

Глава III

ТЕОРИЯ МЕРЫ. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. ТЕОРИЯ МЕРЫ

В настоящем параграфе при построении абстрактной меры осуществлена конструкция продолжения счетно-аддитивной меры с полукольца на кольцо, а также лебеговское продолжение меры, разобран случай меры в \mathbb{R}^n .

Всюду ниже, если задано некоторое множество X , то $2^X = M(X)$ есть множество всех его подмножеств.

Определение 1. *Кольцом подмножеств* некоторого множества X называется семейство $K(X) \subset M(X)$, замкнутое относительно операций объединения, пересечения и разности, т. е. из того, что $A, B \in K$, следует, что $A \cup B, A \cap B, A \setminus B \in K$.

Очевидно, что симметрическая разность в этом случае также принадлежит кольцу, т. е. если $A, B \in K$, то $A \Delta B \in K$.

Алгеброй $A(X)$ множеств называется кольцо, содержащее единицу E . E — *единица кольца*, если для любого множества $A \subset K(X)$ имеет место включение $A \subset E$.

σ -*кольцом* называется кольцо, замкнутое относительно операции счетного объединения; σ -*алгеброй* называется σ -кольцо с единицей. Легко убедиться, что σ -алгебра замкнута и относительно операции счетного пересечения, т. е., как говорят, является δ -алгеброй.

В дальнейшем через $A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n$ будем обозначать объединение непересекающихся множеств.

Определение 2. *Полукольцом подмножеств* некоторого множества X называется семейство $P(X) \subset M(X)$, замкнутое относительно операции пересечения, содержащее пустое множество, и такое, что если $A, B \in P$, $A \supset B$, то $A \setminus B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup \dots \sqcup C_n$, $C_i \in P$.

Из определения кольца подмножеств непосредственно вытекает, что пересечение $K = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}$ любого множества колец K_{α} так же является кольцом.

Данную систему подмножеств могут содержать, вообще говоря, разные кольца.

Кольцо, содержащее данную систему подмножеств и содержащееся в любом кольце, содержащем эту систему, называется *минимальным*.

Данной системой подмножеств минимальное кольцо, очевидно, определяется однозначно. Действительно, если бы было хотя бы

два различных минимальных кольца, то, взяв их пересечение, мы бы получили кольцо, содержащееся в этих минимальных кольцах (что противоречило бы минимальности исходных колец).

Утверждение. Если P — полукольцо, то среди колец, содержащих P , есть единственное минимальное кольцо K_0 ; оно совпадает с системой Z множеств $\{A\}$, допускающих конечные разложения:

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i, \quad C_i \in P.$$

Существование и единственность минимального кольца доказать легко. Действительно, если $M(P)$ — множество всех подмножеств множества $\bigcup_{A \in P} A$, то $K_0 = \bigcap_{K \in \Sigma} K$ есть единственное минимальное кольцо, содержащее P , здесь Σ — совокупность всех колец множеств, содержащихся в $K(M)$ (кольцо всех подмножеств $M(P)$) и содержащих P . Докажем теперь совпадение K_0 с системой Z . Проверим, что Z — кольцо. Если $A, B \in Z$, то $A = \bigcup_i A_i, B = \bigcup_j B_j, A_i, B_j \in P$. Тогда $A \cap B = \bigcup_{i,j} (A_i \cap B_j)$,

а так как $A_i \cap B_j \in P$, то $A \cap B \in Z$. Если $A \cap B = \emptyset$, то $A \cup B = A \cup B = \bigcup_i A_i \cup \bigcup_j B_j \in Z$. Далее, $A \setminus B = \bigcup_i A_i \setminus (\bigcup_j B_j) =$

$= \bigcup_i (\bigcup_j (A_i \setminus B_j))$. По определению полукольца $P, A_i \setminus B_j = \bigcup_{i=1}^n C_i,$

$C_i \in P$, т. е. $A_i \setminus B_j \in Z$. Поэтому по доказанному $A \setminus B \in Z$. Наконец, $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in Z$. Таким образом, Z — кольцо, причем, очевидно, минимальное, т. е. совпадает с K_0 . Утверждение доказано.

Приведем примеры кольца подмножеств, полукольца, σ -кольца, алгебры, σ -алгебры.

Примеры.

