Глава II

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

В первой главе были введены важные классы пространств: метрические и топологические и изучены их основные свойства.

Однако часто возникает необходимость рассматривать множества, на которых над их элементами определены операции: сложение, умножение на скаляры, удовлетворяющие определенным свойствам. Такие множества, называемые линейными пространствами, и являются основным объектом изучения в этой главе. Наиболее интересные результаты получаются в том случае, когда линейное пространство наделено еще структурой топологического пространства или некоторой другой структурой, например нормой, которая определяет топологию в пространстве, и при этом линейные операции непрерывны в этой топологии. Линейные топологические пространства, так называемые «F-пространства» и нормированные пространства, играют исключительно важную роль в анализе и поэтому будут детально изучены. Обычно выделяют несколько важных принципов в теории таких пространств — это принцип равномерной ограниченности, принцип открытости отображения, принцип продолжения функционалов. Этот материал и будет являться предметом изучения в данной главе.

1. Группа, кольцо, поле, линейное пространство

Определение 1. Множество G элементов произвольной природы называется *группой*, если в G установлена операция, ставящая в соответствие каждой паре элементов x, y из G некоторый элемент $w=xy$, называемый произведением элементов x и y, причем справедливы следующие аксиомы:

1) $(xy)z=x(yz)$ (ассоциативность);
2) в G имеется левая единица, т. е. такой элемент e, что $ex=x$ для любого $x\in G$;
3) для всякого элемента $x\in G$ существует левый обратный элемент, т. е. такой элемент x^{-1}, что $x^{-1}x=e$.

Если, кроме того, для всяких двух элементов x и y имеет место равенство $xy=yx$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*. Для коммутативных групп обычно групповую операцию записывают в виде сложения $w=x+y$, при этом единица группы называется нулем и обозначается символом 0, а элемент x^{-1}, обратный к x, называется противоположным и обозначается $-x$. Такие группы называют *аддитивными*.

Если U и V — два подмножества группы G, то через UV обозначается подмножество, составленное из всех элементов вида xy, где $x \in U$, $y \in V$. Через U^{-1} обозначается подмножество, составленное из всех элементов вида x^{-1}, где $x \in U$.

Определение 2. Множество G_T называется *топологической группой*, если:

1) G_T есть группа;

2) G_T есть топологическое пространство;

3) групповые операции, введенные в G_T, непрерывны в топологическом пространстве G_T, т. е. если x и y — два элемента из G_T, то для всякой окрестности W элемента $w=xy$ найдутся такие окрестности U и V элементов x и y, что $UV \subset W$, и для всякой окрестности Σ элемента x^{-1} найдется такая окрестность U элемента x, что $U^{-1} \subset \Sigma$.

Примеры.

1. Легко видеть, что левая единица e группы G является и правой единицей, т. е. $xe=x$ для любого $x \in G$.

Действительно, $x^{-1}xx^{-1}=x^{-1}$. Умножая это равенство слева на левый обратный элемент к элементу x^{-1}, получаем $xx^{-1}=e$, т. е. левый обратный является и правым обратным, более того, элемент, обратный к x^{-1}, есть x. Далее, имеем $xe=xx^{-1}x=ex=x$, т. е. левая единица является и правой.

2. В группе G каждое из уравнений

$$ax=b,$$
$$ya=b$$

относительно неизвестных x и y имеет единственное решение.

Действительно, легко убедиться подстановкой, что $a^{-1}b$ — решение первого уравнения, ba^{-1} — второго. Данные решения единственны, ибо, умножая первое уравнение на a^{-1} слева, получаем $x=a^{-1}b$, точно так же из второго уравнения получаем $y=ba^{-1}$.

Важным понятием является понятие кольца. Дадим следующее определение.

Определение 3. *Кольцом* K называется множество, в котором определены две операции — сложение и умножение, обладающие следующими свойствами:

1) относительно сложения K — абелева группа;

2) $(xy)z=x(yz)$;

3) $x(y+z)=xy+xz$,
$(y+z)x=yx+zx$.

Кольцо называется *коммутативным*, если в нем выполнено равенство $xy=yx$ для всех $x, y \in K$. Если кольцо K содержит элемент 1 такой, что $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ для всех $x \in K$, то будем говорить, что K — *кольцо с единицей*.

Определение 4. *Полем* P называется коммутативное кольцо с единицей, ненулевые элементы которого образуют группу по умножению.

Всюду в наших рассмотрениях мы будем предполагать, что P есть поле действительных или комплексных чисел.

Перейдем теперь к определению важнейшего понятия — линейного пространства.

Определение 5. *Линейным пространством L над полем P* называется множество, в котором определены операции — сложение и умножение на элементы поля, обладающие следующими свойствами:

1) относительно сложения L является абелевой группой;

2) выполнены соотношения: $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$, $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$, $1\cdot x=x$, где $1, \alpha, \beta\in P$, $x, y\in L$.

Элементы $x, y, \ldots\in L$ называются *векторами* линейного пространства L, элементы поля $P: 1, \alpha, \beta, \ldots$ называются *скалярами*.

Поясним более подробно пункты 1) и 2). То, что L — аддитивная абелева группа, означает, что определена сумма $x+y$ двух любых элементов, $x, y\in L$, являющаяся элементом того же множества, причем операция сложения удовлетворяет условиям:

а) $x+y=y+x$ — коммутативность;

б) $x+(y+z)=(x+y)+z$ — ассоциативность;

в) существует однозначно определенный элемент 0 такой, что

$$0+x=x$$

для любого $x\in L$;

г) для каждого элемента $x\in L$ существует однозначно определенный элемент $(-x)$ того же пространства такой, что

$$(-x)+x=0.$$

В дальнейшем мы вместо $(-y)+x$ будем писать $x-y$.

Элемент 0, как уже говорилось, называется нулем, а элемент $(-x)$ — противоположным к x.

Пункт 2) означает, что в L определено умножение элементов $x, y, z, \ldots$ на скаляры $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \ldots$ из поля P, причем, например, элемент λx снова принадлежит L, и при этом выполнены все четыре условия пункта 2).

В качестве простых следствий из аксиом, содержащихся в пунктах 1), 2) определения линейного пространства, получаем следующие утверждения.

1. $Ox=0$. (Заметим, что символом 0 мы обозначаем и число 0, и нулевой элемент линейного пространства. Из текста легко установить, о чем идет речь в том или ином случае.)

Действительно, $x=1\cdot x=(0+1)x=0\cdot x+1\cdot x=0\cdot x+x$.

Отсюда (используя равенство $x=0\cdot x+x$) имеем $(-x)+x=(-x)+0\cdot x+x$,

или
$$0=0+0\cdot x=0\cdot x.$$

2. $(-1)x=-x$, поскольку

$$(-1)x+x=(-1+1)x=0\cdot x=0$$

и, следовательно, x — противоположный к $(-1)\cdot x$.

3. $\lambda \cdot 0 = 0$, т. е. скаляр λ, умноженный на нулевой элемент пространства L, является нулевым элементом L. Действительно,

$$\lambda \cdot 0 = \lambda[(-x) + x] = \lambda(-x) + \lambda x = (-\lambda)x + \lambda x = \lambda x - \lambda x = 0.$$

4. Пусть $\lambda x \neq \mu x$ и $x \neq 0$, тогда $\lambda \neq \mu$.

В самом деле, если $\lambda x = \mu x$, то $\lambda x - \mu x = 0$, или $(\lambda - \mu)x = 0$. Пусть теперь $\lambda \neq \mu$. Тогда $x = \frac{1}{\lambda - \mu}(\lambda - \mu)x = \frac{1}{\lambda - \mu} \cdot 0 = 0$, что противоречит условию $x \neq 0$.

5. Отметим наконец такой интересный факт: если L — линейное пространство, то коммутативность сложения является следствием остальных аксиом. Действительно,

$$-(x+y) + (y+x) = (-1)(x+y) + (y+x) = (-1)x + (-1)y +$$
$$+ y + x = (-1)x + [(-1)y + y] + x = (-1)x + 0 + x = (-1)x + x = 0.$$

Вектор вида $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in P$, $x_i \in L$ называется *линейной комбинацией* векторов x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Если L — линейное пространство, $A \subset L$, $B \subset L$, $x \in L$ и $\alpha \in P$, то будут использоваться обозначения

$$x - A = \{x - a : a \in A\}, \quad A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\},$$
$$\alpha A = \{\alpha a : a \in A\}.$$

Определение 6. Множество элементов $G \subset L$ называется *линейным многообразием* *), если оно содержит все линейные комбинации входящих в это множество векторов. Будем говорить, что многообразие *натянуто* на множество A, если оно совпадает с совокупностью всех линейных комбинаций элементов из A.

Определение 7. Совокупность векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейного пространства называется *линейно независимой*, если из того, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ следует, что все $\alpha_i = 0$. Бесконечная система $\{x_\alpha\}$ векторов линейного пространства называется линейно независимой, если любая ее конечная подсистема линейно независима.

Определение 8. Множество $B \subset L$ называется *алгебраическим базисом*, если любой вектор x пространства можно единственным способом представить в виде некоторой линейной комбинации $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где $\alpha_i \in P$, $x_i \in B$.

---

*) В линейной алгебре чаще используется термин «линейное подпространство линейного пространства».

Мощность множества элементов, составляющих алгебраический базис, называется *размерностью линейного пространства* L.

Проиллюстрируем данные определения многообразия и линейной независимости векторов на примерах. Пусть, например, L — какое-нибудь линейное пространство, $x \in L$, $x \neq 0$. Совокупность $\{\lambda x\}$, где $\lambda \in P$, образует, очевидно, линейное многообразие. Размерность этого многообразия как линейного пространства равна 1.

Если $C[a, b]$ — пространство непрерывных функций, а $\{P_n\}$ — совокупность всех многочленов, заданных на отрезке, то $\{P_n\}$ — линейное многообразие бесконечной размерности.

Пусть L — линейное пространство, L^1 — некоторое линейное многообразие и $L^1 \subset L$. Будем говорить, что два элемента x и y из L *эквивалентны* $(x \sim y)$, если $x - y \in L^1$. Это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности (т. е. соответственно $x \sim x$; если $x \sim y$, то $y \sim x$; если $x \sim y$, $y \sim z$, то $x \sim z$). Поэтому это отношение эквивалентности разбивает все L на непересекающиеся классы. Класс эквивалентных элементов называется *классом смежности* по многообразию L^1. Совокупность всех классов смежности по L^1 называется *фактор-пространством* пространства L по L^1 и обозначается L/L^1. В фактор-пространстве L/L^1 вводятся линейные операции по следующему правилу: если ζ и η — два элемента из L/L^1, то их суммой называется тот элемент $\xi = \zeta + \eta$, который содержит все элементы, эквивалентные элементам $x + y$, где x — представитель класса ζ, а y — представитель класса η. Аналогично определяется умножение элемента $\xi \in L/L^1$ на скаляр α. Нетрудно убедиться, что если L — пространство размерности n, а размерность L^1 равна k, то $k \leqslant n$ и размерность L/L^1 равна $l = n - k$. Эта размерность называется *коразмерностью* многообразия L^1 в L.

Если L^1 имеет конечную коразмерность l, то в L можно выбрать элементы $x_1, x_2, \ldots, x_l$ так, что всякий элемент $x \in L$ однозначно представим в виде $x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i x_i + y$, $\alpha_i \in P$, $i = 1, \ldots, l$, $y \in L^1$. (P — поле комплексных или действительных чисел.)

Линейное пространство L называется *алгебраической прямой суммой* линейных пространств L_1 и L_2, если L_1 и L_2 — линейные многообразия в L и любой элемент $x \in L$ однозначно представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$.

Если L_1 и L_2 — линейные пространства над полем P, то прямое произведение

$$L = L_1 \times L_2$$

(см. гл. I, § 1, п. 1) становится линейным пространством, если операции в нем определить по правилам

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2),$$

где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, $(x_1, x_2) \in L_1 \times L_2$.

Примеры.

1. Любые два базиса линейного пространства равномощны. В том случае, когда существует конечный базис, это хорошо известный факт из курса линейной алгебры.

2. Если K — кольцо, то множество $K_1 \subset K$ называется *подкольцом*, если элементы из K_1 образуют кольцо относительно операций в K. Назовем подкольцо $I \subset K$ *правым идеалом* *) кольца K, если справедливы аксиомы:

1) $Ix \subset I$ при всех $x \in K$, $Ix = \{y \cdot x\}$, $y \in I$;

2) $0 \neq I \neq K$.

Определение левого идеала аналогично. Подкольцо $I \subset K$, являющееся одновременно и правым, и левым идеалом, называется *двусторонним идеалом.*

Идеал (правый, левый, двусторонний) называется *максимальным идеалом* (правым, левым, двусторонним), если он не содержится ни в каком другом идеале (правом, левом, двустороннем).

3) Пусть P — поле, множество A называется *алгеброй над полем* P, если A является одновременно и кольцом, и линейным пространством над P, причем

$$\alpha(xy) = (\alpha x) y = x(\alpha y)$$

для всех элементов x, y из A и всех скаляров α.

4) Приведем примеры наиболее часто встречающихся колец. Пусть $C(X)$ — множество всех комплексных функций $\{x(t)\}$, определенных и непрерывных на топологическом пространстве X. Очевидно, $C(X)$ есть коммутативное кольцо с обычным сложением и умножением функций. Точно так же $C^k(X)$ — множество k раз непрерывно дифференцируемых функций есть коммутативное кольцо с обычными операциями сложения и умножения функций.

Пусть L — пространство многочленов с комплексными коэффициентами, степень которых не превосходит n, и K — множество отображений из L в L вида

$$f \to \sum_{k=0}^{m} a_k D^k(f),$$

где $f \in L$, $a_k \in P$, D — оператор дифференцирования. Тогда K — коммутативное кольцо и $D^{n+1} = 0$.

Совокупность всех матриц n-го порядка, где $n > 1$, с обычными операциями над матрицами образует некоммутативное кольцо.

5) Примером двустороннего идеала кольца $C[a, b]$, $[a, b]$ — отрезок вещественной оси (см. пример 4, кольцо $C(X)$), может служить совокупность всех функций из $C[a, b]$, равных нулю на отрезке $[0, 1/2]$. Можно убедиться, что максимальным двусто-

---

*) Часто такой правый идеал называется *собственным.*

ронним идеалом этого кольца является совокупность всех функций из $C[a, b]$, обращающихся в нуль в какой-нибудь фиксированной точке отрезка $[a, b]$.

2. Линейные операторы. Пространство операторов

Определение 9. Отображение A линейного пространства L_1 в линейное пространство L_2 над тем же полем P называется *линейным оператором* (обозначение $A: L_1 \to L_2$), если выполнены следующие аксиомы:

1) $A(x+y) = Ax + Ay$

для любых x и y из L_1;

2) $A(\alpha x) = \alpha Ax$

для любого $x \in L_1$ и любого $\alpha \in P$.

Если $L_1 = L_2 = L$, то A называется *линейным оператором в пространстве* L.

Введем понятие *суммы операторов* $A: L_1 \to L_2$ и $B: L_1 \to L_2$ следующим образом: $(A+B)x = Ax + Bx$, $x \in L_1$, очевидно, что $(A+B)$ — линейный оператор, $(A+B): L_1 \to L_2$. Точно так же вводится понятие *произведения линейного оператора A на скаляр* $\alpha \in P$, а именно $(\alpha A)x = \alpha(Ax)$ для любого $x \in L_1$. Наконец, если $A: L_1 \to L_2$, $B: L_2 \to L_3$, то *произведение линейных операторов B и A* определяется по правилу $(BA)x = B(Ax)$. Произведение BA является линейным оператором и отображает L_1 в L_3.

Таким образом, мы приходим к важнейшему понятию — пространству линейных операторов.

Определение 10. Совокупность всех линейных операторов, отображающих линейное пространство L_1 в L_2, образует линейное пространство с введенными выше операциями сложения операторов A и B и умножения оператора A на скаляр $\alpha \in P$. Это пространство называется *пространством линейных операторов* и обозначается $(L_1 \to L_2)$.

Если $L_1 = L_2 = L$, то $(L \to L)$ является кольцом.

Таким образом, мы построили новое пространство $(L_1 \to L_2)$, элементами которого являются линейные операторы.

Рассмотрим теперь частный случай линейного отображения A линейного пространства L_1 в поле действительных или комплексных чисел. Дадим в связи с этим следующее определение.

Определение 11. Линейный оператор $A: L_1 \to L_2$ называется *линейным функционалом*, если $L_2 \subset P$, где P — поле коэффициентов.

Таким образом, функционал отображает линейное пространство в поле коэффициентов, т. е. функционал — числовая функция.

Напомним, что всюду поле P, над которым определено линейное пространство L, либо совпадает с $\mathbf{R}^1$, либо с полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. (В первом случае L называется *вещественным* линейным пространством, во втором — *комплексным*.)

3. Банаховы пространства

В функциональном анализе важнейшую роль играют нормированные и банаховы пространства.

Определение 12. Линейное пространство N над полем P действительных или комплексных чисел называется *нормированным*, если каждому $x \in N$ сопоставлено неотрицательное вещественное число $\|x\|$, которое называется нормой элемента x, причем справедливы следующие аксиомы:

1) $\|x+y\| \leqslant \|x\|+\|y\|$ для всех x и y из N;

2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ для любого $x \in N$ и $\alpha \in P$;

3) $\|x\|>0$, если $x \neq 0$, $\|0\|=0$, где 0 — нулевой элемент из N.

Каждое нормированное пространство можно рассматривать как метрическое пространство, в котором функция $\rho(x, y)$ определена так: $\rho(x, y)=\|x-y\|$.

Очевидно, из аксиом 1)—3) определения 12 получим, что функция $\rho(x, y)$ удовлетворяет аксиомам 1)—3) определения расстояния (см. п. 1 § 2 гл. I).

Таким образом, нормированные пространства обладают всеми свойствами метрических пространств. В частности, все понятия, введенные нами в § 2, 3 гл. I, переносятся и на нормированные пространства. В частности, нормированные пространства являются топологическими пространствами.

Перейдем теперь к определению банахова пространства.

Определение 13. *Банаховым пространством* B называется нормированное пространство, полное относительно метрики $\rho(x, y)=\|x-y\|$, определяемой его нормой.

Примерами банаховых пространств могут служить метрические пространства примеров п. 1 § 2 гл. I такие, как $\mathbf{R}^n$, $C[a, b]$, $C^n[a, b]$ $(n \geqslant 1)$, l^2, l^p, m, в которых норма элемента x определяется как его расстояние до нуля, т. е. $\|x\|=\rho(x, 0)$.

Приведем один пример, показывающий, что в банаховом пространстве геометрия может проявлять черты, не соответствующие обычным представлениям. Определим, например, для вектора $f=(f_1, f_2)$ двумерной плоскости норму: $\|f\|_1=|f_1|+|f_2|$.

Единичным шаром в так введенном нормированном пространстве $\mathbf{R}_1^2$ будет единичный квадрат с вершинами с точках $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, лежащих на осях координат OX и OY.

Проведем прямую, проходящую через начало координат под углом 45° к оси OX. Обозначим эту прямую через M и будем рассматривать M как подпространство нормированного пространства $\mathbf{R}_1^2$. Любой вектор g, принадлежащий M, имеет координаты (g_1, g_1), т. е. $g=(g_1, g_1)$. Поэтому, если рассмотреть вектор $f=(1, 0)$ и записать $\|f-g_1\|=|1-g_1|+|g_1|$, то норма разности векторов f и g достигает своего минимума, равного единице, для любого g_1 такого, что $0 \leqslant g_1 \leqslant 1$.

Таким образом, минимум расстояния от вектора f до подпространства M достигается на бесконечном множестве векторов g из подпространства.

Ясно, что если бы мы рассмотрели плоскость $\mathbf{R}^2$ с обычным евклидовым расстоянием, то указанный минимум достигался бы только на одном векторе.

А в некоторых нормированных пространствах, когда M бесконечномерно, этот минимум может не достигаться вообще.

Банахово пространство называется *равномерно выпуклым*, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что если $\frac{1}{2}\|f+g\|>1-\delta$, $\|f\|=\|g\|=1$, то $\|f-g\|<\varepsilon$.

Если банахово пространство равномерно выпукло, то вектор g из подпространства M, доставляющий минимум $\|f-g\|$ для некоторого f из пространства, если существует, то только один.

