}{2m}\right) &= \frac{(-1)^\nu}{2^{2\nu-1}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi k}{m} \nu\right) - 2\nu \cos\left(\frac{\pi k}{m} (\nu - 1)\right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\nu(2\nu - 1)}{1 \cdot 2} \cos\left(\frac{\pi k}{m} (\nu - 2)\right) - \dots + \frac{(-1)^\nu}{2} \cdot \frac{2\nu(2\nu - 1) \dots (\nu + 1)}{\nu!} \right\}, \end{aligned}$$

перепишем левую часть из (21.20) в виде

$$\begin{aligned} \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} (\sigma_k)^\nu e_n^k e_s^k &= (-1)^\nu \frac{4}{m} \left\{ \alpha_\nu - 2\nu \cdot \alpha_{\nu-1} + \frac{2\nu(2\nu - 1)}{1 \cdot 2} \alpha_{\nu-2} - \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^\nu}{2} \cdot \frac{2\nu(2\nu - 1) \dots (\nu + 1)}{\nu!} \alpha_0 \right\}, \quad (21.21) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_r = \sum_{k=1}^{m-1} \cos\left(\frac{\pi k}{m} r\right) e_n^k e_s^k, \quad r = 0, 1, \dots, \nu. \quad (21.22)$$

Далее, обратим внимание, что при $1 \leq \nu < |n - s|$ в силу (21.16) все значения (21.22) равны $-1/2$. А отсюда и из (21.21) с учетом равенства

$$1 - 2\nu + \frac{2\nu(2\nu - 1)}{1 \cdot 2} - \dots + \frac{(-1)^\nu}{2} \cdot \frac{2\nu(2\nu - 1) \dots (\nu + 1)}{\nu!} = 0 \quad (21.23)$$

получаем требуемое соотношение (21.20) в случае $\nu < |n - s|$.

При $\nu = |n - s|$ ситуация несколько иная. А именно, здесь $\alpha_0 = \dots = \alpha_{\nu-1} = -1/2$, $\alpha_\nu = (m - 2)/4$. Учитывая это обстоятельство и снова привлекая равенство (21.23), убеждаемся в справедливости формулы (21.20) при $\nu = |n - s|$. Лемма доказана.

Обратимся теперь непосредственно к интересующей нас проблеме отыскания ненулевых устойчивых неподвижных точек отображения (21.11). Соответствующий анализ проведем в три этапа, каждый из которых оформим в виде отдельной теоремы. Начнем же мы с самого простого случая, на котором будет наглядно проиллюстрирована используемая методика.

Теорема 21.2. При любом фиксированном значении γ , удовлетворяющем условию (20.4), и при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (21.11) имеет экспоненциально устойчивые неподвижные точки

$$O^+(d) = (z_1(d), \dots, z_{m-1}(d)), \quad (21.24)$$

$$O^-(d) = (-z_{m-1}(d), -z_{m-2}(d), \dots, -z_1(d)),$$

компоненты которых при $d \rightarrow 0$ допускают асимптотику

$$z_n(d) = \ln \frac{1}{d} - \ln(\gamma - 1) + \ln(m - n) + o(1), \quad n = 1, \dots, m - 1. \quad (21.25)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение импульсную систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= d [\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \\ j &= 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (21.26)$$

$$y_0 = y_m = 0 \text{ при } t \in (1, 2) \cup (2, T_0);$$

$$y_j \equiv 0 \text{ при } 0 < t < 1, \quad y_j|_{t=1+0} = -(\gamma - 1)y_j|_{t=-0},$$

$$y_j|_{t=2+0} = y_j|_{t=2-0} + \gamma y_j|_{t=-0}, \quad (21.27)$$

$$j = 1, \dots, m - 1,$$

получающуюся из (21.3), (21.4) при $\sigma_0 = 0$. Заметим, далее, что отображение (21.11) представляет собой оператор сдвига по траекториям этой системы за время от $t = -0$ до $t = T_0 - 0$. А так как система (21.26), (21.27) инвариантна по отношению к преобразованию коор-

динат $(y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \rightarrow (-y_{m-1}, -y_{m-2}, \dots, -y_1)$, то и отображение (21.11) сохраняется при аналогичной замене переменных

$$(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}) \rightarrow (-z_{m-1}, -z_{m-2}, \dots, -z_1). \quad (21.28)$$

Наличие указанной инвариантности существенно облегчает проблему поиска устойчивых неподвижных точек отображения (21.11). Действительно, если нам уже известна половина из них, то вторая половина получается в результате применения к найденным точкам преобразования (21.28). В частности, обоснование теоремы 21.2 сводится к отысканию только одной устойчивой неподвижной точки $O^+(d)$.

Итак, в соответствии с ожидаемыми равенствами для $O^+(d)$ (см. (21.24), (21.25)) дополним систему (21.26), (21.27) начальными условиями

$$y_n|_{t=0} = \ln \frac{1}{d} + u_n, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (21.29)$$

где $u_n = \text{const} \in \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, m-1$. Затем фиксируем произвольно компактное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^{m-1}$, обозначим через

$$\begin{aligned} (y_1(t, u, d), \dots, y_{m-1}(t, u, d)): \quad t \in (1, 2) \cup (2, T_0), \\ u = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \Omega, \end{aligned} \quad (21.30)$$

решение задачи Коши (21.26), (21.27), (21.29) и введем в рассмотрение отображение

$$u_n \rightarrow \Psi_n(u, d) \stackrel{\text{def}}{=} y_n(t, u, d)|_{t=T_0-0} - \ln \frac{1}{d}, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (21.31)$$

получающееся из (21.11) при переходе к координатам $u_n = z_n - \ln(1/d)$, $n = 1, \dots, m-1$. Наша ближайшая задача заключается в асимптотическом вычислении отображения (21.31). Соответствующий анализ приводится ниже.

