Высшая математика

В.А.Садовничий

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

ВЫСШАЯ ШКОЛА

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$df(x) = f'(x)dx$$

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$(uv)^{(n}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$$

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|C_n|}$$

$$df(x) = f'(x)\,dx$$

$$)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} u^{(n-m)} v^{(m)}$$

$$)^{n}$$

$$F'(x) = f(x)$$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Под общей редакцией академика Российской Академии наук В.А.Садовничего

Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.
Лекции по математическому анализу

Виноградов И.М.
Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)

Привалов И.И.
Введение в теорию функций комплексного переменного

Садовничий В.А.
Теория операторов

Гашков С.Б., Чубариков В.Н.
Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений

В.А.Садовничий

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

Рекомендовано Министерством общего
и профессионального образования
Российской Федерации
в качестве учебника
для студентов университетов
и педагогических вузов

Москва
«Высшая школа» 1999

УДК 517.5
ББК 22.161.5
С 14

Садовничий В.А.

С 14 Теория операторов. Учеб. для вузов. — 3-е изд., стер.— М.: Высш. шк., 1999. — 368 с.

ISBN 5-06-003604-9

Учебник (2-е изд.— 1986) соответствует программе курсов «Функциональный анализ», «Теория операторов», «Анализ III», которые читаются в университетах и педагогических вузах. В книге приведены основные теоретико-множественные понятия, представлена общая теория метрических, топологических, линейных топологических и нормированных пространств, общая теория меры, измеримых функций и интеграла Лебега. Подробно рассмотрены теория операторов в гильбертовом пространстве, спектральная теория самосопряженных операторов, применения методов теории аналитических функций в спектральной теории несамосопряженных операторов, теория преобразования Фурье и обобщенные функции.

Для студентов университетов и педагогических вузов. Может быть полезен студентам вузов с углубленным изучением математики, аспирантам и научным работникам.

Учебное издание

Садовничий Виктор Антонович

ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Редактор *Ж.И. Яковлева*
Художественный редактор *Ю.Э. Иванова*
Технический редактор *Л.А. Овчинникова*

ЛР № 010146 от 25.12.96. Изд. № ФМ-196. Подп. в печать 22.02.99
Формат 60x90$^1/_{16}$. Бумага офс. № 1. Гарнитура “Литературная”. Печать офсетная
Объем: 23,00 усл. печ. л. + 0,31 усл. печ. л. форз. 23,38 усл. кр.-отт. 24,50 уч.-изд. л. + 0,49 уч.-изд. л. форз.
Тираж 5000 экз. Зак. № 326

Издательство «Высшая школа», 101430, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., д. 29/14.

Отпечатано в ГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»,
432601, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.

ISBN 5-06-003604-9

В. Садовничий

Выход в свет настоящего издания книги совпал с шестидесятилетием со дня рождения ее автора, ректора Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, действительного члена Российской Академии наук Виктора Антоновича Садовничего.

В.А. Садовничий родился 3 апреля 1939 года в селе Краснопавловка Харьковской области в семье крестьянина. В 1958 г. он поступил на механико-математический факультет Московского государственного университета. С этого времени вся его жизнь тесно связана с этим факультетом.

В 1963 г. В.А. Садовничий с отличием окончил факультет и по рекомендации Ученого Совета факультета поступил в аспирантуру отделения математики механико-математического факультета на кафедру теории функций и функционального анализа. Научным руководителем Виктора Антоновича в аспирантуре был профессор А.Г. Костюченко. В 1966 г. после окончания аспирантуры он был оставлен для работы на этой кафедре в качестве ассистента. В 1967 г. В.А. Садовничий защитил кандидатскую диссертацию на тему «Регуляризованные суммы собственных значений общих задач для обыкновенных дифференциальных уравнений», а в 1974 г. — докторскую диссертацию «О некоторых вопросах теории обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от спектрального параметра». С 1975 г. Виктор Антонович — профессор механико-математического факультета МГУ, в 1981—1982 гг. заведует кафедрой функционального анализа и его приложений факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, а с 1982 г. и по настоящее время — кафедрой математического анализа механико-математического факультета МГУ. В 1988 г. Виктор Антонович возглавил Отдел прикладных исследований по математике и механике на том же факультете. В 1995 г. он создал и возглавил Институт математических исследований сложных систем при МГУ, почетным президентом этого института стал лауреат

Нобелевской премии И.Р. Пригожин. В 1973 г. за цикл научных работ В.А. Садовничему присуждается премия им. М.В. Ломоносова, а в 1989 г. он становится лауреатом Государственной премии СССР. В 1994 г. он избирается членом-корреспондентом Российской Академии наук, а в 1997 г. — действительным членом РАН.

Одновременно с большой научно-исследовательской и образовательной работой он ведет огромную научно-организационную и общественную деятельность. В 1974 г. его назначают заместителем декана по научной работе механико-математического факультета МГУ, в 1982 г. — проректором, а в 1984 г. — первым проректором МГУ. В 1992 г. на альтернативной основе он избирается ректором Московского государственного университета, в 1996 г. он вновь избирается ректором МГУ.

В 1994 г. В.А. Садовничий был избран президентом Союза ректоров России. Он является президентом Евразийской ассоциации университетов, членом Постоянного комитета Конференции ректоров университетов Европы (CRE), членом многих отечественных и иностранных научных и образовательных организаций: Академии естественных наук РФ, Международной академии наук высшей школы, Академии технологических наук РФ, Российской Академии ракетных и артиллерийских наук, Международной Академии астронавтики, Общенациональной Академии знания РФ; почетным доктором ряда университетов: Сока (Япония), Токай (Япония), Белорусского, Монгольского, Стамбульского (Турция), «Црне гора» (Республика Черногория), Нью-Йорка (США), Ташкентского (Узбекистан), Российского университета дружбы народов, Амурского, Тульского технического, Санкт-Петербургского технического, Поморского Международного университета им. М.В. Ломоносова; почетным профессором университетов: Сока (Япония), почетным доктором Физико-химического института имени Солвея, Свободного Брюссельского университета, «Браћа Карић» (СРЮ), Казахского университета. Научно-исследовательская, научно-организационная, образовательная и общественная деятельность В.А. Садовничего отмечена следующими наградами: дважды Орденом Трудового Красного Знамени (1980, 1986), Орденом Русской Православной Церкви Святого Князя Даниила Московского II степени (1997), Орденом Почетного Легиона степени Командора (Франция), Орденом Дружбы Казахстана, памятной медалью Академии естественных наук РФ «Автор научного открытия».

Этот краткий биографический очерк только отчасти отражает деятельность академика В.А. Садовничего на ниве отечественной науки и образования. Но каким бы выдающимся ни было творчество, оно никогда не может иметь абсолютной, самодовлеющей ценности, только личность человека, его душа и духовная жизнь являются непреходящими ценностями. Многие из нас соприкоснулись с обаянием личности Виктора Антоновича.

Издательство «Высшая школа» желает дорогому Виктору Антоновичу доброго здоровья и плодотворной деятельности на благо отечественной науки и образования России.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В России исторически сложилось так, что представление об образованности включает в себя органичное единство школы как системы приобретения знаний, фундаментальной науки как показателя уровня подготовки специалистов и гуманитарной культуры как основы духовного богатства человека.

Формулируя задачи образования, академик А.Н. Крылов говорил: «Школа не может дать вполне законченного знания; главная задача школы — дать общее развитие, дать необходимые навыки, одним словом ... главная задача школы — научить учиться, и для того, кто в школе *научится учиться*, практическая деятельность всю его жизнь будет наилучшей школой».

Отметим, что особенность отечественной школы состоит в сочетании четкости рассуждений с глубиной содержания и простотой, доступностью, конкретностью изложения материала, которые всегда предпочитаются формальным конструкциям. Практическое воплощение данных идей подразумевает наличие высококвалифицированных и творчески мыслящих преподавателей.

Математическое образование и математическая культура составляют стержень научного знания, и значение математики как основы фундаментальных исследований постоянно возрастает.

Для решения этих задач требуются учебники, отражающие в определенной полноте современное состояние исследований и мировоззренческие принципы данной области науки.

Предлагаемые к публикации избранные учебники по математике реализуют указанный выше подход. Они написаны, в основном, профессорами Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Книга В.А. Садовничего «Теория операторов» представляет собой третье издание учебника по функциональному анализу, в основе которого лежит спектральная теория дифференциальных операторов. Материал ее составил содержание нескольких специальных курсов, читавшихся автором в течение тридцати лет на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова. Учебник соответствует программам курсов «Функциональный анализ», «Теория операторов», «Анализ III» для студентов университетов и педагогических вузов. В книге, кроме собственно теории операторов, приведены основные понятия и теоремы теории множеств, изложена общая теория метрических, топологических, линейных топологических и нормированных пространств, общая теория меры, измеримых функций и интеграла Лебега. Второе издание учебника переведено на английский язык издательством «Пленум» (США).

Предполагается также издать учебники Г.И. Архипова, В.А. Садовничего, В.Н. Чубарикова «Лекции по математическому анализу», И.М. Виноградова «Элементы высшей математики (Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление. Основы теории чисел)», И.И. Привалова «Введение в теорию функций комплексного переменного», С.Б. Гашкова, В.Н. Чубарикова «Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений» и др.

Надеюсь, что данные книги положат начало новой серии базовых учебников по высшей математике для вузов с повышенным уровнем математической подготовки.

Кроме практической ценности эта серия призвана подвести некоторые итоги работы российских ученых и педагогов — математиков по созданию базовых учебников по математике на рубеже второго и третьего тысячелетий. Серия не ограничивается указанными книгами. В дальнейшем предполагается продолжить отбор и издание как современных, так и классических учебников, которые отвечают изложенной выше концепции, не потеряли своей новизны и актуальности и пользуются заслуженной популярностью и авторитетом у студентов и педагогов.

Академик Российской Академии наук *В.А. Садовничий*

Глава I

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

1. Основные свойства множеств. Отображения. Прямое произведение множеств

Множество — это совокупность объектов, обладающих некоторым заданным свойством.

Всякое множество определяется некоторым свойством P и состоит из тех и только тех объектов, которые обладают этим свойством.

Условимся в дальнейшем рассматривать только множества, входящие в некоторое «универсальное» множество E, и обозначать рассматриваемые множества большими буквами $A, B, C, \ldots$ или $X, Y, Z, \ldots$. Объекты, составляющие множество, называются его *элементами* и обозначаются маленькими буквами: $a, b, c, x, y, z, \ldots$. Множество A, состоящее из элементов $x, y, z, \ldots$, часто обозначают так: $A=\{x, y, z, \ldots\}$.

Если элементы a и b совпадают, то пишут $a=b$. Если элементы a и b различны, то пишут $a\neq b$. Условие, что элемент a принадлежит множеству A, записывают так: $a\in A$, а запись $a\overline{\in}A$ (или $a\notin A$) означает, что элемент a не принадлежит множеству A (не обладает свойством P).

Если необходимо подчеркнуть, что множество A составляют элементы, которые принадлежат универсальному множеству E и обладают свойством P, то часто применяют запись:

$$A=\{a\in E:P\}.$$

Читается эта запись так: «множество A состоит из тех элементов E, которые обладают свойством P».

А. Включение множеств.

Пусть A и B — два множества из E. Говорят, что множество B *содержится* в множестве A (включено*) в множество A), если каждый элемент множества B является и элементом множества A. Включение множества B в множество A обозначают символом «$\subset$» и записывают так: $B\subset A$. Множество B не содержится в A ($B\not\subset A$), если существует хотя бы один элемент $b\in B$, что $b\overline{\in}A$.

Два множества A и B называются *совпадающими* (*равными*), если они состоят из одних и тех же элементов, и тогда пишут $A=B$.

Отношение включения двух множеств обладает следующими свойствами:

---

*) Является *подмножеством*.

1°) $A \subset A$;
2°) если $A \subset B$, а $B \subset A$, то $A = B$;
3°) если $B \subset A$, а $A \subset C$, то $B \subset C$.

Б. Понятие пустого множества.

Рассмотрим множество элементов $\{a\}$ из E, для которых $a \neq a$. Такое множество не содержит ни одного элемента, называется пустым множеством и обозначается символом $\varnothing$:

$$\varnothing = \{a \in E: a \neq a\}.$$

Если множество $A \neq \varnothing$, то оно содержит хотя бы один элемент.

Множество A и $\varnothing$ называются *несобственными* подмножествами множества A. Остальные подмножества A называются *собственными*. Очевидны следующие два свойства:

4°) $\varnothing \subset A$ для любого A из E;
5°) $A \subset E$ для любого A из E.

В. Операции над множествами.

Пусть A и B — два множества из E. *Объединением* (или *суммой*) множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B. Объединение C двух множеств A и B обозначается так: $C = A \cup B$.

Аналогично $C = \bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ обозначает объединение любого числа множеств A_α, где индекс α в свою очередь принадлежит некоторому множеству.

Пересечением множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B. Пересечение двух множеств A и B обозначается так: $C = A \cap B$.

Точно так же $C = \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ обозначает пересечение любого числа множеств A_α.

Введенные операции обладают следующими свойствами, которые проверяются непосредственно:

6°) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);
7°) $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);
8°) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (ассоциативность объединения);
9°) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (ассоциативность пересечения);
10°) $A \cup A = A$;
11°) $A \cap A = A$;
12°) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (дистрибутивность пересечения),

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha} (A_\alpha \cap B);$$

13°) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ (дистрибутивность объединения),

$$\left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right) \cup C = \bigcap_{\alpha} (A_\alpha \cup C);$$

14°) $A \cup \varnothing = A$;
15°) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

16°) $A\cup E=E$;

17°) $A\cap E=A$;

18°) $A\subset B$ эквивалентно условиям $A\cup B=B$ или $A\cap B=A$.

Свойства 1°)—18°) обладают двойственностью в том смысле, что если заменить символы «$\subset$» на «$\supset$», «$\cup$» на «$\cap$» и «$\varnothing$» на «E», то получится снова одно из этих восемнадцати свойств. Таким образом, каждой теореме, доказанной на основании свойств 1°)—18°), соответствует двойственная теорема.

Разностью множеств A и B называется совокупность тех элементов A, которые не принадлежат B. Разность множеств A и B обозначается так: $A\setminus B$. Таким образом, $A\setminus B=\{x\in E: x\in A$ и $x\overline{\in} B\}$. В этом определении не предполагается, что $A\supset B$.

Дополнением A' множества A называется совокупность тех элементов из E, которые не принадлежат A:

$$A'=\{x\in E: x\overline{\in} A\}=E\setminus A.$$

Очевидно, справедливы следующие свойства:

19°) $A\cup A'=E$;

20°) $A\cap A'=\varnothing$;

21°) $\varnothing'=E$;

22°) $E'=\varnothing$;

23°) $(A')'=A$;

24°) условие $A\subset B$ эквивалентно условию $A'\supset B'$;

25°) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (дополнение суммы равно пересечению дополнений), $(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha)'=\bigcap\limits_{\alpha} A'_\alpha$;

26°) $(A\cap B)'=A'\cup B'$ (дополнение пересечения равно сумме дополнений), $(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)'=\bigcup\limits_{\alpha} A'_\alpha$.

Свойства 19°)—26°) также обладают двойственностью, как и свойства 1°)—18°).

Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество C, определяемое следующим образом: $C=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Симметрическая разность множеств A и B обозначается символом $A\Delta B$. Легко видеть, что $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Г. Отображения. Прямое произведение множеств.

Важнейшим понятием в анализе является понятие отображения одного множества в другое.

Пусть A и B — два множества. Допустим, что *каждому элементу a множества A поставлен в соответствие определенный элемент $b=g(a)$, содержащийся в множестве B*. В этом случае определено *отображение* g множества A в множество B, что кратко можно записать так:

$$g: A\to B.$$

Элемент b называется *образом элемента a* при отображении g, а элемент a — *прообразом* или одним из прообразов элемента b. Часто элемент $a\in A$ называют переменным, или аргументом отображения g, а элемент $g(a)\in B$ — значением g на элементе a.

Если каждый элемент b множества B имеет хотя бы один прообраз a при отображении g, то говорят, что отображение g есть отображение A *на* B.

Пусть $M \subset A$, тогда $g(M)$ обозначает множество таких элементов из B, которые являются образами элементов $a \in M$. Множество $g(M)$ называется *образом* M при отображении g.

Таким образом, если $g: A \to B$ и $g(A) = B$, то g — отображение A на B. Если $g(A) \subset B$, то говорят, что g отображение A *в* B.

Если $N \subset B$, то через $g^{-1}(N)$ обозначается множество таких элементов из A, образы которых при отображении g содержатся в N. Множество $g^{-1}(N)$ называется *полным прообразом* множества N при отображении g.

Отображение $g: A \to B$ иногда удобно назвать *функцией* с областью определения A и областью значений, лежащей в B. В некоторых разделах математики в зависимости от природы множеств A и B и свойств g отображение g называется *оператором, функционалом* и т. д.

Отображение g множества A на множество B называется *взаимно-однозначным* (или *биекцией*), если каждый элемент множества B имеет при этом лишь один прообраз при отображении g.

Если $g: A \to B$ и если из того, что $a \neq a'$ следует, что $g(a) \neq g(a')$, то отображение g называется *инъекцией*, таким образом, в этом случае для любого $b \in B$ уравнение $g(a) = b$ имеет не более одного решения. Инъекция — это взаимно-однозначное отображение A *в* B.

Если $g: A \to B$ и если для любого $b \in B$ уравнение $g(a) = b$ имеет по крайней мере одно решение, то отображение g — *сюръекция*. Сюръекция — это отображение A *на* B.

Согласно сказанному биекция — это инъекция и сюръекция одновременно, т. е. для любого $b \in B$ уравнение $g(a) = b$ имеет одно и только одно решение.

Очевидно, что если g — взаимно-однозначное отображение множества A на множество B или взаимно-однозначное соответствие между элементами этих двух множеств, то можно определить отображение g^{-1}, *обратное* по отношению к g, т. е. из уравнения $b = g(a)$, зная элемент b, можно однозначно определить a и тем самым положить $a = g^{-1}(b)$.

Пусть A — некоторое множество. Рассмотрим некоторое подмножество R множества всех упорядоченных пар (a, b) элементов этого множества. Если $(a, b) \in R$, то говорят, что a и b связаны отношением $\varphi = \varphi_R$ и обозначают $a \underset{\varphi}{\sim} b$. Отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно *рефлексивно* (т. е. $a \underset{\varphi}{\sim} a$ для любого элемента $a \in A$), *симметрично* (т. е. если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, то $b \underset{\varphi}{\sim} a$), *транзитивно* (т. е. если $a \underset{\varphi}{\sim} b$, $b \underset{\varphi}{\sim} c$, то $a \underset{\varphi}{\sim} c$).

Нетрудно убедиться, что эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ разбивало множество A на непересекающиеся классы.

Действительно, разбиение множества на классы определяет некоторое отношение эквивалентности. При этом $a \underset{\varphi}{\sim} b$ означает, что a и b принадлежат одному классу.

Обратно, если φ — некоторое отношение эквивалентности на множестве A и K_a — класс элементов $x \in A$, эквивалентных a, то в силу рефлексивности $a \in K_a$. Покажем, что два таких класса либо не пересекаются, либо совпадают. Пусть $c \in A$ и $c \in K_a$, $c \in K_b$, т. е. $c \underset{\varphi}{\sim} a$, $c \underset{\varphi}{\sim} b$. Тогда в силу симметричности $a \underset{\varphi}{\sim} c$ и в силу транзитивности $a \underset{\varphi}{\sim} b$. В силу этого отношения, если $x \in K_a$, т. е. $x \underset{\varphi}{\sim} a$, то $x \underset{\varphi}{\sim} a \underset{\varphi}{\sim} b$, и поэтому $x \underset{\varphi}{\sim} b$, т. е. $x \in K_b$. Точно так же доказывается, что всякий элемент $y \in K_b$ входит в K_a. Таким образом, два класса K_a и K_b, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают.

Если g — отображение множества A в B, то элементы множества A, образы которых совпадают, образуют непересекающиеся классы в множестве A, т. е. разбиение на классы тесно связано с понятием отображения.

Перейдем теперь к рассмотрению важного понятия — прямого произведения множеств. Пусть $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества некоторого множества A. *Прямым произведением* $\prod_{k=1}^{n} A_k$ множеств A_k называется совокупность всех функций f, отображающих Ω в A так, что $f(k) \in A_k$, $k=1, \ldots, n$. Очевидно, что $\prod_{k=1}^{n} A_k$ можно рассматривать как всевозможные наборы $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_k \in A_k$. Аналогично, если $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots\}$, то $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ есть множество всевозможных последовательностей $\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, $a_k \in A_k$ для любого k.

Точно так же, если Ω — произвольное множество и для каждого $\alpha \in \Omega$ определены подмножества A_α множества A, то *прямым произведением* $\prod_{\alpha} A_\alpha$ множеств A_α называется совокупность всех функций f, отображающих Ω в A, для которых $f(\alpha) \in A_\alpha$, $\alpha \in \Omega$.