1. Система всех ограниченных подмножеств числовой прямой является кольцом. Действительно, легко видеть, что объединение, пересечение и разность двух ограниченных подмножеств числовой оси являются снова ограниченными подмножествами, т. е. принадлежат той же совокупности. Данное кольцо не является, очевидно, σ -кольцом. Система же всех подмножеств числовой оси является примером σ -алгебры. Единицей является сама числовая ось.

2. Система всех конечных подмножеств произвольного множества X представляет кольцо множеств. Данная система будет алгеброй в том и только том случае, когда множество X само конечно.

3. Для любого непустого множества X система $\{\emptyset, X\}$, состоящая из множества X и пустого множества \emptyset , образует алгебру с единицей $E = X$.

4. Рассмотрим плоскость \mathbb{R}^2 и всевозможные прямоугольники $\{P\}$: $a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, a_i \leq b_i$. В неравенствах выше все знаки \leq или некоторые могут быть заменены на знаки $<$. Система $P = \{P\}$ всех таких прямоугольников образует полукольцо.

Действительно, пересечение двух прямоугольников указанного вида (стороны таких прямоугольников параллельны осям OX и OY прямоугольной системы координат), очевидно, есть снова прямоугольник данного вида (случай «пустого» прямоугольника $a_i = b_i, i = 1, 2$ из нашей системы не исключается).

Для того чтобы убедиться, что P — полукольцо, достаточно проверить, что разность двух любых прямоугольников A и B из системы P представляется в виде объединения непересекающихся прямоугольников $C_i, i = 1, 2, \dots, n$ из P . Но этот факт геометрически очевиден. Таким образом, система $P = \{P\}$ — полукольцо.

5. Множество на плоскости называется *элементарным*, если его можно представить хотя бы одним способом как объединение конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников. Справедлив факт, что объединение, пересечение, разность и симметрическая разность двух элементарных множеств являются также элементарными множествами.

В самом деле, если Q и G — два элементарных множества, т. е. $Q = \bigcup_k A_k, G = \bigcup_j B_j, A_k$ и B_j — прямоугольники, то $Q \cap G = \bigcup_{k,j} (A_k \cap B_j)$ — также элементарное множество (так как пересечение двух прямоугольников есть прямоугольник).

Разность двух прямоугольников есть, как это легко проверить, элементарное множество. Следовательно, если из прямоугольника P вычесть элементарное множество Q , то $P \setminus Q = (P \setminus \bigcup_k A_k) = \bigcap_k (P \setminus A_k)$ есть снова элементарное множество (как пересечение элементарных). Пусть теперь Q и G — два элементарных множества. Очевидно, найдется прямоугольник P , содержащий каждое из них. Тогда множество $Q \cup G = P \setminus [(P \setminus Q) \cap (P \setminus G)]$ — элементарное. Отсюда, а также из соотношений

$$Q \setminus G = Q \cap (P \setminus G), \quad Q \Delta G = (Q \cup G) \setminus (Q \cap G)$$

получаем, что разность и симметрическая разность элементарных множеств являются элементарными множествами, что и требовалось.

Из доказанного выше следует, что совокупность всех элементарных множеств образует кольцо. Это кольцо, очевидно, является минимальным кольцом, содержащим прямоугольники (полукольцо $P = \{P\}$).

Перейдем теперь к изучению основного понятия данного параграфа.

Определение 3. *Мерой* μ на полукольце P называется неотрицательная функция, принимающая конечные значения и являющаяся аддитивной, т. е.

$$\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

для любых A и B , принадлежащих полукольцу $P, A \sqcup B \in P$.

Счетно-аддитивной мерой на полукольце P называется мера, обладающая свойством счетной аддитивности, т. е.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i), \quad A_i \in P, \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in P.$$

Аддитивная неотрицательная функция множества, заданная на некоторой системе множеств, обладает рядом простых свойств, которыми мы будем часто пользоваться:

а) $\mu(\emptyset) = 0$.

В самом деле, $\mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$, т. е. $\mu(\emptyset) = 2\mu(\emptyset)$. Поэтому $\mu(\emptyset) = 0$.

б) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ для любого натурального n .

Доказательство этого соотношения легко получается по индукции.

в) $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$, если $B \subset A$.