4. Выпуклые множества, функционал Минковского, полунормы

В функциональном анализе важную роль играет понятие выпуклого множества в линейном пространстве. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 14. Множество B, принадлежащее линейному пространству L, называется *выпуклым*, если для любых элементов x, $y\in B$ и скаляра t, $0\leqslant t\leqslant 1$ выполнено соотношение $tx+(1-t)y\in B$.

Другими словами, требуется, чтобы множество B со всякими двумя своими точками содержало и отрезок, их соединяющий.

Свойство множества B быть выпуклым можно записать и так:

$$tB+(1-t)B\subset B,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

Справедливо следующее простое свойство.

Свойство 1. *Пересечение любого числа выпуклых множеств есть множество выпуклое.*

Действительно, пусть $C=\bigcap\limits_{n} C_\alpha$ и каждое C_α выпукло. Пусть x и y — произвольные точки из C. Тогда x и y принадлежат каждому C_α. В силу выпуклости каждого C_α этим множествам принадлежит и отрезок, соединяющий точки x и y. Но тогда этот отрезок принадлежит и пересечению всех C_α, т. е. множеству C. Таким образом, множество C — выпукло.

Мы будем пользоваться также понятием уравновешенного множества.

Определение 15. Множество B, принадлежащее линейному пространству L, называется *уравновешенным*, если для любого скаляра $\alpha\in P$ такого, что $|\alpha|\leqslant 1$, выполняется соотношение $\alpha B\subset B$, т. е. для любого элемента $x\in B$ элемент $\alpha x\in B$, $|\alpha|\leqslant 1$.

Например, круг на плоскости, шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат — выпуклые и уравновешенные множества. Прямоугольник в $\mathbf{R}^n$: $a_i\leqslant x_i\leqslant b_i$, $i=1, 2,\ldots,n$ — множество выпуклое и, вообще говоря, неуравновешенное.

Перейдем теперь к следующему понятию.

Определение 16. Множество $B \subset L$ называется *абсолютно выпуклым,* если для любых x, $y \in B$ и любых λ, $\mu \in P$ таких, что $|\lambda|+|\mu| \leqslant 1$, выполняется соотношение $\lambda x+\mu y \in B$.

Нижеперечисленные свойства могут быть установлены из данных выше определений.

Свойство 2. *Множество B является абсолютно выпуклым в том и только том случае, если оно выпукло и уравновешено.*

Пусть B — абсолютно выпукло. Тогда оно, очевидно, выпукло и уравновешено.

Обратно, пусть B — выпукло и уравновешено. Выберем $x, y \in B$ и $|\lambda|+|\mu| \leqslant 1$. Если $\lambda=0$ (или $\mu=0$), то, очевидно, $\lambda x+\mu y=\mu y \in B$ (или $\lambda x+\mu y=\lambda x \in B$) в силу того, что B уравновешено. Пусть теперь $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, тогда

$$x_1=\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in B, \quad y_1=\frac{\mu}{|\mu|} y \in B,$$

также в силу того, что B — уравновешено.

Запишем соотношение

$$\lambda x+\mu y-(|\lambda|+|\mu|)\left(\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\lambda x}{|\lambda|}+\frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} \cdot \frac{\mu y}{|\mu|}\right)=$$
$$=\alpha\left(t x_1+(1-t) y_1\right),$$

где

$$0<\alpha=|\lambda|+|\mu| \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t=\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} \leqslant 1,$$

$$x_1=\frac{\lambda}{|\lambda|} x \in B, \quad y_1=\frac{\mu}{|\mu|} y \in B.$$

Следовательно, $\lambda x+\mu y=\alpha\left(t x_1+(1-t) y_1\right) \in B$, так как в силу выпуклости B элемент $z=t x_1+(1-t) y_1 \in B$, а в силу того, что B уравновешено, $\alpha z \in B$, $0<\alpha \leqslant 1$.

Свойство 3. *Пусть B_1 и B_2 — выпуклые множества из L (абсолютно выпуклы), $\lambda \in P$, тогда множества B_1+B_2, λB_1 выпуклы (абсолютно выпуклы).*

Докажем, например, что B_1+B_2 выпукло. Пусть $x, y \in B_1+B_2$ $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $x=x_1+x_2$, $y=y_1+y_2$, где x_1, $y_1 \in B_1$; x_2, $y_2 \in B_2$.

Имеем, что

$$t x+(1-t) y=t\left(x_1+x_2\right)+(1-t)\left(y_1+y_2\right)=$$
$$=t x_1+(1-t) y_1+t x_2+(1-t) y_2 \in B_1+B_2,$$

поскольку в силу выпуклости B_1 и B_2 элемент $t x_1+(1-t) y_1 \in B_1$, а элемент $t x_2+(1-t) y_2 \in B_2$. Точно так же устанавливаются и другие утверждения свойства 3.

Свойство 4. *Пусть B — непустое абсолютно выпуклое множество в L, тогда $0 \in B$, и если $|\lambda| \leqslant|\mu|$, то $\lambda B \subset \mu B$.*

То, что $0 \in B$, очевидно. Пусть теперь $|\lambda| \leqslant |\mu| \neq 0$ и $x \in \lambda B$. Тогда $x = \lambda x_1$, где $x_1 \in B$, и в силу того, что B абсолютно выпукло, $\frac{\lambda}{\mu} x_1 \in B$ (поскольку $|\lambda|/|\mu| \leqslant 1$). Другими словами, $\frac{\lambda}{\mu} x_1 = y \in B$, т. е. $\lambda x_1 = \mu y$, или $\lambda B \subset \mu B$.

Случай, когда $\mu = \lambda = 0$, очевиден.

Если B — произвольное непустое множество из L, то совокупность конечных линейных комбинаций $\Sigma \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\Sigma \lambda_i = 1$, $x_i \in B$, называется *выпуклой оболочкой* множества B. Очевидно, что выпуклая оболочка B есть наименьшее выпуклое множество, содержащее B.

Множество всевозможных линейных комбинаций $\Sigma \lambda_i x_i$, где $\Sigma |\lambda_i| \leqslant 1$, $x_i \in B$, называется *абсолютно выпуклой оболочкой* множества B. Точно так же, абсолютно выпуклая оболочка множества B есть наименьшее абсолютно выпуклое множество, содержащее B.

Определение 17. Множество B, лежащее в линейном пространстве L, называется *поглощающим*, если для любого $x \in L$ существует такое число $\lambda = \lambda(x) > 0$, что $x \in \mu B$ для всех μ таких, что $|\mu| \geqslant \lambda$.

Геометрически это свойство означает, что на всяком луче, выходящем из нуля, имеется интервал с концом в нулевой точке, целиком содержащийся в B.

Например, любая окрестность нуля в $\mathbf{R}^n$ является поглощающим множеством.

В силу свойства 4, если множество B абсолютно выпуклое, то оно будет поглощающим тогда и только тогда, когда для любого $x \in L$ существует такое $\lambda > 0$, что $x \in \lambda B$, т. е. когда $L = \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda B$ (или когда $L = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nB$).

Перейдем теперь к важному понятию полунормы и к изучению свойств связанного с полунормой функционала Минковского.

Пусть $p(x)$ — вещественный функционал (вещественная функция), определенная на линейном пространстве L.

Функционал называется *полуаддитивным*, если для любых $x_1, x_2 \in L$

$$1)\ p(x_1 + x_2) \leqslant p(x_1) + p(x_2);$$

положительно однородным, если для $\lambda \geqslant 0$

$$2)\ p(\lambda x) = \lambda p(x);$$

однородным, если для любого λ

$$3)\ p(\lambda x) = |\lambda| p(x).$$

Определение 18. Вещественный функционал, обладающий свойствами 1) и 3), называется *полунормой*.

Функционал, удовлетворяющий свойствам 1) и 2), называется *калибровочной функцией*.

Отметим, что:

а) $p(0)=0$ для любой калибровочной функции или полунормы.

б) Если p — полунорма, то $p(x)\geqslant 0$ для любого $x\in L$.

Действительно,

$$0=p(0)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x)=2p(x),$$

т. е. $p(x)\geqslant 0$.

в) Для полунормы p справедливо соотношение

$$|p(x)-p(y)|\leqslant p(x-y).$$

В самом деле, имеем в силу полуаддитивности

$$p(x)=p(x-y+y)\leqslant p(x-y)+p(y).$$

Поменяем в этом неравенстве местами x и y и заметим, что

$$p(x-y)=p((-1)(y-x))=p(y-x),$$

получим

$$p(y)=p(y-x+x)\leqslant p(x-y)+p(x).$$

Из этих двух неравенств и вытекает требуемое соотношение.

г) Для калибровочной функции p, аналогично, справедливо соотношение

$$|p(x)-p(y)|\leqslant \max(p(x-y),\ p(y-x)).$$

Здесь заметим, что равенство $p(x-y)=p(y-x)$ отсутствует и поэтому оценка имеет указанный выше вид.

Заметим, наконец, что хотя для любой полунормы $p(0)=0$, однако из того, что $p(x)=0$, вообще говоря, не следует, что $x=0$. Полунорма, для которой из соотношения $p(x)=0$ следует, что $x=0$, является, очевидно, нормой.

Определение 19. Пусть B — поглощающее множество в линейном пространстве L. *Функционал Минковского* множества B определяется по формуле

$$p_B(x)=\inf_{\mu}\{\mu:\mu>0,\quad x\in\mu B\},$$

где $x\in L$.

Заметим, что $p_B(x)<\infty$ для всех $x\in L$, поскольку множество B поглощающее.

Оказывается, что полунормы на L — это в точности функционалы Минковского всевозможных уравновешенных выпуклых поглощающих множеств.

Поскольку свойство множества быть выпуклым и уравновешенным эквивалентно свойству быть абсолютно выпуклым, то оказывается, что полунормы на L — это функционалы Минковского всевозможных абсолютно выпуклых поглощающих множеств. А именно справедливо следующее свойство.

Свойство 5. *Если p — неотрицательная калибровочная функция, то для любого $\lambda>0$ множества $\{x:p(x)<\lambda\}$ и $\{x:p(x)\leqslant\lambda\}$ являются выпуклыми и поглощающими. Если p — полунорма, то эти множества и уравновешенные, т. е. являются абсолютно выпуклыми.*

С другой стороны, каждому выпуклому поглощающему множеству $B\subset L$ соответствует функционал Минковского $p_B(x)=\inf\limits_{\mu}\{\mu:\mu>0,\ x\in\mu B\}$, причем

$$\{x:p_B(x)<1\}\subset B\subset\{x:p_B(x)\leqslant 1\}.$$

Если B, кроме того, уравновешено, то p_B — полунорма.

Докажем, что множество $\{x:p(x)<\lambda\}$, $\lambda>0$ выпукло. Пусть x и y — две произвольные точки из этого множества и $0\leqslant t\leqslant 1$. Тогда точка $tx+(1-t)y$ в силу полуаддитивности и положительной однородности p также принадлежит этому множеству:

$$p(tx+(1-t)y)\leqslant p(tx)+p((1-t)y)=tp(x)+(1-t)p(y)<\lambda.$$

Покажем, что множество $\{x:p(x)<\lambda\}$. $\lambda>0$ поглощающее. Пусть $\max(p(x),\ p(-x))=a$. Выберем μ из неравенства: $|\mu|\geqslant(a+\varepsilon)/\lambda$, $\varepsilon>0$. Тогда

$$p\left(\frac{x}{\mu}\right)=\frac{1}{|\mu|}p(\operatorname{sign}\mu\cdot x)\leqslant\frac{\lambda}{a+\varepsilon}p(\operatorname{sign}\mu\cdot x)<\lambda,\text{*)}$$

откуда получается, что $x\in\mu\{x:p(x)<\lambda\}$, $\lambda>0$. Следовательно, множество $\{x:p(x)<\lambda\}$ — поглощающее.

Докажем вторую часть утверждения. Поскольку B поглощающее, то $p_B(x)<+\infty$. Пусть теперь $\lambda>0$, проверим **) положительную однородность функционала p_B. Имеем в силу того, что $\lambda x\in\mu B$ тогда и только тогда, когда $x\in\mu/\lambda B$:

$$p_B(\lambda x)=\inf_{\mu}\{\mu>0:\lambda x\in\mu B\}=\lambda\inf_{\mu}\left\{\mu/\lambda:\mu>0,\ x\in\frac{\mu}{\lambda}B\right\}=\lambda p_B(x),$$

что и доказывает положительную однородность p_B. Проверим полуаддитивность функционала Минковского. Пусть $x,y\in L$, $\varepsilon>0$. Существуют такие скаляры $\lambda,\mu>0$, что

$$p_B(x)<\lambda<p_B(x)+\varepsilon,\quad p_B(y)<\mu<p_B(y)+\varepsilon.$$

Отсюда x/λ, $y/\mu\in B$ в силу того, что B уравновешено. На основании выпуклости множества B имеем

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu}=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot\frac{x}{\lambda}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{y}{\mu}\in B.$$

---

*) Если μ — комплексное число и $\mu\neq 0$, то $\operatorname{sign}\mu=|\mu|/\mu$; $\operatorname{sign}\mu=0$, если $\mu=0$.

**) При $\lambda=0$ в силу того, что $p_B(0)=0$, свойство положительной однородности p_B является очевидным.

Поэтому $p_B(x+y)\leqslant\lambda+\mu<p_B(x)+p_B(y)+2\varepsilon$. В силу произвольности ε получаем полуаддитивность p_B

$$p_B(x+y)\leqslant p_B(x)+p_B(y).$$

Пусть теперь B уравновешено. Установим, что p_B — однородная функция и тем самым полунорма. В силу уравновешенности $\lambda x\in\mu B$ тогда и только тогда, когда $x\in\mu/|\lambda|B$. Откуда

$$p_B(\lambda x)=\inf_\mu\{\mu>0:\lambda x\in\mu B\}=|\lambda|\inf_\mu\left\{\frac{\mu}{|\lambda|}:\mu>0,\ x\in\frac{\mu}{|\lambda|}\bar{B}\right\}=$$
$$=|\lambda|p_B(x),$$

что и требовалось.

5. Линейные топологические пространства. Теорема А. Н. Колмогорова

Сейчас мы переходим к изучению важнейшего понятия функционального анализа — понятия линейного топологического пространства.

Определение 20. Множество L_T называется *линейным топологическим пространством* над полем P вещественных или комплексных чисел, если

1) множество L_T является линейным пространством над полем P;

2) множество L_T есть топологическое пространство;

3) операции линейного пространства непрерывны в заданной на L_T топологии, т. е. для любых точек $x_1, x_2\in L_T$ и любой окрестности Σ точки x_1+x_2 существуют такие окрестности Σ_1, Σ_2 точек x_1, x_2 соответственно, что $\Sigma_1+\Sigma_2\subset\Sigma$, аналогично, если $x\in L_T$, $\alpha\in P$ и $\Sigma_{\alpha x}$ — окрестность точки αx, то найдутся число $\delta>0$ и некоторая окрестность Σ_x точки x такие, что справедливо соотношение $\beta\Sigma_x\subset\Sigma_{\alpha x}$, если только $|\beta-\alpha|<\delta$.

Другими словами, линейное пространство L_T является линейным топологическим пространством над полем P, если $L_T=(G_T, f)$, где G_T — коммутативная топологическая группа по сложению, а отображение $f:P\times G_T\to G_T$, заданное по правилу:

$$f(\alpha, x)=\alpha x,$$

непрерывно.

Непосредственно из сказанного следует, что отображение $P\times P\times\ldots\times P\times G_T\times G_T\times\ldots\times G_T\to G_T$, для которого

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, x_1, x_2, \ldots, x_n)\to\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\ldots+\alpha_nx_n,$$

непрерывно, т. е. в L_T всевозможные линейные комбинации скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются непрерывными отображениями $P\times P\times\ldots\times P\times G_T\times G_T\times\ldots\times G_T$ в G_T.

Вместо слов «линейное топологическое пространство» в дальнейшем часто будет использоваться сокращение: л. т. п.

Ясно, что всякое нормированное пространство является линейным топологическим пространством, причем за окрестность каждой точки берется открытый шар, ее содержащий.

Легко видеть, что линейное подмножество л. т. п. L_T само является л. т. п., если рассмотреть в нем топологию и линейные операции, индуцированные исходным пространством. Такое подмножество называется подпространством л. т. п. L_T.

Поскольку л. т. п. L_T является топологическим пространством, то естественно возникает вопрос об изучении открытых множеств в L_T.

В силу леммы 1 § 4 гл. I для задания открытых множеств в топологическом пространстве достаточно задать окрестность каждой точки. В л. т. п. для того, чтобы задать совокупность всех окрестностей всех точек, достаточно задать совокупность всех окрестностей нуля.

Установим в связи с этим следующее свойство.

Свойство 6. *Если Σ_x — окрестность точки x в L_T, то $\Sigma_x - x = \Sigma_0$ — окрестность нуля пространства L_T.*

Для доказательства свойства достаточно, очевидно, установить, что если Σ — открытое множество, то $\Sigma - x_0$, x_0 — фиксированная точка, — также открыто. Действительно, пусть $y \in \Sigma - x_0$, т. е. $y = x - x_0$, $x \in \Sigma$ и Σ является окрестностью точки $y + x_0 = x \in \Sigma$. В силу непрерывности операции сложения существуют окрестности Σ_{x_0} и Σ_y точек x_0 и y соответственно, такие, что $\Sigma_y + \Sigma_{x_0} \subset \Sigma$. В частности, $\Sigma_y + x_0 \subset \Sigma$, т. е. $\Sigma_y \subset \Sigma - x_0$. Тем самым показано, что всякая точка y входит в множество $\Sigma - x_0$ вместе с некоторой своей окрестностью Σ_y, т. е. множество $\Sigma - x_0$ — открыто.

Аналогично показывается в силу непрерывности операции умножения на скаляры, что вместе с множеством Σ множество $\beta\Sigma$ — открыто, $\beta \in P$ — полю коэффициентов, $\beta \neq 0$.

Подобные свойства справедливы и для замкнутых множеств.

Таким образом, в л. т. п. каждая окрестность точки x имеет вид $\Sigma_0 + x$, где Σ_0 — окрестность нулевого элемента пространства. Если $\{\Sigma_0\}$ образуют определяющую систему окрестностей нуля (см. определение 3 § 4 гл. I), то система окрестностей $\{\Sigma_0 + x\}$ образует определяющую систему окрестностей фиксированной точки x.

В силу определения определяющей системы получаем, что в л. т. п. существует определяющая система окрестностей нуля $\{\Sigma_0\}$ такая, что для любых $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \{\Sigma_0\}$ найдется окрестность $\Sigma_3 \in \{\Sigma_0\}$, обладающая свойством $\Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$.

Справедливы свойства:

Свойство 7. *Какова бы ни была окрестность $\Sigma_0 \in \{\Sigma_0\}$, существует окрестность Σ такая, что $\Sigma + \Sigma \subset \Sigma_0$.*

Действительно, поскольку $0 + 0 = 0$ и операция сложения непрерывна в л. т. п., то указанное свойство выполнено.

Свойство 8. *Каждая окрестность нуля Σ_0 в л. т. п. является поглощающим множеством.*

В самом деле, $0\cdot x=0$. В силу непрерывности операции умножения найдутся окрестность Σ_x точки x и число $\delta>0$ такие, что $\beta\Sigma_x\subset\Sigma_0$ при $|\beta|\leqslant\delta$. В частности, $x\in\frac{1}{\beta}\Sigma_0$ при $|1/\beta|\geqslant\geqslant 1/\delta$.

Свойство 9. *Каждая окрестность нуля Σ_0 в л. т. п. содержит уравновешенную окрестность нуля.*

В силу непрерывности операции умножения и того, что $0\cdot 0=0$ (здесь второй сомножитель и элемент справа — нулевые элементы л. т. п.), для любой окрестности нуля Σ_0 существуют окрестность Σ_δ и число $\delta>0$ такие, что $\beta\Sigma_\delta\subset\Sigma_0$ при $|\beta|\leqslant\delta$. Пусть $\Sigma_0^1=\bigcup\limits_{|\beta|\leqslant\delta}\beta\Sigma_\delta$.