Согласно формулам (21.29) и правилам пересчета начальных условий в точке $t = 1$ (см. (21.27)) на интервале $1 < t < 2$ интересующее нас решение (21.30) определяется из задачи Коши для системы (21.7) с начальными условиями

$$y_n|_{t=1+0} = -(\gamma - 1) \ln \frac{1}{d} + v_n, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (21.32)$$

где $v_n = -(\gamma - 1)u_n$, $n = 1, \dots, m-1$. Вспомним, далее, что решение задачи (21.7), (21.32) может быть выписано в явном виде с помощью равенств (21.8), в которых $(\xi_1(t), \dots, \xi_m(t))$ — решение системы (21.9) с начальными условиями

$$\begin{aligned} (\xi_1, \dots, \xi_m)|_{t=1+0} = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0): \quad \xi_1^0 = 1, \\ \xi_n^0 = \xi_{n-1}^0 \exp(y_{n-1}|_{t=1+0}), \quad n = 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (21.33)$$

Что же касается компонент $\xi_n(t)$, $n = 1, \dots, m-1$, решения задачи Коши (21.9), (21.33), то для них имеем явные выражения:

$$\xi_n(t) = \xi_n^0 + \sum_{k=1}^{m-1} c_k (\exp(-d\sigma_k(t-1)) - 1) e_n^k, \quad n = 1, \dots, m, \quad (21.34)$$

где разностные косинусы e_n^k и постоянные σ_k те же самые, что и в (21.20), а коэффициенты c_k задаются равенствами

$$c_k = \frac{2}{m} \sum_{s=1}^m \xi_s^0 e_s^k, \quad k = 1, \dots, m-1. \quad (21.35)$$

Приведенная информация позволяет получить асимптотические представления для $y_n(t, u, d)$ при $t = 2 - 0$. В самом деле, объединяя формулы (21.32)–(21.35), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=2-0} &= d^{(n-1)(\gamma-1)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j\right) + \sum_{s=1}^m d^{(s-1)(\gamma-1)} \alpha_{s,n}(u, d), \\ n &= 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (21.36)$$

где

$$\alpha_{s,n}(u, d) = \left\{ \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} e_s^k e_n^k (\exp(-d\sigma_k) - 1) \right\} \exp\left(\sum_{j=1}^{s-1} v_j\right). \quad (21.37)$$

Далее, попытаемся выделить из правой части выражения (21.36) главное слагаемое, имеющее вид

$$\text{const} \cdot d^{\delta_n}, \quad (21.38)$$

где δ_n — наименьшая из возможных степеней малого параметра d . В связи с этим разложим фигурирующие в (21.37) экспоненты в ряды по d и воспользуемся равенством (21.20). В результате последовательно убеждаемся, что

$$\alpha_{s,n} = (1 + O(d)) \frac{d^{|n-s|}}{|n-s|!} \exp\left(\sum_{j=1}^{s-1} v_j\right) \quad \text{при } n \neq s, \quad \alpha_{n,n} = O(d), \quad d \rightarrow 0; \quad (21.39)$$

$$\delta_n = \min_{1 \leq s \leq m} \{(s-1)(\gamma-1) + |n-s|\}. \quad (21.40)$$

Для анализа формулы (21.40) обратимся к условию (20.4), из которого следует, что функция $(s-1)(\gamma-1) + |n-s|$ монотонно возрастает по s . Таким образом, минимум в (21.40) достигается при $s = 1$, а значит, фигурирующий в (21.38) показатель δ_n таков, что $\delta_n = n-1$. Постоянная же const из (21.38) в силу формулы (21.39) при $s = 1$ равна $1/(n-1)!$.

Итак, мы убедились, что

$$\xi_n|_{t=2-0} = (1 + o(1)) \frac{d^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, \dots, m, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.41)$$

Что же касается компонент $y_n(t, u, d)$, то для них из (21.8), (21.41) вытекают равномерные по $u \in \Omega$ асимптотические представления

$$y_n|_{t=2-0} = -\ln \frac{1}{d} - \ln n + o(1), \quad n = 1, \dots, m-1, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.42)$$

Перейдем теперь к рассмотрению интервала $2 < t < T_0$. В соответствии с (21.27), (21.29), (21.42) здесь имеем дело с системой (21.7) при начальных условиях

$$y_n|_{t=2+0} = (\gamma - 1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (21.43)$$

где добавки $w_n = w_n(u, d)$ задаются равенствами $w_n = y_n|_{t=2-0} + \ln(1/d) + \gamma u_n$, $n = 1, \dots, m-1$, и обладают равномерными по $u \in \Omega$ асимптотическими свойствами

$$w_n(u, d) = \gamma u_n - \ln n + o(1), \quad n = 1, \dots, m-1, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.44)$$

Далее, обратим внимание, что при $2 < t < T_0$ сохраняются базовые формулы (21.8), (21.33)–(21.35) (при замене в (21.33) начального момента времени $t = 1 + 0$ на $t = 2 + 0$, а в (21.34) — аргумента t на $t - 1$). Из этих формул в совокупности с (21.43), (21.44) получаем аналогичные (21.36) равенства

$$\xi_n|_{t=T_0-0} = d^{-(n-1)(\gamma-1)} \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} w_j \right) + \sum_{s=1}^m d^{-(s-1)(\gamma-1)} \beta_{s,n}(u, d), \quad n = 1, \dots, m. \quad (21.45)$$