Если $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, то $\prod_{k=1}^{n} A_k$ обозначают еще и так: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$; если $A = A_i = A_j$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$, то принято обозначение $A \times A \times \ldots \times A = A^n$.

Представляет интерес также понятие верхнего предела последовательности множеств. Пусть задана некоторая бесконечная последовательность множеств $\{A_n\}$. Множество A, состоящее из всех точек, которые принадлежат бесконечному числу множеств

A_n, называется *верхним пределом последовательности множеств* A_n и обозначается следующим образом:

$$A = \overline{\lim} A_n.$$

Нижним пределом последовательности множеств $\{A_n\}$ называется множество A, составленное из всех элементов, принадлежащих всем A_n, за исключением разве конечного числа. Для нижнего предела последовательности множеств используется обозначение

$$A = \underline{\lim} A_n.$$

Если последовательность множеств монотонно возрастает, т. е. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, то

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Аналогично, если последовательность множеств монотонно убывает, то

$$\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

2. Мощность множества

Два множества называются *эквивалентными*, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Будем говорить, что эквивалентные множества имеют одинаковую *мощность*, или *кардинальное число*. Таким образом, каждому множеству сопоставлен некоторый объект — его мощность, причем эквивалентным множествам соответствует одна и та же мощность.

Множество называется *конечным*, если оно эквивалентно набору натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого n. Мощность такого множества естественно обозначить той же буквой n.

Первой бесконечной мощностью является мощность множества всех натуральных чисел $\{1, 2, \ldots\}$. Множества такой мощности называются *счетными*, а их мощность будем обозначать буквой a.

Мощность множества точек отрезка $[0, 1]$ называется *мощностью континуума*. Обозначается эта мощность буквой c.

Мощность произвольного множества X будем обозначать символом $m(X)$.

Примеры.

1. Множество всех точек сферы в трехмерном пространстве эквивалентно множеству точек расширенной плоскости. Взаимно-однозначное соответствие можно установить с помощью, например, стереографической проекции.
2. Множество рациональных чисел счетно.

Пусть $r=p/q$, $q>0$; p, q — целые и дробь несократима. Назовем $|p|+q$ *высотой* рационального числа r. Ясно, что число дробей, имеющих данную высоту, конечно. Осталось занумеровать все рациональные числа, имеющие высоту 1, 2, ... При этом всякое рациональное число получит некоторый номер — натуральное число.

3. Множество всех точек отрезка $[a, b]$, $a\neq b$ несчетно.

Действительно, допустим противное, что множество всех точек отрезка можно расположить в последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Разделим отрезок на три равных части. Выберем ту из частей, которая не содержит точку x_1 (ни внутри, ни на границе). Обозначим указанный отрезок через λ_1. Далее, обозначим через λ_2 одну из трех равных частей отрезка λ_1, на которой не лежит x_2, и т. д. Бесконечная последовательность отрезков $\lambda_1\supset\lambda_2\supset\ldots\supset\lambda_n\supset$ $\supset\ldots$ в силу известной теоремы анализа имеет общую точку γ. Эта точка γ принадлежит каждому из отрезков λ_k, следовательно, не может совпадать ни с одной из точек x_k. Значит, последовательность x_1, x_2, ..., x_n... не может содержать всех точек отрезка.

4. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств есть снова множество счетное. Всякое подмножество счетного множества — конечное или счетное множество. Объединение двух множеств континуума имеет мощность континуума. Этот пример иллюстрирует своеобразие арифметики кардинальных чисел.

Докажем, например, что счетная совокупность счетных множеств есть счетное множество. Пусть A_1, A_2, A_3, ... — совокупность множеств, каждое из которых счетно.

Расположим элементы множеств A_1, A_2, A_3, ... в виде последовательностей:

$$\begin{aligned}
&A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\},\\
&A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\},\\
&A_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, \ldots\},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Пусть $A=\bigcup\limits_{n} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Проведем нумерацию элементов a множества $A=\{a\}$ следующим образом:

$$a_1=a_{11},\quad a_2=a_{21},\quad a_3=a_{12},\quad a_4=a_{31},\quad a_5=a_{22},\quad a_6=a_{13}$$

и т. д.

У некоторых множеств A_i и A_j $(i\neq j)$ могут оказаться общие элементы. В этом случае мы их учитываем только один раз. Таким образом, элементы множества A можно занумеровать, т. е. поставить во взаимно-однозначное соответствие с множеством натуральных чисел N, т. е. A счетно.

5. Отрезок $[0, 1]$ и интервал $(0, 1)$ — эквивалентные между собой множества.

Взаимно-однозначное соответствие можно, например, установить так: точке интервала $(0, 1)$ $x_n = 1/(n+1)$ поставим в соответствие точку y_n из отрезка $[0, 1]$, $n=1, 2, 3, \ldots$. Здесь $y_1=0$, $y_2=1$, $y_k=x_{k-2}$, $k=3, 4, 5 \ldots$. Всем остальным точкам $x \in (0, 1)$ ставим в соответствие точки с теми же абсциссами.

6. Трансцендентных чисел несчетное множество. (Вещественное число называется *трансцендентным*, если оно не является корнем никакого уравнения вида $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, n — натуральное и a_i — целые, $a_0 \neq 0$, $i=0, 1, \ldots, n$. Вещественные числа, являющиеся корнями таких уравнений, называются *алгебраическими*.)

Множество алгебраических чисел, как легко показать, счетное. Значит, поскольку все числа на оси $\mathbf{R}^1$ образуют множество мощности континуум, множество трансцендентных чисел несчетно. Выше мы воспользовались эквивалентностью интервала $(0, 1)$ и оси $\mathbf{R}^1: y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$, а также тем, что объединение двух счетных множеств есть множество счетное.

7. Множества точек отрезка и квадрата эквивалентны.

Пусть I — множество точек отрезка $[0, 1]$, X — множество десятичных записей чисел (точек) отрезка I. Некоторые числа t имеют двойную десятичную запись: t^- — оканчивающуюся девятками и t^+ — оканчивающуюся нулями (для 1 мы фиксируем единственную запись — $0,99\ldots\ldots9\ldots\ldots$). Чисел, имеющих двойную запись, счетное число. Занумеруем их: $t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots$ и назовем числами первого рода, остальные числами второго рода. Построим биекцию $\varphi: X \to I$, полагая $\varphi(t) = t$, если t — запись второго рода, $\varphi(t_i^-) = t_{2i-1}$, $\varphi(t_i^+) = t_{2i}$.

Существует естественная биекция $\psi: X \to X \times X$, определяемая следующим образом:

$$\psi(0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots) = (0,\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{2k-1}\ldots, 0,\alpha_2\alpha_4\ldots\alpha_{2k}\ldots).$$

Определим отображение

$$\varphi\times\varphi: X\times X \to I\times I,$$

полагая

$$\varphi\times\varphi(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b)).$$

Тогда композиция отображений,

$$I \xrightarrow{\varphi^{-1}} X \xrightarrow{\psi} X \times X \xrightarrow{\varphi\times\varphi} I \times I$$

будет биекцией между точками отрезка и точками квадрата.

Этот результат можно сформулировать таким образом: квадрат множества мощности континуума имеет снова мощность континуума.

8. Пусть $C=A\cup B$ и C имеет мощность континуума. Тогда или A, или B имеет мощность континуума. Действительно, C эквивалентно квадрату $[0, 1]\times[0, 1]$. Допустим теперь противное, что ни A, ни B не имеют мощности континуума. Рассмотрим вертикальные отрезки, нижние концы которых являются точками отрезка $[0, 1]$ оси Ox, а верхние — лежат на противоположной стороне квадрата. Тогда каждый из рассматриваемых отрезков не может целиком состоять из образов (при нашей биекции множества C на квадрат), например множества A. Значит, на каждом таком отрезке имеется по крайней мере один образ точки множества B. И это справедливо для каждого отрезка. Получается противоречие с допущенным ранее.

3. Частичная упорядоченность. Упорядоченность

Множества, расположенные на числовой прямой, естественным образом упорядочены, т. е. между двумя любыми элементами можно поставить определенный знак неравенства. Однако во многих важных случаях (некоторые из них нам встретятся в дальнейшем), как говорят, такое «отношение порядка» на множестве не всегда имеет место. Поэтому дадим следующие определения.

Пусть дано множество A. Пусть, далее, выделено некоторое подмножество R множества всех пар элементов A, т. е. $R\subset A\times A$. Если пара (a, b) принадлежит R, то будем записывать это так: $a\prec b$. Мы говорим, что отношение «$\prec$» является *отношением частичного порядка*, если выполняются следующие условия:

1) из $a\prec b$ и $b\prec c$ следует $a\prec c$;
2) $a\prec a$ для любого $a\in A$;
3) из $a\prec b$, $b\prec a$ следует, что $a=b$

((2) и (3) показывают, что порядок является нестрогим, т. е. не исключает совпадения элементов). Элементы a и b, для которых имеет место соотношение $a\prec b$ или $b\prec a$, называются *сравнимыми*, а исходное множество A называется *частично упорядоченным* отношением $\prec$.

Если для любых двух различных элементов a и b множества A известно, что либо $a\prec b$, либо $b\prec a$, то множество A называется *упорядоченным* отношением $\prec$.

Подмножество B частично упорядоченного отношением $\prec$ множества A называется *ограниченным сверху*, если существует элемент $a\in A$ такой, что $b\prec a$ для любых $b\in B$. Любой такой элемент a называется верхней границей множества B (Аналогично определяется нижняя граница.) Если, кроме того, $a\prec c$ для всякой другой верхней границы c множества B, то a называется *точной верхней границей*, или *верхней гранью* множества B (аналогично определяется *нижняя грань*).

Если некоторый элемент m частично упорядоченного множества A обладает тем свойством, что из соотношений $p \in A$ и $m < p$ следует, что $p = m$, то m называется *максимальным элементом*. (Аналогично определяется *минимальный элемент*.)

Нам часто придется иметь дело с объектами, которые, если их рассматривать как множества, являются бесконечными. При доказательстве теорем о таких объектах часто используется следующая лемма.

Лемма Цорна. *Если в непустом, частично упорядоченном множестве A для всякого упорядоченного подмножества B существует верхняя грань, то в A существует максимальный элемент.*

Непустое упорядоченное множество называется *вполне упорядоченным*, если любое его непустое подмножество имеет минимальный элемент.

Теорема Цермело. *Всякое множество путем введения некоторого отношения порядка можно сделать вполне упорядоченным.*

Доказательство теоремы Цермело опирается на так называемую аксиому выбора, утверждающую, что если дана любая система непустых попарно непересекающихся множеств, то существует новое множество, имеющее с каждым из множеств системы по одному и только одному общему элементу.

Утверждение аксиомы выбора кажется интуитивно ясным, однако использование этой аксиомы приводит к неконструктивным доказательствам, так как закон выбора не может быть указан явно. Многие факты, установленные с помощью аксиомы выбора, не являются наглядными. (Например, можно так разбить шар на четыре равные части, что из двух частей можно составить целый шар того же радиуса, «двигая» их как «твердые» тела. Из двух других частей можно составить точно такой же шар.)

Можно показать, что лемма Цорна, аксиома выбора и теорема Цермело — эквивалентные друг другу утверждения. Они являются обобщением принципа математической индукции в случае несчетных множеств.

В некоторых разделах функционального анализа используется понятие направленного множества.

Частично упорядоченное множество A называется *направленным*, если каждое конечное его подмножество имеет верхнюю границу.

Легко проверить, что, для того чтобы множество было направленным, достаточно, чтобы каждое его подмножество из двух элементов имело верхнюю границу.

4. Сравнения мощностей

Пусть A и B — два произвольных множества. Если A эквивалентно B, то их мощности (по определению) равны. Если одно из множеств, например A, эквивалентно некоторому подмножеству множества B, то говорят, что мощность множества A *не* *больше* мощности множества B, и пишут: $m(A) \leqslant m(B)$. Если при этом в A не существует подмножества, эквивалентного B, то естественно сказать, что мощность A *меньше* мощности B, и обозначить: $m(A) < m(B)$. Принципиально возможны еще два случая:

1. B содержит подмножество, эквивалентное A, и A содержит подмножество, эквивалентное B.

2. Множества A и B не эквивалентны, и ни одно из них не содержит подмножества, эквивалентного другому множеству.

В первом случае можно показать, что множества A и B эквивалентны. Что же касается другого случая, то он на самом деле невозможен. Это можно вывести из теоремы Цермело. Таким образом, для любых двух множеств A и B их мощности сравнимы. Так введенное отношение порядка удовлетворяет свойствам 1)—3) п. 3. Счетная мощность является наименьшей бесконечной мощностью. Вопрос о том, является ли мощность континуума следующей за ней или между ними есть промежуточные (так называемая континуум-гипотеза) долго не поддавался решению. Недавно было доказано, что утверждение об отсутствии промежуточной мощности не противоречит остальным аксиомам теории множеств и не может быть выведено из этих аксиом.

Примеры.

1. Пусть A — некоторое непустое множество и $M = \{B\} \overset{\text{def}}{=} 2^A$ — совокупность всех его подмножеств B.

Будем считать, что $B_1 \prec B_2$, если $B_1 \subset B_2$. Очевидно, что указанное отношение есть отношение порядка, удовлетворяющее условиям 1)—3) п. 3. Ясно также, что в общем случае M не будет упорядоченным (вполне упорядоченным).

Если N — любое подмножество множества M, то оно ограничено сверху. Его точной верхней границей будет множество $\bar{N} = \bigcup_{B \in N} B$. В M существует максимальный элемент: это само множество A, рассматриваемое как подмножество, и утверждение леммы Цорна очевидно. Теорема Цермело утверждает, что M можно сделать вполне упорядоченным. Однако, как это сделать, из теоремы неясно.

2. Если задано некоторое множество A, то множество M, элементами которого являются все подмножества множества A, имеет мощность большую, чем A.

Действительно, обозначим мощность множества A через $m(A)$, а мощность множества M — через $m(M) = 2^{m(A)}$. Очевидно, что $m(M) \geqslant m(A)$. Исключим возможность равенства: $m(M) = m(A)$. Допустив противное, установим взаимно-однозначное соответствие между элементами $\{a\}$ множества A и элементами $\{B\}$ множества M — подмножествами множества A. Объединим в множество B_0 все элементы $\{a\}$ множества A, не принадлежащие тем подмножествам, которым они соответствуют при взаимно-однозначном отображении A на M. Пусть a_0 — тот элемент из A, который соответствует B_0. Элемент a_0 не может принадлежать множеству B_0 и не может ему не принадлежать. Получилось противоречие. Множество, содержащее n элементов, очевидно, имеет 2^n подмножеств. Убедимся в том, что множество подмножеств счетного множества имеет мощность континуума. Действительно, у каждой точки отрезка $[0, 1]$ есть разложение в двоичную дробь. Каждое такое разложение можно трактовать как подмножество натурального ряда (число n принадлежит этому подмножеству или нет в зависимости от того, стоит в n-м разряде 1 или 0). Каждой точке отрезка соответствует не менее одного и не более двух разложений *). Получаем, что

$$c \leqslant 2^a \leqslant 2 \cdot c$$

(где c — мощность континуума, a — мощность счетного множества). Но (см. пример 4 п. 2) $c = 2 \cdot c$, значит, $2^a = c$.

Этот пример показывает, в частности, что множество точек отрезка несчетно, т. е. мощность континуума не равна счетной, а является действительно некоторой новой мощностью. Мы видим также, что «бесконечное» — не просто противопоставление конечному: существует много неэквивалентных между собой бесконечных множеств.

В частности, множество всех подмножеств множества мощности континуума имеет мощность большую, чем мощность континуума, — так называемую мощность гиперконтинуума.

3. Если $A = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} A_n$, то $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$.

Доказательство получается стандартным рассуждением: пусть $a \in A$, тогда $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$ и наоборот.

4. Семейство $\{\Sigma\}$ подмножеств некоторого множества называется *фильтром*, если:

a) $\varnothing \overline{\in} \{\Sigma\}$;

b) если $A \supset B$ и $B \in \{\Sigma\}$, то $A \in \{\Sigma\}$;

c) если $A, B \in \{\Sigma\}$, то $A \cap B \in \{\Sigma\}$.

Если $\{\Sigma\}$ и $\{F\}$ — два фильтра и $\{\Sigma\} \supset \{F\}$, то говорят, что фильтр $\{\Sigma\}$ *мажорирует* $\{F\}$. *Ультрафильтром* называется фильтр, не мажорируемый никаким другим фильтром, кроме самого себя. Из леммы Цорна вытекает, что всякий фильтр мажорируется некоторым ультрафильтром.

§ 2. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В математическом анализе важнейшую роль играет понятие предела. В основе различных определений предела лежит то или иное понятие близости между объектами. Поэтому естественно попытаться для множеств произвольной природы ввести понятие расстояния между элементами, а затем и понятие предельного

---

*) См. подробнее п. 3 § 2 этой главы.

перехода. Более того, мы увидим, что многие свойства метрического пространства зависят лишь от набора его так называемых открытых подмножеств. Понятие открытого множества в свою очередь может быть принято за основу для определения еще более общих пространств — топологических.

1. Определение метрического пространства. Примеры

Определение 1. На множестве X определена структура *метрического пространства*, если задана функция пары аргументов

$$\rho : X \times X \to \mathbf{R}^1, \quad \mathbf{R}^1 \text{ — числовая ось,}$$

обладающая свойствами:

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (свойство симметрии);

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ (неравенство треугольника).

Функция $\rho(x, y)$, $x, y \in X$ называется *метрикой*, или *функцией расстояния*, число $\rho(x, y)$ называется *расстоянием* между точками x и y.

Таким образом, пара: множество X и функция ρ образуют метрическое пространство; будем обозначать его через

$$(X, \rho) \text{ или } R = (X, \rho),$$

или просто через X, если ясно, о какой метрике идет речь.

Если в 3) положить $x = y$, то, учитывая 1) и 2), получим, что $0 \leqslant \rho(y, z)$, т. е. функция расстояния — неотрицательная функция своих аргументов.

Приведем примеры наиболее часто встречающихся метрических пространств.

Примеры.

1. Арифметическое n-мерное пространство X, точки которого — упорядоченные наборы n действительных чисел, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, будет метрическим пространством, если положить

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right]^{1/2}. \quad ^{*)}$$

Доказательство неравенства треугольника для этого пространства приведено ниже в примере 3. В дальнейшем будем обозначать эту пару (X, ρ) также через $\mathbf{R}^n$.

В арифметическом n-мерном пространстве X можно ввести и другие функции расстояния, например:

a) $\rho_0(x, y) = \dfrac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}$;

b) $\rho_1(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$;

---

*) См. также пример 3.

$c)$ $\rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

$d)$ $\rho_3(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y, \\ 0, & x = y; \end{cases}$

$e)$ $\rho_4(x, y) = \begin{cases} \rho(x, y), & \text{если } \rho(x, y) < 1, \\ 1, & \text{если } \rho(x, y) \geqslant 1. \end{cases}$

Естественно, что при этом одно и то же множество превращается в различные метрические пространства.

2. Пусть Y — множество непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$. Введем метрику, полагая, что $\rho(x, y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$. Получившееся пространство (Y, ρ) есть метрическое пространство. Оно обозначается через $C[a, b]$.

Множество непрерывных функций можно превратить и в другие метрические пространства, введя функцию расстояния, например, по правилам $a)$, $d)$, $e)$ примера 1 или полагая, что

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt;$$

или

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^p\, dt\right]^{1/p}, \quad p > 1.$$

Точно так же множество Z n раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a, b]$, $n \geqslant 1$ становится метрическим пространством, если ввести метрику по правилу:

$$\rho(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(i)}(t) - y^{(i)}(t)|,$$

$$x^{(0)}(t) \equiv x(t),$$

$$y^{(0)}(t) \equiv y(t).$$

Это пространство обозначается обычно так: $C^n[a, b]$, $n \geqslant 1$.

3. Пусть U — множество, состоящее из последовательностей комплексных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Введем функцию расстояния $\rho(x, y)$ по правилу:

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2\right]^{1/2},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$.

Аксиома треугольника получается предельным переходом из неравенства (см. также пример 1):

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |z_k - x_k|^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} |z_k - y_k|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k - x_k|^2\right]^{1/2},$$

которое есть следствие известного *неравенства Коши — Буняковского:*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \bar{b}_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2,$$

где a_k, b_k, $k=1, \ldots, n$ — произвольные числа.

Неравенство Коши — Буняковского можно доказать так: пусть λ — произвольное число, a и b — векторы, $a=(a_1, \ldots, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$. Тогда $(\lambda a - b, \lambda a - b) \geqslant 0$, или

$$\lambda\bar{\lambda}(a, a) - \lambda(a, b) - \bar{\lambda}(b, a) + (b, b) \geqslant 0.$$

Положим $\lambda = re^{-i\varphi}$, где $\varphi = \arg(a, b)$. Получим, что $r^2(a, a) - 2r|(a, b)| + (b, b) \geqslant 0$. Дискриминант этого квадратного трехчлена неположителен, и тем самым неравенство Коши — Буняковского справедливо.

Для функции $\rho(x, y)$ нетрудно также проверить выполнение остальных аксиом расстояния.