Поскольку $\Sigma_0^1\supset\delta\Sigma_\delta$, а множество $\delta\Sigma_\delta$ является, как мы отмечали, открытым и, следовательно, окрестностью нуля, то окрестностью нуля будет и множество Σ_0^1. Оно уравновешено: если $|\alpha|\leqslant 1$, то $\alpha\Sigma_0^1=\bigcup\limits_{|\beta|\leqslant\delta}\alpha\beta\Sigma_\delta\subset\Sigma_0^1$. Наконец, поскольку все $\beta\Sigma_\delta\subset\Sigma_0$ при $|\beta|\leqslant\delta$, то и $\Sigma_0^1\subset\Sigma_0$.

Свойство 10. Пусть $\{\Sigma_0\}$ — *база окрестностей нуля в л. т. п. L_T. Для того чтобы L_T было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы* $\bigcap\limits_{\Sigma\in\{\Sigma_0\}}\Sigma=\{0\}$.

Пусть L_T — хаусдорфово, т. е. различные точки x и y обладают непересекающимися окрестностями. Пусть $x\neq 0$, тогда существует окрестность нулевого элемента $\Sigma_0\in\{\Sigma_0\}$, не содержащая точки x. Следовательно, указанное пересечение может содержать лишь нулевой элемент.

Обратно, если $\bigcap\limits_{\Sigma\in\{\Sigma_0\}}\Sigma=\{0\}$ и $x\neq y$, то существует окрестность Σ_0, не содержащая элемент $x-y$. В силу свойств 7 и 9 найдется уравновешенная окрестность нуля такая, что $\Sigma+\Sigma\subset\Sigma_0$. Тогда $x+\Sigma$ и $y+\Sigma$ — окрестности точек x и y соответственно, причем непересекающиеся. Действительно, если бы они пересекались и $z\in(x+\Sigma)\cap(y+\Sigma)$, то мы бы получили, что

$$x-y=(z-y)-(z-x)\in\Sigma-\Sigma=\Sigma+\Sigma\subset\Sigma_0.$$

Последнее соотношение противоречит выбору окрестности Σ_0. Следовательно, L_T — хаусдорфово пространство.

Всюду в дальнейшем мы будем считать рассматриваемые линейные топологические пространства хаусдорфовыми (т. е. выполнена аксиома отделимости Хаусдорфа). Именно эти пространства представляют наибольший интерес в функциональном анализе.

Ниже нами будет использовано следующее утверждение.

Свойство 11. *Если Y — выпуклое множество в л. т. п. L_T, то его внутренность $\mathring{Y}$ — выпуклое множество* *).

*) См. сноску в п. 2 § 4 гл. I — внутренность множества есть объединение всех открытых множеств, принадлежащих данному множеству.

Можно считать, что $\mathring{Y}\neq\varnothing$. Пусть точка $x\in\mathring{Y}$. Введем множество $U=x-Y$. Это множество выпукло (см. свойство 3 п. 4 этого параграфа) и содержит нулевой элемент пространства, причем его внутренность $\mathring{U}=x-\mathring{Y}$. Покажем, что множество $\mathring{U}$ — выпукло. Для этого покажем, что $\mathring{U}=\{x:p_U(x)<1\}$, где p_U — функционал Минковского множества U (см. свойство 5 п. 4 этого параграфа). Напомним, что функционал Минковского выпуклого поглощающего множества U обладает тем свойством, что $\{x:p_U(x)<1\}\subset U\subset\{x:p_U(x)\leqslant 1\}$. Поэтому для точек $\mathring{U}$ функционал $p_U(x)$ не превосходит 1. Допустим, что для $x\in\mathring{U}$, $p_U(x)=1$. Покажем, что любая окрестность Σ точки x содержит точки $y\overline{\in}U$, что будет противоречить тому, что $x\in\mathring{U}$. Действительно, так как Σ — окрестность точки x, то найдется $\varepsilon>0$ такое, что $y=(1+\varepsilon)x\in\Sigma$. Тогда $p_U(y)=(1+\varepsilon)p_U(x)=1+\varepsilon>1$, откуда $y\overline{\in}U$. Следовательно, для точек $x\in\mathring{U}$, $p_U(x)<1$ и $\mathring{U}=\{x:p_U(x)<1\}$. В силу свойства 5 п. 4 этого параграфа $\mathring{U}$ — выпукло, а тогда выпукло и $\mathring{Y}=x-\mathring{U}$.

Докажем следующее утверждение.

Свойство 12. *В л.т.п. L_T каждая выпуклая окрестность нуля содержит уравновешенную выпуклую окрестность нуля.*

Пусть Σ_0 — выпуклая окрестность нуля. Выберем уравновешенную окрестность нуля $\Sigma\subset\Sigma_0$ согласно утверждению свойства 9.

Поскольку Σ уравновешена, то $\alpha^{-1}\Sigma=\Sigma$, $\alpha\in P$ при $|\alpha|=1$, следовательно, $\Sigma\subset\alpha\Sigma_0$, поэтому $\Sigma\subset U=\bigcap\limits_{|\alpha|=1}\alpha\Sigma_0$, а отсюда следует, что внутренность $\mathring{U}$ множества U является окрестностью нуля. Ясно, что $\mathring{U}\subset\Sigma_0$. Будучи пересечением выпуклых множеств, множество U — выпукло, следовательно, согласно свойству 11 $\mathring{U}$ тоже выпукло.

Покажем, что $\mathring{U}$ уравновешено, для этого достаточно установить, что U уравновешено. Выберем λ и μ так, что $0\leqslant\lambda\leqslant1$, $|\mu|=1$. Тогда

$$\lambda\mu U=\bigcap_{|\alpha|=1}\lambda\mu\alpha\Sigma_0=\bigcap_{|\alpha|=1}\lambda\alpha\Sigma_0.$$

Так как $\alpha\Sigma_0$ — выпуклая окрестность нуля, то $\lambda\alpha\Sigma_0\subset\alpha\Sigma_0$. Таким образом, $\lambda\mu U\subset U$. Следовательно, $\mathring{U}$ — искомая выпуклая уравновешенная окрестность нуля, $\mathring{U}\subset\Sigma_0$.

В линейных топологических пространствах важную роль играет понятие ограниченного множества.

Определение 21. Множество A в линейном топологическом пространстве называется *ограниченным*, если для любой окрестности нуля Σ_0 существует такое $\beta\in P$, что $A\subset\alpha\Sigma_0$ при всех $\alpha>\beta>0$.

Отметим некоторые простые факты, относящиеся к понятию ограниченного множества.

Утверждение 1. *Пусть A_1 и A_2 — ограниченные подмножества л.т.п. L_T. Тогда подмножества $L_T: A_1+A_2$, λA_1, где $\lambda \subset \subset P$, — также ограничены.*

Для подмножества λA_1 утверждение очевидно. Для подмножества A_1+A_2 утверждение следует из того, что для всякой окрестности нуля Σ_0 существует окрестность нуля Σ такая, что $\Sigma+\Sigma\subset\Sigma_0$ (см. свойство 7 п. 5 этого параграфа).

Утверждение 2. *Для того чтобы множество A линейного топологического пространства было ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности x_n точек множества A и последовательности скаляров $\alpha_n \in P$ такой, что $\alpha_n \to 0$ при $n\to\infty$, выполнялось условие: $\alpha_n x_n \to 0$ при $n\to\infty$.*

Пусть A — ограниченное множество, а Σ — уравновешенная окрестность нуля. Тогда существует такое $\alpha>0$, что $A\subset\alpha\Sigma$. Выберем число N такое, что $|\alpha_n|\alpha<1$ для всех $n>N$. Пусть $x_n \in A$. Тогда $\alpha^{-1}x_n\in\Sigma$, а так как Σ — уравновешенная окрестность, то $\alpha_n\alpha\alpha^{-1}x_n=\alpha_n x_n\in\Sigma$ для всех $n>N$, т. е. $\alpha_n x_n \to 0$ при $n\to\infty$.

Обратно, пусть для любой последовательности точек $x_n\in A$ и последовательности $\{\alpha_n\}$ скаляров такой, что $\alpha_n\to 0$ при $n\to\infty$, выполнено условие: $\alpha_n x_n\to 0$, $n\to\infty$. Докажем, что множество A — ограничено. Допустим противное. Тогда существует такая окрестность Σ нуля и такая последовательность скаляров $\gamma_n\to\infty$, что $\gamma_n\Sigma$ не содержит A. Пусть $x_n\in A$ и $x_n \overline{\in} \gamma_n\Sigma$. Тогда ни одна из точек $\gamma_n^{-1}x_n$ не принадлежит множеству Σ, т. е. последовательность $\gamma_n^{-1}x_n$ не сходится к нулю при $n\to\infty$.

В связи с данными выше определениями линейного топологического пространства (определение 20 этого параграфа) и нормированного пространства (определение 12 этого параграфа) возникает вопрос о том, когда л. т. п. L_T является нормируемым, т. е. когда можно ввести в L_T норму так, чтобы задаваемая с помощью этой нормы совокупность открытых множеств (определяемая как и в метрическом пространстве с помощью открытых шаров) совпадала с совокупностью открытых множеств, ранее имевшейся в л. т. п. L_T.

Справедлива следующая теорема о нормируемости линейного топологического пространства.

Теорема (Колмогоров). *Для того чтобы л.т.п. L_T было нормируемым, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовала выпуклая ограниченная окрестность нуля.*

Пусть Σ — указанная в условиях теоремы окрестность. Без ограничения общности можно считать, что окрестность Σ уравновешенная (свойство 12 этого параграфа). Подчеркнем, что согласно свойству 8 окрестность Σ является поглощающим множеством.

Пусть x — произвольный элемент L_T. Введем функционал Минковского p_Σ, отвечающий множеству Σ:

$$p_\Sigma(x) = \inf_\mu \{\mu : \mu > 0, \quad x \in \mu\Sigma\}.$$

Согласно утверждению свойства 5 этого параграфа функционал p_Σ является полунормой. Покажем, что $p_\Sigma(x)$ задает на самом деле норму в пространстве L_T. Для этого достаточно показать, что $p_\Sigma(x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$. То, что $p_\Sigma(0)=0$, мы уже знаем. Если $x\neq 0$, то найдется такое натуральное число n_0, что $n_0 x \overline{\in} \Sigma$.

Действительно, если $y_n = nx \in \Sigma$ для любого n, то согласно утверждению 2 в силу ограниченности Σ будет справедливо соотношение $\frac{1}{n} y_n \to 0$, что противоречит тому, что $\frac{1}{n} y_n = x \neq 0$. Следовательно, существует натуральное число n_0 такое, что $n_0 x \overline{\in} \Sigma$, а поэтому $x \overline{\in} \frac{1}{n_0}\Sigma$. Таким образом, мы заключаем, что $p_\Sigma(x) \geqslant \frac{1}{n_0} > 0$, т. е. если $x\neq 0$, то и $p_\Sigma(x) > 0$.

Тем самым мы показали, что функционал Минковского, отвечающий выпуклой ограниченной окрестности нуля Σ, обладает всеми свойствами нормы, и мы можем записать, что $p_\Sigma(x) = \|x\|$.

Докажем теперь, что совокупность окрестностей нуля получившегося нормированного пространства совпадает с совокупностью окрестностей нуля, ранее имевшейся в л.т.п. L_T. Пусть Σ_0 — произвольная окрестность нуля. Поскольку окрестность Σ, с помощью которой вводилась норма, является ограниченным множеством, то существует такое число $r^{-1}>0$, что $\Sigma \subset r^{-1}\Sigma_0$. С другой стороны, единичный шар $\|x\|<1$ принадлежит окрестности Σ. Следовательно, шар $\|x\| \leqslant r$ принадлежит $r\Sigma$, т. е. Σ_0. Обратно, пусть задан шар $\|x\| \leqslant \rho$. Из определения нормы следует, что этот шар целиком принадлежит окрестности нуля $\rho'\Sigma$, где ρ' — произвольное положительное число, большее чем ρ. Это завершает доказательство достаточности условий теоремы.

Докажем необходимость. Пусть топология пространства L_T нормируема и $\|\cdot\|$ — норма, задающая совокупность окрестностей нуля, совпадающую с совокупностью окрестностей нуля, ранее имевшейся в L_T. Тогда $O = \{x : \|x\| < 1\}$ является выпуклой ограниченной окрестностью нуля. В проверке нуждается лишь выпуклость единичного шара. Пусть x и y — произвольные точки O и пусть $z = tx + (1-t)y$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда $\|z\| = \|tx + (1-t)y\| \leqslant \leqslant t\|x\| + (1-t)\|y\| < t + 1 - t = 1$, т. е. $z \in O$.

6. Счетно-нормированные пространства

Важными примерами линейных топологических пространств являются так называемые счетно-нормированные пространства. Для того чтобы определить эти пространства, введем одно вспомогательное понятие.

Допустим, что в линейном пространстве L заданы две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$. Назовем эти нормы *согласованными*, если любая последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая L, фундаментальная по каждой из этих норм и сходящаяся к некоторому пределу $x \in L$ по одной из этих норм, сходится к тому же пределу x и по второй норме.

Определение 22. Линейное пространство L называется *счетно-нормированным* пространством, если в нем задана счетная система согласованных друг с другом норм $\|\cdot\|_n$, $n=1, 2, \ldots$.

Всякое счетно-нормированное пространство превращается в линейное топологическое, если за определяющую систему окрестностей нуля принять совокупность окрестностей $\Sigma_{n,\varepsilon}$, зависящих от номера n и числа $\varepsilon > 0$, причем каждая окрестность $\Sigma_{n,\varepsilon}$ состоит из всех тех элементов $x \in L$, для которых

$$\|x\|_1 < \varepsilon, \ldots, \|x\|_n < \varepsilon.$$

Легко видеть, что такая система окрестностей нуля действительно определяет топологию (см. лемму 1 п. 1 § 4 гл. I). Действительно, нуль принадлежит любой окрестности, пересечение двух окрестностей $\Sigma_{n_1,\varepsilon_1}$, $\Sigma_{n_2,\varepsilon_2}$ указанного вида есть снова окрестность указанного вида (следует взять меньшее из чисел ε_1 и ε_2 и больший из номеров n_1, n_2), наконец, какова бы ни была окрестность $\Sigma_{n,\varepsilon}$, существует другая окрестность, ей принадлежащая.

Так же легко проверяется, что операция сложения элементов и умножения их на скаляры из поля P непрерывны в данной топологии. Проверим, например, непрерывность операции умножения на числа. Для любой окрестности $\Sigma_{n,\varepsilon}$ ввиду того, что $0\cdot 0 = 0$ (второй сомножитель слева и выражение справа — нулевые элементы пространства), найдутся окрестность $\Sigma_{n_1,\varepsilon_1}$ нуля и число $\delta > 0$ такие, что

$$\alpha \Sigma_{n_1,\varepsilon_1} \subset \Sigma_{n,\varepsilon} \quad \text{при} \quad |\alpha| \leqslant \delta;$$

для этого достаточно положить $n_1 = n$, $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\delta \leqslant 1$.

Подчеркнем, что всякое счетно-нормированное пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности, поскольку систему окрестностей нуля $\Sigma_{n,\varepsilon}$, $n=1, 2, \ldots, \varepsilon > 0$ можно заменить счетной подсистемой $\Sigma_{n,1/k}$, $n=1, 2, \ldots$, $k=1, 2, \ldots$. Топология при этом не изменится. Таким образом, в этом пространстве сходящиеся последовательности восстанавливаются в своих правах, и в их терминах можно описать топологию.

В счетно-нормированном пространстве L можно ввести и метрику, например, по правилу

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\|x-y\|_n}{2^n (1 + \|x-y\|_n)}, \quad x, y \in L.$$

Метрика $\rho(x, y)$ обладает интересным свойством, она инвариантна относительно сдвигов:

$$\rho(x+z, y+z)=\rho(x, y), \quad x, y, z\in L.$$

Примеры.

1. Рассмотрим пространство $K[a, b]$ бесконечно дифференцируемых функций f на отрезке $[a, b]$ с обычными линейными операциями над функциями. Положим

$$\|f\|_n=\sup_{\substack{a\leqslant t\leqslant b\\ 0\leqslant k\leqslant n}} |f^{(k)}(t)|.$$

Очевидно, что все эти нормы согласованы между собой и что тем самым введена топология счетно-нормированного пространства.

2. Пусть S — пространство всех бесконечно дифференцируемых функций на прямой, стремящихся на бесконечности к нулю вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|t|^{-1}$, т. е. $t^k f^{(q)}(t)\to 0$ при $|t|\to\infty$ для любых фиксированных k и q.

Положим

$$\|f\|_n=\sup_{k, q\leqslant n-1} |t^k f^{(q)}(t)|, \quad n=1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что S — счетно-нормированное пространство.

В заключение отметим, что нормы в счетно-нормированном пространстве L можно считать удовлетворяющими условию

$$\|x\|_k\leqslant\|x\|_m \text{ при } k<m,$$

в противном случае мы бы рассмотрели нормы

$$\|x\|_{k,1}=\max(\|x\|_1, \|x\|_2, \ldots, \|x\|_k),$$

определяющие ту же топологию.

Счетно-нормированное пространство можно пополнить по введенной метрике ρ. Отметим при этом, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна относительно метрики ρ (сходится по метрике ρ) тогда и только тогда, когда она фундаментальна относительно каждой из норм $\|\cdot\|_n$ (сходится по каждой из норм), т. е. полнота L означает, что в нем всякая последовательность, фундаментальная по каждой из норм $\|\cdot\|_n$, сходится.

Пополнив пространство L по каждой из норм $\|\cdot\|_k$, удовлетворяющих неравенству $\|x\|_k\leqslant\|x\|_m$ при $k<m$, получим естественные вложения полных нормированных пространств

$$L_k\supset L_m \text{ при } k<m,$$

где L_k и L_m — нормированные пространства с нормами $\|\cdot\|_k$ и $\|\cdot\|_m$ соответственно, при этом $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} L_k\supset L$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $L_T = \mathbf{C}$ — одномерное линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$. Доказать, что уравновешенными являются множества: $\mathbf{C}$, $\varnothing$, одноточечное множество $\{0\}$, круг с центром в точке 0 (открытый или замкнутый). Найти уравновешенные множества, если $L_T = \mathbf{R}^2$ (двумерное линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbf{R}^1$).

Пусть $B = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 : |z_1| \leqslant |z_2|\}$, $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел. Доказать, что B — уравновешенное множество.

2. Пусть M — подпространство линейного нормированного пространства N, не совпадающее с N. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется в N такой элемент y с нормой, равной единице, что $\|x - y\| > 1 - \varepsilon$ для всех $x \in M$. Напомним, что в нормированном пространстве подпространством называется замкнутое линейное многообразие.

3. Доказать, что замыкание линейного множества в л. т. п. есть линейное множество.

4. Докажите, что замыкание выпуклого множества выпукло. Замыкание абсолютно выпуклого множества абсолютно выпукло.

5. Пусть L — линейное множество, в котором выделено семейство $\{\Sigma_0\}$, удовлетворяющее свойствам: какова бы ни была окрестность $\Sigma_0 \in \{\Sigma_0\}$, существует $\Sigma \in \{\Sigma_0\}$, что $\Sigma + \Sigma \subset \Sigma_0$, каждая $\Sigma_0 \in \{\Sigma_0\}$ — уравновешенное и поглощающее множество, каковы бы ни были Σ_1, $\Sigma_2 \in \{\Sigma_0\}$, существует $\Sigma_3 \in \{\Sigma_0\}$ такая, что $\Sigma_3 \subset \Sigma_1 \cap \Sigma_2$. Тогда, если принять за окрестности элемента $x \in L$ любые множества вида $x + \Sigma_0$, $\Sigma_0 \in \{\Sigma_0\}$, то линейное множество L превращается в линейное топологическое пространство, в котором система $\{\Sigma_0\}$ будет определяющей системой окрестностей нуля (ср. со свойствами 7, 8, 9 п. 5 этого параграфа).

6. Пусть $X = \{x(t)\}$ — совокупность функций, заданных на прямой $\mathbf{R}^1$, бесконечно дифференцируемых на ней и обращающихся в нуль вне некоторого, своего для каждой функции, отрезка. Сумма функций и произведение функции на число определяются обычным образом. За окрестности нуля принимаются множества $\Sigma_{(k,\,\varepsilon)} = \{x(t) : |x^{(i)}(t)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, k\}$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого целого положительного k. Проверить выполнение всех аксиом линейного топологического пространства.