Здесь $\beta_{s,n}$ задаются аналогичными (21.37) соотношениями

$$\beta_{s,n}(u, d) = \left\{ \frac{2}{m} \sum_{k=1}^{m-1} e_s^k e_n^k (\exp(-d(\gamma-1)\sigma_k) - 1) \right\} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j \right) \quad (21.46)$$

и при $d \rightarrow 0$ допускают аналогичные (21.39) асимптотические представления

$$\beta_{s,n} = (1 + O(d)) \frac{d^{|n-s|(\gamma-1)|n-s|}}{|n-s|!} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j \right), \quad n \neq s; \quad \beta_{n,n} = O(d). \quad (21.47)$$

Дальнейший ход рассуждений подобен изложенному выше. Действительно, отталкиваясь от формул (21.45)–(21.47) и принимая во

внимание, что главное слагаемое в (21.45) по-прежнему имеет вид (21.38), где теперь в силу требования $\gamma > 2$ выполняется равенство

$$\delta_n = \min_{1 \leq s \leq m} \{ -(\gamma - 1)(s - 1) + |s - n| \} = -(\gamma - 1)(m - 1) + m - n,$$

для $\xi|_{t=T_0-0}$ и $y_n|_{t=T_0-0}$ последовательно выводим:

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=T_0-0} &= (1 + o(1)) \frac{d^{-(m-1)(\gamma-1)+m-n}(\gamma-1)^{m-n}}{(m-n)!} \exp\left(\sum_{j=1}^{m-1} w_j\right), \\ n &= 1, \dots, m, \quad d \rightarrow 0; \\ y_n|_{t=T_0-0} &= \ln \frac{1}{d} - \ln(\gamma - 1) + \ln(m - n) + o(1), \\ n &= 1, \dots, m - 1, \quad d \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (21.48)$$

Подведем итог. Из асимптотических равенств (21.48) следует, что компоненты $\Psi_n(u, d)$ в (21.31) допускают равномерные по $u \in \Omega$ асимптотические представления

$$\Psi_n = -\ln(\gamma - 1) + \ln(m - n) + o(1), \quad n = 1, \dots, m - 1, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.49)$$

Более того, поскольку формулы (21.39), (21.41), (21.42), (21.44), (21.47), (21.48) очевидным образом остаются в силе при дифференцировании по координатам вектора u , то мы вправе утверждать, что остатки в (21.49) сохраняют свою малость в метрике пространства $C^1(\Omega)$. Далее, предположим, что вектор

$$\begin{aligned} u_* &= (u_1^*, \dots, u_{m-1}^*), \quad u_n^* = -\ln(\gamma - 1) + \ln(m - n), \\ n &= 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (21.50)$$

является внутренней точкой множества Ω (это не ограничивает общности, так как, напомним, данное множество выбиралось произвольным образом). Тогда, очевидно, отображение (21.31) при всех достаточно малых $d > 0$ имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$u(d) = u_* + o(1), \quad d \rightarrow 0. \quad (21.51)$$

Остается добавить, что неподвижной точке (21.51) в исходном отображении (21.11) соответствует искомая неподвижная точка $O^+(d)$, координаты которой в соответствии с равенствами (21.50), (21.51) и способом перехода от (21.11) к (21.31) обладают при $d \rightarrow 0$ требуемыми асимптотическими свойствами (21.25). Теорема 3.2 доказана.

При $m = 2$ установленная теорема доставляет все устойчивые нетривиальные (отличные от нуля) неподвижные точки отображения (21.11). В случае же больших значений m , как показывает следующая теорема, ситуация несколько сложнее.

Теорема 21.3. Пусть m, k_0 — любые фиксированные натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $m \geq 4$, $2k_0 < m - 1$, а для параметра γ по-прежнему выполняется условие (20.4). Тогда

при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (21.11) имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку

$$O_{k_0}(d) = (z_{1,k_0}(d), z_{2,k_0}(d), \dots, z_{m-1,k_0}(d)), \quad (21.52)$$

компоненты которой при $d \rightarrow 0$ допускают асимптотические представления

$$\begin{aligned} z_{n,k_0}(d) &= \ln \frac{1}{d} - \ln(\gamma - 1) + \ln(k_0 + 1 - n) + o(1), \quad n = 1, \dots, k_0; \\ z_{n,k_0}(d) &= -\ln \frac{1}{d} + \ln(\gamma - 1) - \ln(n - k_0) + o(1), \\ &\quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1. \end{aligned} \quad (21.53)$$

Доказательство. Обоснование теоремы проведем сначала в предположении

$$\gamma > \frac{2(m-1-k_0)}{m-1-2k_0}, \quad (21.54)$$

усиливающим условие (20.4). В этом случае рассуждения во многом аналогичны изложенным выше.

В соответствии с ожидаемыми асимптотическими представлениями (21.53) дополним систему (21.26), (21.27) начальными условиями

$$\begin{aligned} y_n|_{t=-0} &= \ln \frac{1}{d} + u_n, \quad n = 1, \dots, k_0; \quad y_n|_{t=-0} = -\ln \frac{1}{d} + u_n, \\ &\quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (21.55)$$

где $u_n = \text{const} \in \mathbb{R}$, $n = 1, \dots, m - 1$. Далее, из равенств (21.55) и из импульсных соотношений в точке $t = 1$ заключаем, что на интервале $1 < t < 2$ изучению подлежит задача Коши для системы (21.7) с начальными условиями

$$\begin{aligned} y_n|_{t=1+0} &= -(\gamma - 1) \ln \frac{1}{d} + v_n, \quad n = 1, \dots, k_0; \\ y_n|_{t=1+0} &= (\gamma - 1) \ln \frac{1}{d} + v_n, \quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1, \end{aligned} \quad (21.56)$$

где $v_n = -(\gamma - 1)u_n$, $n = 1, \dots, m - 1$.

