

Заключение

Подводя итог, просуммируем полученные результаты и остановимся на некоторых нерешенных проблемах.

Обратимся сначала к главе 1, содержащей основной результат монографии, который, напомним, состоит в следующем. Предложен некоторый общий подход к определению хаотического инвариантного множества A непрерывного полупотока φ^t в полном метрическом пространстве (X, ρ) . А именно, в нашем определении за основу взяты два фундаментальных свойства хаоса: наличие существенной зависимости от начальных условий и существование в A всюду плотного множества так называемых сложных траекторий. Что же касается понятия сложности, то возможны различные его интерпретации. Мы в качестве определения сложности фактически взяли свойство отсутствия рекуррентности по Биркгофу. Хотя, как было отмечено в п. 1.5, существуют и другие подходы к определению этого понятия, например, эргодический, энтропийный и информационный. Таким образом, в зависимости от выбора определения сложности будут получаться различные определения хаоса.

Особое место среди возможных определений хаоса занимает так называемый турбулентный хаос (см. определение 1.6). Указанный тип хаоса, являющийся принципиально новым феноменом, возможен только в некомпактном и бесконечномерном случае. Его свойства были достаточно подробно изучены нами на примере аттрактора системы (2.1).

Среди нерешенных проблем, связанных с результатами главы 1, отметим следующую. В пространстве l , состоящем из векторов вида

$$\eta = \{\eta_{n,k}: n, k \geq 1\}, \quad \|\eta\| = \sum_{n,k=1}^{\infty} |\eta_{n,k}| < \infty, \quad (1)$$

рассмотрим систему

$$\dot{\eta}_{n,k} = \left[1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \eta_{n,m} - 3 \sum_{m \neq n} \eta_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \eta_{m,r} \right] \eta_{n,k}, \quad (2)$$

$$n, k = 1, 2, \dots$$

Подчеркнем, что эта система, впервые появившаяся в статье [51], получается в процессе применения алгоритма формальной нормализации к краевой задаче (6.9) при $\nu = 0$.

Нетрудно увидеть, что в инвариантном конусе K векторов (1) с неотрицательными координатами система (2) имеет глобальный аттрактор

$$A \subset \{\eta \in K: 1/3 \leq \|\eta\| \leq 1/2\} \quad (3)$$

(данный факт — следствие дифференциальных неравенств $S - 3S^2 \leq \dot{S}$ и $\dot{S} \leq S - 2S^2$, где $S = \sum_{n,k} \eta_{n,k}$). Далее, как установлено в [73, 103],

любое состояние равновесия этой системы с конечным числом ненулевых координат является неустойчивым и, более того, имеет бесконечномерное неустойчивое многообразие. Ясно также, что упомянутых состояний равновесия счетное число и все они (вместе со своими неустойчивыми многообразиями) содержатся в аттракторе (3). Таким образом, как и в случае системы (2.1), инвариантное множество (3) заведомо некомпактно и имеет бесконечную хаусдорфову размерность. Однако вопрос о том, будет ли данный аттрактор хаотическим в смысле определения 1.6, пока открыт.

Обратимся теперь к результатам главы 2. Ее главная цель — переосмыслить роль сценария развития турбулентности по Ландау в рамках современных представлений о возможных способах перехода от регулярных колебаний к хаотическим. Опираясь на идеи Дж. Селла [175], мы показали, что указанный сценарий при некоторой его модификации не только имеет право на существование, но и наряду с другими известными сценариями реализуется в целом ряде конкретных физических задач. Более того, нами предложена новая модельная краевая задача (3.18), в которой, как и в известном примере Хопфа (см. (3.1)), при уменьшении параметра ν реализуется каскад бифуркаций (0.1) устойчивых инвариантных торов T_N , $N \geq 1$, с квазипериодической обмоткой на каждом из них. Однако в отличие от примера Хопфа в нашем примере удастся изучить аттрактор, возникающий по прошествии всех бифуркаций. Как оказывается, он является турбулентным в смысле определения 1.6.

Остановимся на одной нерешенной проблеме, связанной с реализуемостью сценария перехода к турбулентности по Ландау–Селлу. Рассмотрим краевую задачу

$$w_t + i\mu w_{xx} = w - (1 + ic_0)|w|^2 w, \quad w_x|_{x=0} = w_x|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

где $w = w(t, x)$ — комплекснозначная функция, μ, c_0 — положительные параметры. Есть все основания ожидать, что в данной задаче при $\mu \rightarrow 0$ наблюдается интересующий нас сценарий. Последнее означает, что порождаемая задачей (4) динамическая система в пространстве $W_2^2[0, 1] \times W_2^2[0, 1]$ имеет хаотический аттрактор, ляпуновская размерность которого неограниченно возрастает при $\mu \rightarrow 0$.