Заметим, что если $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty$, то и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k \pm y_k|^2 < \infty$ и функция расстояния $\rho(x, y)$ действительно может быть введена по указанному выше правилу.

Таким образом, выше мы определили метрическое пространство (U, ρ). Оно обозначается обычно l^2.

В этом же множестве U, точками которого являются последовательности со сходящимся рядом из квадратов ее членов, можно ввести функцию расстояния многими способами. Один из интересных способов таков: расстояние определяется по формуле $\rho(x, y) = \sup\limits_k |x_k - y_k|$. Нетрудно убедиться, что указанная верхняя грань существует и что функция $\rho(x, y)$ задает расстояние.

4. Пусть V — множество последовательностей чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$, $p \geqslant 1$.

Определим функцию расстояния по формуле

$$\rho(x, y) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^p\right]^{1/p},$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$.

Это метрическое пространство обозначается l^p, $p \geqslant 1$.

Из всех аксиом метрики нуждается в проверке лишь неравенство треугольника. Доказать его можно по такой схеме:

а) Пусть $0<\alpha<1$. Тогда функция

$$f(x)=x^{\alpha}-\alpha x+\alpha-1\leqslant 0 \text{ при } x>0.$$

б) Пусть $a>0$, $b>0$, $p>1$ и q таково, что

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Тогда, подставив $x=a/b$ и $\alpha=1/p$, можно получить, что *)

$$a^{1/p}\,b^{1/q}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

в) Пусть $x_i\geqslant 0$, $y_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,n$.
Подставив

$$a=\frac{x_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^p},\qquad b=\frac{y_i^q}{\sum\limits_{j=1}^{n}y_j^q},$$

получим

$$\frac{x_iy_i}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^p\right)^{1/p}\left(\sum\limits_{j=1}^{n}y_j^q\right)^{1/q}}\leqslant\frac{1}{p}\,\frac{x_i^p}{\sum\limits_{j=1}^{n}x_j^p}+\frac{1}{q}\,\frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n}y_j^q}.$$

Просуммировав по i от 1 до n, получим неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q},$$

которое называется неравенством Гёльдера.

г) Пусть x_i, y_i, p и q те же, что и выше. Запишем тождество:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p=\sum_{i=1}^{n}x_i\,(x_i+y_i)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}y_i\,(x_i+y_i)^{p-1}.$$

Применив к каждому из членов правой части неравенство Гёльдера и произведя сокращения, получим неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^p\right)^{1/p}.$$

д) Пусть x_i, y_i, $i=1,\ldots,n$ — комплексные числа. Тогда из предыдущего следует *неравенство Минковского*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i+y_i|^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{1/p}.$$

*) Это неравенство называется *неравенством Юнга*.

Из него уже легко получить неравенство треугольника для $p>1$. Случай $p=1$ проверяется непосредственно.

5. Пусть W — множество всех последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ чисел x_k таких, что $\sup\limits_{1<k<\infty} |x_k|<\infty$. Пусть $\rho(x, y)=\sup\limits_{1<k<\infty} |x_k-y_k|$, тогда (W, ρ) есть метрическое пространство. Выполнение аксиом расстояния здесь очевидно. Это метрическое пространство обозначается символом m.

6. Пусть S — совокупность всех последовательностей $(n_1, n_2, \ldots)$ натуральных чисел. Определим расстояние между двумя такими последовательностями x и y по правилу $\rho(x, y)=1/k$, где k — первый из номеров, для которых координата n_k последовательности x отличается от соответствующей координаты последовательности y. Положим $\rho(x, y)=0$, если $x=y$. Тогда (S, ρ) есть метрическое пространство, называемое бэровским нульмерным пространством, обозначается оно обычно символом B_0.

Заметим, что, как уже неоднократно нами подчеркивалось, если $\rho(x, y)$ — функция расстояния в некотором метрическом пространстве, то по формулам а) или е) примера 1 мы можем получить новую функцию расстояния.

2. Открытые и замкнутые множества

Определение 1. *Шаром* $O(a, r)$ в пространстве X (*замкнутым шаром* $K(a, r)$) с центром в точке a и радиусом r называется совокупность точек $x\in X$ таких, что $\rho(x, a)<r$ $(\rho(x, a)\leqslant r)$.

Определение 2. Множество $\Sigma\subset X$ называется *открытым в* X, если вместе с каждой своей точкой x оно содержит и некоторый шар $O(x, r)$ *).

Определение 3. *Окрестностью точки* $x\in X$ называется любое открытое множество, содержащее x. *Окрестностью некоторого подмножества* X, быть может самого X, называется любое открытое множество, содержащее данное подмножество. Окрестность точки x будем обозначать через Σ_x.

Определение 4. Пусть $Y\subset X$, тогда точка $x\in X$ называется *предельной* точкой множества Y, если каждая окрестность точки x содержит по крайней мере одну точку y: $y\in Y$, $y\neq x$.

Точка $y\in Y$ называется *изолированной* точкой множества Y, если существует окрестность точки y, в которой нет точек Y, отличных от y.

Определение 5. Точка $y\in Y\subset X$ называется *внутренней*, если она содержится в Y вместе с некоторой своей окрестностью **). Точки, внутренние для дополнения Y в X, называют-

---

*) Очевидно, что любой открытый шар в метрическом пространстве является открытым множеством (см. пример 3 в конце этого параграфа).

**) Совокупность всех внутренних точек множества Y называется *внутренностью* множества Y и обозначается через $\mathring{Y}$.

ся *внешними* по отношению к Y. Если точка не является ни внутренней, ни внешней по отношению к Y, то она называется *граничной* для Y. Множество граничных точек для Y обозначается через ∂Y.

Определение 6. Множество в метрическом пространстве называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Сумма любого числа открытых множеств, пересечение любого конечного числа открытых множеств есть множество открытое, $\varnothing$ и X открыты.*

Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто, сумма любого конечного числа замкнутых множеств замкнута, $\varnothing$ и X замкнуты.

Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — семейство открытых в X множеств. Если $x \in \bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$, то существует индекс α_0 такой, что $x \in \Sigma_{\alpha_0}$, значит, существует число $r>0$ такое, что $O(x, r) \subset \Sigma_{\alpha_0}$, т. е. $O(x, r) \subset \subset \bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$. Далее, если $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ открыты в X, то из того, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$, следует, что для любого $i=1, \ldots, n$ $x \in \Sigma_i$, т. е. для $i=1, \ldots, n$ существуют числа $r_i>0$ такие, что $O(x, r_i) \subset \Sigma_i$. Взяв $r = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} r_i$, получаем, что для любого $i=1, \ldots, n$ $O(x, r) \subset \subset O(x, r_i)$, т. е. $O(x, r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Sigma_i$.

Второе утверждение непосредственно следует из первого, если воспользоваться принципом двойственности для множеств. То, что $\varnothing$ и X одновременно открыты и замкнуты, очевидно.

Определение 7. *Замыкание* $\bar{Y}$ множества Y есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих Y. Очевидно, что $\bar{Y}$ содержится в каждом замкнутом множестве, содержащем Y. Следовательно, замыкание множества Y — наименьшее из всех замкнутых множеств, содержащих Y.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Операция замыкания в метрическом пространстве обладает следующими свойствами:*

$$1)\ \bar{A} \supset A;\quad 2)\ \bar{\bar{A}} = \bar{A};\ 3)\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B};\ 4)\ \bar{\varnothing} = \varnothing,\ \bar{X} = X.$$

Свойство 1) очевидно, если $x \in A$, то x принадлежит любому замкнутому множеству, содержащему A, т. е. $x \in \bar{A}$; свойство 2) вытекает из того, что $\bar{A}$ — замкнуто (лемма 1). Докажем свойство 3). Множество $A \cup B \supset A$, отсюда $\overline{A \cup B} \supset A$, так как каждое замкнутое множество, содержащее $A \cup B$, содержит A, их пересечение также содержит A. Следовательно, $\overline{A \cup B} \supset \bar{A}$. Аналогично $\overline{A \cup B} \supset \bar{B}$. Таким образом, $\overline{A \cup B} \supset \bar{A} \cup \bar{B}$. Обратно, $\bar{A} \cup \bar{B}$ по доказанному (лемма 1) замкнуто, следовательно, $\bar{A} \cup \bar{B} \supset \overline{A \cup B}$. Утверждение 4) означает, что $\varnothing$ и все X — замкнутые множества.

Попутно мы доказали, что если множество $C\subset D$, то $\bar{C}\subset\bar{D}$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Точка $a\in\bar{A}$ в том и только том случае, если каждая окрестность Σ_a точки a пересекается с A.*

Если допустить, что $a\overline{\in}\bar{A}$, то существует окрестность Σ_a (например — дополнение $\bar{A}$), не пересекающаяся с A (и даже с $\bar{A}$), что противоречит условию утверждения. Обратно, пусть $a\in\bar{A}$ и Σ_a — окрестность точки a, которая не пересекается с A. Тогда дополнение Σ_a — замкнутое множество, содержащее A, а значит, и $\bar{A}$, что приводит к противоречию с тем, что $a\in\bar{A}$.

Для множества A в метрическом пространстве обозначим через $\tilde{A}$ множество его предельных точек. Справедливо утверждение.

Утверждение 2. *Для любого множества A выполнены соотношения $\bar{A}=A\cup\tilde{A}=A\cup\partial A$.*

Очевидно, $A\subset\bar{A}$. Из определения 4 и утверждения 1 следует, что $\tilde{A}\subset\bar{A}$. Если $a\in\bar{A}$, то либо $a\in A$, либо $a\overline{\in}A$, и тогда каждая окрестность точки a содержит точку из A, отличную от a, т. е. $a\in\tilde{A}$. Таким образом, $\bar{A}=A\cup\tilde{A}$. Для доказательства равенства $\bar{A}=A\cup\partial A$ достаточно заметить, что внешние точки множества A составляют в точности дополнение к $\bar{A}$.

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а Y — подмножество в X. Метрику ρ можно рассматривать только на точках из $Y\subset X$. Поэтому Y само превращается в метрическое пространство и пара (Y, ρ) называется *подпространством* пространства (X, ρ).

Определение 8. Пусть X — метрическое пространство, а Y — его подпространство. Множество $\Sigma_Y\subset Y$ называется *открытым относительно Y*, если существует такое открытое в X множество Σ_X, что $\Sigma_Y=Y\cap\Sigma_X$.

Докажем, что множество $\Sigma_Y\subset Y$ открыто относительно Y тогда и только тогда, когда оно открыто в Y, рассматриваемом как подпространство. Пусть Σ_Y открыто относительно Y, т. е. $\Sigma_Y=Y\cap\Sigma_X$, Σ_X открыто в X. Тогда для каждой точки $y\in Y\cap\Sigma_X$ существует шар $O(y, r)$, содержащийся в Σ_X. Множество $O(y, r)\cap Y$ является тогда шаром в Y, содержащимся в Σ_Y, т. е. Σ_Y открыто в Y. Обратно, пусть Σ_Y открыто в Y. Это значит, что для каждой точки $y\in\Sigma_Y$ существует шар в Y с центром в y, содержащийся в Σ_Y. Рассмотрим для каждого такого шара соответствующий шар в X с тем же центром и того же радиуса. Объединение всех таких шаров (по всем $y\in\Sigma_Y$) дает нам открытое множество Σ_X. Очевидно, что $\Sigma_Y=Y\cap\Sigma_X$.

Аналогично определяются множества $F_Y\subset Y$, *замкнутые относительно Y*; для них также справедливо утверждение, аналогичное вышеприведенному.

Подчеркнем, что, когда говорится об относительно открытом (замкнутом) множестве, указывается наряду с основным пространством X его подпространство Y, относительно которого и даются определения.

Например, интервал $I=(0, 2)$ не является открытым множеством в $\mathbf{R}^2$, но открыт относительно $\mathbf{R}^1$ в $\mathbf{R}^2$, так как $I=\mathbf{R}^1\cap O(a, 1)$, где $O(a, 1)$ — открытый в $\mathbf{R}^2$ круг с центром в точке $a=(1, 0)$ и радиусом 1.

Определение 9. Пространство X называется *связным*, если его нельзя представить в виде суммы двух непустых замкнутых (или двух открытых) непересекающихся подмножеств.

Множество Y в метрическом пространстве X называется связным, если Y связно как подпространство в X.

3. Всюду плотные и совершенные множества

Определение 10. Пусть A и B два множества в метрическом пространстве X. Множество A называется *плотным* в B, если $\bar{A}\supset B$. Множество A называется *всюду плотным* в X, если $\bar{A}=X$.

Пространства, в которых имеются счетные, всюду плотные множества, называются *сепарабельными*.

Нетрудно убедиться, что рассмотренные выше примеры 1—4 метрических пространств являются сепарабельными метрическими пространствами. Так, в $\mathbf{R}^n$ счетным, всюду плотным множеством является множество точек, у которых все координаты — рациональные числа. В пространствах $C[a, b]$, $C^n[a, b]$ такими множествами являются множества многочленов с рациональными коэффициентами; в пространствах l^2, l^p — множества последовательностей рациональных чисел, в которых отлично от нуля лишь конечное, свое для каждой последовательности, число членов.

Пространство m — пример несепарабельного пространства. Если рассмотреть множество E_0 последовательностей, состоящих только из нулей и единиц, то мощность такого множества есть континуум, поскольку в двоичной записи эти последовательности изображают все числа отрезка $[0, 1]$.

Для того чтобы в этом убедиться, надо поступить так: пусть $x\in[0, 1]$ и отрезок $[0, 1]$ разбивается на две равные части и после нуля с запятой ставится 0 или 1 в зависимости от того, принадлежит число x первому или второму отрезку. Если оно принадлежит обоим отрезкам $(x=1/2)$, то пишется произвольно 0 или 1. Дальше процесс повторяется неограниченно с тем меньшим отрезком, к которому отнесена точка x. В результате мы получим некоторую последовательность из нулей и единиц: 0, 011001 .... Если $x\neq y$, то в результате делений эти точки на некотором этапе станут принадлежать разным отрезкам, а поэтому и последовательности, им отвечающие, будут разные. Значит, множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц есть множество мощности не меньше, чем континуум. Для наших целей достаточно и этого. (Легко убедиться, что на самом деле множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц есть множество мощности континуума). Взаимные расстояния между любыми двумя различными элементами x и y множества E_0 равны единице. Значит, приблизить сколь угодно точно каждую из этих точек элементами счетного множества нельзя, поскольку множество шаров с центрами в точках множества E_0 и радиуса $^1/_3$ является множеством мощности континуума и эти шары не пересекаются. Так как $E_0 \subset m$, то пространство m несепарабельно.

Множество A называется *нигде не плотным* в метрическом пространстве R, если любое открытое множество этого пространства содержит другое открытое множество, целиком свободное от точек множества A.

Например, в пространстве $C[0, 1]$ множество A функций вида $y=nx^2$ (n — целые числа) нигде не плотно. Другой пример нигде не плотного множества на отрезке $[0, 1]$ (рассматриваемом как метрическое пространство) дает так называемое «канторово совершенное множество».

Множество A, расположенное в метрическом пространстве, называется *совершенным*, если оно замкнуто и если каждая точка множества A является его предельной точкой.

Канторово совершенное множество на отрезке $I=[0, 1]$ строится следующим образом. Из отрезка $[0, 1]$ удаляется интервал $(^1/_3, ^2/_3)$, и оставшееся множество — объединение двух отрезков $[0, ^1/_3]$, $[^2/_3, 1]$ — обозначается через I_1. Из этих двух отрезков в свою очередь удаляются их трети: интервалы $(^1/_9, ^2/_9)$, $(^7/_9, ^8/_9)$. Объединение оставшихся отрезков обозначим через I_2. Продолжим этот процесс неограниченно. Очевидно, $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ и I_n есть объединение 2^n отрезков, длина каждого из которых равна 3^{-n}.

Множество $K = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$ и называется *канторовым множеством*.

Покажем, что K — совершенно. То, что оно замкнуто, следует из построения и леммы 1, остается показать, что K не содержит изолированных точек. Пусть $x \in K$ и пусть Σ_x — произвольная окрестность точки x. Тогда по определению открытого множества найдется интервал σ_x (шар с центром в точке x), содержащий точку x и $\sigma_x \subset \Sigma_x$. Пусть Λ_n — тот отрезок множества I_n, который содержит точку x. Если n достаточно большое, то $\Lambda_n \subset \sigma_x$. Обозначим через a_n тот конец отрезка Λ_n, который не совпадает с x. Из построения множества K следует, что $a_n \in K$. Значит, произвольная окрестность точки x — множество Σ_x — содержит точку $a_n \neq x : a_n \in \Lambda_n \subset \sigma_x \subset \Sigma_x$, т. е. точка x — предельная для множества K и, следовательно, K — совершенно.

Докажем теперь, что K — нигде не плотное множество на отрезке $[0, 1]$, рассматриваемом как метрическое пространство с обычным евклидовым расстоянием. Поскольку любое открытое множество на отрезке содержит внутри себя интервал, то достаточно показать, что любой интервал (шар) содержит внутри себя другой интервал, не содержащий точек множества K. Пусть σ— произвольный интервал отрезка $[0, 1]$. Если он не содержит точек множества K, то построение в этом случае закончено. Если же имеется точка $x\subset K$ и $x\in\sigma$, то мы можем выбрать столь большое m, что $x\in\Lambda_m\subset I_m$ и $\Lambda_m\subset\sigma$, m — натуральное. Возьмем интервал длины ${}^1/_{3}{}^{m+1}$ с центром в середине Λ_m. Этот интервал не содержит точек множества K и содержится в σ.

Таким образом, множество K нигде не плотно на отрезке $[0, 1]$.

Замечание. Легко видеть, что если множество замкнуто и не является нигде не плотным, то оно целиком содержит некоторый шар.

Действительно, допустим противное, что шара, состоящего целиком из точек данного замкнутого множества, нет, т. е., какой бы шар мы ни взяли, в нем всегда найдется точка дополнения к данному множеству. Поскольку дополнение открыто, то любая точка дополнения входит в него с некоторым шаром, принадлежащим дополнению. Таким образом, получается, что в любом шаре найдется другой шар, свободный от точек данного множества, т. е. множество является нигде не плотным.

Получилось противоречие.

4. Сходимость. Непрерывные отображения

Определение 11. Последовательность $\{a_n\}$ точек метрического пространства называется *сходящейся* к точке a этого пространства, если любая окрестность точки a содержит все точки последовательности, за исключением конечного их числа. Если последовательность a_n сходится к a, то пишут $a_n\to a$, $n\to\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$.

Непосредственно из данного определения следует, что если $a_n\to a$, то $\rho(a_n, a)\to 0$, $n\to\infty$.

Справедлива

Лемма 3. *Точка $a\in R$ принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a.*

Если $a_n\to a$, то каждая окрестность точки a содержит точки из $\{a_n\}$ и, значит, пересекается с A, т. е. $a\in\bar{A}$.

Обратно, пусть $a\in\bar{A}$. Рассмотрим последовательность шаров $O(a, 1/n)$. В каждом из них есть точки из A (п. 1 утверждения 1). Взяв для каждого n по одной такой точке a_n, получим последовательность $\{a_n\}$, где $a_n\in O(a, 1/n)$. Эта последовательность сходится к a, так как $\rho(a, a_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Определение 12. Отображение g одного метрического пространства $R=(X, \rho)$ в другое $R_0=(Y, \rho_0)$ называется *непрерывным в точке* x, если для каждой окрестности $\Sigma_{g(x)}$ точки $g(x)$ найдется такая окрестность Σ_x точки x, что $g(\Sigma_x)\subset\Sigma_{g(x)}$. Если g

непрерывно в каждой точке, то оно называется *непрерывным на* R.

Лемма 4. *Отображение* $g:R\to R_0$ *непрерывно тогда и только тогда, когда полный прообраз любого открытого множества открыт.*

Пусть g — непрерывное отображение и G_0 — открытое множество в R_0. Если полный прообраз G_0 не пуст, то он — открытое множество. Действительно, если $a\in g^{-1}(G_0)$, то, поскольку g непрерывно в точке a, существует такая окрестность Σ_a точки a, что $g(\Sigma_a)\subset G_0$, т. е. Σ_a принадлежит $g^{-1}(G_0)$ — полному прообразу множества G_0. Поскольку $g^{-1}(G_0)=\bigcup\limits_{a\in g^{-1}(G_0)}\Sigma_a$, то $g^{-1}(G_0)$ — открытое множество, как объединение открытых. Если полный прообраз G_0 — пустое множество, то его открытость очевидна. Обратно, если полный прообраз любого открытого в R_0 множества открыт, то, взяв точку $a\in X$ и произвольную окрестность $\Sigma_{g(a)}$ ее образа, мы имеем, что $g^{-1}(\Sigma_{g(a)})$ — открытое множество в R, образ которого содержится в $\Sigma_{g(a)}$, т. е. g — непрерывно.

Утверждение 3. *Пусть* $g:X\to Y$ — *отображение метрического пространства* X *в метрическое пространство* Y. *Непрерывность* g *эквивалентна следующему свойству: если* $x_0, x_n\in X$, $n=1, 2, 3, \ldots$ *и* $x_n\to x_0$, *то* $g(x_n)\to g(x_0)$.