Как и ранее, для исследования задачи (21.7), (21.56) привлечем формулы (21.8), (21.33)–(21.35). Нетрудно увидеть, что здесь аналоги равенств (21.36) имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=2-0} &= d^{(n-1)(\gamma-1)} \exp \left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j \right) + \sum_{s=1}^{k_0+1} d^{(s-1)(\gamma-1)} \alpha_{s,n}(u, d) + \\ &+ \sum_{s=k_0+2}^m d^{(2k_0-s+1)(\gamma-1)} \alpha_{s,n}(u, d), \quad n = 1, \dots, k_0 + 1; \end{aligned} \quad (21.57)$$

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=2-0} = & d^{(2k_0-n+1)(\gamma-1)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} v_j\right) + \sum_{s=1}^{k_0+1} d^{(s-1)(\gamma-1)} \alpha_{s,n}(u, d) + \\ & + \sum_{s=k_0+2}^m d^{(2k_0-s+1)(\gamma-1)} \alpha_{s,n}(u, d), \quad n = k_0 + 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (21.58)$$

где $\alpha_{s,n}(u, d)$ — прежние функции (21.37).

На следующем этапе, опираясь на асимптотические равенства (21.39), выделим из выражений (21.57), (21.58) главные слагаемые вида (21.38) с наименьшей степенью δ_n малого параметра d . Нетрудно увидеть, что для δ_n в рассматриваемом случае справедлива формула

$$\delta_n = \min(\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}), \quad (21.59)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_n^{(1)} &= \min_{1 \leq s \leq k_0+1} \{(s-1)(\gamma-1) + |s-n|\}, \\ \delta_n^{(2)} &= \min_{k_0+2 \leq s \leq m} \{(2k_0-s+1)(\gamma-1) + |s-n|\}. \end{aligned}$$

Для вычисления правой части из (21.59) обратим внимание, что в силу требования (21.54) на параметр γ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \min_{k_0+2 \leq s \leq m} \{(2k_0-s+1)(\gamma-1) + |s-n|\} = \\ = (2k_0-m+1)(\gamma-1) + m-n < \\ < \min_{1 \leq s \leq k_0+1} \{(s-1)(\gamma-1) + |s-n|\} = \\ = n-1 \quad \forall n: 1 \leq n \leq m. \end{aligned} \quad (21.60)$$

А отсюда и из (21.57), (21.58), (21.39) заключаем, что аналоги формул (21.41), (21.42) в данной ситуации имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=2-0} = (1+o(1)) \frac{d^{(2k_0-m+1)(\gamma-1)+m-n}}{(m-n)!} \exp\left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j\right), \\ n = 1, \dots, m, \quad d \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (21.61)$$

$$y_n|_{t=2-0} = \ln \frac{1}{d} + \ln(m-n) + o(1), \quad n = 1, \dots, m-1, \quad d \rightarrow 0.$$

Обратимся, далее, к интервалу $2 < t < T_0$, на котором имеем дело с системой (21.7), дополненной начальными условиями

$$y_n|_{t=2+0} = (\gamma+1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad n = 1, \dots, k_0; \quad (21.62)$$

$$y_n|_{t=2+0} = -(\gamma-1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad n = k_0+1, \dots, m-1.$$

Здесь согласно (21.27), (21.55), (21.61) добавки $w_n(u, d)$ определяются посредством равенств $w_n = y_n|_{t=2-0} - \ln(1/d) + \gamma u_n$, $n = 1, \dots, m-1$,

и допускают аналогичные (21.44) равномерные по $u \in \Omega$ асимптотические представления

$$w_n(u, d) = \gamma u_n + \ln(m - n) + o(1), \quad n = 1, \dots, m - 1, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.63)$$

Для исследования задачи Коши (21.7), (21.62) привлечем в очередной раз формулы (21.8), (21.33)–(21.35), переписанные для начального момента $t = 2 + 0$. Из этих формул с учетом (21.62), (21.63) выводим аналогичные (21.45) равенства

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=T_0-0} &= d^{-(n-1)(\gamma+1)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} w_j\right) + \sum_{s=1}^{k_0+1} d^{-(s-1)(\gamma+1)} \beta_{s,n}(u, d) + \\ &+ \sum_{s=k_0+2}^m d^{(\gamma-1)(s-k_0-1)-k_0(\gamma+1)} \beta_{s,n}(u, d), \quad n = 1, \dots, k_0 + 1; \end{aligned} \quad (21.64)$$

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=T_0-0} &= d^{(\gamma-1)(n-k_0-1)-k_0(\gamma+1)} \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} w_j\right) + \\ &+ \sum_{s=1}^{k_0+1} d^{-(s-1)(\gamma+1)} \beta_{s,n}(u, d) + \sum_{s=k_0+2}^m d^{(\gamma-1)(s-k_0-1)-k_0(\gamma+1)} \beta_{s,n}(u, d), \\ &n = k_0 + 2, \dots, m, \end{aligned} \quad (21.65)$$

где $\beta_{s,n}(u, d)$ — функции (21.46).