7. Подмножество B линейного топологического пространства L_T называется *вполне ограниченным*, если для любой окрестности нуля Σ_0 в L_T существует конечное подмножество $\{x_k\}_{k=1}^{n} \subset B$ такое, что $B \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + \Sigma_0)$. Доказать, что конечное множество вполне ограничено, что вполне ограниченное множество ограничено.

8. Линейное топологическое пространство называется локально выпуклым, если оно обладает базисом из выпуклых окрестностей нуля. Доказать, что множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ становится локально выпуклым пространством при наделении нормой $\|x\| = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$, т. е. пространство $C[a, b]$, аналогично, $C(X)$ (X — компакт) — локально выпуклые топологические пространства.

9. Доказать, что функция ρ, введенная в счетно-нормированном пространстве L (см. п. 5 этого параграфа), удовлетворяет всем аксиомам расстояния.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В БАНАХОВЫХ И F-ПРОСТРАНСТВАХ. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

В этом параграфе изучаются свойства операторов, действующих в основном в банаховых пространствах. Многие утверждения, факты, определения, приведенные ниже, справедливы и в более общих пространствах: линейных топологических, F-пространствах и других. Соответствующие обобщения приводятся в излагаемом материале. Подчеркнем, что хотя мы не стремились изложить материал сразу в максимальной общности, однако, если доказательство теоремы идейно более просто в более общей ситуации, мы приводим сначала его.

1. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах. Банахово пространство операторов. Понятие F-пространства

Пусть L_{T_1} и L_{T_2} — два линейных топологических пространства, а линейный оператор A отображает L_{T_1} в L_{T_2} — $A: L_{T_1} \to L_{T_2}$.

Определение 1. Линейный оператор $A: L_{T_1} \to L_{T_2}$ называется *ограниченным*, если он переводит ограниченные множества в ограниченные*). (Заметим, что данное определение применимо и к линейным функционалам.)

Очевидно, что если оператор A действует из одного нормированного пространства N_1 в другое N_2, т. е. $A: N_1 \to N_2$, то данное выше определение эквивалентно следующему.

Определение 1′. Линейный оператор $A: N_1 \to N_2$ называется *ограниченным*, если существует такая постоянная M, что $\|Ax\|_{N_2} \leqslant M\|x\|_{N_1}$ для любого $x \in N_1$.

Здесь N_1 и N_2 — два нормированных пространства, запись $\|Ax\|_{N_2}$ и $\|x\|_{N_1}$ означает, что нормы берутся в пространствах N_2 и N_1 соответственно. В тех случаях, когда это не вызывает недоразумений, индексы N_1 и N_2 внизу мы будем опускать.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть N_1 и N_2 — два нормированных пространства, A — линейный оператор, отображающий N_1 в N_2, тогда, для того чтобы он был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Необходимость. Допустим, что непрерывный оператор (см. определение 12 § 2 гл. I) не ограничен. Значит, существует последовательность элементов $\{x_n\}$, $x_n \in N_1$, такая, что $\|Ax_n\| > n\|x_n\|$. Пусть $\xi_n = \frac{x_n}{n\|x_n\|}$, тогда $\|\xi_n\| = 1/n \to 0$, $n \to \infty$, т. е. $\xi_n \to 0$, $n \to \infty$. (Напомним, что на нормированные пространства переносятся все определения, данные нами для метрических пространств. В частности, $\xi_n \to 0$, $n \to \infty$ означает, что $\rho(0, \xi_n) \to \infty$, т. е. $\|\xi_n\| \to 0$, $n \to \infty$.)

Вычислим величину $\|A\xi_n\|$. Имеем $\|A\xi_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|Ax_n\| > 1$.

Поэтому $\|A\xi_n\|$ при $n \to \infty$ не стремится к нулю, т. е. $A\xi_n$ не стремится к нулю при $n \to \infty$. Оператор A — линейный (см. определение 9 п. 2 § 1), поэтому $A0 = A(x - x) = Ax - Ax = 0$. Из предыду-

---

*) Множество U, расположенное в нормированном пространстве, *ограничено*, если существует такое число $N > 0$, что $\|x\| = \rho(x, 0) \leqslant N$ для любой точки $x \in U$ (см. задачу 5 § 2 гл. I).

щего, таким образом, следует, что последовательность $\{A\xi_n\}$ не стремится к элементу $A0$, что противоречит непрерывности оператора A. Следовательно, наше допущение о том, что оператор A не ограничен, не верно.

Достаточность. Пусть оператор A — ограничен, докажем его непрерывность. Пусть $x_n \to x$, т. е. $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\|Ax_n - Ax\| = \|A(x_n - x)\| \leqslant M\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Значит, $Ax_n \to Ax$, и, следовательно, оператор A непрерывен.

(Заметим также, что теорема, естественно, остается справедливой и для линейных функционалов, удовлетворяющих условиям теоремы.)

Если L_{T_1} и L_{T_2} — линейные топологические пространства, а оператор A — линейный и отображает L_{T_1} в L_{T_2}, то справедлива

Теорема 2. *Пусть L_{T_1} и L_{T_2} — два линейных топологических пространства, A — линейный оператор, отображающий L_{T_1} в L_{T_2}, тогда из непрерывности оператора A следует его ограниченность.*

Пусть E — ограниченное подмножество в L_{T_1} (см. определение 21 п. 5 § 1 этой главы), а Σ_0 — окрестность нуля в L_{T_2}. Так как A — непрерывный линейный оператор, то, во-первых, элемент 0 переходит в 0, а во-вторых, в L_{T_1} найдется такая окрестность нуля Σ, что $A(\Sigma) \subset \Sigma_0$. Поскольку множество E ограничено, то $E \subset \alpha\Sigma$ для достаточно больших α. Следовательно,

$$A(E) \subset A(\alpha\Sigma) = \alpha A(\Sigma) \subset \alpha\Sigma_0,$$

т. е. $A(E)$ — ограниченное множество в L_{T_2}.

Нетрудно показать, что из ограниченности A в л. т. п., вообще говоря, не следует его непрерывность.

Определение 2. Пусть A — линейный ограниченный оператор, отображающий одно нормированное пространство N_1 в другое N_2. *Нормой $\|A\|$ оператора A* называется наименьшая из постоянных M, удовлетворяющих условию $\|Ax\| \leqslant M\|x\|$.

Таким образом, по определению норма $\|A\|$ оператора A обладает двумя свойствами:

а) для любого $x \in N_1$ $\|Ax\| \leqslant \|A\|\ \|x\|$;

б) для произвольного $\varepsilon > 0$ существует элемент x_ε такой, что $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$.

Покажем, что $\|A\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|$, или, что то же,

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Действительно, если $\|x\| \leqslant 1$, то $\|Ax\| \leqslant \|A\|\|x\| \leqslant \|A\|$. Значит, и $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\| \leqslant \|A\|$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент x_ε такой, что $\|Ax_\varepsilon\| > (\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\|$. Пусть $\xi_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}$. Тогда $\|A\xi_\varepsilon\| = \frac{\|Ax_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|} > \frac{1}{\|x_\varepsilon\|}(\|A\| - \varepsilon)\|x_\varepsilon\| = \|A\| - \varepsilon$.

Так как $\|\xi_\varepsilon\|=1$, то $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\|A\xi_\varepsilon\|\geqslant\|A\|-\varepsilon$. Следовательно, $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|\geqslant\|A\|$, значит, $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}\|Ax\|$.

Примечание. Из проведенных рассуждений следует, что $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$, поэтому $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|\neq 0}\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Выше (см. определение 10 п. 2 § 1) было введено пространство $(L_1\to L_2)$ операторов, отображающих линейное пространство L_1 в линейное пространство L_2. Это пространство играет важную роль в различных разделах анализа, и мы сейчас продолжим его изучение.

Предположим сейчас, что указанные выше линейные пространства L_1 и L_2 являются нормированными. Для удобства, чтобы подчеркнуть, что они нормированы, переобозначим их через N_1 и N_2 соответственно, а линейное пространство, элементами которого являются линейные и ограниченные операторы, — через $(N_1\to N_2)$. В пространстве $(N_1\to N_2)$ можно ввести норму. Для этого норму элемента A пространства $(N_1\to N_2)$ введем по правилу $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$. Легко видеть, что эта норма удовлетворяет аксиомам определения 12 п. 3 § 1. Таким образом, линейное пространство $(N_1\to N_2)$, элементами которого являются линейные ограниченные операторы, есть линейное нормированное пространство. Возникает естественный вопрос: когда это пространство является полным, т. е. банаховым?

Ответ на этот вопрос содержится в доказываемой ниже теореме.

Теорема 3. *Если линейное нормированное пространство B_2 — банахово, то пространство линейных ограниченных операторов $(N_1\to B_2)$ также является банаховым.*

Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная последовательность пространства операторов $(N_1\to B_2)$, т. е. $\|A_n-A_m\|\to 0$, когда $n,\ m\to\infty$. Для любого x из N_1 имеем $\|A_nx-A_mx\|\leqslant\|A_n-A_m\|\times\|x\|\to 0$ при $n,\ m\to\infty$. Поэтому если $x\in N_1$ фиксировано, то последовательность элементов $\{A_nx\}$ фундаментальна в B_2, значит, в силу полноты пространства B_2 эта последовательность сходится. Обозначим $y=\lim\limits_{n\to\infty}A_nx$. Мы получили таким образом отображение из N_1 в B_2. Оператор, осуществляющий это отображение, обозначим через A. Из свойств предела следует, что он линеен. Покажем его ограниченность. Из того, что $\|A_n-A_m\|\to 0$ при $n,\ m\to\infty$, следует, что $|\,\|A_n\|-\|A_m\|\,|\to 0$ при $n,\ m\to\infty$, т. е. что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальна в $\mathbf{R}^1$, а значит, и ограничена. Существует такая постоянная M, что $\|A_n\|\leqslant M$ для любого натурального n. Отсюда получаем, что $\|A_nx\|\leqslant\|A_n\|\|x\|\leqslant M\|x\|$, т. е. в силу того, что функция, определяющая норму (расстояние), непрерывна, имеем

$$\|Ax\|=\lim_{n\to\infty}\|A_nx\|\leqslant M\|x\|.$$

Таким образом, оператор A — ограничен. Оператор A был определен как оператор, отображающий N_1 в B_2 по указанному выше правилу. Покажем, что A есть предел последовательности $\{A_n\}$ в смысле сходимости по норме в пространстве $(N_1 \to B_2)$. Зададим $\varepsilon > 0$ и выберем n_0 так, что $\|A_{n+p}x - A_n x\| < \varepsilon$ *для* $n \geqslant n_0$, $p > 0$ и любого x такого, что $\|x\| \leqslant 1$. Пусть $p \to \infty$, тогда $\|Ax - A_n x\| \leqslant \varepsilon$ для $n \geqslant n_0$ и всех x с нормой, не превосходящей единицы. Поэтому для $n \geqslant n_0$

$$\| A_n - A \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|(A_n - A)\, x\| \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, $A = \lim\limits_{n \to \infty} A_n$ в смысле сходимости по норме в пространстве $(N_1 \to B_2)$, т. е. это пространство банахово.

Определение 3. Пусть линейные непрерывные функционалы F отображают линейное топологическое пространство L_T в поле коэффициентов P, т. е. $F : L_T \to P$. Тогда *сопряженным* с L_T пространством называется пространство всех таких функционалов $\{F\}$.

Как это следует из доказанной выше теоремы, в силу полноты поля P сопряженное пространство к нормированному является банаховым.

Примеры.

1. Норма *единичного* оператора $E : N \to N$ (т. е. оператора, ставящего в соответствие каждому элементу x нормированного пространства N тот же элемент x пространства N) равняется, очевидно, единице. Действительно, $Ex = x$, поэтому $\sup\limits_{\|x\|=1} \| Ex \| = \sup\limits_{\|x\|=1} \| x \| = 1$. Аналогично, норма нулевого оператора $0 : N_1 \to N_2$ (т. е. оператора, заданного по правилу $0x = 0$ для любого $x \in N_1$) равняется нулю.

2. Рассмотрим пространство непрерывных функций $C[a, b]$ и оператор дифференцирования $D : Df(t) = f'(t)$, $f \in C[a, b]$, $a \leqslant t \leqslant b$. Этот оператор, который мы полагаем действующим из $C[a, b]$ в $C[a, b]$, определен не на всем пространстве непрерывных функций, а лишь на линейном многообразии функций, имеющих непрерывную производную. Этот оператор D, очевидно, линеен, но не является ограниченным. В самом деле, если бы он был ограничен, то согласно теореме 1 этого параграфа, он был бы непрерывен. Однако последовательность $f_n = \frac{\sin nt}{n}$ сходится к нулю в метрике $C[a, b]$ (так как $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} \frac{|\sin nt|}{n} \to 0$, $n \to \infty$), а последовательность $Df_n = \cos nt$ к нулю не сходится. Оператор D, действующий из $C^1[a, b]$ в $C[a, b]$, ограничен.

3. Рассмотрим в пространстве $C[0, 1]$ функционал F, действующий по правилу: $F(f(t)) = f(0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Очевидно, норма этого функционала равна единице. Действительно, $\sup\limits_{\|f\|=1} |F(f)| =$

$=\|F\|=\sup\limits_{\substack{\max\limits_{0\leq t\leq 1}|f(t)|=1}}|f(0)|=1$. Аналогично, норма функционала $F(f)=\int\limits_0^1 f(t)\,g(t)\,dt,\ g\in C[0,\ 1]$ (функционал также определен в $C[0,\ 1]$) вычисляется по формуле $\|F\|=\int\limits_0^1|g(t)|\,dt$.

2. Принцип равномерной ограниченности

Естественно возникает вопрос о полноте пространства линейных операторов $(N_1\to N_2)$ и в смысле точечной сходимости операторов. Ниже мы дадим ответ на этот вопрос.

Докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 1. *Пусть дана последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}\in(N_1\to N_2)$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ такая, что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ не ограничена. Тогда множество $\{\|A_nx\|\}$ не ограничено, если x берется принадлежащим любому замкнутому шару $K(x_0,\ \varepsilon)$.*

Допустим противное, что множество $\{\|A_nx\|\}$ ограничено на некотором замкнутом шаре $K(x_0,\ \varepsilon)$. Очевидно, элемент $x=\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\xi+x_0\in K(x_0,\ \varepsilon)$, где ξ — произвольный элемент из N_1. Для линейного нормированного пространства N_2 ограниченность множества $\{\|A_nx\|\}$, $x\in K(x_0,\ \varepsilon)$, $n=1,\ 2,\ldots$ означает, что существует такая постоянная C, что $\|A_nx\|\leqslant C$ для любого $x\in K(x_0,\ \varepsilon)$ и любого n. Следовательно,

$$\left|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}\|A_n\xi\|-\|A_nx_0\|\right|\leqslant\left\|\frac{\varepsilon}{\|\xi\|}A_n\xi+A_nx_0\right\|\leqslant C.$$

Из этих неравенств получим

$$\|A_n\xi\|\leqslant\frac{C+\|A_nx_0\|}{\varepsilon}\|\xi\|.$$

Последовательность $\{\|A_nx_0\|\}$ согласно допущению ограничена постоянной C. Следовательно, существует такая постоянная $C_1=2C/\varepsilon$, что $\|A_n\xi\|\leqslant C_1\|\xi\|$ для любого n, т. е. $\|A_n\|\leqslant C_1$, что противоречит условию утверждения 1.

Следующая теорема имеет важное значение в теории операторов, ее относят к одному из основных принципов функционального анализа, так называемому *принципу равномерной ограниченности*.

Теорема 4 (Банах). *Пусть последовательность $\{A_n\}$ линейных ограниченных операторов, отображающих банахово пространство B в нормированное пространство N, поточечно сходится при $n\to\infty$ к оператору A. Тогда числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ ограничена, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}A_nx=0$ равномер-*

но относительно $n=1, 2, 3, \ldots$ *и оператор* $Ax=\lim\limits_{n\to\infty} A_n x$ *ограничен.*

Допустим противное, что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена. Согласно утверждению 1 множество $\{\|A_n x\|\}$ не ограничено на любом замкнутом шаре $K(x_0, \xi)$. Пусть $K_0=K_0(x_0, \varepsilon_0)$ — некоторый замкнутый шар в K. Тогда множество $\{\|A_n x\|\}$, $x\in K_0$ не ограничено. Поэтому существует такой номер n_1 и элемент $x_1\in K_0$, что $\|A_{n_1}x_1\|>1$. Оператор A_{n_1} — ограниченный линейный оператор. Поэтому согласно теореме 1 этого параграфа он является и непрерывным. Следовательно, существует такой шар $K_1=K_1(x_1, \varepsilon_1)\subset K_0$, что для всех $x\in K_1$ выполняется неравенство $\|A_{n_1}x\|>1$. В самом деле, согласно примеру 7 в конце § 2 гл. I, для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $\|A_{n_1}x_1-A_{n_1}x\|<\varepsilon$, если $\|x-x_1\|<\delta$. Поэтому

$$|\|A_{n_1}x_1\|-\|A_{n_1}x\||\leqslant\|A_{n_1}x_1-A_{n_1}x\|<\varepsilon,$$

т. е.

$$-\varepsilon<\|A_{n_1}x_1\|-\|A_{n_1}x\|<\varepsilon,$$

откуда

$$\|A_{n_1}x\|>\|A_{n_1}x_1\|-\varepsilon.$$

Выбирая ε столь малым, чтобы выполнялось неравенство $\|A_{n_1}x_1\|-\varepsilon>1$, мы находим такое $\delta>0$, что для всех x из шара $\|x-x_1\|<\delta$ выполнено неравенство $\|A_{n_1}x\|>1$. Наконец, радиус ε_1 замкнутого шара K_1 выбираем меньшим δ и берем $K_1\subset K_0$.

Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров $K_0\supset K_1\supset K_2\supset\ldots\supset$ $\supset K_n\supset\ldots$, величины радиусов $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ которых можно всегда считать удовлетворяющими неравенствам $\varepsilon_0>\varepsilon_1>\ldots\to 0$. Тогда, согласно принципу вложенных шаров (теорема 2 § 3 гл. I), существует точка $\bar{x}$, принадлежащая всем шарам K_n. В этой точке выполняется соотношение $\|A_{n_k}\bar{x}\|\geqslant k$, что противоречит тому, что последовательность $\{A_n x\}$ сходится для любого x из банахова пространства B. Таким образом, наше допущение о том, что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ не ограничена — неверно. Следовательно, существует такая постоянная M, что $\|A_n x\|\leqslant$ $\leqslant M\|x\|$ для всех номеров n и любого x. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получим, что $\|Ax\|\leqslant M\|x\|$, т. е. что оператор A ограничен.

Заметим, что доказательство теоремы не изменится и теорема остается справедливой, если вместо поточечной сходимости последовательности $\{A_n\}$ потребовать, чтобы последовательность $A_n x$ являлась фундаментальной в каждой точке $x\in B$ и даже была ограниченной в каждой точке. Тогда доказанную теорему можно сформулировать еще и так (*принцип фиксации особенно-*

сти): если $\sup_n \| A_n \| = \infty$, то найдется такой элемент $x_0 \in B$, что $\sup_n \| A_n x_0 \| = \infty$.