Пусть g непрерывно и $x_n\to x_0$. Для каждой окрестности $\Sigma_{g(x_0)}\subset Y$ существует окрестность $\Sigma_{x_0}\subset X$ такая, что $g(\Sigma_{x_0})\subset\Sigma_{g(x_0)}$. Окрестность Σ_{x_0} содержит все точки x_n начиная с некоторого номера $n_0: x_n\in\Sigma_{x_0}$ при $n\geqslant n_0$. Но тогда $g(x_n)\in g(\Sigma_{x_0})\subset\Sigma_{g(x_0)}$ для $n\geqslant n_0$. Таким образом, любая окрестность $\Sigma_{g(x_0)}$ точки $g(x_0)$ содержит все точки $\{g(x_n)\}$, кроме конечного числа, т. е. $g(x_n)\to g(x_0)$.

Обратно, пусть $\Sigma\subset Y$ — открытое множество, $G=\{x\in X: g(x)\in\Sigma\}$ — его прообраз. Если бы G не было открытым, то некоторая его точка x_0 принадлежала бы замыканию дополнения G. Тогда (см. лемму 3) существовала бы последовательность $\{x_n\}$, где все $x_n\overline{\in} G$, сходящаяся к x_0. Тогда мы имели бы, с одной стороны, что $g(x_n)\overline{\in} g(G)$ и, значит, $g(x_n)\overline{\in}\Sigma$, а, с другой стороны, $g(x_n)\to g(x_0)\in\Sigma$. Это противоречит открытости Σ.

Определение 13. Отображение g метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *гомеоморфным*, если g отображает X на Y взаимно-однозначно и g непрерывно вместе с g^{-1}.

Примеры.

1. Очевидно, что отображение $g:X\to X$ метрического пространства X в себя, определенное по правилу $g(x)=x$ для любого $x\in X$, — непрерывно. Такое отображение называется единичным и обозначается символом E.

2. Функция расстояния $\rho(x, y)$, отображающая $X\times X$ в $\mathbf{R}^1$ — непрерывная функция. Непрерывность ее следует из неравенства

четырехугольника $|\rho(x, z)-\rho(y, u)| \leqslant |\rho(x, y)+\rho(z, u)|$, которое, очевидно, получается из двух неравенств $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z) \leqslant \rho(x, y)+\rho(y, u)+\rho(u, z)$, $\rho(y, u) \leqslant \rho(y, x)+\rho(u, x) \leqslant \rho(y, x)+\rho(x, z)+\rho(z, u)$, если из первого вычесть $\rho(y, u)$, а из второго $\rho(x, z)$. При $z=u$ получается второе неравенство треугольника:

$$|\rho(x, z)-\rho(y, z)| \leqslant \rho(x, y).$$

5. Компактность

Покрытием множества A в метрическом пространстве называется любое семейство открытых множеств, объединение которых содержит A.

Определение 14. Метрическое пространство (X, ρ) (подмножество метрического пространства) называется *компактным* или *компактом*, если любое его покрытие содержит конечное подпокрытие. Пространство R называется *локально-компактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Примером компактного метрического пространства может служить отрезок $[0, 1]$, рассматриваемый как метрическое пространство с обычным евклидовым расстоянием. Примером локально-компактного пространства является пространство $\mathbf{R}^1$ (или $\mathbf{R}^n$, $n>1$) или, например, пространство $\mathbf{C}$ — комплексная плоскость с обычным расстоянием.

Определение 15. Система подмножеств $\{A_\alpha\}$ множества A называется *центрированной*, если любое конечное подсемейство этой системы имеет непустое пересечение.

Справедливы следующие леммы.

Лемма 5. *Для того чтобы метрическое пространство $R=(X, \rho)$ было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждая центрированная система замкнутых его подмножеств имела непустое пересечение.*

Пусть пространство X — компактно и пусть $\{F_\alpha\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств. Множества $G_\alpha = X\setminus F_\alpha$ открыты, и никакая конечная система из этих множеств $G_{\alpha_n}, 1 \leqslant n \leqslant N < \infty$ не покрывает X. Значит, поскольку X — компактно, $\{G_\alpha\}$ не могут служить покрытием компактного пространства X. В противном случае мы смогли бы выбрать конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_1}, \ldots, G_{\alpha_n}\}$ пространства X из системы $\{G_\alpha\}$, а это означало бы, что $F_{\alpha_1} \cap \ldots \cap F_{\alpha_n} = \varnothing$. Но, если $\{G_\alpha\}$ не покрывает X, то $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ не пусто.

Обратно, пусть любая центрированная система замкнутых подмножеств из R имеет непустое пересечение. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое покрытие X. Положим $F_\alpha = X\setminus G_\alpha$ и заметим, что так как $\{G_\alpha\}$ покрывает все X, то $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha = \varnothing$. Значит $\{F_\alpha\}$ не является центрированной, т. е. существуют такие $F_1, F_2, \ldots, F_M$, что

$\bigcap_{i=1}^{M} F_i = \varnothing$, $M < \infty$, но тогда $\{G_i\}_{i=1}^{M} = \{X \setminus F_i\}_{i=1}^{M}$ — конечное подпокрытие покрытия $\{G_\alpha\}$.

Лемма 6. *Замкнутое подмножество компактного метрического пространства компактно* *).

Пусть F — замкнутое подмножество компактного метрического пространства X и $\{\Sigma_\alpha\}$ — некоторая система открытых множеств, покрытие F. К системе $\{\Sigma_\alpha\}$ присоединим открытое множество $G = X \setminus F$ и полученное покрытие всего пространства обозначим через $\{\Sigma_\alpha^1\} = \{\Sigma_\alpha\} \cup G$. Выберем в силу компактности X из системы $\{\Sigma_\alpha^1\}$ конечное покрытие всего пространства — систему $\{\Sigma_i^1\}_{i=1}^{N}$. Выбрасывая, если это необходимо, из системы $\{\Sigma_i^1\}_{i=1}^{N}$ множество G, мы получим конечное покрытие множества F, выбранное из системы $\{\Sigma_\alpha\}$.

Лемма 7. *Образ компактного пространства X при непрерывном отображении — компактное пространство.*

Пусть g — непрерывное отображение X на Y. Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — покрытие Y открытыми множествами, а $\Psi_\alpha = g^{-1}(\Sigma_\alpha)$. Множества Ψ_α открыты (см. лемму 4) и $\{\Psi_\alpha\}$ — покрытие X. Выберем из этого покрытия в силу компактности X конечное подпокрытие: $\{\Psi_i\}_{i=1}^{M}$, тогда $\{\Sigma_i\}_{i=1}^{M}$, $M < \infty$ — покрытие Y, $\Sigma_i = g(\Psi_i)$, $i = 1, \ldots, M$.

Лемма 8. *Компактное подмножество, рассматриваемое как подпространство метрического пространства X, замкнуто.*

Пусть F — компактное подмножество и пусть $a \in X \setminus F$; для любой точки $x \in F$ существуют окрестности Σ_a и Σ_x точек a и x соответственно, такие, что $\Sigma_a \cap \Sigma_x = \varnothing$. В качестве таких окрестностей можно, например, взять шары $O(a, r)$ и $O(x, r)$, $r = \frac{1}{3}\rho(a, x)$. Множество $G = \bigcup_{x \in F} \Sigma_x$ — покрытие множества F. В силу компактности F выберем из этого покрытия конечное подпокрытие: $\{\Sigma_{x_i}\}_{i=1}^{M}$. Рассмотрим соответствующие Σ_{x_i} окрестности Σ_a^i, которые по построению не пересекаются с Σ_{x_i} и таковы, что $\bigcap_{i=1}^{M} \Sigma_a^i = \Sigma$, является окрестностью точки a. Очевидно, что $\Sigma \cap \Sigma_{x_i} = \varnothing$, $i = 1, \ldots, M$, и поэтому $\Sigma \cap F = \varnothing$. Значит, $\Sigma \subset X \setminus F$, т. е. множество $X \setminus F$ — открыто, а F — замкнуто.

Лемма 9. *Пусть $g: X \to \mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^1$ — действительная числовая ось. Если g — непрерывное отображение, а X — компакт, то g ограничено и достигает своих верхней и нижней граней.*

Пусть $g(X)$ — непрерывный образ компакта (компактного пространства). По лемме 7 подмножество $g(X)$ метрического пространства $\mathbf{R}^1$ — компактно, поэтому оно ограничено и замкнуто. Это, очевидно, означает, что существует такое неотрицательное

---

*) Множество, замыкание которого есть компакт, называется *предкомпактным*.

число T, что $|g(x)| \leqslant T$ и $g(X)$ содержит свои верхнюю и нижнюю грани.

Выше было дано (см. определение 8) понятие относительно открытого и относительно замкнутого множества. Подчеркнем еще раз, что понятия открытости или замкнутости множества относительны в том смысле, что одно и то же множество может быть открытым в одном пространстве и не быть открытым в другом метрическом пространстве, содержащем первое.

Приведем еще один пример, поясняющий это. Отрезок $I = [0, 1]$ — открытое множество в метрическом пространстве (Y, ρ), где $Y=[0, 1]$, а ρ — обычная евклидова метрика на отрезке. С другой стороны, этот же отрезок $[0, 1]$ не является открытым множеством в метрическом пространстве (X, ρ), где $X=(-\infty, \infty)$, а ρ — та же функция. Заметим, что Y — подпространство пространства X, $I=Y\subset X$.

Однако компакт — понятие абсолютное, т. е. не зависящее от объемлющего пространства. Справедливо.

Утверждение 4. *Пусть* (F, ρ), (Y, ρ), (X, ρ) — *метрические пространства, причем* $F\subset Y\subset X$. *Тогда множество* F *одновременно компактно в* Y *и в* X.

Предположим, что F — компакт в X. Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — семейство множеств, открытых относительно Y, и $F\subset\bigcup\limits_\alpha \Sigma_\alpha$. Согласно определению 8 при каждом α существует множество G_α, открытое относительно X, такое, что $\Sigma_\alpha = Y\cap G_\alpha$. Поскольку F — компакт в X, мы имеем $F\subset G_{\alpha_1}\cup\ldots\cup G_{\alpha_n}$ при некотором выборе конечного числа индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Так как $F\subset Y$, то из последнего включения следует, что $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. Тем самым доказано, что множество F компактно в (Y, ρ).

Пусть теперь F компактно в Y. Пусть $\{G_\alpha\}$ — открытое в X покрытие F и $\Sigma_\alpha = Y\cap G_\alpha$. Тогда существует конечное число индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, что $F\subset\Sigma_{\alpha_1}\cup\ldots\cup\Sigma_{\alpha_n}$. Поскольку $\Sigma_\alpha\subset G_\alpha$, то справедливо включение $F\subset G_{\alpha_1}\cup\ldots\cup G_{\alpha_n}$. Тем самым F компактно в X.

Положив в этом утверждении $Y=F$, получаем, что F — компактно относительно какого-либо объемлющего пространства тогда и только тогда, когда оно компактно «относительно себя», т. е. просто компактно.

6. База топологии пространства

Определение 16. Система открытых множеств $\{\Sigma_\alpha\}$ метрического пространства (X, ρ) называется *базой топологии* этого пространства, если всякое непустое открытое множество пространства X может быть получено как объединение некоторых множеств из системы $\{\Sigma_\alpha\}$.

Простейшим примером базы топологии, сокращенно — базы, является совокупность всех открытых множеств данного пространства. Справедлив следующий факт, позволяющий устанавливать, является ли данная система базой пространства.

Лемма 10. *Для того чтобы система $\{\Sigma_\alpha\}$ открытых множеств была базой пространства (X, ρ), необходимо и достаточно, чтобы для всякого открытого множества G и всякой точки $a \in G$ нашлось такое множество Σ_{α_0} из данной системы, что $a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset G$.*

Пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — база пространства X и пусть G — произвольное открытое множество и $a \in G$. Тогда существует подсистема $\{\Sigma_{\alpha_k}\}$ такая, что $G = \bigcup\limits_k \Sigma_{\alpha_k}$, значит, существует Σ_{α_0} такое, что $a \in \Sigma_{\alpha_0} \subset \bigcup\limits_k \Sigma_{\alpha_k} = G$.

Обратно, если условия леммы выполнены, то для любой точки $x \in G$ найдется такая окрестность Σ_x из системы $\{\Sigma_\alpha\}$, что $x \in \Sigma_x \subset G$. Тогда $G = \bigcup\limits_{x \in G} \Sigma_x$, а поэтому $\{\Sigma_\alpha\}$ — база пространства X.

Таким образом, в метрическом пространстве совокупность, например, открытых шаров образует базу.

Определение 17. Метрическое пространство (X, ρ) называется *пространством со счетной базой*, если в нем существует хотя бы одна база, состоящая не более чем из счетного числа множеств. Пространства со счетными базами называют еще *пространствами со второй аксиомой счетности.*

Лемма 11. *Метрическое пространство (X, ρ) является пространством со счетной базой тогда, когда в нем имеется счетное всюду плотное множество. Обратно, если в пространстве X имеется счетная база, то в нем есть и счетное всюду плотное множество.*

Пусть $A = \{a_n\}_1^\infty$ — счетное всюду плотное множество в X. Всевозможные шары $O(a_n, 1/m)$, где n, m — всевозможные натуральные числа, образуют базу пространства, причем счетную.

Обратно, если в X имеется счетная база $\{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty$, то, выбрав по точке $a_n \in \Sigma_n$, мы получаем множество $A = \{a_n\}_{n=1}^\infty$, которое всюду плотно. Действительно, если бы $\bar{A} \neq X$, то открытое множество $G = X \diagdown \bar{A}$ было бы не пустым и не содержало бы ни одной точки из $A = \{a_n\}$, что невозможно, так как G — открытое множество и оно есть объединение некоторых из множеств системы $\{\Sigma_n\}$, а $a_n \in \Sigma_n$.

Примеры.

1. Можно построить метрическое пространство (X, ρ) и замкнутые шары $K_1(x_1, r_1)$ и $K_2(x_2, r_2)$ такие, что $K_1 \subset K_2$, а $r_1 > r_2$.

Действительно, пусть (X, ρ) — метрическое пространство, состоящее из всех точек (x, y) замкнутого круга на плоскости $xy: X \equiv \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ с обычной евклидовой метрикой ρ. Шар K_2 определим так: $K_2 \equiv (X, \rho)$. Пусть шар $K_1 \equiv K_2 \cap \{(x, y) : (x-2)^2 + y^2 \leqslant 16\}$. Тогда $K_1 \subset K_2$, $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, $r_1 > r_2$.

2. Множество A метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием $\bar{A}$, т. е. $A = \bar{A}$.

Действительно, если $A = \bar{A}$, то, так как замыкание любого множества замкнуто (как пересечение замкнутых), A — замкнуто. Обратно, всегда $A \subset \bar{A}$, и если A замкнуто, то в нем содержится пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A, т. е. $\bar{A} \subset A$. С другой стороны, по самому определению замыкания $A \subset \bar{A}$, т. е. если A — замкнуто, то $\bar{A} = A$.

Тем самым показано, что множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки (см. утверждение 2).

3. Шар $O(x_0, r)$ в метрическом пространстве X — открытое множество.

Если $x \in O(x_0, r)$, т. е. $\rho(x, x_0) < r$, то шар $O(x, \varepsilon)$ при $0 < \varepsilon < r - \rho(x_0, x)$ будет принадлежать исходному множеству: $O(x, \varepsilon) \subset O(x_0, r)$. Действительно, если $y \in O(x, \varepsilon)$, т. е. $\rho(x, y) < \varepsilon$, то

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x) + \rho(x, y) < \rho(x_0, x) + r - \rho(x_0, x) = r.$$

Точно так же замкнутый шар — множество $K(x, r) = \{y : \rho(x, y) \leqslant r\}$ есть замкнутое множество в X. Это следует из того, что его дополнение есть открытое множество.

4. В метрическом пространстве (X, ρ) можно построить открытый шар $O(x, r) = \{y : \rho(x, y) < r\}$ и замкнутый шар $K(x, r) = \{y : \rho(x, y) \leqslant r\}$ с общим центром и равными радиусами, такие, что

$$\bar{O}(x, r) \neq K(x, r).$$

Действительно, пусть X — множество, состоящее более чем из одной точки, и пусть

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ). Пусть x — произвольная точка из X. Тогда $O(x, 1) = \{x\}$, $K(x, 1) = X$. Поскольку здесь предельных точек у шара $O(x, 1)$ нет, то $\bar{O}(x, 1) = O(x, 1) \neq K(x, 1)$.

5. Пусть $\mathbf{R}^2$ — двумерная плоскость с обычным евклидовым расстоянием. Пусть O_1 — подпространство $\mathbf{R}^2$, единичная окружность: $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим через I_1 промежуток действительной оси $[0, 2\pi)$. Зададим отображение множества $I = [0, 2\pi)$ на единичную окружность O_1 с помощью формул: $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi$, $\varphi \in I_1$. Непрерывность и взаимная однозначность этого отображения очевидна, однако обратное отображение пространства O_1 на пространство I_1 не является непрерывным в точке с координатами $x = 1$, $y = 0$.

6. Если последовательность $\{a_n\}$ точек множества Y метрического пространства сходится к точке a метрического пространства, то точка a либо предельная для множества Y, либо изолированная точка множества Y.

Действительно, если $a_n \to a$, то любая окрестность Σ_a точки a содержит все точки последовательности $\{a_n\}$, за исключением конечного их числа. Поэтому в любой окрестности Σ_a точки a либо найдется точка последовательности $a_n \in Y$, $a_n \neq a$, и тогда a — предельная для Y, либо существует такая окрестность точки a, где нет точек из последовательности $\{a_n\}$, отличных от a, и тогда a — изолированная точка множества Y.

7. Пусть (X, ρ) и (Y, ρ_1) — метрические пространства и $g : X \to Y$. Отображение g будет непрерывным в точке $a \in X$ тогда и только тогда, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\rho_1(g(x), g(a)) < \varepsilon$ для любого x такого, что $\rho(x, a) < \delta$.

Действительно, зафиксируем $a \in X$ и $\varepsilon > 0$ и пусть $O_0(g(a), \varepsilon)$ — шар в пространстве Y радиуса ε и с центром в $g(a)$: $\{y : \rho_1(g(a), y) < \varepsilon\}$. $O_0(g(a), \varepsilon)$ — открытое множество в Y. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что точка a входит в $g^{-1}(O_0)$ вместе с шаром $O(a, \delta)$ радиуса $\delta : \{x : \rho(a, x) < \delta\}$. Но если $x \in g^{-1}(O_0)$, то $g(x) \in O_0$, поэтому $\rho_1(g(a), g(x)) < \varepsilon$. Обратное очевидно. Заметим, что если a — изолированная точка множества $A \subset X$, то из доказанного следует, что любое отображение g, определенное в этой точке, непрерывно в ней: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что в шаре $\rho(a, x) < \delta$ будет только одна точка $x = a$; тогда $\rho_1(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

8. Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы $\{\Sigma_\alpha\}$ его подмножеств $\bigcap\limits_\alpha \overline{\Sigma}_\alpha \neq \varnothing$.

В самом деле, если условия утверждения выполнены и $\{F_\alpha\}$ — произвольная центрированная система замкнутых подмножеств пространства, то согласно примеру 2, приведенному выше, и лемме 5 пространство компактно.

Обратно, пусть пространство компактно и пусть $\{\Sigma_\alpha\}$ — произвольная центрированная система его подмножеств. Рассмотрим систему $\{\overline{\Sigma}_\alpha\}$, где $\Sigma_\alpha \subset \overline{\Sigma}_\alpha$. Система $\overline{\Sigma}_\alpha$ — центрирована и согласно лемме 5 $\bigcap\limits_\alpha \overline{\Sigma}_\alpha \neq \varnothing$, так как множества $\overline{\Sigma}_\alpha$ — замкнуты (см. пример 2).

ЗАДАЧИ

1. Пусть A и B — два подмножества в метрическом пространстве X, число $\rho(A, B) = \inf\limits_{a \in A,\, b \in B} \rho(a, b)$ называется *расстоянием между подмножествами* A и B в X. Привести пример двух подмножеств A и B в метрическом пространстве X таких, что $A \cap B = \varnothing$, но $\rho(A, B) = 0$.

2. Доказать, что множество A всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих неравенству $a < f(x) < b$, где $a < b$ — заданные числа, является открытым множеством в $C\ [0, 1]$.

3. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ), где X — числовая ось, а ρ — обычная евклидова метрика (пространство $\mathbf{R}^1$). Пусть $A = \{2^{p/q}\}$, где p и q — всевозможные натуральные числа. Найти замыкание множества A.

4. Доказать, что множество точек вида $\sin r$ (где r — всевозможные рациональные числа отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$) всюду плотно на отрезке $[-1, 1]$.

5. Показать, что в пространстве $C[a, b]$ существуют замкнутые ограниченные множества (множество A, расположенное в метрическом пространстве (X, ρ), *ограничено*, если существует такое число $N > 0$, что $\rho(x, a) \leqslant N$ для лю-

бой точки $a \in A$, где x — некоторая точка пространства X), не являющиеся компактными в $C[a, b]$.