Проанализируем правые части получившихся соотношений (21.64), (21.65). В связи с этим обратим внимание, что главные слагаемые в них имеют вид (21.38) с показателем степени

$$\begin{aligned} \delta_n &= \min(\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}), \quad \delta_n^{(1)} = \min_{1 \leq s \leq k_0+1} \{-(s-1)(\gamma+1) + |n-s|\}, \\ \delta_n^{(2)} &= \min_{k_0+2 \leq s \leq m} \{(\gamma-1)(s-k_0-1) - k_0(\gamma+1) + |n-s|\}, \end{aligned}$$

причем в силу условия $\gamma > 2$ в данном случае

$$\begin{aligned} \delta_n^{(1)} &= -k_0(\gamma+1) + |n - k_0 - 1| < \delta_n^{(2)} = \gamma - 1 - k_0(\gamma+1) + |n - k_0 - 2| \\ &\forall n: 1 \leq n \leq m. \end{aligned} \quad (21.66)$$

Далее, объединяя неравенства (21.66) с асимптотическими формулами (21.47), приходим к аналогичным (21.48) равномерным по $u \in \Omega$ асимптотическим представлениям

$$\xi_n|_{t=T_0-0} = (1 + o(1)) \frac{d^{-k_0(\gamma+1)+|n-k_0-1|}}{|n - k_0 - 1|!} (\gamma - 1)^{|n-k_0-1|} \exp\left(\sum_{j=1}^{k_0} w_j\right),$$

$$n = 1, \dots, m, \quad d \rightarrow 0;$$

$$y_n|_{t=T_0-0} = \ln \frac{1}{d} - \ln(\gamma - 1) + \ln(k_0 + 1 - n) + o(1), \quad (21.67)$$

$$n = 1, \dots, k_0, \quad d \rightarrow 0;$$

$$y_n|_{t=T_0-0} = -\ln \frac{1}{d} + \ln(\gamma - 1) - \ln(n - k_0) + o(1),$$

$$n = k_0 + 1, \dots, m - 1, \quad d \rightarrow 0.$$

Для окончания доказательства теоремы 21.3 в случае (21.54) положим в (21.11)

$$u_n = z_n - \ln \frac{1}{d}, \quad n = 1, \dots, k_0; \quad u_n = z_n + \ln \frac{1}{d}, \quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1,$$

и перейдем к аналогичному (21.31) отображению

$$u_n \rightarrow \Psi_n(u, d), \quad n = 1, \dots, m - 1, \quad (21.68)$$

где

$$\Psi_n = y_n(t, u, d)|_{t=T_0-0} - \ln(1/d), \quad n = 1, \dots, k_0;$$

$$\Psi_n = y_n(t, u, d)|_{t=T_0-0} + \ln(1/d), \quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1.$$

Затем, опираясь на информацию (21.67), повторим рассуждения, идущие после формул (21.48) и завершающие обоснование теоремы 21.2. В результате убеждаемся, что отображение (21.68) при всех достаточно малых $d > 0$ имеет экспоненциально устойчивую неподвижную точку $u = u(d)$, $u(d) = u_* + o(1)$ при $d \rightarrow 0$, где

$$u_* = (u_1^*, \dots, u_{m-1}^*): \quad u_n^* = -\ln(\gamma - 1) + \ln(k_0 + 1 - n), \quad n = 1, \dots, k_0;$$

$$u_n^* = \ln(\gamma - 1) - \ln(n - k_0), \quad n = k_0 + 1, \dots, m - 1.$$

В исходном же отображении (21.11) этой точке соответствует искомая неподвижная точка (21.52), (21.53).

Установим теперь справедливость утверждения теоремы 21.3 при отказе от дополнительного условия (21.54). Проблема здесь заключается в том, что тогда нарушаются некоторые из неравенств (21.60). А это, в свою очередь, влечет изменение асимптотических формул (21.61) и ряда последующих асимптотических построений.

Для того чтобы разобраться с указанной проблемой, зададим натуральное n_0 посредством равенства

$$n_0 = \min \{n: (2k_0 - m + 1)(\gamma - 1) < 2n - 1 - m\}. \quad (21.69)$$

Подчеркнем, что определение (21.69) корректно, поскольку в силу (20.4) фигурирующее в нем условие заведомо выполняется при $n = k_0 + 1$. Таким образом, автоматически $n_0 \leq k_0$. Кроме того, предположим, что $n_0 \geq 2$ (при $n_0 = 1$ получаем прежнее ограничение (21.54)) и

$$(2k_0 - m + 1)(\gamma - 1) > 2n - 1 - m \quad \text{при} \quad 1 \leq n \leq n_0 - 1. \quad (21.70)$$

Обратимся, далее, к формулам (21.57)–(21.59), которые в рассматриваемом случае сохраняются. Заметим, однако, что теперь в силу (21.69), (21.70) для показателя δ_n из (21.59) выходит равенство

$$\delta_n = \begin{cases} n-1 & \text{при } 1 \leq n \leq n_0-1, \\ (2k_0-m+1)(\gamma-1)+m-n & \text{при } n_0 \leq n \leq m. \end{cases}$$

А отсюда и из (21.39) очевидным образом имеем:

$$\begin{aligned} \xi_n|_{t=2-0} &= (1+o(1)) \frac{d^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n=1, \dots, n_0-1, \quad d \rightarrow 0; \\ \xi_n|_{t=2-0} &= (1+o(1)) \frac{d^{(2k_0-m+1)(\gamma-1)+m-n}}{(m-n)!} \exp\left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j\right), \\ & \quad n=n_0, \dots, m, \quad d \rightarrow 0; \end{aligned} \quad (21.71)$$

$$y_n|_{t=2-0} = -\ln \frac{1}{d} - \ln n + o(1), \quad n=1, \dots, n_0-2, \quad d \rightarrow 0; \quad (21.72)$$

$$y_{n_0-1}|_{t=2-0} = (\kappa_* - 1) \ln \frac{1}{d} + \ln \frac{(n_0-2)!}{(m-n_0)!} + \sum_{j=1}^{m-1} v_j + o(1), \quad d \rightarrow 0,$$

$$\text{где } \kappa_* = 2n_0 - 1 - m - (\gamma-1)(2k_0-m+1) > 0; \quad (21.73)$$

$$y_n|_{t=2-0} = \ln \frac{1}{d} + \ln(m-n) + o(1), \quad n=n_0, \dots, m-1, \quad d \rightarrow 0. \quad (21.74)$$