Действительно, $A = (A \setminus B) \sqcup B$, поэтому

$$\mu(A) = \mu(A \setminus B) + \mu(B).$$

г) $\mu(A_1 \cup A_2) + \mu(A_1 \cap A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2)$.

Покажем это. Запишем соотношение

$$A_1 \cup A_2 = A_1 \sqcup (A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)).$$

Поэтому в силу аддитивности μ , а также свойства в) получаем $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus (A_1 \cap A_2)) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$, что и требовалось.

д) $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$, если $A_1 \subset A_2$.

В самом деле,

$$A_2 = A_1 \sqcup (A_2 \setminus A_1).$$

Поэтому

$$\mu(A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \geq \mu(A_1).$$

Докажем теперь теорему, которая является одной из основных в построении теории меры.

Теорема 1. *Всякая счетно-аддитивная мера, определенная на полукольце P , однозначно продолжается до счетно-аддитивной меры, определенной на минимальном кольце K_0 , содержащем P .*

Всякий элемент $A \in K_0$ допускает разложение

$$A = \bigcup_{i=1}^n C_i, \quad C_i \in P.$$

Положим по определению $\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^n C_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i)$. Если A

представляется также в виде $A = \bigcup_{j=1}^m D_j$, $D_j \in P$, то $A = \bigcup_{i,j}^{n,m} C_i \cap D_j$ и

$$\mu(A) = \sum_{i,j}^{n,m} \mu(C_i \cap D_j) = \sum_{j=1}^m \mu(D_j) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i), \quad C_i \cap D_j \in P,$$

т. е. мера множества $A \in K_0$ не зависит от вида его разложения *). Докажем счетную аддитивность этой меры. Пусть A и A_i — множества из кольца K_0 . Пусть $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, тогда

$$A = \bigcup_{j=1}^n C_j, \quad A_i = \bigcup_{k=1}^{m_i} C_{ik},$$

$$C_{ik} \cap C_j = C_{ikj}, \quad C_j, C_{ik} \in P;$$

множества C_{ikj} попарно не пересекаются, причем

$$C_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{m_i} C_{ikj}, \quad C_{ik} = \bigcup_{j=1}^n C_{ikj}.$$

В силу счетной аддитивности меры на P имеем

$$\mu(C_j) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu(C_{ikj}), \quad \mu(C_{ik}) = \sum_{j=1}^n \mu(C_{ikj}).$$

По определению меры на кольце K_0 получаем

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^n \mu(C_j), \quad \mu(A_i) = \sum_{k=1}^{m_i} \mu(C_{ik}).$$

Тогда, поскольку все слагаемые неотрицательны, то

$$\mu(A) = \sum_{j=1}^n \mu(C_j) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu(C_{ikj}) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_i} \mu(C_{ik}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

что и требовалось.

Установим теперь важное свойство счетно-аддитивной меры.

Покажем, что счетно-аддитивная мера непрерывна, т. е. если $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, $A = \bigcap_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

*) Единственность продолжения меры на кольцо K_0 следует из того, что если $\tilde{\mu}$ — другое продолжение, то

$$\tilde{\mu}(A) = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}(C_i) = \sum_{i=1}^n \mu(C_i) = \mu(A).$$

Рассмотрим, например, случай $A = \emptyset$, тогда

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1}), \dots, A_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} (A_i \setminus A_{i+1}).$$

Поэтому

$$\mu(A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}), \dots, \mu(A_n) = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i \setminus A_{i+1}).$$

Ряд для $\mu(A_1)$ сходится, поэтому его остаток $\mu(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Поскольку $\mu(A) = \mu(\emptyset) = 0$, то все доказано. Общий случай сводится к данному заменой A_n на $A_n \setminus A$.

Свойство непрерывности меры можно сформулировать и следующим образом: если $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, $A = \bigcup_n A_n$, то $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$. (Доказательство сводится к разобранному переходом к дополнениям множеств.)

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Счетно-аддитивная мера μ на полукольце P является счетно-монотонной, т. е. если*

$$A \subset \bigcup_i A_i,$$

то

$$\mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Действительно, пусть $B_n = (A_n \cap A) \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $B_1 = A_1 \cap A$, тогда $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$, $B_n \subset A_n$ и $A = \bigcup_n B_n$. Отсюда и следует неравенство в силу счетной аддитивности меры:

$$\mu(A) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n).$$

Таким образом, выше проведена следующая конструкция: на полукольце $P(X)$ была задана счетно-аддитивная мера μ . Оказалось, что ее можно однозначно продолжить до счетно-аддитивной меры на минимальное кольцо $K_0(X)$, содержащее данное полукольцо. (Здесь X — некоторое исходное множество.) Поэтому можно с самого начала считать, что мера задана на кольце *).