6. Построить на прямой $\mathbf{R}^1$ непустое совершенное множество, все точки которого иррациональны.

7. Доказать, что на прямой $\mathbf{R}^1$ связными множествами являются только промежутки (включая и бесконечные): интервалы, полуинтервалы, отрезки.

8. Отображение g одного метрического пространства (X, ρ) на другое (Y, ρ_0) называется *открытым*, если любое открытое множество A в X переходит в открытое множество $g(A)$ в Y. Докажите, что отображение g открыто тогда и только тогда, когда для любой точки $a \in X$ и любой ее окрестности Σ_a в X существует окрестность $\Sigma_{g(a)}$ точки $g(a) \in Y$ такая, что $\Sigma_{g(a)} \subset g(\Sigma_a)$.

9. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, пусть (Y, ρ) — его подпространство. Пусть система $\{\Sigma_\alpha\}$ — база в X. Обозначим через $\{\sum_\alpha^0\}$ совокупность всех множеств вида $\Sigma_\alpha \cap Y$. Тогда $\{\sum_\alpha^0\}$ — база в Y. Доказать.

10. На множестве X непрерывных функций, определенных на отрезке $[a, b]$, задать две такие функции расстояния ρ и ρ_0, чтобы дополнение единичного шара в пространстве (X, ρ) было всюду плотно в единичном шаре пространства (X, ρ_0).

§ 3. СВОЙСТВА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В предыдущем параграфе были изложены основные свойства метрических пространств, базирующиеся на понятии открытого и замкнутого множества. Следует подчеркнуть, что фактически все утверждения предыдущего параграфа используют только свойства открытых множеств: объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое, все пространство и пустое множество открыты и не используют такие понятия, как шар, расстояние. Вместе с тем, поскольку в структуру метрического пространства введена функция расстояния, эти пространства должны обладать своими, присущими только им свойствами. Более того, чаще всего именно эти свойства и изучаются при рассмотрении метрических пространств.

В настоящем параграфе и изложены эти фундаментальные свойства метрических пространств. Все они используют понятие полноты пространства.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$, $n=1, 2, \ldots$ элементов метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной*, если $\rho(x_n, x_m) \to 0$, когда $n, m \to \infty$; n, m — натуральные числа.

Заметим, что, как уже говорилось, если последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x пространства, то $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Очевидно также, что если последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу x, то в силу неравенства треугольника $\rho(x_n, x_m) \leqslant \leqslant \rho(x_n, x) + \rho(x_m, x) \to 0$ при $n, m \to 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной.

С другой стороны, не всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства (X, ρ) является сходящейся последовательностью в данном пространстве.

Действительно; рассмотрим, например, в качестве метрического пространства (X, ρ) интервал $(0, 1) = X$ с обычным расстоянием

ρ между числами этого интервала. Последовательность $\{1/n\}$, $n=1, 2, \ldots$, является, очевидно, фундаментальной, поскольку $\rho\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\to 0$, когда $n, m\to\infty$, но эта последовательность не сходится ни к какому элементу множества $X=(0, 1)$, т. е. не является сходящейся в пространстве (X, ρ).

В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 2. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом этого пространства.

Приведенный выше пример показывает, что не всякое метрическое пространство является полным. Поэтому возникает вопрос: можно ли каким-нибудь способом пополнить неполное метрическое пространство?

Ниже будет дан утвердительный ответ на этот вопрос.

Приведем примеры полных метрических пространств.

Примеры.

1. Полнота пространства $\mathbf{R}^n$ вытекает из полноты $\mathbf{R}^1$ — действительных чисел. Действительно, пусть $\{\xi^{(p)}\}$ — фундаментальная последовательность точек из $\mathbf{R}^n$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $N=N(\varepsilon)$, что

$$\rho(\xi^{(p)}, \xi^{(q)})=\left(\sum_{k=1}^{n}(\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)})^2\right)^{1/2}<\varepsilon$$

при всех $p, q>N$. Здесь

$$\xi^{(p)}=(\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots, \xi_n^{(p)}),\ \ \xi^{(q)}=(\xi_1^{(q)}, \xi_2^{(q)}, \ldots, \xi_n^{(q)}).$$

Тогда для любого $k=1, 2, \ldots$, тем более

$$|\xi_k^{(p)}-\xi_k^{(q)}|<\varepsilon,$$

т. е. $\{\xi_k^{(p)}\}$ — фундаментальная числовая последовательность. Пусть $\xi_k=\lim\limits_{p\to\infty}\xi_k^{(p)}$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$. Очевидно, что $\lim\limits_{p\to\infty}\xi^{(p)}=\xi$.

2. Установим полноту пространства $C[a, b]$. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует такое N, что

$$\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

при $n, m>N$. Отсюда вытекает, что последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится на $[a, b]$ равномерно. В этом случае ее предел $x(t)$ будет непрерывной функцией. Устремляя в неравенстве $|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$ к бесконечности m, получим

$$|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon$$

для всех $t \in [a, b]$ и для $n > N$. Следовательно, $\{x_n(t)\}$ сходится к $x(t)$ в смысле метрики пространства $C[a, b]$.

1. Пополнение метрических пространств

Определение 3. Взаимно-однозначное отображение g одного метрического пространства (X, ρ) на другое (Y, ρ_0) называется *изометрией*, если для любых точек $x_1, x_2 \in X$ справедливо соотношение $\rho(x_1, x_2) = \rho_0(g(x_1), g(x_2))$. В этом случае пространства (X, ρ) и (Y, ρ_0) называются *изометричными* друг другу.

Определение 4. Полное метрическое пространство (Y, ρ_0) называется *пополнением* метрического пространства (X, ρ), если (X, ρ) является подпространством (Y, ρ_0) и замыкание подпространства (X, ρ) совпадает со всем (Y, ρ_0).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для любого метрического пространства* (X, ρ) *существует его пополнение* (Y, ρ_0). *Это пополнение* (Y, ρ_0) *единственно с точностью до изометрии.*

Пусть (X, ρ) — произвольное метрическое пространство. Назовем две фундаментальные последовательности $\{x_n\}$ и $\{x'_n\}$ из X эквивалентными и обозначим $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$. Это отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Значит, все фундаментальные последовательности, которые можно составить из точек пространства X, распадаются на классы эквивалентных между собой последовательностей. Определим теперь пространство (Y, ρ_0). В качестве Y мы возьмем множество классов эквивалентных между собой последовательностей. Обозначим эти классы так: $x_0, y_0, \ldots$, а расстояние введем по правилу: $\rho_0(x_0, y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$, где $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — произвольные фундаментальные последовательности из классов x_0 и y_0 соответственно. Указанный предел существует и не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$. Действительно, $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m)| \leqslant \rho(y_n, y_m) + \rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, если $n, m \geqslant N(\varepsilon)$, так как последовательности фундаментальные. Поэтому числовая последовательность $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$ фундаментальна и в силу полноты $\mathbf{R}^1$ имеет предел. Пусть теперь $\{x_n\}$ и $\{x'_n\} \in x_0$, $\{y_n\}$ и $\{y'_n\} \in y_0$. Тогда также $|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n)| \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, если $n \geqslant N(\varepsilon)$, так как $\{x_n\} \sim \{x'_n\}$, $\{y_n\} \sim \{y'_n\}$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x'_n, y'_n)$ и число $\rho_0(x_0, y_0)$ не зависит от выбора представителей классов x_0 и y_0.

В пространстве Y, очевидно, выполняются все аксиомы метрического пространства. Так, неравенство треугольника получается из неравенства треугольника в X путем предельного перехода.

Покажем теперь, что метрическое пространство Y является пополнением пространства X. Пусть $x \in X$. Рассмотрим стационарную последовательность $\{x_n\}$, $x_n = x$. Очевидно, она фундаментальна. Обозначим через $\tilde{x}$ элемент Y, являющийся классом эквивалентных ей фундаментальных последовательностей. Непосредственно проверяется, что для любых $x_1, x_2 \in X$ $\rho(x_1, x_2) = \rho_0(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Это означает, что пространство X изометрично своему образу $\tilde{X} \subset Y$ при отображении $x \to \tilde{x}$. Отождествим X и $\tilde{X}$ и будем считать, что X есть подпространство Y. Докажем теперь, что оно плотно в Y. Пусть $x_0 \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Выберем какую-нибудь фундаментальную последовательность $\{x_n\}$ из класса x_0. Тогда существует такое N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при любых $n, m > N$. Возьмем элемент $\tilde{x}_N = \{x_N, x_N, ..., x_N, ...\} \in \tilde{X}$. Тогда $\rho_0(x_0, \tilde{x}_N) < \varepsilon$.

Докажем, что Y полно. Пусть $x_0^1, x_0^2, \ldots$ — фундаментальная последовательность точек из Y. Поскольку X плотно в Y, можно указать такие точки $x_n \in X$, что $\rho_0(\widetilde{x}_n, x_0^n) < \dfrac{1}{n}$. Из аксиомы треугольника получим

$$\rho(x_m, x_n) = \rho_0(\widetilde{x}_m, \widetilde{x}_n) \leqslant \rho_0(\widetilde{x}_m, x_0^m) + \rho_0(\widetilde{x}_n, x_0^n) + \rho_0(x_0^m, x_0^n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \rho_0(x_0^m, x_0^n).$$

Отсюда следует, что $\{x_n\}$ фундаментальна в X. Значит, ей соответствует некоторый элемент Y (по определению Y); обозначим его через x_0. Имеем далее:

$$\rho_0(x_0^n, x_0) \leqslant \rho_0(x_0^n, \widetilde{x}_n) + \rho_0(\widetilde{x}_n, x_0).$$

Каждое из слагаемых в правой части стремится к нулю при $n \to \infty$: первое — в силу выбора точек x_n, второе — из-за фундаментальности $\{x_n\}$ в X. Значит, x_0 является пределом (в Y) последовательности $\{x_0^n\}$, и Y полно.

Осталось доказать единственность пополнения. Пусть (Y, ρ_0) и (Y', ρ_0') — два пополнения пространства (X, ρ). Пусть x_0 — произвольная точка из пространства (Y, ρ_0). Тогда существует последовательность $\{x_n\}$ точек из (X, ρ), сходящаяся к x_0. Точки x_n принадлежат и (Y', ρ_0'). Так как Y' полно, а последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\{x_n\}$ сходится и в Y' к некоторой точке x_0', эта точка не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0. Определим отображение g пространства Y на Y' по правилу $g(x_0) = x_0'$. Это изометричное отображение пространства Y на Y' такое, что $g(x) = x$ для любых $x \in X$. Действительно, пусть

$$\{x_n\} \to x_0 \text{ в } Y, \qquad \{x_n\} \to x_0' \text{ в } Y',$$

$$\{y_n\} \to y_0 \text{ в } Y, \qquad \{y_n\} \to y_0' \text{ в } Y'.$$

Тогда

$$\rho_0(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} \rho_0(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$$

и

$$\rho_0'(x_0', y_0') = \lim_{n\to\infty} \rho_0'(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n).$$

Поэтому $\rho_0(x_0, y_0) = \rho_0'(x_0', y_0')$ и по построению отображение взаимно-однозначное, т. е. получили изометрию. То, что $g(x) = x$ для любого $x \in X$, очевидно по построению.

2. Основные теоремы в полных метрических пространствах

В этом пункте будут доказаны основные теоремы в полных метрических пространствах такие, как принцип вложенных шаров, теорема о категориях и принцип сжимающих отображений. Эти теоремы имеют большое значение при изучении метрических пространств, а также чаще всего будут использоваться в дальнейшем.

Справедлива теорема.

Теорема 2 (принцип вложенных шаров). *Для того чтобы метрическое пространство было полным, необходимо и достаточно, чтобы в нем всякая последовательность замкнутых вложенных друг в друга шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имела непустое пересечение.*

Необходимость. Пусть (X, ρ) — полное метрическое пространство, а $K_1(x_1, r_1) \supset K_2(x_2, r_2) \supset \ldots$ — вложенные друг в друга замкнутые шары. Последовательность их центров фундаментальна, так как $\rho(x_n, x_m) < r_n$ при $m > n$, а $r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Поскольку пространство X — полное, то существует элемент $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $x \in X$. Очевидно, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Действительно, для любого n x — предельная точка K_n. Так как все K_n замкнуты, то x принадлежит K_n для любого n, т. е. $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ (см. лемму 3 § 1).

Достаточность. Надо показать, что если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то она имеет предел $x \in X$. Выберем точку x_{n_1} такую, что $\rho(x_n, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$ для любого $n > n_1$. Примем x_{n_1} за центр замкнутого шара радиуса 1: $K(x_{n_1}, 1)$. Выберем далее точку x_{n_2} из последовательности $\{x_n\}$, удовлетворяющую следующим условиям: $\rho(x_n, x_{n_2}) < \frac{1}{2^2}$ для любого $n > n_2$, $n_2 > n_1$. Примем точку x_{n_2} за центр шара радиуса $\frac{1}{2}$: $K\left(x_{n_2}, \frac{1}{2}\right)$. Пусть $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_k)$ уже выбраны, тогда $x_{n_{k+1}}$ выберем так, чтобы выполнялись условия: $\rho(x_n, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{2^{k+1}}$ для любого $n \geqslant$

$\geqslant n_{k+1}$, $n_{k+1}>n_k$. Как и выше, примем $x_{n_{k+1}}$ за центр замкнутого шара радиуса $\frac{1}{2^k}$: $K\left(x_{n_{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$ и т. д. Мы получили последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. По предположению существует точка x, общая для всех шаров. Ясно, что $\rho(x_{n_k}, x)\to 0$, $n_k\to\infty$. Таким образом, фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x пространства. Тогда и сама последовательность сходится к этому же пределу. Действительно, применяя свойство треугольника для функции расстояния (см. § 1, определение 1), имеем

$$\rho(x_n, x)\leqslant \rho(x_n, x_{n_k})+\rho(x, x_{n_k})\to 0, \quad n, n_k\to\infty,$$

т. е. пространство X полное — всякая фундаментальная последовательность сходится к пределу, принадлежащему пространству.

Замечание. Все условия теоремы являются существенными: полнота пространства, замкнутость шаров, условие того, что они вложены, стремление их радиусов к нулю. Наименее очевидной является существенность последнего условия. Вот пример полного метрического пространства и последовательности вложенных друг в друга шаров, имеющих пустое пересечение.

Пусть $R=(\mathbf{N}, \rho)$, где $\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел, а

$$\rho(m, n)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{n+m}, & \text{если } n\neq m,\\ 0, & \text{если } n=m.\end{cases}$$

Определим последовательность замкнутых шаров с центрами в точках n и радиуса $1+\frac{1}{2n}$:

$$K\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right)=\left\{m:\rho(m, n)\leqslant 1+\frac{1}{2n}\right\}, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Тогда очевидно, что шары $K\left(n, 1+\frac{1}{2n}\right)$ замкнуты и вложены друг в друга, а пространство полно, поскольку каждая фундаментальная последовательность сходится в пространстве. Она является, как говорят, «почти постоянной». Однако пересечение этих шаров пусто.

Определение 5. Подмножество M метрического пространства X называется *множеством первой категории*, если его можно представить в виде объединения не более чем счетного числа нигде не плотных в X множеств.

Все остальные множества называются *множествами второй категории*.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (о категориях). *Пусть (X, ρ) — непустое полное метрическое пространство, тогда X — множество второй категории.*

гории, т. е. X нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Предположим противное, что $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и каждое из множеств A_n, $n=1, 2, \ldots$ нигде не плотно в X. Пусть K_0 — некоторый замкнутый шар радиуса единица. Поскольку множество A_1 нигде не плотно, то существует замкнутый шар K_1 радиуса меньше $1/2$ такой, что $K_1 \subset K_0$ и $K_1 \cap A_1=\varnothing$. Поскольку множество A_2 нигде не плотно, то точно так же существует замкнутый шар $K_2 \subset K_1$ радиуса меньше $1/2^2$, для которого $K_2 \cap A_2=\varnothing$, и т. д. В результате мы получаем последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$, радиусы которых стремятся к нулю. По теореме 1 существует точка $x \in K_n$ для любого целого n и $x \in X$. Так как по построению $K_n \cap A_n=\varnothing$, то $x \overline{\in} A_n$ для любого n. Значит, $x \overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Это противоречит предположению, что $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Определение 6. Отображение g метрического пространства X в себя называется *сжимающим*, если существует такое число $0<\alpha<1$, что $\rho(g(x), g(y))<\alpha\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$.

Теорема 4 (принцип сжимающих отображений). *Всякое сжимающее отображение полного метрического пространства (X, ρ) в себя имеет и притом только одну неподвижную точку, т. е. такую точку $x \in X$, что $g(x)=x$.*

Пусть x_0 — некоторая точка из X. Определим последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ по правилу: $x_1=g(x_0), \ldots, x_n=g(x_{n-1})$. Последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна в X. Действительно, если $m>n$, то

$$\rho(x_n, x_m)=\rho(g(x_{n-1}), g(x_{m-1})) \leqslant \alpha\rho(x_{n-1}, x_{m-1}) \leqslant \ldots \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_{m-n}) \leqslant \alpha^n\{\rho(x_0, x_1)+\rho(x_1, x_2)+\ldots+\rho(x_{m-n-1}, x_{m-n})\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-n-1}\} \leqslant \alpha^n\rho(x_0, x_1)\frac{1}{1-\alpha},$$

где $\alpha<1$. Таким образом, $\rho(x_n, x_m) \to 0$, $n \to \infty$, $m>n$. В силу полноты пространства X существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Пусть $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда в силу непрерывности отображения g (см. § 1, пример 8) имеем $g(x)=\lim\limits_{n\to 8} g(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}=x$. Следовательно, неподвижная точка существует. Докажем ее единственность. Если $g(x)=x$ и $g(y)=y$, то $\rho(x, y) \leqslant \alpha\rho(x, y)$, т. е. $\rho(x, y)=0$, поэтому $x=y$.

Замечание. Если отображение g метрического пространства X в себя обладает свойством, что $\rho(g(x), g(y))<\rho(x, y)$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, то неподвижной точки может и не быть. Вот соответствующий пример: рассмотрим пространство (X, ρ), где $X=[1, \infty)$, а ρ — обычная евклидова метрика. Пусть $g(x)=x+$

$+\frac{1}{x}$. Тогда $\rho(g(x), g(y)) = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| < |x-y|$. Неподвижной точки нет: $g(x) = x + \frac{1}{x} \neq x$ ни для какого $x \in X$.

Определение 7. Говорят, что два отображения g и g_1 метрического пространства (X, ρ) в себя *коммутируют*, если для всякого $x \in X$ справедливо равенство $g(g_1(x)) = g_1(g(x))$.

Теорема 5 (обобщение принципа сжимающих отображений). *Пусть g и g_1 — отображения полного метрического пространства (X, ρ) в себя. Тогда, если отображение g_1 сжимающее и отображения g и g_1 коммутируют, то уравнение $g(x) = x$ имеет решение.*

По теореме 3 существует и притом только одна точка x такая, что $g_1(x) = x$. Применим к обеим частям равенства отображение g. Воспользовавшись тем, что отображения коммутируют, получим $g(g_1(x)) = g(x)$ и, следовательно, $g_1(g(x)) = g(x)$, т. е. $g_1(y) = y$, где $y = g(x)$. Учитывая, что отображение g_1 сжимающее и неподвижная точка у этого отображения одна, получим, что $x = y = g(x)$. Поэтому и у отображения g есть неподвижная точка.

Замечание. *n-й степенью отображения* g называется отображение g^n, полученное в результате n последовательных применений отображения g:

$$g^n(x) = g(g(\dots g(x))\dots), \quad x \in X.$$

Из теоремы 5 следует, что если отображение g таково, что некоторая его степень — сжимающее отображение, то уравнение $g(x) = x$ имеет одно и только одно решение. Единственность решения следует из того, что всякая точка, неподвижная относительно отображения g, будет неподвижной и относительно g^n, а последнее отображение сжимающее.

Примеры.

1. Нахождение корней функций.

Пусть $\varphi(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, — действительная функция, удовлетворяющая условию Липшица

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leqslant \theta |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \in [a, b], \quad 0 < \theta < 1,$$

и отображающая отрезок $[a, b]$ в себя. Если ввести метрическое пространство (X, ρ), где $X = [a, b]$, а ρ — обычная евклидова метрика на отрезке, то отображение φ в X сжимающее, и поэтому числовая последовательность t_0, $t_1 = \varphi(t_0)$, $t_2 = \varphi(t_1)$, ... сходится к единственному корню уравнения $t = \varphi(t)$ для любого $t_0 \in [a, b]$. Отображение φ сжимающее, если, например, $|\varphi'(t)| \leqslant \theta < 1$ для всех $t \in [a, b]$.