В качестве приложения доказанной теоремы покажем, что на отрезке $[-\pi, \pi]$ существуют непрерывные функции $f(x)$, для которых ряд Фурье $\sum_k c_k e^{ikx}$, $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$ сходится не во всех точках. Из теории тригонометрических рядов известно, что частичная сумма ряда Фурье записывается в виде $S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) D_n(z)\, dz$, где $D_n(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} z}{\sin \frac{z}{2}}$ называется ядром Дирихле. Заметим прежде всего, что $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(z)|\, dz \to \infty$ при $n \to \infty$. Действительно, числитель дроби $|D_n(z)| = \frac{\left| \sin \frac{2n+1}{2} z \right|}{2\pi \left| \sin \frac{z}{2} \right|}$ обращается в 1 в точках, где $\frac{2n+1}{2} z = \left(k + \frac{1}{2} \right) \pi$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Окружим каждую из этих точек интервалом $\left| \frac{2n+1}{2} z - \frac{2k+1}{2} \pi \right| < \frac{\pi}{3}$, длина каждого из которых равна $\frac{4\pi}{3(2n+1)}$. В каждом из этих интервалов $\left| \sin \frac{2n+1}{2} z \right|$ не меньше, чем 1/2. Оценим величину $\sin \frac{z}{2}$ на k-м интервале ($k = 0, 1, \ldots, n$). Имеем $\sin \frac{z}{2} < \frac{z}{2} < \frac{1}{2} \left(\frac{2k+1}{2} \pi + \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{2n+1}{2} \right)^{-1} < \frac{k+1}{2n+1} \pi$. Поэтому интеграл от $|D_n(z)|$, взятый только по выделенным промежуткам, больше, чем сумма

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{k+1}{2n+1} \pi} \frac{4\pi}{3(2n+1)} = \frac{1}{3\pi} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Эта сумма стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Рассмотрим в полном нормированном пространстве $C[-\pi, \pi]$ последовательность функционалов $F_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\, dx$. Согласно задаче 3 предыдущего пункта имеем, что $\| F_n \| = \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\, dx$. Согласно сказанному нормы функционалов F_n не ограничены в совокупности, а следовательно, по доказанной теореме существует непрерывная функция $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_n(x) f(x)\,dx$ не существует, а это значит, что ряд Фурье этой функции в нуле не является сходящимся.

Докажем теперь теорему, дающую ответ на вопрос о полноте в смысле точечной сходимости пространства операторов.

Теорема 5. *Пусть B_1 и B_2 — банаховы пространства, тогда пространство линейных ограниченных операторов $(B_1 \to B_2)$ является полным пространством в смысле точечной сходимости.*

Рассмотрим некоторую точку $x \in B_1$ и фундаментальную в смысле точечной сходимости последовательность $\{A_n\}$. В силу полноты B_2 существует такой элемент $y \in B_2$, что $y = \lim\limits_{n\to\infty} A_n x$. Таким образом, определен оператор $y = Ax$, отображающий пространство B_1 в пространство B_2. Из свойств предела с очевидностью следует, что A — линейный оператор. Из теоремы 4 этого параграфа заключаем, что он и ограничен.

Теорема 4 (принцип равномерной ограниченности) допускает простое обобщение на так называемые F-пространства и носит название *принципа равностепенной непрерывности*. В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 4. Линейное пространство с введенной метрикой ρ называется F-пространством, если выполнены следующие условия:

1. Метрика ρ на этом пространстве *инвариантна* относительно сдвига, т. е.

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0).$$

2. Отображение $f: P \times F \to F$, определенное по правилу $f(\alpha, x) = \alpha x$, непрерывно по $\alpha \in P$ для каждого $x \in F$ и непрерывно по x для каждого α, где P — поле, над которым задано линейное пространство.

3. Метрическое пространство F полно.

Несколько позже будет показано, что F-пространство является линейным топологическим пространством, поэтому множество A в F-пространстве естественно называть *ограниченным*, если для любой окрестности нуля Σ_0 существует такое $\beta \in P$, что $A \subset \alpha\Sigma_0$ при всех $\alpha > \beta > 0$.

Теорема 6 (принцип равностепенной непрерывности). *Пусть для каждого элемента σ некоторого множества Σ задано линейное непрерывное отображение A_σ одного F-пространства F_1 в другое F-пространство F_2. Если для каждого $x \in F_1$ множество $\{A_\sigma x : \sigma \in \Sigma\}$ ограничено, то $\lim\limits_{x\to 0} A_\sigma x = 0$ равномерно относительно $\sigma \in \Sigma$.*

В связи с этой теоремой сделаем ряд пояснений. В формулировке теоремы содержится два условия, в каждом из которых один из двух параметров фиксирован. Утверждается же в теореме справедливость соотношения, в котором оба параметра меняются. Поскольку F-пространство — частный случай метрического пространства, то понятия предела, стремления переменной к фиксированной точке и т. п. понимаются в смысле метрического пространства.

Зафиксируем число $\varepsilon>0$, и для любого натурального n рассмотрим множество

$$X_n=\left\{x:\rho\left(\frac{1}{n}A_\sigma x,\ 0\right)\leqslant\varepsilon,\ \sigma\in\Sigma\right\},\ n=1,2,\ldots.$$

Отображение A_σ непрерывно, поэтому множества X_n замкнуты при любом n.

В самом деле, функция расстояния $\rho(x,\ y)$ есть непрерывная функция аргумента x при фиксированном y (см. пример 2 в конце п. 4 § 2 гл. I).

Поэтому, если $x_i\in X_n,\ x_i\to x,\ i\to\infty$, то $\rho\left(\frac{1}{n}A_\sigma x_i,\ 0\right)\leqslant\varepsilon$, а следовательно, $\lim\limits_{i\to\infty}\rho\left(\frac{1}{n}A_\sigma x_i,\ 0\right)=\rho\left(\frac{1}{n}A_\sigma x,\ 0\right)\leqslant\varepsilon$, т. е. $x\in X_n$.

Тем самым множества X_n замкнуты, так как содержат все свои предельные точки.

Продолжим доказательство теоремы. Покажем, что F-пространство F_1 допускает представление: $F_1=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}X_n$. В самом деле, множество $\{A_\sigma x\}$ при каждом $x\in F_1$ ограничено в F-пространстве F_2, поэтому $\rho\left(\frac{1}{n}A_\sigma x,\ 0\right)\to 0$ при $n\to\infty$ для любого $x\in F_1$. Другими словами, если $x\in F_1$, то существует такой номер n, что $x\in X_n$.

По теореме о категориях (теорема 3 § 3 гл. I) по крайней мере одно из множеств X_n, скажем X_{n_0}, не является нигде не плотным. Поэтому существует шар $O(x_0,\ \delta)\subset X_{n_0}$, состоящий из точек множества X_{n_0} т. е. выполняется неравенство $\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma x,\ 0\right)\leqslant$ $\leqslant\varepsilon$, если $\rho(x,\ x_0)=\rho(x-x_0,\ 0)<\delta$ (см. замечание п. 3 § 2 гл. I). Пусть $x-x_0=y$, тогда $\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\delta(y+x_0),\ 0\right)\leqslant\varepsilon$, если $\rho(y,0)<\delta$ для любого $\sigma\in\Sigma$. Запишем соотношения

$$\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma y,\ 0\right)=\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma y+\frac{1}{n_0}A_\sigma x_0-\frac{1}{n_0}A_\sigma x_0,\ 0\right)=$$

$$=\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma(y+x_0)-\frac{1}{n_0}A_\sigma x_0,\ 0\right)=\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma(y+x_0),\ \frac{1}{n_0}A_\sigma x_0\right)\leqslant$$

$$\leqslant\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma(y+x_0),\ 0\right)+\rho\left(\frac{1}{n_0}A_\sigma x_0,\ 0\right)\leqslant 2\varepsilon.$$

Поэтому, если $\rho(y, 0) < \delta$, то $\rho\left(\frac{1}{n_0} A_\sigma y,\ 0\right) = \rho\left(A_\sigma \frac{1}{n_0} y,\ 0\right) \leqslant 2\varepsilon$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Любую точку $x \in F_1$ можно представить в виде $x = n_0 \cdot \frac{x}{n_0} = \frac{z}{n_0}$, $z = n_0 x$. Последнее неравенство выполнено для любого y и, в частности, для $y = n_0 x$. Поэтому $\rho(A_\sigma x, 0) \leqslant \varepsilon$, если $\rho(n_0 x, 0) \leqslant \delta$. Если $x \to 0$, то $\rho(n_0 x, 0) \to 0$, следовательно, $\rho(A_\sigma x, 0) \to 0$ равномерно по $\sigma \in \Sigma$.

В качестве следствия этой теоремы получаем следующее

Утверждение 2. *Каждое F-пространство является линейным топологическим пространством.*

F-пространство — линейное пространство. Непрерывность операции сложения следует из определения F-пространства. Надо проверить, что отображение $P \times F \to F : f(\alpha, x) = \alpha x$ непрерывно. Это отображение линейно по обеим переменным и непрерывно по α для каждого фиксированного x и непрерывно по x для любого фиксированного α. Для каждого фиксированного x_0 рассмотрим множество $\{\alpha x_0\}$, $|\alpha| < 1$. Это множество ограничено. Действительно, если β — элемент поля скаляров (поля действительных или комплексных чисел), достаточно малый по модулю, то и скаляр $\alpha\beta$ будет сколь угодно мал. Пользуясь непрерывностью отображения $f(\alpha, x)$ по α при фиксированном $x = x_0$, мы заключаем, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $\rho(\alpha x_0, 0) < \varepsilon$, если $|\alpha| < \delta$. Выбирая $\beta \in P$ достаточно малым, так чтобы $|\alpha\beta| < \delta$, мы получим, что $\rho(\beta\alpha x_0, 0) < \varepsilon$, т. е. $\beta\alpha x_0$ принадлежит сколь угодно малому шару с центром в нуле, т. е. $\beta\{\alpha x_0\} \subset \Sigma_0$ — произвольной окрестности нуля, т. е. множество $\{\alpha x_0\}$ ограничено. Согласно теореме 6, если ее применить к отображению $f(\alpha, x)$, для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что $\rho(\alpha x, 0) < \varepsilon_1$, если $|\alpha| < 1$ и $\rho(x, 0) < \delta_1$. Но это и означает непрерывность отображения $f(\alpha, x) = \alpha x$, $f : P \times F \to F$.

Часто оказывается полезным следующее утверждение, которое является простым следствием принципа равномерной ограниченности.

Утверждение 3. *Для того чтобы последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_n\}$, отображающих банахово пространство B в нормированное пространство N, поточечно сходилась к линейному ограниченному оператору A_0, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *последовательность $\{\|A_n\|\}$ была ограничена;*

б) *$A_n x \to A_0 x$ для любого x из некоторого множества X, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в B (т. е. замыкание множества линейных комбинаций совпадает с B).*

Необходимость условия а) есть утверждение теоремы 4. Необходимость условия б) очевидна. Докажем достаточность. Пусть $M = \sup\limits_{n=0,1,\ldots} \|A_n\|$ и пусть $L(X)$ — линейная оболочка множества X. В силу линейности операторов A_n и A_0 и условия б)

$A_n x \to A_0 x$ *для любого* $x \in L(X)$. *Выберем теперь элемент* $\xi \in \overline{L(X)}$, $\xi \in B$. Пусть $\varepsilon > 0$ и элемент $x \in L(X)$, такой, что $\|x - \xi\| < \frac{\xi}{4M}$. Запишем: $\|A_n\xi - A_0\xi\| \leqslant \|A_n\xi - A_n x\| + \|A_n x - A_0 x\| + \|A_0 x - A_0\xi\| < \|A_n x - A_0 x\| + \frac{\varepsilon}{2}$. В силу того, что $A_n x \to A_0 x$, найдется номер n_0 такой, что для $n \geqslant n_0$ будет выполнено неравенство $\|A_n x - A_0 x\| < \varepsilon/2$. Для этих же номеров $n \geqslant n_0$ будет выполнено неравенство

$$\|A_n\xi - A_0\xi\| < \varepsilon.$$

Заметим, что это утверждение, в частности, справедливо и для последовательности линейных ограниченных функционалов $\{F_n\}$.

3. Теорема об обратном операторе. Принцип открытости отображения

Пусть оператор A отображает банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2. Обратный оператор (обратное отображение), если он существует, обозначим через A^{-1}.

Справедливы следующие леммы.

Л е м м а 1. *Оператор A^{-1}, обратный линейному оператору A, является линейным.*

Пусть $Ax_1 = y_1$, $Ax_2 = y_2$. Тогда $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$. По определению обратного отображения (см. п. 1 § 1 гл. I) можно записать, что $A^{-1}y_1 = x_1$, $A^{-1}y_2 = x_2$. Умножая эти равенства — первое на α_1, второе на α_2 — и складывая, получим $\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$. Но по определению обратного оператора имеем, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2).$$

Сравнивая два последних равенства, получаем

$$A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2.$$

Это равенство справедливо для любого вектора из области значений $R(A)$ оператора — множества $\{Ax \in B_2,\ x \in D(A)\}$, где $D(A)$ — область определения оператора: $\{x \in B_1,\ Ax \in B_2\}$.

Л е м м а 2. *Если A — линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2, то замыкание образа (при отображении A) любой окрестности нуля пространства B_1 содержит некоторую окрестность нуля пространства B_2.*

Пусть Σ_0 — произвольная окрестность нуля пространства B_1. Ее образ при отображении A обозначим $A\Sigma_0$. Всегда можно указать такую окрестность M_0 нуля в пространстве B_1, что $M_0 - M_0 \subset \Sigma$. Действительно, как мы уже отмечали, нормированное пространство является, в частности, линейным топологическим пространством, и существование окрестности M_0 следует из непрерывности операции сложения (так как $0-0=0$).

Далее, если $x \in B_1$, то $x/n \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, при достаточно большом n имеем, что $x/n \in M_0$, т. е. $x \in nM_0$. Другими словами, $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} nM_0$, $B_2 = AB_1 = A\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nM_0\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nAM_0$. Тем более, $B_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{nAM_0}$. По теореме о категориях (теорема 3 § 3 гл. I) одно из множеств, скажем $\overline{n_0AM_0}$, не является нигде не плотным, а поэтому содержит непустое открытое множество. Тогда и $\overline{AM_0}$ содержит непустое открытое множество. Обозначим это последнее через V. Имеем

$$\overline{A\Sigma_0} \supset \overline{AM_0 - AM_0} \supset \overline{AM_0} - \overline{AM_0} \supset V - V.$$

Докажем, что множество $V-V$ открыто. Пусть $x \in V$, тогда множество $x - V = \{x - y : y \subset V\}$ открыто (см. свойство 6 п. 5 § 1 этой главы). Далее, $V - V = \bigcup_{a \in V} a - V$ и, следовательно, $V-V$ открыто, как сумма открытых множеств. Точка 0 принадлежит $V-V$, поэтому это множество — окрестность нуля.

Лемма 3. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2, тогда образ любой окрестности нуля пространства B_1 содержит некоторую окрестность нуля пространства B_2.*

Пусть $\varepsilon > 0$ и $X_\varepsilon = \{x \in B_1 : \rho(x, 0) < \varepsilon\}$, $Y_\varepsilon = \{y \in B_2 : \rho(y, 0) < \varepsilon\}$. *) Выберем $\varepsilon_0 > 0$ и пусть ε_i — произвольная последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < \varepsilon_0$. Согласно лемме 2 существует такая последовательность положительных чисел $\eta_i > 0$, $\eta_i \to 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \eta_0 > \eta_1 > \ldots$, что $\overline{AX}_{\varepsilon_i} \supset Y_{\eta_i}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Пусть $y \in Y_{\eta_0}$. Найдем элемент $x \in X_{2\varepsilon_0}$ и такой, что $Ax = y$. Действительно, поскольку $\overline{AX}_{\varepsilon_0} \supset Y_{\eta_0}$, то существует $x_0 \in X_{\varepsilon_0}$ такое, что $\rho(y - Ax_0, 0) = \|y - Ax_0\| < \eta_1$. Точно так же, поскольку $y - Ax_0 \in Y_{\eta_1}$, найдется такое $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, что $\|y - Ax_0 - Ax_1\| < \eta_2$. Продолжим процесс построения векторов x_n неограниченно. Найдется такое $x_n \in X_{\varepsilon_n}$, что

$$\left\| y - A\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \right\| < \eta_{n+1}, \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Положим $z_k = \sum_{i=0}^{k} x_i$, тогда $\|z_{k+p} - z_k\| = \rho(z_{k+p} - z_k, 0) = \rho\left(\sum_{i=k+1}^{k+p} x_i, 0\right) \leqslant$

---

*) Здесь $\rho(x, 0) = \|x\|$, $\rho(y, 0) = \|y\|$, поскольку пространства нормированы.

$\leqslant \sum_{i=k+1}^{k+p} \varepsilon_i,\ p>0$. Последовательность $\{z_k\}$ — фундаментальная, и в силу полноты B_1 она сходится. Отсюда получаем

$$x=\lim_{k\to\infty} z_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i;\ \rho(x,\ 0)=\|x\|=\lim_{k\to\infty}\rho(z_k,\ 0)\leqslant\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{k}\varepsilon_i\right)<2\varepsilon_0.$$

Оператор A непрерывен. Пользуясь непрерывностью функции расстояния и этим свойством, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\rho\left(y-A\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right),\ 0\right)=\lim_{n\to\infty}\left\|y-A\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\right\|\leqslant\lim_{n\to\infty}\eta_{n+1}=0,$$

т. е.

$$y=A\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n} x_i=Ax.$$

Следовательно, сфера $X_{2\varepsilon_0}\subset B_1$ с центром в начале координат имеет своим образом множество $AX_{2\varepsilon_0}$, которое содержит сферу $Y_{\eta_0}\in B_2$ с центром в начале координат. Таким образом, при отображении A образ окрестности нуля пространства B_1 содержит некоторую окрестность нуля пространства B_2.

Лемма 4. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2, тогда образ любого открытого множества пространства B_1 есть открытое множество в пространстве B_2.*

Пусть $\Sigma\subset B_1$ — непустое открытое множество, $x\in\Sigma$ и Σ_0 — окрестность нуля в B_1 такая, что $x+\Sigma_0\subset\Sigma$. Пусть Σ_1 — такая окрестность нуля в пространстве B_2, что $A\Sigma_0\supset\Sigma_1$, окрестность Σ_1 согласно лемме 3 всегда существует. Запишем следующие очевидные соотношения:

$$A\Sigma\supset A(x+\Sigma_0)=Ax+A\Sigma_0\supset Ax+\Sigma_1.$$

Подчеркнем, что множество $Ax+\Sigma_1$ есть открытое множество — окрестность точки Ax. Таким образом, поскольку x — произвольная точка из Σ, т. е. Ax — произвольная точка образа $A\Sigma$, множество $A\Sigma$ содержит вместе с каждой своей точкой ее некоторую окрестность. Тем самым множество $A\Sigma$ открыто.

Из доказанных выше лемм непосредственно следует

Теорема 7 (теорема Банаха об обратном операторе). *Пусть A — линейный непрерывный оператор, взаимно-однозначно отображающий банахово пространство B_1 на банахово пространство B_2. Тогда обратный оператор A^{-1} тоже линеен и непрерывен.*

Линейность оператора A^{-1} следует из леммы 1. Согласно лемме 4 оператор A переводит открытые множества в открытые, следовательно, при отображении A^{-1} прообраз любого открытого множества открыт, т. е. согласно лемме 4 п. 4 § 2 гл. I отображение A^{-1} непрерывно.

Если еще раз вернуться к доказательству теоремы 7, то можно убедиться, что все рассуждения применимы и в случае, если рассматривать отображение A одного F-пространства в другое. Тем самым доказана теорема.

Теорема 8. *Пусть A — линейный непрерывный оператор, взаимно-однозначно отображающий F-пространство F_1 на F-пространство F_2. Тогда обратный оператор A^{-1} также линеен и непрерывен.*

Утверждение, содержащееся в лемме 4, также допускает обобщение на случай F-пространств.

Теорема 8′ (принцип открытости отображения). *Пусть A — линейное непрерывное отображение одного F-пространства на другое. Тогда образ каждого открытого множества является открытым множеством.*

Вернемся снова к рассмотрению понятий непрерывности и ограниченности отображения. В случае банаховых пространств непрерывность оператора и его ограниченность — эквивалентные понятия (см. теорему 1 п. 1 § 1). В общем случае линейных топологических пространств, как мы уже говорили, из ограниченности оператора не следует его непрерывность. Однако, если линейное топологическое пространство метризуемо, т. е. его топология может быть задана при помощи метрики, то:

1) непрерывность оператора A,
2) ограниченность оператора A,
3) ограниченность множества $\{Ax_n\}$, если $x_n \to 0$, $n=1, 2, \ldots$,
4) стремление Ax_n к нулю при $x_n \to 0$

являются эквивалентными утверждениями.

Мы докажем лишь, что в случае F-пространств непрерывность и ограниченность линейного оператора — эквивалентные понятия.

Теорема 1′. *Пусть F_1 и F_2 — два F-пространства, A — линейный оператор, отображающий F_1 в F_2, тогда, для того чтобы он был непрерывен, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.*

Если A — линейный непрерывный оператор и множество Σ ограничено, то, поскольку F-пространство является линейным топологическим пространством, множество $A\Sigma$ ограничено и, следовательно, оператор A — ограничен согласно теореме 2 п. 1 этого параграфа.