*) Из доказательства теоремы 1 следует, что если μ аддитивна на полукольце P , то она однозначно продолжается до аддитивной меры μ на кольцо K_0 , содержащем полукольцо P .

Возможно продолжение меры μ на кольцо более обширное, чем K_0 . Соответствующее построение называется *продолжением по Жордану*. Идея такого построения состоит в приближении множества A , для которого определяется мера Жордана, множествами A' и A'' (которым мера уже приписана) изнутри и снаружи, т. е. так, что $A' \subset A \subset A''$.

Данным кольцом $K_0(X)$, вообще говоря, не исчерпываются все множества из $M(X)$, множества всех подмножеств X . Возникает вопрос: на какой же максимальный класс множеств можно продолжить функцию μ и как сделать это продолжение? Ответ дается с помощью так называемого лебегова продолжения. Рассмотрим случай, когда $X \in P$, $\mu(X) < \infty$.

Определение 4. Пусть задано полукольцо $P(X) \ni X$ и счетно-аддитивная мера μ на $P(X)$, $\mu(X) < \infty$. Верхней мерой μ^* на множестве $M(X)$ всех подмножеств множества X называется функция

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i, C_i \in P} \sum \mu(C_i).$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным покрытиям множества A системами множества из полукольца P .

Если $A \in K_0$, то $\mu^*(A) = \mu(A)$. Действительно, если $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$,

$A_i \in P$, то $\mu^*(A) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i) = \mu(A)$; если $A \subset \bigcup_i C_i$, то $\mu(A) \leq \sum_i \mu(C_i)$,

так как мера счетно-монотонна. Отсюда и следует, что $\mu^*(A) = \mu(A)$, если $A \in K_0$. Дадим следующее определение, которым мы воспользуемся ниже.

Определение 5. Расстоянием между множествами A и B назовем число

$$\rho(A, B) = \mu^*(A \Delta B).$$

Поскольку $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$, то $\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(B, C)$, т. е. выполнена аксиома треугольника.

Легко проверить, что $\rho(A, B) = \rho(B, A)$ и $\rho(A, A) = 0$. Тем не менее из того, что $\rho(A, B) = 0$, не следует, что $A = B$. Однако если считать множества A и B эквивалентными в случае, когда $\rho(A, B) = 0$, то данное расстояние превращает совокупность классов эквивалентных множеств в метрическое пространство $R = (X, \mu, \rho)$.

Переходим теперь к определению важнейшего понятия — измеримого по Лебегу множества.

Определение 6. Множество $A \in M(X)$ называется измеримым по Лебегу, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $B \in K_0(X)$, что

$$\rho(A, B) < \varepsilon.$$

Здесь $K_0(X)$ — минимальное кольцо, на которое продолжена мера μ , заданная на полукольце $P(X) \subset M(X)$, X — некоторое исходное множество, $X \in P(X)$.

Таким образом, множество A измеримо, если его с любой точностью можно приблизить (по введенному расстоянию) множествами кольца.

Класс измеримых по Лебегу множеств будем обозначать $\mathcal{L}(X)$. Ясно, что $\mathcal{L}(X)$ является некоторым подмножеством $M(X)$ — множества всевозможных подмножеств X . Функция μ^* , рассматриваемая на $\mathcal{L}(X)$, называется *лебеговой мерой* и обозначается символом μ . Таким образом, счетно-аддитивная функция μ , определенная сначала на полукольце $P(X)$, может быть продолжена на кольцо $K_0(X)$ и, более того, на множество $\mathcal{L}(X)$. Изучим свойства этого продолжения.

Основной является следующая теорема.