Допустим, что необходимо решить уравнение вида $F(t) = 0$, причем $F(t)$ — действительная, определенная на $[a, b]$ функция и $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, $0 < \theta_1 \leqslant F'(t) \leqslant \theta_2$, $t \in [a, b]$. Тогда если рассмотреть функцию $\varphi(t) = t - \lambda F(t)$, $\lambda \in \mathbf{R}^1$ и найти корень уравнения $\varphi(t) = t$, то будет решена и исходная задача. К этому последнему уравнению можно применять предыдущие рассуждения, если, например, $|\varphi'(t)|\leqslant\theta<1$. Имеем, что $1-\lambda\theta_2\leqslant\varphi'(t)\leqslant1-\lambda\theta_1$, $\lambda>0$. Нетрудно подобрать действительное число $\lambda>0$, чтобы было выполнено условие $|\varphi'(t)|\leqslant\theta<1$.

2. Нахождение решений системы уравнений вида $y=Ax+b$.

Пусть $A=\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ — матрица, X—n-мерное пространство строк $(x_1,\ldots,x_n)$, $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+b_i$ —отображение пространства X в себя: набор $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$ переходит в набор $g(x)=$ $=(y_1, y_2, ..., y_n)$, т. е. $g(x)=Ax+b$.

Если отображение $g(x)$ будет в пространстве X с некоторой метрикой и при некоторых условиях сжимающим, то векторное уравнение $g(x)=x$ будет иметь по предыдущему одно и только одно решение. Найдем такие условия на отображение g и введем метрику на множестве X, т. е. образуем соответствующие метрические пространства. Рассмотрим следующие случаи:

a) Пусть

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i-x_i|;$$

тогда нетрудно получить оценку: если $y'=Ax'+b$, $y''=Ax''+b$, то

$$\rho_1(y',y'')\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\rho(x',x''),\qquad x',x'',y',y''\in X,$$

и условие того, что отображение g сжимающее, будет выполнено, если, например,

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant\alpha<1,\quad i=1,\ldots,n.$$

b) Если ввести метрику на X по правилу

$$\rho_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|,$$

то, как нетрудно убедиться, отображение g будет сжимающим, если

$$\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant\alpha<1,\quad j=1,\ldots,n.$$

c) Наконец, если метрика задана так:

$$\rho_3(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\Big]^{1/2},$$

то отображение g будет сжимающим, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \leqslant \alpha < 1.$$

Выписанные условия достаточны для того, чтобы уравнение $g(x)=x$ имело и притом единственное решение, или, что то же самое, чтобы система $x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + b_i$, $i=1, \ldots, n$ имела и притом одно решение.

3. Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

Пусть задана задача Коши

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \qquad y(t_0) = y_0, \quad t, t_0 \in [a, b].$$

Предположим, что функция $f(t, y)$ непрерывна на множестве: $a \leqslant t \leqslant b$, $-\infty < y < +\infty$ и удовлетворяет условию Липшица по y, т. е.

$$|f(t, y') - f(t, y'')| \leqslant K|y' - y''|$$

для любых y' и y''. Существование и единственность решения задачи Коши эквивалентны существованию и единственности решения интегрального уравнения: $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$. Рассмотрим отображение множества функций $\{y(t)\}$ по правилу: $g(y(t)) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi, y(\xi))\, d\xi$. Введем пространство $C[a, b]$, тогда задача о нахождении решения интегрального уравнения сводится к нахождению неподвижной точки отображения g, т. е. к нахождению функции y такой, что $g(y) = y$. Для того чтобы такая точка существовала и была одна, достаточно, чтобы отображение g было сжимающее.

Поскольку из условия Липшица следует, что

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|,$$

то для $y, z \in C[a, b]$ имеем

$$\rho(g(y), g(z)) \leqslant \max_{a \leqslant t \leqslant b} \left| \int_{t_0}^{t} K\rho(y, z)\, d\xi \right| = K(b-a)\,\rho(y, z),$$

$$\rho(y, z) = \max_{t \in [a, b]} |y(t) - z(t)|.$$

Следовательно, отображение сжимающее, если отрезок $[a, b]$ достаточно мал, т. е. если

$$K(b-a) = \theta < 1.$$

При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши на таком отрезке $[a, b]$.

4. Свойства оператора Вольтерра и его степени.

Покажем, что некоторая степень отображения, задаваемого интегральным оператором Вольтерра,

$$g(f(t)) = \lambda \int_a^t K(t, \xi) f(\xi)\, d\xi + \varphi(t),$$

λ — некоторое число, $K(t, \xi) \in C([a, b] \times [a, b])$, $\varphi(t) \in C[a, b]$ — непрерывные функции своих аргументов, есть сжимающее отображение в $C[a, b]$, $a \leqslant t \leqslant b$. Пусть

$$M = \max_{a \leqslant t, \xi \leqslant b} |K(t, \xi)|, \quad \rho(f_1, f_2) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

Тогда

$$|g(f_1(t)) - g(f_2(t))| = |\lambda| \left| \int_a^t K(t, \xi)(f_1(\xi) - f_2(\xi))\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \cdot M \cdot (t-a) \cdot \rho(f_1, f_2),$$

$$|g^2(f_1(t)) - g^2(f_2(t))| = |\lambda| \left| \int_a^t K(t, \xi)(g(f_1(\xi) - g(f_2(\xi)))\, d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda| \cdot M \cdot \int_a^t |\lambda| \cdot M \cdot (\xi - a)\, \rho(f_1, f_2)\, d\xi \leqslant \frac{|\lambda|^2 \cdot M^2 \cdot (t-a)^2}{2} \rho(f_1, f_2).$$

Отсюда

$$|g^n(f_1) - g^n(f_2)| \leqslant |\lambda|^n \cdot M^n \cdot \frac{(t-a)^n}{n!} \cdot \rho(f_1, f_2).$$

Всегда можно выбрать такое n, что $\frac{|\lambda|^n \cdot M^n \cdot (b-a)^n}{n!} < 1$ и при этом n отображение g^n будет сжимающим. Согласно замечанию после теоремы 5 интегральное уравнение вида $g(f) = f$ имеет при любом λ решение, притом единственное.

3. Компактность в метрических пространствах, ε-сеть

Продолжим дальнейшее изучение свойств метрических пространств и рассмотрим свойства компактного метрического пространства. Дадим следующее определение.

Определение 8. Пусть A — некоторое множество в метрическом пространстве (X, ρ) и ε — некоторое положительное число. Множество B из этого пространства называется *ε-сетью* для множества A (быть может $A = X$), если для любой точки $x \in A$ найдется хотя бы одна точка $y \in B$ такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть X — метрическое пространство. Следующие свойства пространства X эквивалентны:*

1) *X компактно;*

2) *X полно и для любого $\varepsilon>0$ в X существует конечная ε-сеть;*

3) *из любой последовательности точек X можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (так называемая секвенциальная компактность);*

4) *любое бесконечное подмножество в X имеет хотя бы одну предельную точку (так называемая счетная компактность).*

Доказательство проведем по «круговой схеме». Покажем, что из свойства 1) вытекает свойство 2).

Пусть X компактно. Докажем сначала его полноту. Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность в X. Положим $A_n=\{a_n, a_{n+1}, \ldots\}$ и $B_n=\bar{A}_n$. Из компактности следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$ непусто (так как $\{B_i\}$ — центрированная система замкнутых подмножеств). Пусть $a_0\in\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. Тогда для любых N и $\varepsilon>0$ в ε-окрестности точки a_0 имеются точки последовательности с номерами, большими N. Из этого и из фундаментальности $\{a_n\}$ следует, что a_0 — предел $\{a_n\}$. Поэтому пространство X полно.

Допустим теперь, что существует $\varepsilon_0>0$ такое, что в X нет конечной ε_0-сети. Возьмем произвольную точку $a_1\in X$. В X есть хотя бы одна точка, обозначим ее a_2, такая, что $\rho(a_1, a_2)>\varepsilon_0$. Если бы это было не так, то уже одна точка a_1 была бы ε_0-сетью в X. Точно так же найдется такая точка $a_3\in X$, что $\rho(a_1, a_3)>\varepsilon_0$ и $\rho(a_2, a_3)>\varepsilon_0$ и т. д. Пусть точки $a_1, \ldots, a_n$ уже выбраны, тогда, очевидно, найдется точка $a_{n+1}\in X$ такая, что $\rho(a_i, a_{n+1})>\varepsilon_0$, $i=1, \ldots, n$. Таким образом, построена бесконечная последовательность точек $a_1, a_2, \ldots$. Легко видеть, что каждое из множеств $A_n=\{a_n, a_{n+1} \ldots\}$ замкнуто. Они образуют центрированную систему с пустым пересечением, что противоречит компактности X.

Покажем теперь, что из свойства 2) следует свойство 3). Пусть $\{a_n\}$ — последовательность точек X. Выберем в X какую-нибудь конечную 1-сеть и построим вокруг каждой из точек, образующих ее, замкнутый шар радиуса 1. Объединение этих шаров покрывает все X, а число их конечно, поэтому по крайней мере один из них, скажем K_1, содержит бесконечную подпоследовательность $\{a_n^1\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{a_n\}$. Выбрав далее конечную 1/2-сеть и повторив для нее рассуждения, но уже примененные к $\{a_n^1\}$ вместо $\{a_n\}$, получим шар K_2 радиуса 1/2, содержащий подпоследовательность $\{a_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ последовательности $\{a_n^1\}$. Повторяя процесс дальше, для каждого m получим шар K_m радиуса $1/m$ и содержащуюся в нем подпоследовательность $\{a_n^m\}$ последовательности $\{a_n^{m-1}\}$. Рассмотрим теперь последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $b_n=a_n^n$. Очевидно, $\{b_n\}$ — подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$.

Кроме того, при $m \geqslant n_0$ $b_m \in \{a_n^{n_0}\}_{n=1}^{\infty} \subset K_{n_0}$. Это значит, что $\{b_n\}$ — фундаментальна, и в силу полноты X она имеет предел.

То, что из свойства 3) следует свойство 4), очевидно. Покажем, наконец, что из свойства 4) следует свойство 1). Для этого докажем сначала, что для любого $\varepsilon > 0$ в X можно выбрать конечную ε-сеть. Если бы это было не так, то, построив, как при доказательстве того, что из 1) следует 2), последовательность $a_1, a_2, \ldots$ мы получили бы бесконечное множество без предельных точек, а это противоречит предположению. Построим для каждого n конечную $1/n$-сеть. Рассмотрим объединение всех этих сетей. Полученное множество плотно в X и не более чем счетно. Таким образом, X сепарабельно и по лемме 11 § 2 обладает счетной базой. А для того, чтобы доказать компактность пространства, имеющего счетную базу, достаточно проверить, что лишь из любого счетного (а не произвольного бесконечного) открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие (и соответственно для центрированных систем замкнутых множеств). Действительно, пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное покрытие пространства X, а $\{V_n\}$ — его счетная база. Каждая точка $x \in X$ содержится в некотором U_α. По определению базы найдется некоторое $V_i \in \{V_n\}$ такое, что $x \in V_i \subset U_\alpha$. Если для каждой точки $x \in X$ мы рассмотрим такую окрестность V_i, то совокупность этих окрестностей будет счетным покрытием X. Если мы сможем выбрать из него конечное $\{V_{i_1}, \ldots, V_{i_n}\}$, то, взяв для каждого V_{i_j} содержащее его U_α, получим конечное подпокрытие исходного (не обязательно счетного) покрытия.

Таким образом, осталось доказать, что из любого счетного открытого покрытия X можно выбрать конечное подпокрытие. Докажем эквивалентное (по лемме 5 § 2) утверждение для замкнутых подмножеств.

Пусть $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ — центрированная система замкнутых подмножеств X. Покажем, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$. Пусть $\Phi_n = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_k$; ясно, что Φ_n замкнуты, непусты, поскольку система $\{F_n\}$ центрирована, и

$$\Phi_1 \supset \Phi_2 \supset \ldots, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Могут представиться два случая:

а) начиная с некоторого номера

$$\Phi_{n_0} = \Phi_{n_0+1} = \ldots = \Phi_{n_0+k} = \ldots$$

Тогда, очевидно,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \varnothing;$$

б) среди Φ_n имеется бесконечно много попарно различных. При этом, очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда все Φ_n различны между собой. Пусть $a_n \in \Phi_n \setminus \Phi_{n+1}$, тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ представляет собой бесконечное множество различных точек из X и в силу доказанного нами имеет хотя бы одну предельную точку, скажем a_0. Так как Φ_n содержит все точки $a_n, a_{n+1} \ldots$, то a_0 — предельная для каждого Φ_n и в силу замкнутости Φ_n (см. § 2, пример 2) $a_0 \in \Phi_n$ для любого n. Поэтому $a_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, т. е. $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ не пусто.

Из доказательства теоремы следует, что существование конечной ε-сети необходимо и достаточно для предкомпактности X.

ЗАДАЧИ

1. Построить метрическое пространство $R=(X, \rho)$, в котором всякое одноточечное множество открыто, а вместе с тем R — неполно.

2. Показать, что ни одно из условий *a*), *b*), *c*) примера 2, являющееся достаточным для того, чтобы отображение было сжимающим, не является необходимым для применимости метода последовательных приближений, примененного при доказательстве теоремы 3.

3. Пусть X — множество непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, а ρ — функция расстояния, определенная по формуле (пространство $\widetilde{C}^p[a, b]$):

$$\rho(f(t), g(t)) = \Big[\int\limits_a^b |f(t)-g(t)|^p\Big]^{1/p}, \quad p \geqslant 1.$$

Показать, что пространство $\widetilde{C}^p[a, b]=(X, \rho)$ неполно. Убедиться, что пространства примеров п. 1 § 2: m; $C^n[a, b]$, $n \geqslant 1$; l^p, $p \geqslant 1$ — полные метрические пространства.

4. Введем на прямой $X=(-\infty, +\infty)$ метрику по правилу: $\rho(x, y) = \operatorname{arctg}|x-y|$. Будет ли пространство (X, ρ) полным?

5. Пусть X — множество всех ограниченных непрерывных функций на прямой, Y — множество всех непрерывных функций, у которых $\lim\limits_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, Z — множество всех непрерывных финитных функций, т. е. непрерывных функций, равных нулю вне некоторого интервала. Будут ли пространства (X, ρ), (Y, ρ), (Z, ρ), где $\rho(f, g) = \sup\limits_t |f(t) - g(t)|$, полными?

6. Пусть A — множество первой категории в компактном метрическом пространстве (X, ρ). Доказать, что дополнение A в X всюду плотно в (X, ρ): $\overline{A'} = X$.

7. Два сжимающих отображения g_1 и g_2 в полном метрическом пространстве (X, ρ) удовлетворяют условию: $\rho(g_1(x), g_2(x)) < 1$ для любой точки $x \in X$. Пусть $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2)$, где

$$\rho(g_1(x), g_1(y)) \leqslant \alpha_1 \rho(x, y), \quad \rho(g_2(x), g_2(y)) \leqslant \alpha_2 \rho(x, y)$$

для любых $x, y \in X$, $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$. Тогда неподвижные точки отображений g_1 и g_2 лежат в некотором шаре радиуса $1/(1-\alpha)$.

8. Пусть X — полное метрическое пространство, а Y — его подпространство, причем незамкнутое. Доказать, что в Y существуют фундаментальные последовательности, которые не имеют предела в Y, т. е. Y — неполное пространство.

9. Доказать, что замыкание множества $K \subset l^2$ элементов $x=(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$ компактно тогда и только тогда, когда все числа $|x_k|$ ограничены

фиксированной постоянной и для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой номер n, что $\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|^2<\varepsilon$ для всех элементов x из K.

§ 4. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В настоящем параграфе будут рассмотрены основные свойства топологических пространств. Материал данного параграфа вполне аналогичен изложенному в § 2, и поэтому мы повторим лишь основные определения, а доказательства некоторых теорем, поскольку они являются дословным повторением соответствующих доказательств в § 2, опустим. Подробнее мы остановимся лишь на специфических особенностях топологических пространств.

1. Определение топологического пространства. Хаусдорфово топологическое пространство. Примеры

Определение 1. Говорят, что на множестве X определена структура *топологического пространства*, если задана система $\{\Sigma\}$ его подмножеств, обладающая свойствами:

1) само множество X и пустое множество $\varnothing$ принадлежат $\{\Sigma\}$;

2) сумма любого числа множеств системы $\{\Sigma\}$ и пересечение любого конечного числа множеств системы $\{\Sigma\}$ принадлежат $\{\Sigma\}$.

Система $\{\Sigma\}$, удовлетворяющая условиям 1)—2), называется *топологией* на множестве X, а составляющие ее множества — *открытыми в этой топологии* *.

Таким образом, пара, состоящая из множества X и топологии $\{\Sigma\}$, является топологическим пространством, которое иногда удобно обозначать через $T=(X,\Sigma)$.

Определение 1 выделяет весьма общий класс пространств. Обычно этот класс несколько сужают, добавляя к свойствам 1) и 2) так называемые *аксиомы отделимости*. Из большого числа этих аксиом мы рассмотрим наиболее часто используемые.

Аксиома T_2 (Хаусдорфа): для любых различных точек x и y, принадлежащих множеству X, существуют множество Σ_y, содержащее точку y, и множество Σ_x, содержащее точку x, такие, что они оба принадлежат системе $\{\Sigma\}$ и не пересекаются, т. е. $\Sigma_x\cap\Sigma_y=\varnothing$.

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2 (аксиоме Хаусдорфа), называются *хаусдорфовыми*.

Аксиома T_1: для любых двух различных точек x и y, принадлежащих множеству X, существует множество Σ_x, принадлежащее системе $\{\Sigma\}$, содержащее точку x и не содержащее точку y, а также существует множество Σ_y из системы $\{\Sigma\}$, содержащее точку y и не содержащее точку x.

---

*) Множество, являющееся дополнением к открытому, называется *замкнутым* в топологическом пространстве.

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_1, называются *T_1-пространствами.*

Ясно, что если выполнена аксиома T_2, то и аксиома T_1 выполнена, т. е. класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), T_2, — более узкий, чем класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), T_1, который в свою очередь естественно более узкий, чем класс топологических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1) и 2).

Примером пространства, удовлетворяющего аксиомам 1), 2), T_1 и не удовлетворяющего аксиомам 1), 2), T_2, является следующее топологическое пространство. Множество X состоит из точек отрезка $[0, 1]$, а открытыми считаются следующие множества: X, $\varnothing$, $\Sigma_{\alpha_n}=[0,1]\setminus\{\alpha_n\}$, где $\{\alpha_n\}$ — произвольное не более чем счетное множество отрезка $[0, 1]$. Очевидно, что аксиомы 1), 2), T_1 — выполнены. Однако аксиома T_2 не выполняется.

Не всякое топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1. Вот традиционный пример. Множество $X=\{a, b\}$ состоит из двух точек. Топологию зададим открытыми множествами, к которым отнесем все X, пустое множество $\varnothing$ и точку b. Аксиомы 1) и 2) выполнены, а аксиома T_1 — нет.

В следующем параграфе мы познакомимся с другими, не менее важными примерами аксиом отделимости.

Приведем наиболее часто встречающиеся примеры топологических пространств.

Примеры.

1. Рассмотрим произвольное метрическое пространство $R=(X, \rho)$. Открытые множества в силу леммы 1 § 2 удовлетворяют свойствам 1) и 2) определения 1 топологического пространства. Аксиома T_2 определения 1 также выполняется в метрическом пространстве: если $x\neq y$, то $\rho(x, y)=a>0$ и шары $O(x, a/3)$, $O(y, a/3)$ — открытые множества в $R=(X, \rho)$ такие, что $O(x, a/3)\cap O(y, a/3)=\varnothing$.

Таким образом, всякое метрическое пространство $R=(X, \rho)$ является и хаусдорфовым топологическим пространством $T=(X, \Sigma)$, где $\{\Sigma\}$ — система открытых множеств в $R=(X, \rho)$.

2. Рассмотрим множество X произвольной природы. Отнесем к системе $\{\Sigma\}$ только все множество X и пустое множество $\varnothing$. Аксиомы 1), 2), очевидно, выполнены. Однако аксиомы T_1 и T_2 не выполнены. Такая топология называется *антидискретной.*

3. Пусть X — произвольное множество. Отнесем к системе $\{\Sigma\}$ все подмножества множества X. Легко проверить, что $\{\Sigma\}$ — хаусдорфова топология. Такая топология называется *дискретной.*

Дадим следующее определение.

Определение 2. *Окрестностью точки x*, принадлежащей топологическому пространству $T=(X, \Sigma)$, называется любое открытое множество, содержащее точку x. *Окрестностью некоторого подмножества X* (быть может, самого X) называется любое открытое множество, содержащее данное подмножество (или X). Окрестность точки x будем обозначать Σ_x.

Предположим, что для каждой точки x, принадлежащей топологическому пространству $T=(X, \Sigma)$, среди всех окрестностей этой точки выделены некоторые, причем так, что, какова бы ни была точка x и ее произвольная окрестность Σ_x, существует окрестность Σ_x^1 точки x из выделенной системы, что $x \in \Sigma_x^1 \subset \Sigma_x$.

Определение 3. Система выделенных окрестностей $\{\Sigma_x^1\}$ называется *определяющей системой окрестностей данного топологического пространства* *).

Справедлива следующая лемма, которая дает удобный способ задания топологии.