Следующий шаг связан с рассмотрением интервала $2 < t < T_0$. Согласно правилам пересчета начальных условий в точке $t=2$ (см. (21.27)) и приведенным выше формулам (21.71)–(21.74) при $t=2+0$ получаем равенства

$$\begin{aligned} y_n|_{t=2+0} &= (\gamma-1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad 1 \leq n \leq n_0-2; \\ y_{n_0-1}|_{t=2+0} &= (\gamma-1+\kappa_*) \ln \frac{1}{d} + w_{n_0-1}; \\ y_n|_{t=2+0} &= (\gamma+1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad n_0 \leq n \leq k_0; \\ y_n|_{t=2+0} &= -(\gamma-1) \ln \frac{1}{d} + w_n, \quad k_0+1 \leq n \leq m-1, \end{aligned} \quad (21.75)$$

где

$$\begin{aligned} w_n &= -\ln n + \gamma u_n + o(1), \quad 1 \leq n \leq n_0-2, \quad d \rightarrow 0; \\ w_{n_0-1} &= \ln \frac{(n_0-2)!}{(m-n_0)!} + \sum_{j=1}^{m-1} v_j + \gamma u_{n_0-1} + o(1), \quad d \rightarrow 0; \\ w_n &= \ln(m-n) + \gamma u_n + o(1), \quad n_0 \leq n \leq m-1, \quad d \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (21.76)$$

Что же касается начальных условий $\xi_n|_{t=2+0} = \xi_n^0$, то в силу (21.75), (21.76) и равенств вида (21.33), выписанных для случая $t = 2 + 0$, они задаются формулами

$$\begin{aligned}\xi_s^0 &= d^{-(\gamma-1)(s-1)} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j \right), \quad 1 \leq s \leq n_0 - 1; \\ \xi_s^0 &= d^{-(\gamma-1)(n_0-2)-\gamma-\kappa_*+1-(\gamma+1)(s-n_0)} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j \right), \quad n_0 \leq s \leq k_0 + 1; \\ \xi_s^0 &= d^{-(\gamma-1)(n_0-2)-\gamma-\kappa_*+1-(\gamma+1)(k_0+1-n_0)+(\gamma-1)(s-k_0-1)} \exp \left(\sum_{j=1}^{s-1} w_j \right), \\ &\quad k_0 + 2 \leq s \leq m.\end{aligned}\quad (21.77)$$

Равенства (21.77) позволяют без труда выписать явные выражения для $\xi_n|_{t=T_0-0}$, $n = 1, \dots, m$. Однако для наших целей необходимо знать лишь главные слагаемые в этих формулах, имеющие вид (21.38). Что же касается показателей δ_n , то они вычисляются по разработанной выше методике и в данном случае задаются соотношениями

$$\begin{aligned}\delta_n &= \min(\delta_n^{(1)}, \delta_n^{(2)}, \delta_n^{(3)}), \\ \delta_n^{(1)} &= \min_{1 \leq s \leq n_0-1} \{ -(\gamma-1)(s-1) + |n-s| \}, \\ \delta_n^{(2)} &= \min_{n_0 \leq s \leq k_0+1} \{ -(\gamma-1)(n_0-2) - \gamma - \kappa_* + 1 - \\ &\quad - (\gamma+1)(s-n_0) + |n-s| \}, \\ \delta_n^{(3)} &= \min_{k_0+2 \leq s \leq m} \{ -(\gamma-1)(n_0-2) - \gamma - \kappa_* + 1 - \\ &\quad - (\gamma+1)(k_0+1-n_0) + (\gamma-1)(s-k_0-1) + |n-s| \}.\end{aligned}\quad (21.78)$$

Анализ формул (21.78) приводит к выводу, что, во-первых, выполняются неравенства $\delta_n^{(2)} < \delta_n^{(1)}$ и $\delta_n^{(2)} < \delta_n^{(3)} \forall n: 1 \leq n \leq m$, а значит, $\delta_n = \delta_n^{(2)}$; во-вторых, минимум по s в $\delta_n^{(2)}$ достигается только при $s = k_0 + 1$. Учитывая эти обстоятельства, для $\xi_n|_{t=T_0=0}$ при $d \rightarrow 0$ получаем равномерные по $u \in \Omega$ асимптотические представления

$$\begin{aligned}\xi_n|_{t=T_0=0} &= (1 + o(1)) \frac{d^{\kappa_{**}+|n-k_0-1|}}{|n-k_0-1|!} (\gamma-1)^{|n-k_0-1|} \exp \left(\sum_{j=1}^{k_0} w_j \right), \\ &\quad n = 1, \dots, m,\end{aligned}\quad (21.79)$$

$$\kappa_{**} = -(\gamma-1)(n_0-2) - \gamma - \kappa_* + 1 - (\gamma+1)(k_0+1-n_0),$$

а для $y_n|_{t=T_0=0}$ — прежние асимптотические формулы (см. (21.67)). Последующие же рассуждения, связанные с доказательством существования у отображения (21.11) устойчивой неподвижной точки (21.52), (21.53), стандартны (см. соответствующее место выше).