Пусть теперь A — линейный ограниченный оператор, т. е. отображает ограниченное множество в ограниченное. Докажем его непрерывность. Сначала докажем его непрерывность в точке 0. Пусть $x_n \in F_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, 0) = 0$. Выберем последовательность натуральных чисел k_n такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} k_n \rho(x_n, 0) = 0$. Имеем

$$\rho(k_n x_n, 0) = \rho(x_n + x_n + \ldots + x_n, 0) \leqslant k_n \rho(x_n, 0).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n\to\infty$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(k_n x_n,\ 0)=0$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}k_n x_n=0$. Рассмотрим множество $B=\{k_n x_n\}$. Это множество, очевидно, ограничено. Следовательно, множество $A\{k_n x_n\}=\{k_n Ax_n\}$ — ограничено, поскольку A — ограниченный оператор. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty}Ax_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{k_n}Akx_{nn}=0$ (см. п. 5 § 1).

Таким образом, непрерывность оператора A в точке 0 доказана. В силу линейности он непрерывен всюду.

Следствие. *Каждое линейное отображение одного F-пространства в другое, переводящее любую сходящуюся к нулю последовательность в ограниченное множество, — непрерывно.*

4. Продолжение операторов и функционалов. Принцип продолжения Банаха — Хана

Если в линейном пространстве задан оператор или функционал, определенный не на всем пространстве L, а лишь на некотором многообразии $L'\subset L$, то естественно возникает вопрос о его продолжимости с сохранением тех или иных свойств на все пространство. Другими словами, требуется построить новый оператор или функционал, определенный уже на всем пространстве, обладающий определенными свойствами и совпадающий с ранее определенным на L'.

Для линейных операторов данный вопрос решается легко, если исходный оператор задан на линейном многообразии, всюду плотном во всем пространстве.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 9. *Линейный ограниченный оператор A_0, заданный на линейном многообразии L', всюду плотном в линейном нормированном пространстве N, со значением в банаховом пространстве B, может быть продолжен на все пространство без увеличения своей нормы. А именно на пространстве N можно определить оператор A такой, что* $Ax=A_0x,\ x\in L',\ \|A\|_N=\|A_0\|_{L'}$.

Пусть $x\in N$, но $x\overline{\in}L'$. Поскольку $\overline{L'}=N$, то найдется последовательность $\{x_n\}$, принадлежащая L', такая, что $x_n\to x$ при $n\to\infty$ (см. лемму 3 п. 4 § 1 гл. II). Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда $\|A_0x_n-A_0x_m\|\leqslant\|A_0\|_{L'}\cdot\|x_n-x_m\|\to 0$ при $n,\ m\to\infty$. Отсюда следует, что последовательность $\{A_0x_n\}$ фундаментальна и в силу полноты банахова пространства B она сходится к некоторому элементу $y\in B$. Положим $Ax=y=\lim\limits_{n\to\infty}A_0x_n$. Если $\{x_n'\}$— другая последовательность из L', сходящаяся к элементу $x\in N$, то $\|A_0x_n-A_0x_n'\|\leqslant\|A_0x_n-Ax\|+\|A_0x_n'-Ax\|\to 0$ при $n\to\infty$, т. е. $A_0x_n-A_0y_n\to 0$ при $n\to\infty$ и оператор A определен на элементах N, не лежащих в L', однозначно.

Если же $x\in L'$, то полагаем $x=x_n$ для всех n и

$$Ax=\lim_{n\to\infty}A_0x_n=A_0x.$$

Следовательно, оператор A и в этом случае определен однозначно.

Построенный оператор A в силу свойств предела линейный. Он является также и ограниченным, поскольку $\|A_0x_n\| \leqslant \|A_0\| \|x_n\|$, и, переходя в этом неравенстве к пределу, получим, что $\|Ax\| \leqslant \|A_0\|_{L'} \|x\|$, т. е. $\|A\|_N \leqslant \|A_0\|_{L'}$. Заметим, что при продолжении оператора норма не может уменьшиться, поэтому $\|A\|_N = \|A_0\|_{L'}$.

Указанный процесс продолжения называется продолжением по непрерывности. Если оператор не является ограниченным, то его продолжение обычно называется расширением. Теория расширений операторов составляет самостоятельную и интересную область функционального анализа.

Если задан линейный непрерывный функционал (см. определение 11 п. 2 § 1 этой главы), то его можно продолжать с сохранением нормы, даже если первоначально он задан на линейном многообразии не обязательно всюду плотном в пространстве. Соответствующая теорема играет важную роль в анализе и носит название принципа продолжения Банаха — Хана.

Теорема 10 (принцип продолжения Банаха — Хана). *Пусть на вещественном линейном пространстве L задана калибровочная функция $p(x)$, т. е. такая вещественная функция*), что*

$$p(x_1+x_2) \leqslant p(x_1)+p(x_2), \quad p(\lambda x) = \lambda p(x), \quad x_1, x_2 \in L, \quad \lambda \geqslant 0.$$

Пусть $f(x)$ — вещественный линейный функционал, определенный на линейном многообразии $L' \subset L$ и такой, что

$$f(x) \leqslant p(x), \qquad x \in L'.$$

Тогда существует вещественный линейный функционал F, определенный на всем L и такой, что:

1) $F(x) = f(x), \quad x \in L'$,

2) $F(x) \leqslant p(x), \quad x \in L$.

Если L — линейное вещественное нормированное пространство и f — ограниченный функционал на $L' \subset L$, то в качестве $p(x)$ можно взять $p(x) = \|x\| \, \|f\|_{L'}$, $x \in L$, и тогда справедливо равенство

2′) $\|F\|_L = \|f\|_{L'}$,

т. е. функционал f продолжается до непрерывного функционала F на L с сохранением нормы.

Покажем, что если $L' \neq L$, то функционал f можно продолжить с L' на некоторое большее многообразие L_0.

Пусть элемент $x \in L$, $x \overline{\in} L'$. Введем в рассмотрение множество $(L'; x) = L_0$ элементов вида $tx + x_0$, $x_0 \in L'$, t — вещественное число. Очевидно, что L_0 есть линейное многообразие; легко убедиться, что каждый элемент из L_0 однозначно представим в виде

*) См. определение 18 п. 4 § 1 этой главы.

$tx+x_0$. Обозначим через f_1 искомое продолжение функционала f на L_0. Положим

$$f_1(tx+x_0)=tf_1(x)+f(x_0)=tc+f(x_0),$$

где число $c=f_1(x)$ нам надлежит выбрать так, чтобы на L_0 выполнялось неравенство

$$f_1(tx+x_0)\leqslant p(tx+x_0).$$

Для этого рассмотрим сначала случай $t>0$. Тогда указанное неравенство равносильно следующему:

$$f\left(\frac{x_0}{t}\right)+c\leqslant p\left(\frac{x_0}{t}+x\right),$$

или

$$c\leqslant p\left(\frac{x_0}{t}+x\right)-f\left(\frac{x_0}{t}\right),$$

где $c=f_1(x)$, $x\in L$.

Если $t<0$, то аналогично возникает условие

$$f\left(\frac{x_0}{t}\right)+c\geqslant -p\left(-\frac{x_0}{t}-x\right),$$

или

$$c\geqslant -p\left(-\frac{x_0}{t}-x\right)-f\left(\frac{x_0}{t}\right).$$

Заметим, что всегда существует число c, удовлетворяющее этим двум условиям. Действительно, пусть x' и x'' — произвольные элементы из L', тогда

$$f(x'')-f(x')\leqslant p(x''-x')=p((x''+x)-(x'+x))\leqslant$$

$$\leqslant p(x''+x)+p(-x'-x),$$

т. е.

$$-f(x'')+p(x''+x)\geqslant -f(x')-p(-x'-x).$$

Пусть

$$c''=\inf_{x''\in L'}(-f(x'')+p(x''+x)),\quad c'=\sup_{x'\in L'}(-f(x')-p(-x'-x)).$$

В силу произвольности x'' и x' из предыдущего неравенства вытекает, что $c''\geqslant c'$. Выбрав c так, что $c''\geqslant c\geqslant c'$, определим функционал f' на L_0 по правилу

$$f_1(tx+x_0)=tc+f(x_0).$$

При таком выборе числа c на L_0 выполняется неравенство

$$f_1(tx+x_0)\leqslant p(tx+x_0).$$

Таким образом, искомое продолжение с L' на L_0 функционала f получено. Если в L можно выбрать счетную систему элементов

$x_1, x_2, x_3, \ldots$, порождающую L *), то функционал F строим по индукции, рассматривая возрастающую последовательность линейных многообразий $L_1=(L'; x_1)$, $L_2=(L_1, x_2)$, ...; каждый раз L_{k+1} есть наименьшее линейное многообразие, содержащее многообразие L_k и элемент x_k (т. е. пересечение всех таких многообразий). Каждый элемент $x \in L$ войдет в некоторое L_k, следовательно, функционал будет продолжен на все пространство L.

В общем случае, т. е. когда счетного множества $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$, порождающего L, не существует, проведем следующие рассуждения. Пусть $\Phi_{L'}$ — множество всевозможных продолжений функционала f, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leqslant p(x)$. Как показано выше, такие продолжения существуют. Введем в этом множестве отношение порядка, а именно $f' \prec f''$, $f', f'' \in \Phi_{L'}$, если линейное многообразие L_0', на котором определен f', содержится в многообразии L_0'', на котором определен f'', и $f'(x)=f''(x)$ при $x \in L'$. Легко проверить, что все свойства, задающие отношение порядка, выполнены и множество $\Phi_{L'}$, таким образом, частично упорядочено.

Пусть теперь $\{f_\alpha\}$ — произвольное, упорядоченное указанным отношением порядка, подмножество множества $\Phi_{L'}$. Это подмножество имеет верхнюю грань, которой является функционал $\hat{f}$, определенный на линейном многообразии $\hat{L}=\bigcup\limits_{\alpha} L_\alpha$, где L_α — область определения f_α, причем $\hat{f}(x)=f_{\alpha_0}(x)$, если $x \in \hat{L}$ есть элемент из L_{α_0}. Очевидно, что $\hat{f}$— линейный функционал, $\hat{f} \in \Phi_{L'}$.

Таким образом, выполнены все условия леммы Цорна и $\Phi_{L'}$ имеет максимальный элемент F. Этот функционал определен на всем L, так как в противном случае его можно было бы продолжить и F не был бы максимальным элементом $\Phi_{L'}$.

Если L — линейное нормированное пространство, то в качестве $p(x)$ всюду в доказательстве выше можно взять функционал $\|f\|_{L'} \|x\|_L = p(x)$, $x \in L$. Ясно, что этот функционал удовлетворяет свойствам, сформулированным в теореме.

Примеры.

1. Если вещественная функция $p(x)$ над линейным пространством L является калибровочной функцией, т. е. удовлетворяет свойствам

а) $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ для любых $x, y \in L$,

б) $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ для любых $x \in L$ и $\alpha>0$,

то при любом $\alpha \in \mathbf{R}^1$ будет выполнено $p(\alpha x) \geqslant \alpha p(x)$. Действительно, при $\alpha>0$ это очевидно, при $\alpha=0$ это следует из того, что $p(\alpha \cdot 0)=p(0)=\alpha p(0)$, $\alpha>0$, т. е. $p(0)=0$. Пусть теперь $\alpha<0$. Имеем $p(\alpha x)+p(|\alpha| x)=p(\alpha x)+|\alpha| p(x)$. Но для любого элемента

---

*) Т. е. многообразие L может быть натянуто на множество $\{x_l\}_{l=1}^{\infty}$, или каждый элемент L является линейной комбинацией элементов указанного множества.

$z \in L$ $p(z+(-z)) = p(0) = 0 \leqslant p(z) + p(-z)$. Поэтому $p(\alpha x) + |\alpha| p(x) \geqslant 0$, т. е. $p(\alpha x) \geqslant -|\alpha| p(x) = \alpha p(x)$.

2. Функционалы $p(x) = \|f\| \cdot \|x\|$, где f — линейный функционал над линейным нормированным пространством, $p_m(x) = \sup_n |x_n|$ над линейным пространством ограниченных последовательностей m являются примерами калибровочных функций, а также примерами полунорм. Линейный функционал также является примером калибровочной функции и полунормы (см. определение 18 п. 4 § 1 этой главы).

3. Если N — нормированное пространство и $x_0 \in N$, то существует линейный функционал $F(x)$, определенный на всем N, и такой, что $F(x_0) = \|x_0\|$, $|F(x)| \leqslant \|x\|$, $x \in N$. Действительно, пусть $x_0 \neq 0$, положим $\{tx_0\} = N'$, $t \in P$ — полю вещественных чисел; N' — линейное многообразие. Определим на N' функционал $f(x)$ по правилу $f(x) = t\|x_0\|$. Очевидно, что $f(x_0) = \|x_0\|$, $|f(x)| = |t| \cdot \|x_0\| = \|x\|$, т. е. $\|f\| = 1$. Продолжая функционал $f(x)$ на все пространство без увеличения нормы, получим требуемый результат. Заметим, что $\|F\| = 1$. Если $x_0 = 0$, то полагаем $F = 0$.

4. Если последовательность $\{\alpha_n\} \in l^2$ и $\{\beta_n\} \in l^2$, то в силу неравенства Коши — Буняковского $(\Sigma|\alpha_n\beta_n|)^2 \leqslant \Sigma|\alpha_n|^2 \Sigma|\beta_n|^2$, т. е. последовательность $\{\alpha_n\beta_n\} \in l^1$ (см. п. 1 § 2 гл. I, примеры).

Справедливо и обратное утверждение. А именно, если $\Sigma|\alpha_n\beta_n| < \infty$ для любой последовательности, для которой $\Sigma|\alpha_n|^2 < \infty$, то $\Sigma|\beta_n|^2 < \infty$. Действительно, пусть $\gamma_k = (\bar\beta_1, \bar\beta_2, \ldots, \bar\beta_k, 0, 0 \ldots)$, черта означает комплексное сопряжение. Ясно, что $\gamma_k \in l^2$, $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $f = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — любой вектор из l^2. Тогда $F_{\gamma_k}(f) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \beta_j \to \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta_j$ при $k \to \infty$. Поэтому для каждого f из l^2 $F_{\gamma_k}(f)$ сходится к некоторому элементу $F_\gamma(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \beta_j$. В силу принципа равномерной ограниченности нормы функционалов F_{γ_k} ограничены в совокупности: $\|F_{\gamma_k}\| \leqslant C$ для всех k. Но $\|F_{\gamma_k}\| = \left(\sum_{j=1}^{k} |\beta_j|^2\right)^{1/2}$, следовательно, $\{\beta_n\} \in l^2$.

5. Пусть B — банахово пространство, E — тождественный оператор в B, а A — такой ограниченный линейный оператор, отображающий B в себя, что $\|A\| \leqslant q < 1$. Тогда оператор $(E-A)^{-1}$ существует, ограничен и представляется в виде $(E-A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$, где последний ряд сходится в пространстве операторов $(B \to B)$, т. е. последовательность его частичных сумм $S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ сходится равномерно. Действительно, в силу полноты B для сходимости

последовательности S_n достаточно, чтобы она была фундаментальной. Но при $p>0$ и целом

$$\|S_{n+p}-S_n\|=\|A^{n+1}+A^{n+2}+\ldots+A^{n+p}\|\leqslant\|A\|^{n+1}+\ldots+\|A\|^{n+p}.$$

Это вытекает из того, что если операторы B и C принадлежат пространству $(N_1\to N_1)$, то $\|B+C\|\leqslant\|B\|+\|C\|$ и $\|BCx\|\leqslant\|B\|\times\times\|Cx\|\leqslant\|B\|\|C\|\|x\|$, т. е. $\|BC\|\leqslant\|B\|\|C\|$ или $\|A^k\|\leqslant\|A\|^k$ (конечно, если имеет место включение $R(C)\subset D(B)$ — область значений оператора C принадлежит области определения оператора B). Таким образом, $\|S_{n+p}-S_n\|\leqslant q^{n+1}/(1-q)\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому, как мы уже говорили, в силу полноты B, $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ представляет собой ограниченный линейный оператор. Далее, для любого n: $(E-A)\sum\limits_{k=0}^{n}A^k=\sum\limits_{k=0}^{n}A^k(E-A)=E-A^{n+1}$. Перейдем к пределу при $n\to\infty$. Поскольку $\|A^{n+1}\|\leqslant\|A\|^{n+1}\to 0$ при $n\to\infty$, то $(E-A)\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k(E-A)=E$. Откуда, как легко видеть $(E-A)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$, что и требовалось показать. (Впрочем, существование и ограниченность оператора $(E-A)^{-1}$ следуют также из следующего примера).

6. Рассмотрим пространство $(B_1\to B_2)$. Пусть $U(B_1\to B_2)$ — подмножество в $(B_1\to B_2)$, состоящее из операторов, отображающих B_1 на B_2 и имеющих ограниченный обратный. Это множество открыто в $(B_1\to B_2)$, а именно пусть $A_0\in U(B_1\to B_2)$ и пусть A_δ — произвольный оператор из $(B_1\to B_2)$ такой, что $\|A_\delta\|<\frac{1}{\|A_0^{-1}\|}$. Тогда оператор $(A_0+A_\delta)^{-1}$ существует и ограничен, т. е. $A_0+A_\delta\in\in U(B_1\to B_2)$ *). В самом деле, пусть $y\in B_2$ и $Ax=A_0^{-1}y-A_0^{-1}A_\delta x$. Поскольку $\|A_\delta\|<\|A_0^{-1}\|^{-1}$, то отображение A — сжимающее:

$$\rho(Ax',\ Ax'')=\|A_0^{-1}A_\delta(x'-x'')\|<q\rho(x'x''),\ q<1,\ x',\ x''\in B_1,$$

а функция расстояния индуцируется нормой соответствующего пространства. Так как пространство B_1 полно, то существует единственная неподвижная точка x отображения $A{:}x=Ax==A_0^{-1}y-A_0^{-1}A_\delta x$. Откуда $A_0x+A_\delta x=y$. Если существует x' такая, что $A_0x'+A_\delta x'=y'$, то x' — тоже неподвижная точка отображения, так что $x'=x$. Таким образом, для всякого $y\in B_2$ уравнение $A_0x+A_\delta x=y$ имеет единственное решение. Тем самым по определению обратного отображения определен оператор $(A_0+A_\delta)^{-1}$,

*) Следовательно, произвольный элемент $A_0\in U(B_1\to B_2)$ входит в это множество с некоторой своей окрестностью, т. е. множество $U(B_1\to B_2)$ открыто.

причем определен он на всем B_2 и осуществляет взаимно-однозначное соответствие между B_2 и B_1. По теореме 7 об обратном операторе он ограничен, что и требовалось.

5. Различные топологии, различные типы сходимостей. Общие виды функционалов в конкретных пространствах

В пространстве операторов можно определить различные виды сходимостей, различные топологии. В связи с этим дадим ряд определений.

Определение 5. Сходимость в пространстве линейных ограниченных операторов $(N_1 \to N_2)$ в смысле нормы этого пространства называется *равномерной сходимостью*. Другими словами, если последовательность линейных операторов A_n сходится при $n \to \infty$ по норме к оператору A, т. е. $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$, то говорят, что при $n \to \infty$ $\{A_n\}$ сходится к A равномерно. Обозначают эту сходимость символом: $A_n \rightrightarrows A$ при $n \to \infty$.

В этом же пространстве операторов $(N_1 \to N_2)$ можно ввести и другую сходимость, называемую точечной.

Определение 6. Будем говорить, что последовательность операторов A_n при $n \to \infty$ сходится к оператору A в смысле *точечной сходимости* в пространстве $(N_1 \to N_2)$, если для любого значения $x \in N_1$ справедливо соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} A_n x = Ax$. Точечную сходимость в пространстве линейных ограниченных операторов $(N_1 \to N_2)$ обозначают так: $A_n \to A$, $n \to \infty$.