Лемма 1. *Пусть X — произвольное множество. Для каждой точки x определим некоторые подмножества Σ_x, называемые «окрестностями» точки x и удовлетворяющие условиям:*

a) *каждая точка имеет хотя бы одну свою «окрестность» и принадлежит любой своей «окрестности»;*

b) *пересечение двух «окрестностей» точки содержит некоторую «окрестность» этой же точки;*

c) *каковы бы ни были «окрестность» Σ_x точки $x \in X$ и точка $y \in \Sigma_x$, существует «окрестность» Σ_y точки y такая, что $\Sigma_y \subset \Sigma_x$.*

Тогда если отнести к системе $\{\Sigma\}$ всевозможные «окрестности» Σ_x точек $x \in X$, их всевозможные объединения и пустое множество, то будет задана топология на множестве X и $T=(X, \Sigma)$ — топологическое пространство, в котором система всех «окрестностей» является определяющей системой. Обратно, всякое топологическое пространство может быть получено таким способом.

Проверим выполнение аксиом 1)—2) топологического пространства. То, что все X принадлежит $\{\Sigma\}$, очевидно, $\varnothing$ отнесено к $\{\Sigma\}$ по условию.

Аксиома 1) выполнена.

Для проверки аксиомы 2) надо убедиться лишь в том, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \in \{\Sigma\}$, если $\Sigma_1 \in \{\Sigma\}$, $\Sigma_2 \in \{\Sigma\}$. Следовательно, надо установить, что $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ может быть получено как объединение некоторых «окрестностей», т. е. надо убедиться, что для любой точки $x \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ существует «окрестность» $\Sigma_x \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Но Σ_1 и Σ_2 принадлежат $\{\Sigma\}$, поэтому имеются «окрестности» $\Sigma_x^1 \subset \Sigma_1$ и $\Sigma_x^2 \subset \Sigma_2$ — их пересечение содержит по условию b) некоторую «окрестность» Σ_x точки x, которая содержится, очевидно, в $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Обратно, если задано топологическое пространство $T=(X, \Sigma)$, то в качестве «окрестностей» точки x, удовлетворяющих условиям a)—c), можно взять произвольные множества из системы $\{\Sigma\}$, содержащие точку x.

Используя эту лемму, приведем примеры еще двух хаусдорфовых топологических пространств.

---

*) Если x — фиксировано, то система $\{\Sigma_x^1\}$ называется *определяющей системой окрестностей данной точки x.*

П р и м е р ы.

1. В качестве X возьмем двумерную плоскость $\mathbf{R}^2$. Окрестность любой точки $x \in X$ получим, если из любого открытого круга с центром в x удалим все отличные от самой точки x точки, лежащие на вертикальном диаметре этого круга. Полученное топологическое пространство является хаусдорфовым.

2. Рассмотрим в качестве X отрезок $[0, 1]$, окрестности всех точек, кроме точки 0, определим обычным образом, а окрестностями точки 0 будем считать всевозможные полуинтервалы $[0, \alpha)$, $\alpha > 0$, из которых выкинуты точки $1/n$, где n — натуральное число. Это, как легко видеть, пример хаусдорфова топологического пространства.

Пусть $T = (X, \Sigma)$ — топологическое пространство, а Y — подмножество X. Тогда на подмножестве Y можно рассмотреть след системы $\{\Sigma\}$, т. е. множества вида $\{\Sigma_Y\} = \{Y \cap \Sigma_\alpha\}$, $\Sigma_\alpha \in \{\Sigma\}$. Легко видеть, что тем самым на Y задана топология, поэтому Y само превращается в топологическое пространство и $T_Y = (Y, \Sigma_Y)$ называется *подпространством* пространства T. Топология, задаваемая системой $\{\Sigma_Y\} = \{Y \cap \Sigma_\alpha\}$, $\Sigma_\alpha \in \{\Sigma\}$, называется *индуцированной топологией*.

Так же, как и в случае метрических пространств, пространство $T = (X, \Sigma)$ называется *связным*, если его нельзя представить в виде суммы двух непустых открытых непересекающихся подмножеств. Множество Y в топологическом пространстве T связно, если Y связно как подпространство в T: $(Y, \Sigma_Y) \subset (X, \Sigma)$.

2. Замечание о топологических пространствах

После того как введены открытые множества, для топологических пространств можно ввести все понятия § 2, введенные там для метрических пространств. Так, дословно сохраняются определения предельной точки множества Y (см. определение 4 § 2), определение внутренней точки *) (см. определение 5 § 2), определение замкнутого множества (см. определение 6 § 2), определение замыкания множества (см. определение 7 § 2), определение плотного и всюду плотного множества (см. определение 10 § 2), полностью сохраняются определения понятий нигде не плотного и совершенного множеств, данные в § 2 для метрических пространств. Точно так же, как и в случае метрических пространств, в случае топологических пространств определяется важное понятие непрерывного отображения (определение 12 § 2), понятие гомеоморфного отображения (определение 13 § 2), определение компактного топологического пространства, или компакта (см. определение 14 § 2). Так же, как и в § 2 для метрических пространств, для топо-

*) Совокупность всех внутренних точек множества Y называется *внутренностью* множества Y и обозначается через $\mathring{Y}$. Внутренность $\mathring{Y}$, очевидно, есть объединение всех открытых множеств, принадлежащих Y.

логических пространств вводятся понятия центрированной системы (определение 15 § 2), базы топологии топологического пространства (определение 16 § 2) топологического пространства со счетной базой. Топологические пространства со счетной базой называются топологическими пространствами со второй аксиомой счетности.

Читатель без труда сформулирует эти определения для случая топологических пространств, для этого в соответствующих определениях § 2 выражение «метрическое пространство» следует заменить на выражение «топологическое пространство».

Согласно этим определениям в случае топологического пространства остаются справедливыми основные утверждения § 2, доказанные там для метрических пространств. Это вполне естественно, поскольку доказательства этих утверждений в основном используют понятие открытого и замкнутого множества и непосредственно не зависят от введенной там метрики.

Так, лемма 1 § 2, утверждающая, что объединение произвольного числа открытых множеств и пересечения конечного их числа является множеством открытым, есть соответствующая аксиома топологического пространства; утверждение леммы 2 § 2, в том числе и доказательства свойств операции замыкания, полностью сохраняются.

На топологические пространства переносится также и понятие сходящейся последовательности (определение 11 § 2). А именно, последовательность $\{a_n\}$ точек топологического пространства называется сходящейся к точке a этого пространства, если любая окрестность точки a содержит все точки последовательности $\{a_n\}$, за исключением конечного числа. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к точке a, то пишут, что $a_n \to a$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Однако в топологических пространствах это понятие не играет столь большой роли, как в метрических пространствах. В самом деле, лемма 3 § 2 утверждала, что в метрическом пространстве точка a принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a. В топологическом пространстве этот факт может быть несправедлив. (Вспомним, что при доказательстве этого утверждения в метрических пространствах мы строили последовательность шаров $O(a, 1/n)$, вложенных друг в друга для любого натурального n.)

Можно выделить класс топологических пространств, обладающих аналогичным свойством.

Назовем топологическое пространство *пространством с первой аксиомой счетности*, если для любой его точки a существует счетная система ее окрестностей $\{\Sigma_a^n\}$ такая, что для любого открытого множества Σ_a, содержащего точку a, найдется окрестность $\Sigma_a^{n_0}$, обладающая свойством $\Sigma_a^{n_0} \subset \Sigma_a$. Такая система окрестностей называется определяющей системой окрестностей точки a (см. сноску на с. 55).

В метрическом пространстве первая аксиома счетности, очевидно, выполнена.

В топологическом пространстве T с первой аксиомой счетности справедливо утверждение: точка $a \in T$ принадлежит замыканию $\bar{A}$ некоторого множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{a_n\}$ точек множества A, сходящаяся к a.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству соответствующего утверждения для случая метрических пространств. Последовательность шаров $O(a, 1/n)$ следует заменить на последовательность окрестностей из системы $\{\Sigma_a^n\}$, причем всегда можно считать, что $\Sigma_a^{n+1} \subset \Sigma_a^n$. В противном случае Σ_a^n надо заменить на $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \Sigma_a^k$.

Утверждение 1 и утверждение 2 § 2 полностью сохраняются. Сохраняется также и утверждение леммы 4 § 2 — критерий непрерывности отображения.

На случай топологических пространств полностью переносится критерий компактности в терминах центрированной системы замкнутых подмножеств (лемма 5 § 2), утверждение 4, а также утверждения лемм 6, 7, 8, 9 о свойствах компакта и непрерывных функций на нем.

Из леммы 10 § 2, справедливой и для топологического пространства, следует, что система $\{\Sigma_\alpha\}$ образует базу тогда и только тогда, когда она является определяющей системой окрестностей данного пространства. Таким образом, эти два понятия эквивалентны.

Заметим, что топологическое пространство может не быть пространством со счетной базой топологии даже тогда, когда оно является пространством с первой аксиомой счетности и в нем имеется счетное всюду плотное множество. Однако если в топологическом пространстве есть счетная база топологии, то топологическое пространство сепарабельно и удовлетворяет первой аксиоме счетности (ср. с леммой 11 § 2). Точно так же, как и в случае метрических пространств (см. определение 17 § 2), топологическое пространство называется *пространством со второй аксиомой счетности*, если в нем существует хотя бы одна база топологии, состоящая не более чем из счетного числа множеств.

Примеры.

1. Множество A топологического пространства T замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием $\bar{A}$, т. е. $A = \bar{A}$ (см. пример 2 § 2).

2. Множество топологического пространства называется множеством типа G_δ, если оно является пересечением счетного числа открытых множеств. Множества, дополнительные к G_δ-множествам, называются множествами типа F_σ. Например, множество рациональных чисел в $\mathbf{R}^1$ есть множество типа F_σ. Множество иррациональных чисел является множеством типа G_δ.

3. Замыкание $\bar{A}$ множества A топологического пространства состоит из всех точек, которые являются либо предельными точками множества A, либо элементами A (ср. утверждение 2 § 2).

4. Важный класс множеств в топологическом пространстве представляют так называемые *«борелевские»* множества, которые получаются из открытых (замкнутых) при помощи не более чем счетного числа операций, причем каждая операция это либо операция объединения, либо пересечения, либо переход к дополнению.

Семейство $\{B\}$ борелевских множеств в топологическом пространстве есть наименьшее семейство множеств, удовлетворяющее следующим условиям:

а) всякое открытое множество принадлежит $\{B\}$;

б) если множество $A \in \{B\}$, то $A' \in \{B\}$, где A' — дополнение множества A;

в) если множества $A_n \in \{B\}$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \{B\}$.

ЗАДАЧИ

1. Отображение $g: A \to B$ направленного множества A в множество B называется *обобщенной последовательностью* (или сетью) в B. Обобщенная последовательность $g: A \to X$ в топологическом пространстве $T = (X, \Sigma)$ называется сходящейся к точке $x \in X$, если для любой окрестности Σ_x точки x найдется такая точка $a_0 \in A$, что из того, что $a \succ a_0$, $a \in A$, вытекает, что $g(a) \in \Sigma_x$. В этом случае говорят, что предел g по A существует и равен x, т. е.

$$\lim_{A} g(a) = x$$

Доказать, что в хаусдорфовом топологическом пространстве $T = (X, \Sigma)$ каждая обобщенная последовательность имеет не более одного предела.

2. Фильтр $\{F\}$ (см. § 1) подмножеств топологического пространства $T = (X, \Sigma)$ сходится к точке $x \in X$, если каждая окрестность точки x принадлежит $\{F\}$.

Доказать, что в хаусдорфовом топологическом пространстве любой фильтр может сходиться лишь к одной точке, называемой пределом данного фильтра.

3. Доказать, что для того, чтобы топологическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый ультрафильтр подмножеств, принадлежащих пространству, сходился к некоторой точке пространства.

4. Отображение g одного топологического пространства $T = (X, \Sigma)$ в другое $T_0 = (X_0, \Sigma_0)$ называется *замкнутым*, если из того, что $A' \in \Sigma$, следует, что $(g(A))' \in \Sigma_0$ (A' — дополнение множества A). Привести примеры топологических пространств и такого непрерывного отображения одного пространства в другое, которое не является замкнутым.

5. Отображение g одного топологического пространства $T = (X, \Sigma)$ в другое $T_0 = (X_0, \Sigma_0)$ называется *открытым*, если из того, что $A \in \Sigma$, следует, что $g(A) \in \Sigma_0$. Привести примеры топологических пространств и такого непрерывного отображения одного пространства в другое, которое не является открытым.

6. Пусть $T = (X, \Sigma)$ — топологическое пространство, пусть $T_0 = (Y, \Sigma_Y)$ — его подпространство: $Y \subset X$. Пусть система $\{\Sigma_\alpha\}$ — база топологии в T. Обозначим через $\{\Sigma_\alpha^0\}$ совокупность всех множеств вида $\Sigma_\alpha \cap Y$. Тогда $\{\Sigma_\alpha^0\}$ — база топологии в T_0. Доказать.

7. Доказать, что в T_1-пространстве (следовательно, и в хаусдорфовом) всякая точка есть замкнутое множество.

§ 5. СВОЙСТВА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этом параграфе излагаются фундаментальные свойства топологических пространств. Многие из них связаны с приведенными ниже новыми аксиомами отделимости.

1. Регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства

Аксиома T_3: для любой точки a и всякого не содержащего ее замкнутого множества F можно найти два непересекающиеся открытые множества Σ_a и Σ такие, что $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$.

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются *регулярными*.

Аксиома $T_{3\frac{1}{2}}$: для любой точки a и всякого замкнутого множества F, не содержащего точку a, существует такая непрерывная числовая функция f, заданная на этом пространстве, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, если x принадлежит пространству, и $f(a)=0$, $f(x)=1$, если x принадлежит множеству F.

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются *вполне регулярными*, или *тихоновскими* пространствами.

Аксиома T_4: для любых двух замкнутых непересекающихся множеств F_1 и F_2 существуют два непересекающиеся открытые множества Σ_1 и Σ_2 такие, что $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$.

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4, называются *нормальными*.

Заметим, что ни аксиома Хаусдорфа, ни даже аксиома T_1 не следуют ни из одной из аксиом T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4.

Примерами хаусдорфовых пространств, не являющихся регулярными, могут служить примеры 1 и 2 в конце п. 1 § 4. Всякое вполне регулярное пространство является, очевидно, регулярным.

Действительно, рассмотрим вполне регулярное пространство. Пусть f, точка a, множество F — те же, что и в формулировке аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$. Пусть $I_0=[0, 1/2)$, $I_1=(1/2, 1]$. Тогда множества $\Sigma_a=f^{-1}(I_0)$ и $\Sigma=f^{-1}(I_1)$ открыты, так как f — непрерывное отображение, и, очевидно, не пересекаются, причем $a \in \Sigma_a$, $F \subset \Sigma$.

Следовательно, для любой точки a и любого не содержащего ее замкнутого множества F мы построили два открытые непересекающиеся множества Σ_a и Σ такие, что $a \in \Sigma_a$, $F \in \Sigma$, т. е. показали, что вполне регулярное пространство является регулярным.

Оказывается, что нормальные топологические пространства являются вполне регулярными. Этот факт будет легко следовать из доказываемой ниже леммы.

Лемма (Урысон). *Для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 нормального топологического пространства $T=(X, \Sigma)$ существует такая непрерывная числовая функция f, заданная на T, что $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, $x \in X$; $f(x)=0$, если $x \in F_1$, $f(x)=1$, если $x \in F_2$.*

Построим последовательность открытых множеств $\Sigma(r)$, отвечающих рациональным числам вида $r=k/2^n$, $k=0, 1, ..., 2^n$, n — целое, $n \geqslant 0$, обладающих свойствами:

1) $F_1 \subset \Sigma(0)$, $F_2=\Sigma'(1)$ (штрих означает дополнение) и

2) $\overline{\Sigma}(r) \subset \Sigma(r')$ при $r<r'$.

Построение будем вести индукцией по n. Пусть $n=0$. Тогда система $\Sigma(r)$ должна содержать лишь два множества. Так как пространство T — нормальное, то существуют открытые непересекающиеся множества Σ_1 и Σ_2 такие, что $F_1 \subset \Sigma_1$, $F_2 \subset \Sigma_2$. Тогда множества $\Sigma(0)=\Sigma_1$ и $\Sigma(1)=F_2'$ есть искомые.

Допустим теперь, что множества $\Sigma(r)$ построены для чисел $r=k/2^{n-1}$, $k=0, 1, \dots, 2^{n-1}$ и условия 1) и 2) при этом выполнены. Возьмем некоторое целое нечетное значение $k>0$, $k+1 \leqslant 2^n$. Тогда $\overline{\sum}\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \subset \sum\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$, так как числа $\frac{k-1}{2^n}$ и $\frac{k+1}{2^n}$ имеют вид $\frac{k'}{2^{n-1}}$, где $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$. Поскольку T — нормальное пространство, а $\overline{\sum}\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \cap \sum'\left(\frac{k+1}{2^n}\right)=\varnothing$ и эти множества замкнуты, то существуют открытые множества G и G_1 такие, что $\overline{\sum}\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \subset$ $\subset G$, $\sum'\left(\frac{k+1}{2^n}\right) \subset G_1$ и $G_1 \cap G_2=\varnothing$. Тогда G_1' замкнуто и $G \subset G_1' \subset \sum\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$, т. е. $\overline{G} \subset \sum\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$. Полагая $\sum\left(\frac{k}{2^n}\right)=$ $=\Sigma(r)=G$, мы завершаем построение по индукции.

Определим теперь функцию $f(x)$, положив

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x \in \Sigma(0), \\ \sup\limits_{x \overline{\in} \Sigma(r)} r, & \text{если } x \in \Sigma'(0). \end{cases}$$

Тогда по условию 1) функция $f(x)=0$, если $x \in F_1$, $f(x)=1$, если $x \in F_2$. Действительно, если $x \in F_2$, то $x \in \Sigma'(1)$, т. е. $x \overline{\in} \Sigma(1)$, значит, $x \in \Sigma'(r)$, $r<1$. Кроме того, если $x \in F_2$, то $x \overline{\in} \Sigma(0)=\Sigma_1$, значит, $x \in \Sigma'(0)$ и указанная верхняя грань равна 1, поскольку она берется по всем числам r, указанным выше.

Докажем непрерывность функции $f(x)$. Возьмем произвольное $x_0 \in X$ и произвольное целое $n>0$. Выберем r такое, что $f(x_0)<$ $<r<f(x_0)+2^{-n-1}$. Пусть $\Sigma=\Sigma(r) \cap (\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$, где мы считаем, что $\Sigma(s)=\varnothing$, $s<0$, $\Sigma(s)=X$, $s>1$. Открытое множество Σ содержит точку x_0, так как $f(x_0)<r$, а значит, $x_0 \in \Sigma(r)$; точно так же

из того, что $(r-2^{-n-1})<f(x_0)$ вытекает, что $x_0\in\Sigma\,(r-2^{-n-1})\subset\subset(\overline{\Sigma(r-2^{-n})})'$. Далее, если $x\in\Sigma$, то $x\in\Sigma(r)$, и поэтому $f(x)\leqslant r$. Кроме того, $x\in\overline{(\Sigma(r-2^{-n}))'}\subset\Sigma'(r-2^{-n})$, и, следовательно, $r-2^{-n}\leqslant f(x)$. Поэтому, если $x\in\Sigma$, то $|f(x)-f(x_0)|\leqslant 1/2^n$. Следовательно, для любой окрестности $\Sigma_{f(x_0)}$ (на числовом отрезке [0, 1]) существует такая окрестность Σ точки x_0, что $f(\Sigma)\subset\Sigma_{f(x_0)}$, т. е. функция $f(x)$ непрерывна на T.

Следствие. *Нормальные топологические пространства являются вполне регулярными.*

Для доказательства надо воспользоваться леммой и заметить, что в топологическом T_1-пространстве всякая точка есть замкнутое множество (задача 7 п. 2 § 4).

2. Регулярные пространства со счетной базой. Теорема Тихонова

В настоящем пункте доказана теорема, которая устанавливает связь между аксиомами отделимости и аксиомами счетности (см. п. 2 § 4).

Теорема 1 (Тихонов). *Регулярное топологическое пространство со счетной базой топологии нормально.*

Пусть $T=(X,\Sigma)$ — регулярное топологическое пространство со счетной базой топологии $\{\Sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ и F_1, F_2 — два непересекающихся замкнутых множества. Для любой точки $x\in F_2$ существует такая окрестность U_x, что $\bar U_x\cap F_2=\varnothing$. Это следует из того, что в регулярном пространстве всякая окрестность точки содержит замыкание некоторой окрестности этой же точки *). Из покрытия $\{U_x: x\in F_1\}$ множества F_1 можно выбрать счетное подпокрытие, т. е. в множестве F_1 существует такая счетная система точек $x_{1,1}, x_{1,2}, \ldots, x_{1,p}, \ldots$, что

$$F_1\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}U_{x_{1,k}}.$$

При этом $\bar U_{x_{1,k}}\cap F_2=\varnothing$. Аналогично, можно выбрать счетное покрытие $\{U_{x_{2,k}}\}_{k=1}^{\infty}$ множества F_2 так, что $\bar U_{x_{2,k}}\cap F_1=\varnothing$ для любого k.