Завершая обоснование теоремы 21.3, скажем несколько слов об оставшемся случае, когда в (21.70) при $n = n_0 - 1$ реализуется строгое равенство. Отличие от уже разобранной ситуации здесь заключается в том, что усложняется формула для $\xi_{n_0-1}|_{t=2-0}$ из (21.71). Теперь она имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_{n_0-1}|_{t=2-0} = \\ = (1 + o(1)) d^{n_0-2} \left(\frac{1}{(n_0-2)!} + \frac{1}{(m-n_0+1)!} \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j \right) \right). \end{aligned} \quad (21.80)$$

Равенство (21.80) влечет за собой соответствующие изменения в последующих формулах (21.72)–(21.74), (21.76). Однако соотношения (21.77)–(21.79), а значит, и итоговые асимптотические представления для $y_n|_{t=T_0-0}$ остаются прежними. Теорема 21.3 доказана.

Заключительный этап анализа устойчивых неподвижных точек отображения (21.11) связан со следующим утверждением.

Теорема 21.4. Пусть $m \geq 3$ — произвольно фиксированное нечетное натуральное число, а параметр γ удовлетворяет условию (20.4). Тогда при всех достаточно малых $d > 0$ отображение (21.11) допускает экспоненциально устойчивую неподвижную точку $O_{k_0}(d)$ вида (21.52), (21.53) при $k_0 = (m-1)/2$.

Подробное обоснование данной теоремы опустим, поскольку оно вполне аналогично изложенному выше доказательству теоремы 21.3. Отметим только некоторые характерные особенности, присущие рассматриваемому случаю.

Во-первых, здесь вместо неравенств (21.60) имеем $m-n < n-1$ при $k_0+2 \leq n \leq m$, $m-n > n-1$ при $1 \leq n \leq k_0$, $m-n = n-1$ при $n = k_0+1$. Это обстоятельство приводит к изменению асимптотических формул для $\xi_n|_{t=2-0}$ и $y_n|_{t=2-0}$. В отличие от соответствующих равенств (21.61) или (21.71)–(21.74) теперь они имеют вид

$$\xi_n|_{t=2-0} = \begin{cases} (1 + o(1)) \frac{d^{n-1}}{(n-1)!} & \text{при } 1 \leq n \leq k_0, \\ (1 + o(1)) \frac{d^{k_0}}{k_0!} \left(1 + \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j \right) \right) & \text{при } n = k_0 + 1, \\ (1 + o(1)) \frac{d^{m-n}}{(m-n)!} \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j \right) & \text{при } k_0 + 2 \leq n \leq m, \end{cases}$$

$$y_n|_{t=2-0} = \begin{cases} -\ln \frac{1}{d} - \ln n + o(1) & \text{при } 1 \leq n \leq k_0 - 1, \\ -\ln \frac{1}{d} - \ln k_0 + \ln \left(1 + \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j \right) \right) + o(1) & \text{при } n = k_0, \\ \ln \frac{1}{d} + \ln k_0 + \sum_{j=1}^{m-1} v_j - \ln \left(1 + \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} v_j \right) \right) + o(1) & \text{при } n = k_0 + 1, \\ \ln \frac{1}{d} + \ln(m-n) + o(1) & \text{при } k_0 + 2 \leq n \leq m-1. \end{cases}$$

Во-вторых, в формулах (21.62), (21.64)–(21.66) и в равенствах для $\xi_n|_{t=T_0-0}$ из (21.67) в соответствующих местах $(\gamma + 1)$ следует заменить на $(\gamma - 1)$. Что же касается итоговых формул для $y_n|_{t=T_0-0}$, то они оказываются теми же самыми, что и в (21.67). А отсюда справедливость теоремы 21.4 вытекает уже известным образом.

21.3. Итоговые замечания. Обратим внимание, что при любом фиксированном $\gamma > 2$ и при всех достаточно малых $d > 0$ теоремы 21.2–21.4 в совокупности обеспечивают сосуществование у отображения (21.11) не менее m устойчивых нетривиальных неподвижных точек. Действительно, при нечетном m теорема 21.3 доставляет $(m-3)/2$ устойчивых неподвижных точек $O_{k_0}(d)$, $k_0 = 1, \dots, (m-3)/2$. Далее, к ним добавляются точки, получающиеся из (21.52) под действием преобразования (21.28), затем еще две неподвижные точки (21.24), доставляемые теоремой 21.2, и самосимметричная (т. е. остающаяся неизменной при применении преобразования (21.28)) неподвижная точка $O_{k_0}(d)$, $k_0 = (m-1)/2$ (см. теорему 21.4). В итоге имеем m различных нетривиальных устойчивых неподвижных точек. В случае четного m аналогичный подсчет дает тот же результат.

Теорема 21.1 о соответствии между неподвижными точками отображения (21.6) и циклами системы (21.2) вместе с проделанным в п. 21.2 анализом приводит к следующему утверждению.

Теорема 21.5. Пусть параметр $\gamma = 1/a$ удовлетворяет неравенству (20.4). Тогда для любых достаточно малых $d_2 > d_1 > 0$ найдется такое $\lambda_0 = \lambda_0(d_1, d_2) > 0$, что при всех $d_1 \leq d \leq d_2$, $\lambda \geq \lambda_0$ система (20.1) имеет не менее m экспоненциально орбитально устойчивых дискретных автоволновых периодических движений, сосуществующих с устойчивым однородным циклом $N_1 \equiv \dots \equiv N_m = N_*(t, \lambda)$, где $N_*(t, \lambda)$ — функция (19.55).

Отдельно остановимся на биологическом смысле найденных нами дискретных автоволн. В связи с этим каждому устойчивому периоди-

ческому решению (N_1, \dots, N_m) системы (20.1) периода $T > 0$ поставим в соответствие его динамическое среднее значение

$$U[(N_1, \dots, N_m)] = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m N_j(t) \right) dt. \quad (21.81)$$

Заметим, далее, что для однородного цикла выполняется равенство $U = 1$, а для любой автоволны имеем $U > 1$. Таким образом, автоволны биологически предпочтительнее однородного цикла и, как показывает численный анализ, при малых $d > 0$ обладают большими, чем у него, бассейнами притяжения. Иными словами, при уменьшении d наблюдаются эффекты самоорганизации: рассматриваемый вид искусственно (за счет миграций) создает себе неоднородную среду обитания и повышает свой «уровень жизни», характеризующийся значением функционала (21.81).