Легко убедиться, что из равномерной сходимости последовательности $\{A_n\} \in (N_1 \to N_2)$ следует точечная, а обратное, вообще говоря, неверно. Действительно, пусть $N_1 = N_2 = l^2$, а A_n — операторы проектирования на подпространства l^2, порожденные элементами $e_1 = (1, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, в последнем векторе единица занимает место после $(n-1)$-го нуля. Тогда для любого $\xi \in l^2$

$$A_n \xi = \sum_{i=1}^{n} (\xi, e_i) e_i \to \sum_{i=1}^{\infty} (\xi, e_i) e_i = \xi,$$

$$(\xi, e_i) = \xi_i, \ \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots,),$$

поэтому $A_n \to E$ — единичному оператору поточечно. С другой стороны, $\|A_n e_{n+1} - A_{n+p} e_{n+1}\| = 1$ (норма элемента берется в пространстве l^2, т. е. $\|\xi\| = \rho(\xi, 0) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2}$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)\Big)$. Поскольку норма вектора e_{n+1} равна единице, $\|A_n - A_{n+p}\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|A_n x - A_{n+p} x\| \geqslant 1$, т. е. равномерной сходимости A_n нет.

Напомним, что выше было определено сопряженное пространство к данному линейному топологическому пространству как совокупность линейных непрерывных функционалов, отображающих L_T в поле коэффициентов. Удобно в дальнейшем для сопряженного пространства ввести обозначение $\dot{L_T}$.

Сопряженное пространство является частным случаем пространства операторов, и в нем, в частности, можно ввести сходимости, определенные выше.

Поэтому в сопряженном пространстве можно ввести топологии — сильную и слабую. Первая из них отвечает равномерной сходимости в пространстве функционалов, сопряженном нормированному, а вторая — точечной сходимости. (Заметим, что в случае сопряженного пространства точечную сходимость называют слабой сходимостью, что будет еще подчеркнуто ниже.)

Рассмотрим сначала случай, когда исходное пространство нормируемо, и дадим следующие определения.

Определение 7. Пусть N — линейное нормируемое пространство, а N^* — его сопряженное пространство. *Сильной топологией* в пространстве N^* называется топология, отвечающая введенной в N^* норме (если $f \in N^*$, то $\|f\|_{N^*} = \sup\limits_{\|x\|_N \leqslant 1} |f(x)|$). Другими словами, за окрестность нуля в пространстве N^* принимается совокупность функционалов $\{f\}$, удовлетворяющих условию $\|f\| < \varepsilon$; или, говоря иначе, за окрестность нуля в пространстве N^* принимается совокупность функционалов, для которых $|f(x)| < \varepsilon$, когда x принадлежит замкнутому единичному шару $K: \|x\| \leqslant 1$. Выбирая всевозможные ε, получим определяющую систему окрестностей нуля: $\Sigma^*_{\varepsilon, K} = \{f: |f(x)| < \varepsilon, \ x \in K\}$.

Подчеркнем, что сходимость в сопряженном пространстве, определяемая этой топологией, согласно определению 5 называется равномерной сходимостью. В случае сопряженного пространства к нормированному часто употребляется еще название *«сильная сходимость»*.

Пусть по-прежнему N — линейное нормированное пространство, N^* — ему сопряженное. Пусть B_n — произвольное подмножество пространства N, состоящее из n элементов пространства N, $n < \infty$, $B_n = \{x_i\}_{i=1}^n$. За окрестности нуля в пространстве N^* примем множества вида $\Sigma^*_{\varepsilon, B_n} = \{f: |f(x)| < \varepsilon, \ x_i \in B_n\}$, где ε — произвольное положительное число. Ясно, что таким образом мы ввели некоторую определяющую систему окрестностей нуля (см. определение 3 § 4 гл. I).

Дадим теперь следующее определение.

Определение 8. Пусть N — линейное нормированное пространство, а N^* — ему сопряженное. *Слабой топологией* в пространстве N^* называется топология, заданная следующей системой окрестностей нуля пространства $N^*: \Sigma^*_{\varepsilon, B_n} = \{f: |f(x_i)| < \varepsilon, \ x_i \in B_n\}$, где ε — произвольное положительное число, B_n — произвольное множество, состоящее из n элементов пространства N, $n < \infty$.

Слабая топология, введенная выше, определяет в пространстве N^* некоторую сходимость, называемую слабой сходимостью. А именно, последовательность функционалов $f_m \in N^*$ называется *слабо сходящейся* к функционалу $f \in N^*$ при $m \to \infty$, если для любого элемента $x \in N$ выполнено соотношение $f_m(x) \to f(x)$, $m \to \infty$. Другими словами, слабая сходимость — это сходимость на каждом фиксированном элементе. Такую сходимость в пространстве операторов мы назвали точечной сходимостью. Из сильной сходимости функционалов в силу оценки $|f_m(x) - f(x)| \leqslant \|f_m - f\| \|x\|$ следует слабая сходимость функционалов. Обратное, вообще говоря, неверно. Покажем, что слабая топология действительно определяет слабую сходимость. Пусть для простоты $f=0$. Пусть для любого $x \in N$ $f_m(x) \to 0$, $m \to \infty$. Тогда для любой окрестности нуля $\Sigma^*_{\varepsilon, B_n} = \{f: |f(x_i)| < \varepsilon,\ x_i \in B_n\}$ найдется такое M, что $f_k \in \Sigma^*_{\varepsilon, B_n}$ при всех $k \geqslant M$. Действительно, для этого достаточно выбрать M_i так, что $|f_k(x_i)| < \varepsilon$ при $k \geqslant M_i$ и затем положить $M = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} M_i$. Обратное очевидно.

Точно так же, как и в пространстве операторов N^*, в исходном пространстве N можно вводить топологию разными способами. Мы остановимся лишь на двух способах введения топологии. В связи с этим приведем следующие определения.

Определение 7′. Пусть N — линейное нормируемое пространство. *Сильной топологией* в пространстве N называется топология, отвечающая введенной в N норме. Другими словами, за окрестность нуля в пространстве N принимается совокупность элементов $\{x\}$, удовлетворяющих условию $\|x\| < \varepsilon$. Выбирая всевозможные ε, получим определяющую систему окрестностей нуля: $\Sigma_\varepsilon = \{x : \|x\| < \varepsilon\}$.

Сходимость в пространстве N, определяемая этой топологией, называется сильной сходимостью в исходном пространстве N.

Пусть по-прежнему N — линейное нормированное пространство, N^* — ему сопряженное. Пусть B_n^* — некоторое подмножество пространства N^*, состоящее из n элементов пространства N^*, $n < \infty$, $B_n^* = \{f_i\}_{i=1}^n$. За окрестности нуля в пространстве N примем множества вида $\Sigma_{\varepsilon, B_n^*} = \{x: |f_i(x)| < \varepsilon,\ f_i \in B_n^*\}$, где ε — произвольное положительное число.

Определение 8′. Пусть N — линейное нормированное пространство, N^* — ему сопряженное. *Слабой топологией* в пространстве N называется топология, заданная следующей системой окрестностей нуля пространства N: $\Sigma_{\varepsilon, B_n^*} = \{x: |f_i(x)| < \varepsilon,\ f_i \in B_n^*\}$, где ε — произвольное положительное число, B_n^* — произвольное множество, состоящее из n элементов пространства N^*, $n < \infty$.

Слабая топология определяет в пространстве N некоторую сходимость, называемую слабой сходимостью. А именно последовательность элементов $x_m \in N$ называется слабо сходящейся к элементу $x \in N$ при $m \to \infty$, если для любого элемента $f \in N^*$ выполнено соотношение $f(x_m) \to f(x)$, $m \to \infty$. Доказательство этого утверждения в точности повторяет доказательство, проведенное в случае слабой сходимости в пространстве N^*. Точно так же заключаем, что из сильной сходимости последовательности в пространстве N следует ее слабая сходимость. Обратное, вообще говоря, неверно.

Заметим, что выше определены сильная и слабая топологии в сопряженном пространстве N^* и в исходном — N в случае, когда пространство N было нормируемым.

Определения 7, 8, 7′ и 8′ остаются справедливыми и в том случае, когда исходное пространство есть линейное топологическое пространство L_T. В этом случае единичный шар в упомянутых выше определениях надо заменить ограниченным множеством в L_T. Естественно, что исходная топология в пространстве L_T задается уже некоторой системой открытых множеств, а не нормой пространства. Заметим еще, что слабая топология пространства L_T уже не обязана удовлетворять хаусдорфовой аксиоме отделимости.

Непрерывные линейные функционалы на линейном нормированном пространстве N сами образуют линейное нормированное пространство N^*. Поэтому можно построить пространство N^{**}, сопряженное к N^*, и т. д. Пространство N^{**} называется *вторым сопряженным пространством*.

Всякий элемент x_0 из N определяет некоторый линейный функционал на N^*. В самом деле, положим $F_{x_0}(f) = f(x_0)$, где x_0 — фиксированный элемент из N, а f пробегает все N^*. Очевидно, что при этом $F_{x_0}(f)$ является функционалом на N^*. Так как при этом

$$F_{x_0}(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha f_1(x_0) + \beta f_2(x_0) = \alpha F_{x_0}(f_1) + \beta F_{x_0}(f_2),$$

то этот функционал линеен. Функционал $F(f)$ часто записывают так: (F, f).

Далее, всякий такой функционал непрерывен на N^*. Действительно, $|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| \leqslant \|x_0\| \, \|f\|$, $\|F_{x_0}\| \leqslant \|x_0\|$, т. е. F_{x_0} ограничен, а поэтому и непрерывен.

Таким образом, мы получили отображение всего пространства N на некоторое подмножество пространства N^{**}. Такое отображение пространства N в N^{**} называют *естественным отображением*. На самом деле это отображение взаимно-однозначно. Действительно, как это следует из теоремы Банаха — Хана, для любых двух точек x' и x'' пространства N существует такой функционал $f(x)$, что $f(x') \neq f(x'')$ (см. пример 3 п. 4), и поэтому $F_{x'}$ и $F_{x''}$ — различные функционалы на N^*.

Построенное выше естественное отображение является изоморфным, т .е. из того, что $x \leftrightarrow F_x$, $y \leftrightarrow F_y$, следует, что $x + y \leftrightarrow$ $\leftrightarrow F_x + F_y$, а также, что $\lambda x \leftrightarrow F_{\lambda x}$, $\lambda \in P$. Это следует из соотношения $F_x(f) = f(x)$ и линейности функционала f. Это отображение является также изометричным, т. е. из того, что $x \leftrightarrow F_x$, следует, что

$\|x\|=\|F_x\|$. Действительно, из теоремы Банаха — Хана (см. пример 3 п. 4) следует, что для любого $x_0 \in N$, $x_0 \neq 0$ существует линейный функционал f такой, что $\|f\|=1$ и $f(x_0)=\|x_0\|$. Поэтому $|F_{x_0}(f)| = |f(x_0)| = \|x_0\| = \|f\|\ \|x_0\|$. Поскольку всегда $\|F_{x_0}\| \leqslant \|x_0\|$, то $\|F_{x_0}\|=\|x_0\|$. что и требовалось. В ряде интересных случаев оказывается, что между элементами исходного пространства N и пространства N^{**} можно установить взаимно-однозначное соответствие с сохранением линейных операций (изоморфизм) и расстояния (изометрия).

Определение 9. Если естественное отображение линейного нормированного пространства N отображает его на все N^{**}, то пространство N называется *рефлексивным*. В этом случае пространства N и N^{**} можно не различать: $N=N^{**}$.

Рассмотрим более подробно понятия слабой и сильной сходимости. Пусть N — линейное нормированное пространство и $\{f_n\}$ — последовательность линейных функционалов из сопряженного пространства N^*. Нами было отмечено, что если последовательность $\{f_n\}$ слабо сходится к функционалу $f_0 \in N^*$, то $f_n(x) \to f_0(x)$ для любого $x \in N$, т. е. слабая сходимость функционалов совпадает с точечной сходимостью.

В терминах слабой сходимости теорема 5 и утверждение 3 п. 2 § 2 этой главы могут быть сформулированы применительно к функционалам следующим образом.

Теорема 5′. *Пусть B — банахово пространство, а B^* — ему сопряженное (т. е. пространство линейных ограниченных функционалов в пространстве B, отображающих B в поле коэффициентов). Тогда пространство B^* является полным в смысле слабой сходимости.*

Другими словами, если последовательность функционалов $\{f_n\}$ фундаментальна в каждой точке $x \in B$, то существует линейный функционал f такой, что

$$f_n(x) \to f(x)$$

для любого $x \in B$.

Утверждение 3′. *Для того чтобы последовательность линейных ограниченных функционалов $\{f_n\}$, отображающих банахово пространство B в поле коэффициентов P, слабо сходилась к функционалу f_0, необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *последовательность $\{\|f_n\|\}$ была ограничена;*

б) *$f_n(x) \to f_0(x)$ для любого множества X, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в B (т. е. замыкание множества линейных комбинаций совпадает с B).*

Утверждение 3″. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\} \in B$ слабо сходилась к $x_0 \in B$, необходимо и достаточно,* чтобы:

а) *последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограничена;*

б) *$f(x_n) \to f(x_0)$ для любого f из некоторого множества F линейных функционалов, линейные комбинации элементов которого лежат всюду плотно в B^*.*

Это утверждение — частный случай утверждения 3′. Действительно, слабая сходимость $\{x_n\} \in B$ к элементу $x_0 \in B$ равносильна слабой сходимости этой же последовательности, но рассматриваемой как последовательность линейных функционалов, определенных на B^*, к x_0, рассматриваемому как линейный функционал на B^*.

Докажем еще два утверждения, связанных с понятием слабой сходимости.

Утверждение 4. *Пусть линейный оператор A отображает одно нормированное пространство N_1 в другое — N_2. Если последовательность $\{x_n\} \subset N_1$ слабо сходится к $x_0 \in N_1$, то последовательность $\{Ax_n\} \subset N_2$ слабо сходится к $Ax_0 \in N_2$.*

Рассмотрим произвольный функционал $F \in N_2^*$. Тогда $F(Ax_n) = f(x_n)$, где $f \in N_1^*$ и $F(Ax_0) = f(x_0)$. Поскольку x_n слабо сходится к x_0, то $f(x_n) \to f(x_0)$, т. е. $F(Ax_n) \to F(Ax_0)$, а так как F — произвольный функционал из N_2^*, то Ax_n слабо сходится к Ax_0. Следовательно, можно сказать, что любой линейный непрерывный оператор является и слабо непрерывным.

Утверждение 5. *Слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства N ограничена, т. е. нормы элементов этой последовательности ограничены в совокупности.*

Действительно, элементы x_n, $n = 1, 2, \ldots$ можно рассматривать как элементы N^{**}. Тогда слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ к элементу $x \in N$ означает, что последовательность функционалов $\{x_n\} \subset N^{**}$ сходится к функционалу $x \in N^{**}$ для всех элементов $f \in N^*$. Но тогда в силу теоремы 4 п. 2 § 2 этой главы последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена в совокупности.

Слабая сходимость в конечномерном пространстве $\mathbf{R}^n$. Покажем, что в конечномерном пространстве слабая сходимость совпадает с сильной. Действительно, пусть $\{x^{(k)}\}$— последовательность в $\mathbf{R}^n$, слабо сходящаяся к элементу x. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какой-либо ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$. Тогда можно записать, что

$$x^{(k)} = x_1^{(k)} e_1 + x_2^{(k)} e_2 + \ldots + x_n^{(k)} e_n,$$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n.$$

Поскольку величины $x_i^{(k)} = (x^{(k)}, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$— линейные непрерывные функционалы в $\mathbf{R}^n$, то $x_1^{(k)} = (x^{(k)}, e_1) \to (x, e_1) = x_1, \ldots, x_n^{(k)} = (x^k, e_n) \to x_n$. Т. е. последовательность $\{x^{(k)}\}$ покоординатно сходится к x. Но тогда

$$\rho(x^{(k)}, x) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i|^2 \Big)^{1/2} \to 0, \ k \to \infty,$$

т. е. $\{x^{(k)}\}$ сильно сходится к x. Поскольку из сильной сходимости вытекает слабая, равносильность этих сходимостей в $\mathbf{R}^n$ доказана.

Слабая сходимость в l^1. Покажем, что из слабой сходимости в пространстве l^1 вытекает также сходимость покоординатная.

Действительно, если $e_1=(1,0,0,\ldots)$, $e_2=(0,1,0,\ldots),\ldots$ — базис пространства l^1 и последовательность $\{x^{(k)}\}$ слабо сходится к элементу x, то можно записать, что $x^{(k)}=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^{(k)}e_i$,

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} x_ie_i, \text{ где } x^{(k)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \ldots),\ x=(x_1,x_2,\ldots),$$

и справедливы следующие соотношения

$$x_1^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(k)}e_1^i\to\sum_{i=1}^{\infty} x_ie_1^i=x_1,\quad x_2^{(k)}=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(k)}e_2^i\to\sum_{i=1}^{\infty} x_ie_2^i=x_2,\ \ldots,$$

$$k\to\infty,$$

$$e_j^i \text{— } i\text{-я координата вектора } e_j,\ e_j^i=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j.\end{cases}$$

Написанные соотношения следуют из слабой сходимости векторов $x^{(k)}$ к вектору x. Действительно, например, выражение $x_1^{(k)}=$ $=f(x^{(k)})=\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^{(k)}e_1^i$ (здесь $e_1^i=1$ при $i=1$ и $e_1^i=0$, при $i>1$), очевидно, представляет собой линейный непрерывный функционал. Таким образом, из слабой сходимости в l^1 следует сходимость покоординатная. Поскольку $\|x^{(k)}-x\|_{l^1}=\sum\limits_{i=1}^{\infty}|x_i^{(k)}-x_i|$, то можно показать, что слабая сходимость в l^1 на самом деле совпадает с сильной.

Перейдем теперь к изучению общих видов функционалов в конкретных пространствах, а также к построению сопряженных пространств.

Конечномерное пространство $\mathbf{R}^n$. Найдем общий вид линейного функционала в $\mathbf{R}^n$, а также найдем пространство, сопряженное к $\mathbf{R}^n$.

Скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$ вектора x и заданного вектора ξ, когда x пробегает все пространство, есть, очевидно, линейный, непрерывный функционал

$$f(x)=(x,\ \xi)=\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{\xi}_i\,^{*)},$$

где x_i, ξ_i — координаты векторов x и ξ соответственно в базисе

*) Здесь $\bar{\xi}_i$ — число, сопряженное к числу ξ_i.

$\{e_i\}$, $i=1, \ldots, n$. Линейность функционала $f(x)$ проверяется непосредственно, а непрерывность его следует из неравенства Коши — Буняковского: $|(x, \xi)|^2 \leqslant \|x\|^2 \|\xi\|^2$, где $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, $\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$ (см. примеры п. 1 § 2 гл. I). Установим обратный результат. Покажем, что всякий линейный непрерывный функционал $f(x)$ на $\mathbf{R}^n$ имеет вид скалярного произведения, записанного выше, с некоторым вектором ξ, который однозначно определяется по функционалу f. Пусть $e_1=(1, 0, \ldots, 0)$, $e_2=(0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots$, $e_n=(0, 0, \ldots, 1)$ — базис в $\mathbf{R}^n$. Для любого вектора $x \in \mathbf{R}^n$ имеем равенство $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x=(x_1, \ldots, x_n)$. Следовательно, для любого линейного функционала f справедлива запись

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{\xi}_i = (x, \xi), \ \bar{\xi}_i = f(e_i), \ i=1, \ldots, n.$$

Докажем, что по функционалу f вектор ξ определяется однозначно. Действительно, пусть $f(x)=(x, \xi)$ и $x=e_i$. Тогда $f(e_i) = (e_i, \xi) = \bar{\xi}_i$, т. е. получаем, что $\bar{\xi}_i$ обязательно равняется $f(e_i)$.

Из неравенства $|f(x)| = |(x, \xi)| \leqslant \|x\| \ \|\xi\| \leqslant M\|x\|$ следует, что функционал $f(x)$ ограничен, и, более того, положив $x=\xi \neq 0$, получаем, что $|f(\xi)| = \|\xi\| \ \|\xi\|$, т. е. наименьшая из констант M, для которой выполнено неравенство $|f(x)| \leqslant M\|x\|$, равна $\|\xi\|$, поэтому $\|f\| = \|\xi\|$. Случай $\xi=0$ тривиален.