Следует предостеречь, что для численной проверки сформулированной гипотезы мы не сможем воспользоваться разностными аппрокси-

мациями вида

$$\dot{w}_k + i\mu N^2(w_{k+1} - 2w_k + w_{k-1}) = w_k - (1 + i\epsilon_0)|w_k|^2 w_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (5)$$

где $w_{N+1} = w_N$, $w_0 = w_1$. Связано это с тем, что в силу результатов главы 6 у системы (5) практически все аттракторы оказываются ложными (т.е. не имеют аналогов в распределенной модели (4)). Один из возможных способов решения данной проблемы — замена разностных аппроксимаций галеркинскими аппроксимациями задачи (4) по системе функций $\cos k\pi x$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Перейдем к обсуждению результатов главы 3. В первую очередь следует напомнить, что в ней сформулирована важная концепция диффузионного хаоса. Фактически, диффузионный хаос — это сценарий перехода к турбулентности по Ландау–Селлу, наблюдающийся при определенных условиях в системах параболических уравнений типа реакция–диффузия с нулевыми граничными условиями Неймана. Действительно, как показывает численный анализ краевых задач (8.8), (9.68) и конечномерных моделей (8.34), при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах в этих системах могут возникать хаотические аттракторы сколь угодно больших ляпуновских размерностей.

В связи с вышесказанным актуальна проблема численного исследования диффузионного хаоса в задачах (8.8), (9.68) в случае плоской области (например, в единичном квадрате), а также проблема численного анализа краевой задачи (8.27) для уравнения Хатчинсона.

Еще одна нерешенная проблема связана с системой фазовых уравнений (8.26), являющейся конечномерной моделью фазовой турбулентности. Представляет интерес выявление характера зависимости от N ляпуновской размерности d_L и старшего ляпуновского показателя λ_{\max} ее хаотического аттрактора. Графики этих величин при $\kappa = 1,341373$ и при $\kappa = 3$ изображены на рисунках 8.11, 8.12 и 1, 2 соответственно. Однако хотелось бы иметь некоторые эвристические явные формулы для указанных характеристик. Проблема получения таких формул пока остается открытой.

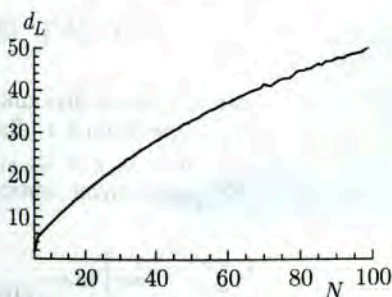


Рис. 1

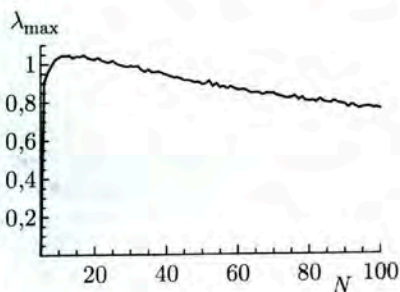


Рис. 2

Обсудим, далее, результаты главы 4, в которой исследовалась проблема математического моделирования явления жесткой турбулентности. Нами предложен некоторый общий подход к указанной проблеме, позволяющий учитывать редкие катастрофические события в системах со сложным поведением. А именно, было показано, что любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющую хаотический аттрактор, можно достроить до релаксационной системы на единицу большей размерности, в которой наблюдается жесткая турбулентность.

Следует отметить, что наш подход не является единственно возможным. Другой класс конечномерных математических моделей жесткой турбулентности можно получить, исходя из краевой задачи (6.30) при $\nu = 0$. Для того чтобы сделать это, фиксируем произвольно натуральное N и подставим в (6.30) вместо $w = w(t, x, y)$ выражение

$$w_N(t, x, y) = F_N[w(t, x, y)] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n,k=1}^N c_{n,k}(t) e_{n,k}(x, y), \quad (6)$$

где

$$e_{n,k}(x, y) = 2 \sin n\pi x \sin k\pi y, \quad c_{n,k}(t) = \iint_{\Omega} w(t, x, y) e_{n,k}(x, y) dx dy.$$

В итоге после проектирования на моды $e_{n,k}(x, y)$, $n, k = 1, \dots, N$, для $w_N(t, x, y)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial w_N}{\partial t} = -i\mathcal{L}w_N + \varepsilon(w_N - (1 + ic_0)F_N[|w_N|^2 w_N]), \quad (7)$$

где, напомним, $\mathcal{L} = \sigma_1^2 \partial^2 / \partial x^2 + \sigma_2^2 \partial^2 / \partial y^2$, $\sigma_j = \text{const} > 0$, $j = 1, 2$, $0 < \varepsilon \ll 1$, $c_0 = \text{const} \in \mathbb{R}$, а оператор $F_N[*]$ определен равенством (6).