Определим теперь по индукции для любого $n\geqslant 1$ множества $V_{1,n}$, $V_{2,n}$, полагая

$$V_{1,n}=U_{x_{1,n}}\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\bar U_{x_{2,k}},\quad V_{2,n}=U_{x_{2,n}}\setminus\bigcup_{k=1}^{n}\bar U_{x_{1,k}}.$$

*) Пусть Σ — некоторая окрестность точки a, множество $A=X\setminus\Sigma$ замкнуто и существуют открытые множества Σ_a, содержащие точку a, и множество G, содержащее A, такие, что $\Sigma_a\cap G=\varnothing$. Тогда $\bar\Sigma_a\subset X\setminus A=\Sigma$, что и требовалось.

Легко видеть, что для любых n, m, $V_{1,n}$ и $V_{2,m}$ не пересекаются. Действительно, если $n \leqslant m$, то

$$V_{1,n} \cap U_{2,m} \subset U_{x_{1,n}} \cap (U_{x_{2,m}} \setminus \bar{U}_{x_{1,n}}) = \varnothing.$$

(Если $n > m$, то проверяется аналогично.)

Следовательно, множества

$$V_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{1,n}, \quad U_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_{2,n}$$

также не пересекаются. С другой стороны, они содержат соответственно множества F_1 и F_2. Таким образом, мы доказали, что любые два замкнутые непересекающиеся множества F_1 и F_2 пространства T можно заключить в непересекающиеся открытые множества — пространство T нормально.

3. Компактные хаусдорфовы и нормальные пространства

Справедлива следующая теорема, устанавливающая связь между компактностью хаусдорфова топологического пространства и его нормальностью.

Теорема 2. *Компактное хаусдорфово топологическое пространство является нормальным.*

Пусть $T = (X, \Sigma)$ — компактное хаусдорфово топологическое пространство. Докажем сначала, что оно регулярно. Пусть a и F — точка и не содержащее ее замкнутое множество: $a \overline{\in} F$. Для любой точки $x \in F$ и точки a существуют такие окрестности Σ_x и Σ_a^x, что $\Sigma_x \cap \Sigma_a^x = \varnothing$. Замкнутое подпространство F компактного пространства само компактно (см., например, лемму 6 § 2). Из покрытия F открытыми множествами $\{\Sigma_x\}$ выберем конечное покрытие $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$. Пусть $\Sigma_1 = \bigcup_{k=1}^{n} \Sigma_{x_k}$, а пересечение соответствующих Σ_{x_k} окрестностей $\Sigma_a^{x_k}$ точки a обозначим $\Sigma_2 = \bigcap_{k=1}^{n} \Sigma_a^{x_k}$. Тогда $a \in \Sigma_2$, $F \subset \Sigma_1$ и $\Sigma_2 \cap \Sigma_1 = \varnothing$. Следовательно, пространство T регулярно.

Пусть теперь F_1 и F_2 — два замкнутых множества таких, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. В силу регулярности пространства для любой точки $x \in F_1$ существуют такие открытые множества Σ_x и G_x, что $x \in \Sigma_x$, $F_2 \subset G_x$ и $\Sigma_x \cap G_x = \varnothing$. Из покрытия компактного пространства F_1 открытыми множествами $\{\Sigma_x\}$ выберем конечное подпокрытие $\{\Sigma_{x_k}\}_{k=1}^{m}$ и обозначим $\Sigma^1 = \bigcup_{k=1}^{m} \Sigma_{x_k}$. Пересечение соответствующих открытых множеств G_{x_k} обозначим через $\Sigma^2 = \bigcap_{k=1}^{m} G_{x_k}$. Тогда $F_1 \subset \Sigma^1$, $F_2 \subset \Sigma^2$ и $\Sigma^1 \cap \Sigma^2 = \varnothing$, т. е. пространство $T = (X, \Sigma)$ — нормально.

4. Метрические и топологические пространства

Мы уже говорили о том, что во всяком метрическом пространстве $R = (X, \rho)$ открытые множества, определяемые через функцию расстояния ρ, удовлетворяют аксиомам 1)—2), определяющим топологию на множестве X, а также аксиоме Хаусдорфа T_2. Тем самым метрическое пространство является хаусдорфовым топологическим пространством (см. пример п. 1 § 4).

В метрическом пространстве всегда выполнена первая аксиома счетности (см. п. 2 § 4), а также справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Метрическое пространство является нормальным топологическим пространством.*

Пусть $R(X, \rho)$ — метрическое пространство, а F_1 и F_2 — два замкнутых множества, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$. Пусть $x \in F_1$, $y \in F_2$, Σ_x — шар с центром в x и радиусом $\rho(x, F_2)/3$ (см. задачу 1 § 2) и Σ_y — шар с центром y и радиусом $\rho(y, F_1)/3$. Очевидно, что величины $\rho(x, F_2)$, $\rho(y, F_1)$ положительны в силу замкнутости F_1 и F_2. Пусть $\Sigma_1 = \bigcup_{x \in F_1} O\left(x, \frac{\rho(x, F_2)}{3}\right)$, $\Sigma_2 = \bigcup_{y \in F_2} O\left(y, \frac{\rho(y, F_1)}{3}\right)$ — открытые множества, содержащие F_1 и F_2 соответственно. Тогда $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing$. Действительно, если $z \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2$, то найдется точка $x_0 \in F_1$ такая, что $\rho(x_0, z) < \rho(x_0, F_2)/3$, и точка $y_0 \in F_2$ такая, что $\rho(z, y_0) < \rho(y_0, F_1)/3$. Пусть, например, $\rho(x_0, F_2) \leqslant \rho(y_0, F_1)$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_0, y_0) \leqslant \rho(x_0, z) + \rho(z, y_0) < \rho(y_0, F_1)$, т. е. $x_0 \in O(y_0, \rho(y_0, F_1))$, что противоречит определению $\rho(y_0, F_1)$.

Таким образом, метрическое пространство, рассматриваемое как топологическое, удовлетворяет первой аксиоме счетности и является нормальным. Отсюда следует, что ни в каком топологическом пространстве, которое не удовлетворяет первой аксиоме счетности или не является нормальным, открытые множества (топология) не могут быть введены с помощью какой бы то ни было метрики.

Определение 3. Топологическое пространство $T = (X, \Sigma)$ называется *метризуемым*, если топология $\{\Sigma\}$ в нем может быть задана с помощью какой-нибудь метрики.

Выполнение первой аксиомы счетности и нормальность пространства являются необходимыми условиями для метризуемости. Теоремы, в которых даются достаточные условия метризуемости, носят название *метризационных теорем*.

5. Тихоновские произведения топологических пространств

Перейдем теперь к изучению важного понятия — прямого произведения топологических пространств.

Определение 4. *Прямым произведением хаусдорфовых топологических пространств* $T_\alpha=(X_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha\in\Omega$, где Ω — некоторое множество, называется пара

$$T=(X,\Sigma)=\prod_{\alpha\in\Omega} T_\alpha, \text{ где } X=\prod_{\alpha\in\Omega} X_\alpha,$$

а система $\{\Sigma\}$ — хаусдорфова топология, определенная так: открытыми множествами называются всевозможные объединения множеств вида $\prod\limits_{\alpha\in\Omega}\Sigma_\alpha$, где Σ_α — открытые множества пространства T_α, совпадающие с X_α для всех α, кроме конечного числа значений α. Данная топология называется *тихоновской*.

Убедимся в том, что мы действительно задали хаусдорфову топологию. Поскольку проверка первых двух аксиом, определяющих топологию, проста, проверим лишь выполнение аксиомы T_2. Пусть $f_1(\alpha)$ и $f_2(\alpha)$, $\alpha\in\Omega$ — две различные точки пространства $T=(X,\Sigma)=\prod\limits_{\alpha\in\Omega} T_\alpha$, $T_\alpha=(X_\alpha,\Sigma_\alpha)$, $X=\prod\limits_{\alpha\in\Omega} X_\alpha$. Тогда найдется такое пространство T_{α_1}, что $f_1(\alpha_1)\neq f_2(\alpha_1)$. Так как в пространстве T_{α_1} существуют непересекающиеся окрестности $\Sigma^1_{\alpha_1}$ и $\Sigma^2_{\alpha_1}$ точек $f_1(\alpha_1)$ и $f_2(\alpha_1)$, то окрестности $\Sigma_1=f^{-1}(\Sigma^1_{\alpha_1})$ и $\Sigma_2=f^{-1}(\Sigma^2_{\alpha_1})$ в пространстве T, очевидно, не пересекаются (здесь $f^{-1}(\Sigma^i_{\alpha_1})$ — прообразы (при «проектировании» $f\colon T\to T_{\alpha_1}$) множеств $\Sigma^i_{\alpha_1}$, $i=1,2$).

Рассмотрим теперь произведение конечного или счетного числа метрических пространств и докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Произведение конечного или счетного числа метрических пространств метризуемо.*

Доказательство проведем для более сложного счетного случая. Пусть (X_n, ρ_n), $n=1, 2, \ldots$ — метрические пространства. Для $x=(x_1, x_2, \ldots)$ и $y=(y_1, y_2, \ldots)$, $x_i\in X_i$, $y_i\in X_i$ положим

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{\rho_n(x_n,y_n)}{1+\rho_n(x_n,y_n)}.$$

Непосредственно проверяется, что ρ является метрикой на $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Осталось проверить, что топология, порождаемая этой метрикой, совпадает с тихоновской топологией. Пусть Σ_x — тихоновская окрестность точки $x=(x_1, x_2, \ldots)$. По определению тихоновской топологии Σ_x содержит множество вида $\left\{y\in\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n : \rho_{n_i}(x_{n_i}, y_{n_i})<\varepsilon\right\}$, где $\varepsilon>0$ и $(n_1, \ldots, n_k)$ — некоторый набор индексов. Но это множество в свою очередь содержит шар (в метрике ρ) радиуса $\dfrac{\varepsilon}{2^{\max(n_1,\ldots,n_k)+1}}$.

Обратно, пусть O_x — «метрическая» окрестность точки $x \in \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. Можно считать, что $O_x = \left\{y \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : \rho(x, y) < \varepsilon\right\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Пусть N таково, что $\sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Рассмотрим тихоновскую окрестность точки x:

$$\Sigma_x = \left\{y \in \prod_{m=1}^{\infty} X_m : \rho_n(x_n, y_n) < \varepsilon/2, \quad n = 1, 2, \ldots, N\right\}.$$

Простой подсчет показывает, что $\Sigma_x \subset O_x$.

Теорема 5 (теорема Тихонова). *Произведение $T = \prod_{\alpha \in \Omega} T_\alpha$ компактных топологических пространств T_α — компактно.*

Пусть $\{\Sigma\}$ — произвольная центрированная система подмножеств X, где $T = (X, \Sigma)$. Рассмотрим систему $\{\Sigma^m\}$, обладающую свойствами:

a) $\{\Sigma\}$ содержится в $\{\Sigma^m\}$ как подсистема;

b) $\{\Sigma^m\}$ — центрированная;

c) система $\{\Sigma^m\}$ не является собственной подсистемой какой-либо другой центрированной системы, содержащей $\{\Sigma\}$ в качестве подсистемы.

Очевидно, что нами введено отношение порядка по включению, и существование системы $\{\Sigma^m\}$ следует из леммы Цорна.

Рассмотрим фиксированный элемент Σ^m системы $\{\Sigma^m\}$, и пусть для любого $\alpha \in \Omega$ $\Sigma^m_\alpha = \{f(\alpha) : f \in \Sigma^m\} \subset X_\alpha$. Обозначим через $\{\Sigma^m_\alpha\}$ систему всевозможных множеств Σ^m_α, построенных выше. Система $\{\Sigma^m_\alpha\}$ центрирована. Так как пространство T_α компактно, то найдется по крайней мере одна точка $a_\alpha \in X_\alpha$ и такая, что $a_\alpha \in \in \bigcap_{\Sigma^m \in \{\Sigma^m\}} \overline{\Sigma}^m_\alpha$. Это следует из утверждения примера 8 § 2*). Покажем, что точка $a = \prod_{\alpha \in \Omega} a_\alpha$ принадлежит пересечению $\bigcap_{\Sigma^m \in \{\Sigma^m\}} \overline{\Sigma}^m$. Тогда согласно тому же примеру 8 пространство T будет компактным.

Поскольку точки a_{α_0} принадлежат пересечению $\bigcap_{\Sigma^m \in \{\Sigma^m\}} \overline{\Sigma}^m_{\alpha_0}$, то всякое открытое множество G_{α_0} пространства T_{α_0}, содержащее a_{α_0}, пересекается с каждым из множеств $\Sigma^m_{\alpha_0} \in \{\Sigma^m_{\alpha_0}\}$. Поэтому открытое множество $G^{(\alpha_0)} = \left\{x : x = \prod_{\alpha \in \Omega} x_\alpha,\ x_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}\right\}$ пространства T должно пересекаться с каждым из множеств Σ^m си-

*) Заметим, что доказательство утверждения этого примера, приведенного в конце § 2, для случая топологических пространств, такое же, как и для случая метрических пространств.

стемы $\{\Sigma^m\}$. Согласно свойству с) системы $\{\Sigma^m\}$ множество $G^{(\alpha_0)}$ должно принадлежать $\{\Sigma^m\}$. Снова из свойства с) следует, что пересечение любого конечного числа множеств типа $G^{(\alpha_0)}$, $\alpha_0 \in \Omega$ также должно принадлежать системе $\{\Sigma^m\}$ и, значит, такое множество пересекается с каждым множеством $\Sigma^m \in \{\Sigma^m\}$. Всякое открытое множество пространства T, содержащее точку a, по определению содержит некоторое пересечение указанного типа; следовательно, точка $a = \prod_{\alpha \in \Omega} a_\alpha \in \bigcap_{\Sigma^m \in \{\Sigma^m\}} \overline{\Sigma}^m$.

6. Теорема Стоуна — Вейерштрасса

Из анализа известна классическая теорема Вейерштрасса, утверждающая, что множество полиномов плотно в $C[a, b]$. Мы докажем здесь ее далекое обобщение, полученное Стоуном. В доказательстве нам потребуется такое следствие теоремы Вейерштрасса: для любого $a>0$ и $\varepsilon>0$ существует полином $p(x)$ такой, что $\sup_{x\in[-a,a]} ||x| - p(x)| < \varepsilon$.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса. *Пусть $T=(X, \Sigma)$ — компактное хаусдорфово топологическое пространство и $C(X)$ — множество всех вещественных непрерывных функций на X. Пусть* $B(X)$ — подмножество $C(X)$ *такое, что:*

a) *из того, что $f, g \in B(X)$ следует, что $f \cdot g$ и $\alpha f + \beta g$ принадлежат $B(X)$, α, β — вещественные числа;*

b) *константы принадлежат $B(X)$;*

c) *предел всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций из $B(X)$ принадлежит $B(X)$.*

В этом случае $B(X) = C(X)$ тогда и только тогда, когда для любых двух различных точек x_1 и x_2 множества X существует функция $f \in B(X)$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Действительно, согласно теореме 2 компактное хаусдорфово топологическое пространство нормально и согласно лемме Урысона существует непрерывная функция $f \in B$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$ для любых точек x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$.

Обратно, пусть $f \vee g = \max(f(x), g(x))$, $f \wedge g = \min(f(x), g(x))$. Легко видеть, что

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}, \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2}.$$

Поскольку пространство компактно, то всякая функция $f \in C(X)$ ограничена, а значит, по теореме Вейерштрасса $|f(x)|$ есть предел равномерно сходящейся последовательности полиномов от f, т. е. $|f| \in B(X)$, $f \in B(X)$. Следовательно, множество $B(X)$ замкнуто относительно операций $\vee$ и $\wedge$.

Пусть $g(x) \in C(X)$ и x_1 и x_2 — произвольные точки из X, $x_1 \neq x_2$. Выберем функцию $h \in B$ так, что $h(x_1) \neq h(x_2)$. Составим линейную комбинацию $f_{x_1x_2}=\alpha h+\beta$ с неизвестными пока α, $\beta\in\mathbf{R}^1$. Числа α и β определим из системы

$$\alpha h(x_1)+\beta=g(x_1),$$

$$\alpha h(x_2)+\beta=g(x_2).$$

Пусть теперь $\varepsilon>0$ произвольно и $y\in X$. Для любой точки $x\in X$ существует окрестность Σ_x такая, что $f_{xy}(u)>g(u)-\varepsilon$ для любой точки $u\in\Sigma_x$. Пусть множества $\Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \ldots, \Sigma_{x_n}$ покрывают компактное пространство T; положим $f_y=f_{x_1y}\vee\ldots\vee f_{x_ny}$. Тогда $f_y\in B(X)$ и $f_y(u)>g(u)-\varepsilon$ для любой точки $u\in X$. Более того, $f_y(y)=g(y)$, так как $f_{x_jy}(y)=g(y)$. Следовательно, существует такая окрестность Σ_y точки y, что $f_y(u)<g(u)+\varepsilon$ для любой точки $u\in\Sigma_y$. Пусть множества $\Sigma_{y_1}, \ldots, \Sigma_{y_k}$ покрывают T; положим $f=f_{y_1}\wedge\ldots\wedge f_{y_k}$. Тогда $f\in B(X)$ и $f(u)>g(u)-\varepsilon$ для любой точки $u\in X$, так как $f_{y_j}(u)>g(u)-\varepsilon$, для любого $u\in X$. Кроме того, для любой точки $u\in X$, и в частности для $u\in\Sigma_{y_j}$, справедливы неравенства $f(u)\leqslant f_{y_j}(u)<g(u)+\varepsilon$. Следовательно, $|f(u)-g(u)|<\varepsilon$ для любой точки $u\in X$, что и требовалось.

Заметим, что в случае отрезка числовой оси многочлены, очевидно, обладают свойствами подмножества $B(X)$, указанного в теореме. В этом случае мы получаем классическую теорему Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции равномерно сходящейся последовательностью многочленов.

У теоремы Стоуна—Вейерштрасса есть также такое интересное следствие: пусть $T_\alpha=(X_\alpha, \Sigma_\alpha)$, $\alpha\in A$ — семейство компактных хаусдорфовых пространств. Пусть $T=(X, \Sigma)=\prod\limits_{\alpha\in A}T_\alpha$. В пространстве $C(X)$ рассмотрим множество функций, зависящих лишь от конечного числа координат (т. е. вида $f(x)=f(x_{n_1}, \ldots, x_{n_k})$). Из теоремы Стоуна—Вейерштрасса следует, что множество таких функций плотно в $C(X)$. Отсюда можно вывести, что любая функция из $C(X)$ зависит лишь не более чем от счетного числа координат (множество индексов A может быть при этом любым). В этом рассуждении мы неявно использовали теорему Тихонова о компактности произведения компактных пространств.

Примеры.

1. Прямоугольник $-\infty<a_i\leqslant x_i\leqslant b_i<+\infty$, $a_i<b_i$, $i=1,\ldots,n$ в $\mathbf{R}^n$ — компакт.

Это следует из теоремы о произведении компактных пространств и того, что отрезок числовой оси с топологией, индуцированной метрикой $\rho(x, y)=|x-y|$, — компакт.

2. Произведение двух хаусдорфовых, регулярных, вполне регулярных пространств является соответственно хаусдорфовым, регулярным, вполне регулярным топологическим пространством.

ЗАДАЧИ

1. Привести пример нормального неметризуемого топологического пространства.

2. Пусть Σ_1 и Σ_2 — открытые подмножества нормального пространства, $F \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ и замкнуто. Показать, что $F = F_1 \cup F_2$, причем $F_i \subset \Sigma_i$, $i=1, 2$ и замкнуты.

3. Пусть $T_x = \mathbf{R}^1$ для $x \in \mathbf{R}^1$, $T = \prod\limits_{x \in \mathbf{R}^1} T_x$, тогда T содержит счетное подмножество, замыкание которого совпадает с T, но не имеет счетной базы топологии.

4. Пространство называется *вполне нормальным*, если каждое его открытое множество нормально. Привести пример не вполне нормального топологического пространства.

5. Доказать, что метрическое пространство вполне нормально.

6. Потребуем, чтобы в топологическом пространстве, удовлетворяющем аксиоме T_1, любые два замкнутых непересекающихся множества имели окрестности, замыкания которых не пересекаются. Будет ли полученный класс пространств более узким, чем класс нормальных пространств?

7. Доказать, что на всяком бесконечном множестве существует топология, удовлетворяющая аксиоме Хаусдорфа, по отношению к которой никакая точка множества не является изолированной.

8. Привести пример топологического пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты (т. е. выполняется аксиома T_1) и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются.

9. Пусть T — хаусдорфово топологическое пространство и множество всех его неизолированных точек конечно. Докажите, что пространство T — нормально.

10. Доказать, что регулярное топологическое пространство со счетной базой топологии метризуемо. В частности, компактное хаусдорфово пространство метризуемо в том и только том случае, если оно имеет счетную базу топологии.