Теорема 2. *Класс измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{L}(X)$ является σ -алгеброй, а функция μ — счетно-аддитивной мерой на $\mathcal{L}(X)$.*

Покажем сначала, что $\mathcal{L}(X)$ — кольцо. Пусть множества A_i — измеримы, а $B_i \in K_0(X)$. Непосредственной проверкой устанавливаются следующие включения:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \Delta \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \Delta B_i),$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \Delta \left(\bigcap_{i=1}^n B_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n (A_i \Delta B_i),$$

$$(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2).$$

Но тогда по определению $\rho(A, B)$ и в силу полуаддитивности μ справедливы неравенства

$$\rho\left(\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcup_{i=1}^n B_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \rho(A_i, B_i), \quad (*)$$

$$\rho\left(\bigcap_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n B_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \rho(A_i, B_i),$$

$$\rho(A_1 \setminus A_2, B_1 \setminus B_2) \leq \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2).$$

Правые части в силу измеримости входящих множеств можно сделать сколь угодно малыми, и, следовательно, $\mathcal{L}(X)$ замкнуто относительно конечных операций суммы, пересечения, разности, т. е.

множества $\bigcup_{i=1}^n A_i, \bigcap_{i=1}^n A_i, A_1 \setminus A_2$ измеримы: аппроксимируются

с любой точностью элементами кольца $\bigcup_{i=1}^n B_i, \bigcap_{i=1}^n B_i, B_1 \setminus B_2,$

$B_i \in K_0(X)$. Тем самым показано, что $\mathcal{L}(X)$ — кольцо. Поскольку оно содержит единицу, то кольцо $\mathcal{L}(X)$ — алгебра.

Докажем, что $\mathcal{L}(X)$ — σ -кольцо. Пусть $A_i, i=1, 2, \dots$ измеримы, выберем $B_i \in K_0(X)$ так, чтобы $\rho(A_i \setminus B_i) < \varepsilon/2^n$. Тогда, переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в неравенстве (*), получаем, что

$$\rho(A, B) \leq \varepsilon,$$

где

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i.$$

Положим $C_i = B_i \setminus \bigcup_{k=1}^{i-1} B_k$, тогда $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, $C_i \in K_0(X)$. Ряд $\sum_i \mu(C_i)$ сходится (рассматривается полукольцо с единицей и $\mu(X) < \infty$), следовательно, существует число N такое, что $\sum_{i=N+1}^{\infty} \mu(C_i) < \varepsilon$. Тогда

$$\rho\left(B, \bigcup_{i=1}^N C_i\right) < \varepsilon \text{ и}$$

$$\rho\left(A, \bigcup_{i=1}^N C_i\right) \leq \rho\left(B, \bigcup_{i=1}^N C_i\right) + \rho(A, B) < 2\varepsilon.$$

Поскольку $C_i \in K_0(X)$, то множество A измеримо и $\mathcal{L}(X)$ — σ -кольцо.

Докажем конечную аддитивность μ^* на $\mathcal{L}(X)$. Следующие два включения очевидны:

$$A \subset B \cup (A \Delta B),$$

$$B \subset A \cup (A \Delta B).$$

В силу монотонности μ^* и определения $\rho(A, B)$ из этих включений имеем

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leq \rho(A, B).$$

Пусть A_1 и $A_2 \in \mathcal{L}(X)$ и $A = A_1 \sqcup A_2$. Выберем $\varepsilon > 0$ и множества $B_1, B_2 \in K_0(X)$ так, чтобы $\rho(A_i, B_i) < \varepsilon/6$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\rho(A_1 \sqcup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \rho(A_1, B_1) + \rho(A_2, B_2) < \varepsilon/3.$$

Далее,

$$|\mu^*(A_1 \sqcup A_2) - \mu^*(B_1 \cup B_2)| \leq \rho(A_1 \sqcup A_2, B_1 \cup B_2) < \varepsilon/3.$$

В силу аддитивности μ^* на $K_0(X)$ имеем (на K_0 мера μ^* совпадает с μ):

$$\mu^*(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1) + \mu(B_2) - \mu(B_1 \cap B_2).$$

Вычислим меру $\mu(B_1 \cap B_2)$. Имеем

$$\mu(B_1 \cap B_2) = \rho(B_1 \cap B_2, \emptyset) = \rho(B_1 \cap B_2, A_1 \cap A_2) \leq$$

$$\leq \rho(B_1, A_1) + \rho(B_2, A_2) < \varepsilon/3.$$

Наконец,

$$|\mu^*(A_i) - \mu^*(B_i)| \leq \rho(A_i, B_i) < \varepsilon/6, \quad i = 1, 2.$$