Вопрос о промежуточной динамике системы (20.1) при постепенном уменьшении параметра d в общем случае остается открытым. Ответ на него удастся получить только при $m = 2$, т. е. для билакальной модели (20.2). Связано это с тем, что при $m = 2$ все фигурирующие в (21.11) операторы могут быть выписаны явно, поскольку здесь

$$P^t(z) = \ln \frac{1 + \operatorname{th}(z/2) \exp(-2dt)}{1 - \operatorname{th}(z/2) \exp(-2dt)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (21.82)$$

Используя формулы (21.11), (21.82), нетрудно убедиться, что скалярная функция $\Phi_0(z)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \Phi_0(-z) &= -\Phi_0(z), \quad \Phi_0(z) > 0 \text{ при } \forall z \in (0, +\infty), \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi_0(z) &= \Phi_\infty > 0. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что нечетность $\Phi_0(z)$ обусловлена инвариантностью исходной системы (20.2) по отношению к преобразованию координат

$$N_1 \rightarrow N_2, \quad N_2 \rightarrow N_1. \quad (21.83)$$

Характерная особенность отображения (21.11) в одномерном случае заключается в том, что при уменьшении параметра d на его инвариантном множестве \mathbb{R}_+ происходит бифуркация рождения пары неподвижных точек — устойчивой и неустойчивой. Наглядное представление об этом процессе дают графики функции $\Phi_0(z)$ при $\gamma = 8$ и при $d = 0,08; 0,0755; 0,05$, построенные с помощью формул (21.11), (21.82) на отрезке $0 \leq z \leq 1,5$ (см. рис. 21.1–21.3). Заметим, далее, что в силу свойства нечетности $\Phi_0(z)$ устойчивой и неустойчивой неподвижным точкам из \mathbb{R}_+ отвечают аналогичные симметрично расположенные неподвижные точки из \mathbb{R}_- , а всем им в исходной релаксационной системе (20.2) соответствуют две пары циклов той же устойчивости, переходящие друг в друга в результате замены (21.83).

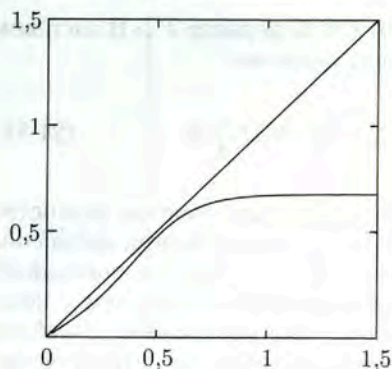
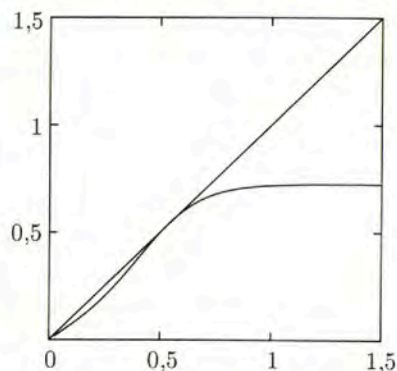
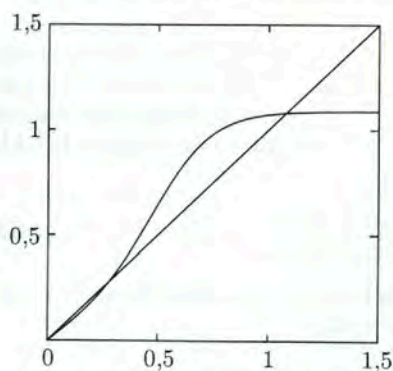
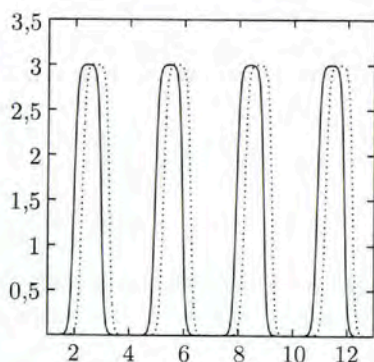
Рис. 21.1. $d = 0,08$ Рис. 21.2. $d = 0,0755$ Рис. 21.3. $d = 0,05$ 

Рис. 21.4

Итак, при фиксированном $a \in (0, 1/2)$ и при достаточно малых $d > 0$ система (20.2) имеет три устойчивых цикла — однородный и два неоднородных. Некоторое представление о релаксационных свойствах последних дает рис. 21.4, где показаны графики на плоскости (t, N) компонент $N_1(t)$, $N_2(t)$ одного из них (сплошной линией изображена функция $N_1(t)$, а штриховой — $N_2(t)$).

В заключение отметим, что в рамках системы (20.1) наблюдается известный феномен буферности, представляющий собой один из фундаментальных законов функционирования нелинейного мира. Как отмечено в монографии [103], буферность предполагает наличие некоторого бифуркационного процесса, в результате которого неограниченно увеличивается количество сосуществующих однотипных аттракторов (циклов, инвариантных торов и т. д.). В нашем случае такой процесс заведомо имеет место, поскольку в силу теорем 21.1–21.5 при согласованном увеличении количества осцилляторов в цепочке (20.1) и уменьшении параметра связи d происходит неограниченное накопление устойчивых автоволновых периодических движений.