Следуя методике, изложенной в п. 6.3, возможные автоколебательные режимы уравнения (7) будем искать в виде аналогичного (6.32) формального ряда

$$w = w_N^0(t, \tau, x, y) + \varepsilon w_N^1(t, \tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t, \quad (8)$$

где

$$w_N^0 = \sum_{n,k=1}^N z_{n,k}(\tau) \exp(i\omega_{n,k} t) e_{n,k}(x, y), \quad \omega_{n,k} = \pi^2(\sigma_1^2 n^2 + \sigma_2^2 k^2), \quad (9)$$

$z_{n,k}$ — подлежащие определению комплексные амплитуды, а функция w_N^1 является тригонометрическим многочленом по переменной t . Далее, проводя те же рассуждения, что и в п. 6.3, для $\eta_{n,k} = |z_{n,k}|^2$ в предположении об отсутствии соответствующих резонансов приходим в конечном итоге к системе

$$\dot{\eta}_{n,k} = \left[1 - \frac{9}{4} \eta_{n,k} - 3 \sum_{m \neq k} \eta_{n,m} - 3 \sum_{m \neq n} \eta_{m,k} - 2 \sum_{m \neq n, r \neq k} \eta_{m,r} \right] \eta_{n,k}, \quad (10)$$

$$n, k = 1, 2, \dots, N.$$

Отдельно остановимся на вопросе об аттракторах системы (10). В связи с этим фиксируем произвольно целочисленный вектор (k_1, k_2, \dots, k_N) , являющийся перестановкой вектора $(1, 2, \dots, N)$. Непосредственная проверка показывает, что система (10) имеет экспоненциально устойчивое состояние равновесия с компонентами

$$\eta_{n,k} = \frac{4}{8N+1} \text{ при } (n,k) = (j,k_j), \quad j = 1, \dots, N; \quad (11)$$

$$\eta_{n,k} = 0 \text{ при } (n,k) \neq (j,k_j).$$

Количество же всех состояний равновесия (11) равно $N!$.

Далее, согласно результатам монографии [73] в исходном уравнении (7) при всех достаточно малых ε любому состоянию равновесия (11) соответствует экспоненциально орбитально устойчивый N -мерный инвариантный тор. В нулевом приближении, т. е. при $\varepsilon = 0$, этот тор задается равенством

$$w_N(\varphi, x, y) = \frac{4}{\sqrt{8N+1}} \sum_{j=1}^N \exp(i\varphi_j) \sin n\pi x \sin k\pi y, \quad (12)$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, а уравнения на нем имеют вид $\dot{\varphi}_j = \omega_{j,k_j}$, $j = 1, \dots, N$.

Остается добавить, что помянутые выше инвариантные торы являются носителями жесткой турбулентности. Действительно, как свидетельствуют показанные на рисунках 3, 4 графики функции $u_N(x, y) = \operatorname{Re} w_N(0, x, y)$ при $N = 25$ для самых простых случаев $k_j = j$ и $k_j = N+1-j$ соответственно, пространственные профили этих торов обладают характерными для жесткой турбулентности всплесками.

Итак, мы убедились, что галеркинские аппроксимации (7) демонстрируют весьма экзотические динамические свойства: при возрастании N неограниченно увеличивается как количество сосуществующих