Из проведенных рассуждений следует, что между функционалами f и векторами $\xi \in \mathbf{R}^n$ установлено взаимно-однозначное соответствие с сохранением линейных операций, т. е. изоморфизм, а также с сохранением нормы элементов, т. е. изометрия. Таким образом, пространство $\mathbf{R}^n$ рефлексивно, так как совпадает со своим сопряженным: $\mathbf{R}^n = (\mathbf{R}^n)^*$.

П р о с т р а н с т в о l^1. Рассмотрим пространство l^1 числовых последовательностей $x=(x_1, x_2, \ldots)$ таких, что $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| < \infty$. Покажем, что сопряженным пространством к нему будет пространство m — ограниченных числовых последовательностей: $\xi \in m$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$, $\sup\limits_{1 \leqslant k < \infty} |\xi_k| < \infty$. Найдем общий вид линейного непрерывного функционала на l^1. Точно так же, как и в предыдущем примере, заключаем, что выражение $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{\xi}_i$ (x_i, ξ_i — координаты векторов x и ξ соответственно) есть, очевидно, когда x пробегает все пространство l^1, линейный непрерывный функционал на l^1. (Указанный ряд абсолютно сходиться для всех $x \in l^1$.)

Непрерывность $f(x)$ следует из неравенства

$$|f(x)| \leqslant \sup_{1 \leqslant k < \infty} |\xi_k| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|\xi\|_m \cdot \|x\|_{l^1},$$

т. е. $\|f\| \leqslant \|\xi\|_m$.

Покажем обратное, что всякий линейный непрерывный функционал f на l^1 имеет вид: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{\xi}_i$, где $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^1$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in m$. Пусть $e_1 = (1, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots$ — базис в l^1, т. е. каждый $x \in l^1$ допускает единственное представление вида $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$. (Набор $\{e_n\}$ действительно базис: если $x^k = \sum_{n=1}^{k} x_n e_n$, то $\|x^k - x\|_{l^1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} |x_n| \to 0$, $k \to \infty$. Единственность такого разложения очевидна. Следовательно, любой вектор $x \in l^1$ может быть записан, и притом однозначно, в виде: $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i$).

Пусть f — линейный непрерывный функционал на l^1, тогда

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\right) = f\left(\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i\right) = \lim_{n \to \infty} f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{\xi}_i.$$

Числа $\bar{\xi}_i = f(e_i)$ образуют ограниченную последовательность: $|\bar{\xi}_i| = |f(e_i)| \leqslant \|f\|$. Следовательно, $\|\xi\|_m = \sup_{1 \leqslant k < \infty} |\xi_k| \leqslant \|f\|$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$. Вектор ξ определяется по функционалу f однозначно. Действительно, пусть $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{\xi}_i$ и $x = e_i$. Тогда $f(e_i) = \xi_i$, т. е. получаем, что $\bar{\xi}_i$ обязательно равняется $f(e_i)$.

Из полученных выше неравенств мы имеем также, что

$$\|f\| = \sup_{1 \leqslant k < \infty} |\xi_k| = \|\xi\|_m.$$

Таким образом, между линейными и непрерывными функционалами на l^1 и элементами пространства m существует изоморфное и изометричное соответствие, поэтому $(l^1)^* = m$.

П р о с т р а н с т в о l^p, $p > 1$. Найдем общий вид линейного функционала в пространстве l^p, а также сопряженное к нему пространство. Пусть $f(x)$ — линейный функционал на l^p. Поскольку элементы $e_k=\{e_i^k\}$, где $e_i^k=0$ при $i\neq k$ и $e_k^k=1$, образуют базис в l^p, то для любого элемента $x\in l^p$ справедлива запись

$$x=\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i.$$

В силу линейности функционала f имеем

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i).$$

Положим $f(e_i)=\overline{\xi}_i$ и выясним свойства этих чисел. Пусть $\eta_n=\{x_k^{(n)}\}$, где

$$x_k^{(n)}=\begin{cases} |\xi_k|^{q-1}e^{i\arg\xi_k}, & \text{при } k\leqslant n\\ 0 & \text{, при } k>n.\end{cases}$$

(Число q выбрано из соотношения $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.) Получаем

$$f(\eta_n)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q.$$

Поскольку

$$|f(\eta_n)|\leqslant\|f\|\,\|\eta_n\|_{l^p}=\|f\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^{(q-1)p}\Big)^{1/p}=\|f\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q\Big)^{1/p},$$

следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q\leqslant\|f\|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q\Big)^{1/p},$$

откуда при любом n справедливо неравенство

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\|f\|.$$

Поэтому

$$\Big(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\|f\|,$$

т. е. $\{\xi_i\}\in l^q$ и справедливо неравенство $\|\xi\|_{l^q}\leqslant\|f\|$.

С другой стороны, возьмем произвольную последовательность $d=\{d_i\}\in l^q$. Тогда

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{\infty} d_i x_i,\; x=\{x_i\}\in l^p$$

является линейным функционалом в пространстве l^p. Действительно, аддитивность этого функционала очевидна, а ограниченность следует из соотношения, устанавливаемого с помощью неравенства Гельдера:

$$|\varphi(x)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |d_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|d\|_{l^q}\|x\|_{l^p}.$$

Таким образом, формула

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\xi_i}, \quad \overline{\xi_i} = f(e_i)$$

дает общий вид линейного функционала в пространстве l^p. Определим норму функционала f. Имеем

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\xi_i}\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|\xi\|_{l^q}\|x\|_{l^p},$$

т. е. $\|f\| \leqslant \|\xi\|_{l^q}$. Сравнивая это неравенство с ранее полученным неравенством $\|\xi\|_{l^q} \leqslant \|f\|$, получаем, что $\|f\| = \|\xi\|_{l^q} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^q\right)^{1/q}$.

Отсюда получаем, что пространством, сопряженным с пространством l^p, будет пространство l^q, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \geqslant 1$. Следовательно, справедливы равенства

$$(l^p)^* = l^q, \qquad (l^p)^{**} = (l^q)^* = l^p,$$

т. е. пространство l^p — рефлексивно.

В частности, если рассмотреть пространство l^2, то общий вид линейного непрерывного функционала, определенного на l^2, будет

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{\xi_i},$$

где $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \infty$ и $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2\right)^{1/2} = \|\xi\|_{l^2}$, $\xi = \{\xi_i\}$. Следовательно, $(l^2)^* = l^2$.

Слабая сходимость в l^p. Оказывается, что для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ элементов $x_n = \{\xi_i^{(n)}\}$ из пространства l^p слабо сходилась к элементу $x_0 = \{\xi_i^{(0)}\} \in l^p$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограничена и чтобы $\xi_i^{(n)} \to \xi_i^{(0)}$, $n \to \infty$ при каждом номере i. Другими словами, слабая сходимость в l^p означает сходимость по координатам при условии ограниченности норм.

В этом мы убеждаемся, заметив, что линейные комбинации элементов $f_i=\{0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, $i=1, 2, \ldots$ лежат всюду плотно в $l^q=(l^p)^*$. Поэтому в силу утверждения 3″, для того чтобы $\{x_n\}$ слабо сходилась к x_0, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие ограниченности норм и чтобы $f_i(x_n)=\xi_i^{(n)}\to f_i(x_0)=\xi_i^{(0)}$ для любого i, что и требовалось.

6. Компактные множества, слабая компактность

Напомним, что в п. 5 § 2 гл. I было дано определение компактного пространства (множества) как такого пространства (множества), из всякого покрытия которого можно выбрать конечное подпокрытие. Множество было названо предкомпактным, если его замыкание компактно. Напомним также, что мы не делаем различия между понятиями «компактное множество» и «компакт».

В этом пункте мы продолжим изучение свойств компактных множеств (компактов) в линейных нормированных пространствах.

Докажем сначала следующее утверждение.

Теорема 10. *В конечномерном нормированном пространстве $\mathbf{X}^n$ предкомпактность равносильна ограниченности.*

Если множество M предкомпактно, то $\overline{M}$ — компакт и, следовательно, M ограничено. В самом деле, если бы компакт не был ограничен, то нашлась бы последовательность $\{x_n\}$ такая, что $\|x_n\|\to\infty$, и, взяв ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\|x_{n_{k+1}}\|>\|x_{n_k}\|+1$, мы бы пришли к противоречию с тем, что $\overline{M}$ — компакт (поскольку такая подпоследовательность не сходится, см. теорему 6 п. 3 § 3 гл. I).

Обратно, пусть M ограничено. Построим конечную ε-сеть для M. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты в $\mathbf{X}^n$. Поскольку M ограничено, существует число C такое, что $|x_i|<C$, $i=1, 2, \ldots, n$, для всех $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in M$. Пусть R — радиус наименьшего шара в $\mathbf{X}^n$, содержащего единичный куб. Выберем число K из неравенства $R/K<\varepsilon$. В качестве ε-сети можно выбрать точки вида $(k_1/K, k_2/K, \ldots, k_n/K)$, где k_i — целые числа, заключенные в пределах: $-KC\leqslant k_i\leqslant KC$. Заметим, что число элементов в построенной сети равно $(2KC)^n$, т. е. имеет порядок $O(\varepsilon^{-n})$ при $\varepsilon\to 0$, n — размерность пространства $\mathbf{X}^n$.

Теорема 11. *В бесконечномерном линейном нормированном пространстве N единичный шар $O=\{x\in N: \|x\|<1\}$ не является предкомпактным множеством.*

Допустим противное, что шар O — предкомпактное множество и его можно покрыть конечным числом шаров $O_1, O_2, \ldots, O_M$ радиуса $r<1$. Рассмотрим n-мерное подпространство $\mathbf{X}^n$ в пространстве N, которое содержит центры этих шаров. Такое подпространство существует по крайней мере, если $n\geqslant M$.

Пусть $\widehat{O}, \widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \ldots, \widehat{O}_M$ — пересечения шаров $O, O_1, O_2, \ldots, O_M$ с $\mathbf{X}^n$. Множество $\widehat{O}$ является шаром в $\mathbf{X}^n$ радиуса 1, а множества $\widehat{O}_1, \widehat{O}_2, \ldots, \widehat{O}_M$ — шарами радиуса r в $\mathbf{X}^n$. Допустим, что объем *) μ шара $\widehat{O}$ равен единице: $\mu(\widehat{O})=1$. Тогда имеем, что $\mu(\widehat{O}_i)=r^n$, $i=1, 2, \ldots, M$. Поскольку шар O содержится в объединении шаров O_i, $i=1, 2, \ldots, M$, то справедливо неравенство $M\cdot r^n \geqslant 1$, а так как $r<1$, то при достаточно большом n это неравенство не будет выполняться. Получилось противоречие.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 12. *Пусть N — сепарабельное линейное нормированное пространство. Тогда всякий шар в сопряженном пространстве N^* слабо компактен, т. е. из всякой последовательности линейных функционалов $\{f_n\}$ с ограниченными нормами можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому линейному функционалу f_0.*

Напомним, что для линейных функционалов понятие слабой и точечной сходимости совпадают, поэтому в силу теоремы 3 п. 1 § 2 этой главы сопряженное пространство N^* полно в смысле слабой сходимости. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что из всякой последовательности $\{f_n\}$ линейных функционалов с ограниченными нормами можно выделить подпоследовательность, фундаментальную в смысле слабой сходимости. Покажем это. Пусть для простоты $\|f_n\|<1$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — счетное всюду плотное в N множество. Поскольку

$$|f_n(x_1)| \leqslant \|f_n\| \|x_1\| \leqslant \|x_1\|,$$

то числовая последовательность $\{f_n(x_1)\}$ — ограничена. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1^1}(x_1),\ f_{n_2^1}(x_1), \ldots.$$

Так как

$$|f_{n_k^1}(x_2)| \leqslant \|f_{n_k^1}\| \ \|x_2\| \leqslant \|x_2\|,$$

то числовая последовательность $\{f_{n_k^1}(x_2)\}$ ограничена. Выделим из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{n_1^2}(x_2),\ f_{n_2^2}(x_2), \ldots.$$

Этот процесс можно продолжить, выделив подпоследовательность $\{f_{n_k^3}\}$ и т. д. Каждая следующая подпоследовательность является частью предыдущей и поэтому сходится на каждом элементе, на котором сходятся предыдущие подпоследовательности.

Выделим так называемую «диагональную» подпоследовательность функционалов

$$f_{n_1^1}, f_{n_2^2}, \ldots, f_{n_k^k}, \ldots.$$

---

*) Определение объема (меры) множества в $\mathbf{X}^n$ см. в следующей главе.

Эта «диагональная» подпоследовательность сходится на каждом элементе $x_1, x_2, \ldots$ из счетного всюду плотного в N множества, причем нормы функционалов последовательности ограничены в совокупности. Тогда согласно утверждению 3′ последовательность $\{f_{n_k^k}\}$ слабо сходится.

Докажем, наконец, теорему, дающую критерий предкомпактности множества в пространстве $C(K)$, где K — компакт, т. е. в пространстве непрерывных функций на метрическом компакте K с метрикой ρ. Напомним, что норма функции $f \in C(K)$ определяется по формуле $\|f\| = \max\limits_{x \in K} |f(x)|$.

Говорят, что семейство M функций $f(x) \in C(K)$ равномерно ограничено, если существует такая постоянная C, что $|f(x)| \leqslant C$ для всех $f \in M$.

Семейство M функций $f(x) \in C(K)$ равностепенно непрерывно, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $\rho(x, y) < \delta$ для всех $f \in M$.

Теорема 13 (Арцела — Асколи). *Для того чтобы семейство непрерывных функций $M \subset C(K)$ было предкомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным.*

Пусть M — предкомпактно. Тогда существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $f_1, \ldots, f_N$. Поскольку каждая из функций f_i, $i = 1, \ldots, N$ непрерывна на компакте K, то согласно лемме 9 п. 5 § 2 гл. I каждая функция f_i ограничена, а следовательно, существует такая постоянная C_i, что $|f_i(x)| \leqslant C_i$, $i = 1, \ldots, N$. Пусть $C = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} C_i + \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда для любой функции $f \in M$ в силу свойства $\varepsilon/3$-сети следует, что найдется такой номер i, что $|f(x) - f_i(x)| \leqslant \varepsilon/3$, для всех $x \in K$, а поэтому

$$|f(x)| \leqslant |f_i(x)| + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant C_i + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant C, \ x \in K.$$

Итак, семейство M равномерно ограничено.

Далее, каждая из функций f_i, образующих $\varepsilon/3$-сеть, непрерывна на компакте K, следовательно, равномерно непрерывна на нем. Поэтому для данного $\varepsilon/3$ существует такое δ_i, что

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| < \varepsilon/3,$$

если $\rho(x_1, x_2) < \delta_i$.

Пусть $\delta = \min\limits_i \delta_i$, тогда при $\rho(x_1, x_2) < \delta$ для любой функции $f \in M$, выбрав f_i так, что $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon/3$, $x \in K$, имеем

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f_i(x_1)| + |f_i(x_1) - f_i(x_2)| + \\ + |f_i(x_2) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность семейства M установлена.

Обратно, пусть M — равномерно ограниченное и равностепенно непрерывное семейство функций.

Выберем δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon/3$$

при $\rho(x_1, x_2)<\delta$, $f\in M$.

Пусть $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}=S$ — конечная δ-сеть для компакта K. Рассмотрим множество $\widetilde{M}=\{f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_n)\}$, где f — любая функция из M. Множество $\widetilde{M}$ можно считать принадлежащим пространству ограниченных последовательностей $m=W$ (см. пример 5 п. 1 § 2 гл. I). Напомним, что норма элемента $\xi=\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ в таком пространстве определяется по правилу $\|\xi\|_W=\sup\limits_k|\xi_k|$.

На самом деле мы можем ограничиться конечномерным пространством W^n последовательностей $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с той же нормой, что и в пространстве m. Множество $\widetilde{M}$ в W^n ограничено (в силу равномерной ограниченности семейства функций M) и поэтому предкомпактно. Пусть $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_N$ — конечная $\varepsilon/3$-сеть для множества $\widetilde{M}$ в нормированном пространстве W^n. Заметим, что каждый элемент f_i из этой сети имеет вид

$$\tilde{f}_i=\{f_i(y_1), f_i(y_2), \ldots, f_i(y_n)\}, \quad i=1, 2, \ldots, N.$$

Покажем, что набор функций $f_1, f_2, \ldots, f_N$ является ε-сетью для множества M в пространстве $C(K)$. Прежде всего запишем, что для любой функции f ее «след» $\tilde{f}=\{f(y_1), \ldots, f(y_n)\}$ в W^n отстоит от некоторого элемента $\tilde{f}_i$ из $\varepsilon/3$-сети для $\widetilde{M}$ не более чем на $\varepsilon/3$ в смысле расстояния в W^n. Оценим расстояние между f и f_i в смысле метрики $C(K)$. Пусть x — любой элемент из K, а $y_k\in S$ — ближайший к нему элемент δ-сети S. Тогда $\rho(x, y_k)<\delta$. Следовательно,

$$|f(x)-f(y_k)|<\varepsilon/3, \qquad |f_i(x)-f_i(y_k)|<\varepsilon/3$$

согласно выбору δ. Кроме того,

$$|f(y_k)-f_i(y_k)|<\varepsilon/3,$$

так как

$$\sup_{1\leqslant k\leqslant n}|f(y_k)-f_i(y_k)|=\|\tilde{f}-\tilde{f}_i\|_{W^n}<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Таким образом,

$$|f(x)-f_i(x)|\leqslant|f(x)-f(y_k)|+|f(y_k)-f_i(y_k)|+ \\ +|f_i(y_k)-f_i(x)|<\varepsilon,$$

а поэтому $\|f-f_i\|_{C(K)}<\varepsilon$.

Следовательно, семейство M обладает конечной ε-сетью и поэтому предкомпактно.

ЗАДАЧИ

1. В пространстве l^p $(p>1)$ на векторах x вида $\{x_1, x_2, 0, \dots\}$ определен линейный функционал

$$f(x)=f(\{x_1, x_2, 0, \dots\})=x_1+2x_2.$$

Найти его продолжение на все l^p, норма которого будет равна $(1+2^q)^{1/q}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

2. Обозначим через X линейное многообразие многочленов в пространстве $C\,[0, 1]$. Пусть на X определены линейные функционалы вида: $f(x)=[x(0)+x(1)]/2$, $x\in X$,

$$f_1(x)=\int_0^1 x(t)\,dt, \ x\in X.$$

Существуют ли продолжения этих функционалов на все $C\,[0, 1]$? Будут ли эти продолжения единственными?

3. Доказать, что в пространстве l^1 последовательность $e_1=(1, 0, 0, \dots)$, $e_2=(0, 1, 0, \dots), \dots$ не имеет ни сильного, ни слабого предела.

4. Доказать, что единичная сфера в l^p $(p>1)$ сильно замкнута. Найти замыкание единичной сферы $S=\{x: \|x\|=1\}$ в l^p в смысле слабой сходимости.

5. Убедиться, что последовательность $\{x_n(t)=t^n\}$ не имеет ни слабого, ни тем более сильного предела в $C\,[0, 1]$.

6. Доказать, что пространство $C\,[0, 1]$ нерефлексивно.

7. Рассмотрим банахово пространство B. Доказать, что если B^* — сепарабельно, что B — также сепарабельно.

8. Пусть линейный оператор A отображает нормированное пространство N_1 на нормированное пространство N_2. Доказать, что если для всех $x\in N_1$ выполнено соотношение $\|Ax\|\geqslant m\|x\|$, $m>0$, то A^{-1} существует и ограничен.

9. В пространстве l^p $(p\geqslant 1)$ задан оператор A по правилу $Ax=A(x_1, x_2, \dots)=(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$, причем $\sup\limits_n |\lambda_n|<\infty$. Имеет ли этот оператор обратный?

10. Доказать, что если L — бесконечномерное нормированное пространство, то на нем существует разрывный функционал.

11. Доказать, что банахово пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда шар $\|x\|\leqslant 1$ компактен в слабой топологии.

12. Пусть в линейном нормированном пространстве N задано линейное многообразие M и элемент $x_0\overline{\in}M$ такой, что $d=\inf\limits_{x\in M}\|x_0-x\|>0$. Построить функционал f, определенный всюду на N, такой, что $f(x)=0$, $x\in M$, $f(x_0)=1$, $\|f\|=d^{-1}$.