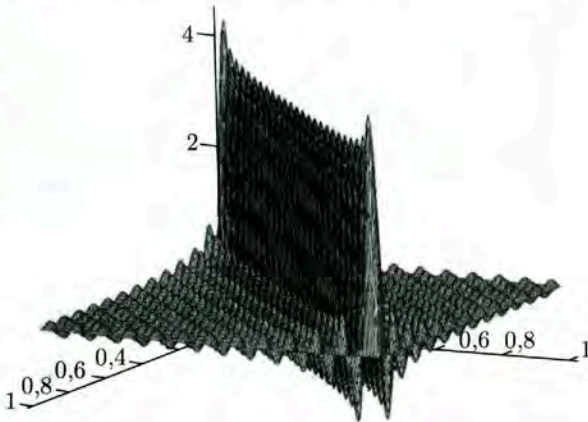


Рис. 3

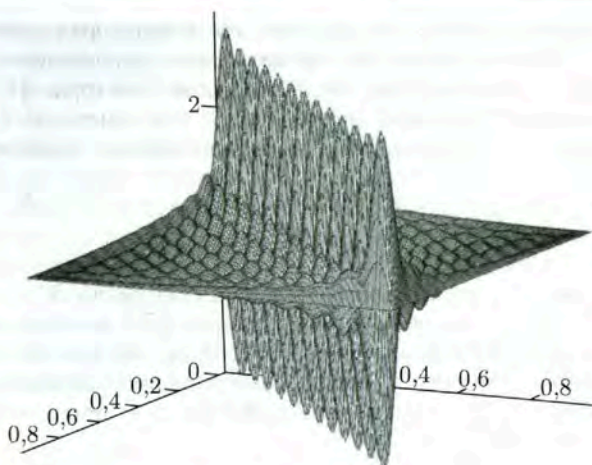


Рис. 4

в этих системах устойчивых инвариантных торов, так и размерности всех указанных торов. Таким образом, весьма интересен вопрос о характере аттракторов самой краевой задачи (6.30) при $\nu = 0$. Ответа на этот вопрос пока нет.

Перейдем к результатам очередной главы 5. Наиболее яркое ее достижение — это предложенный нами новый способ проектирования кольцевых генераторов хаотических колебаний. В качестве конкретного примера кольцевого генератора в главе 5 была рассмотрена система из трех однонаправленно связанных генераторов, основанных на туннельном диоде (см. рисунки 13.1, 13.2). Однако можно было бы в качестве парциальных генераторов взять классические генераторы Ван дер Поля с колебательным контуром в цепи анода или сетки (см., например, [95]).

Представляет также интерес изучение более сложных автоколебательных систем, соединенных кольцевой связью. Например, имеет смысл рассмотреть систему из трех близких видов, конкурирующих между собой по кольцевому принципу. Как следует из сформулированных Ю. С. Колесовым общих подходов к моделированию биологических сообществ [54], математической моделью такой системы является система дифференциально-разностных уравнений с запаздыванием

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= \frac{r_1}{1+a_1} [1 - a_1(1 - N_3) - N_1(t-1)] N_1, \\ \dot{N}_2 &= \frac{r_2}{1+a_2} [1 - a_2(1 - N_1) - N_2(t-1)] N_2, \\ \dot{N}_3 &= \frac{r_3}{1+a_3} [1 - a_3(1 - N_2) - N_3(t-1)] N_3,\end{aligned}\tag{13}$$

где $N_j(t) \geq 0$, $j = 1, 2, 3$, — плотности популяций конкурирующих видов. При условии, что параметры r_j , $j = 1, 2, 3$ близки к критиче-

скому значению $\pi/2$, а положительные параметры a_j , $j = 1, 2, 3$, малы, анализ аттракторов системы (13) сводится к исследованию соответствующей нормальной формы на ее локальном шестимерном устойчивом инвариантном многообразии в окрестности состояния равновесия $N_1 = N_2 = N_3 = 1$.

Заканчивая краткий обзор представленных в данной книге результатов, скажем несколько слов о содержании глав 6, 7. В главе 6 подробно описан новый и весьма неожиданный феномен, заключающийся в следующем: аттракторы нелинейного волнового уравнения могут существенно отличаться от аттракторов его конечномерного аналога, получающегося в результате замены производных по пространственным переменным соответствующими разностными операторами. Указанный эффект подробно проиллюстрирован на ряде модельных примеров, в которых были обнаружены так называемые ложные аттракторы, т. е. аттракторы, существующие в конечномерных моделях, но не имеющие аналогов в исходных краевых задачах.

Проделанный анализ показывает, что при интерпретации результатов численных исследований гиперболических краевых задач надо проявлять определенную осторожность. В противном случае есть опасность принять ложный аттрактор за истинный. Один из способов борьбы с ложными аттракторами был отмечен в п. 18.5. Это так называемый метод исчезающей вязкости, проиллюстрированный на примере системы (18.102). Другой же способ — переход от разностных аппроксимаций к галеркинским.

В главе 7, результаты которой в определенном смысле перекликаются с результатами предыдущей главы, для цепочек из произвольного числа m , $m \geq 2$, диффузионно связанных одинаковых нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием установлено сосуществование не менее m пространственно неоднородных устойчивых периодических движений. Последние по аналогии с пространственно непрерывным случаем были названы дискретными автоволнами. Подчеркнем, что наличие дискретных автоволн представляет собой некий общий феномен, присущий уравнениям с запаздыванием различной природы. Например, к настоящему времени результат, аналогичный изложенному в главе 7, получен для уравнения (19.5), а также для уравнения, моделирующего электрическую активность изолированного нейрона (см. [45]).