Окончательно получаем:

$$|\mu^*(A_1 \sqcup A_2) - \mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| =$$

$$\begin{aligned}
&= |\mu^*(A_1 \cap A_2) - \mu^*(B_1 \cup B_2) + \mu^*(B_1 \cup B_2) - \mu^*(A_1) - \mu^*(A_2)| \leq \\
&\leq |\mu^*(A_1 \cap A_2) - \mu^*(B_1 \cup B_2)| + |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| + \\
&\quad + |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| + \mu^*(B_1 \cap B_2) < \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Так как ε произвольно, то

$$\mu^*(A_1 \cap A_2) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2),$$

т. е. мера μ^* аддитивна на $\mathcal{L}(X)$.

Оказывается, что мера μ^* является и счетно-аддитивной. Действительно, пусть $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, тогда из счетной монотонности следует, что

$$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k). \quad *) \text{ С другой стороны,}$$

$$\mu^*(A) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) + \mu^*\left(\bigcup_{k=N+1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^N \mu^*(A_k)$$

для любого N , т. е. $\mu^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. Значит, $\mu^*(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

Заметим, что процесс продолжения меры по Лебегу тесно связан с процессом пополнения метрического пространства $R = (X, \mu, \rho)$, $\rho(A, B) = \mu^*(A \Delta B)$. Оказывается, что $\mathcal{L}(X)$ совпадает с пополнением этого метрического пространства по метрике ρ . (Множества A и B , для которых $\rho(A, B) = 0$, не различаются.)

Примеры.

1. Пусть полукольцо P образуют прямоугольники $\{\Pi\}$ в \mathbb{R}^n : $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, $a_i \leq b_i$. В неравенствах выше все знаки \leq или некоторые могут быть заменены на $<$. Так же, как и для плоскости, проверяется, что P — полукольцо. Тогда минимальное кольцо K_0 над этим полукольцом будет совпадать с множеством всех элементарных подмножеств в \mathbb{R}^n . (Как и в случае плоско-

*) Действительно, если $A \subset \bigcup_k A_k$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует система

$\{A_{kj}\}$, $A_{kj} \in P$ такая, что $A_k \subset \bigcup_j A_{kj}$ и $\mu^*(A_k) > \sum_j \mu(A_{kj}) - \frac{\varepsilon}{2^k}$. Тогда

$$A \subset \bigcup_{k,j} A_{kj} \text{ и } \mu^*(A) \leq \sum_{k,j} \mu(A_{kj}) < \sum_k \mu^*(A_k) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем, что $\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$.

сти, множество *элементарно*, если оно есть объединение конечного числа прямоугольников.) Зададим на P аддитивную меру μ так: мера прямоугольника Π равна его объему $S = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \mu(\Pi)$.

Эта мера может быть продолжена до счетно-аддитивной меры на кольце K_0 . Далее может быть определена мера μ^* , как и в абстрактном случае, и мера μ может быть продолжена на класс \mathcal{L} , как и в теореме 2, до счетно-аддитивной функции. Класс \mathcal{L} называется классом измеримых по Лебегу множеств в \mathbb{R}^n .

Единственным отличием в построении меры Лебега в \mathbb{R}^n от абстрактного случая является то, что здесь не предполагается счетная аддитивность меры на полукольце P . Счетная аддитивность меры на K_0 и на классе \mathcal{L} следует только из аддитивности и топологических свойств множеств в \mathbb{R}^n (леммы Бореля — Лебега).

В самом деле, вернемся снова к доказательству счетной аддитивности меры μ^* в абстрактном случае. Основным моментом в этом доказательстве является утверждение о ее счетной монотонности, т. е. утверждение о том, что если $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$, то

$\mu^*(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)$. В свою очередь это неравенство, как мы показали при доказательстве теоремы 2, вытекает из счетной монотонности меры μ , определенной на полукольце.

Следовательно, для того чтобы показать счетную аддитивность меры μ^* в случае \mathbb{R}^n , необходимо только показать счетную монотонность меры μ , определенную на прямоугольниках и продолженную на элементарные множества (на кольцо K_0) по правилу:

$$\text{если } A = \coprod_k \Pi_k, \text{ то } \mu(A) = \sum_k \mu(\Pi_k)$$

(здесь A — элементарное множество, Π_k — прямоугольники).

Установим счетную монотонность аддитивной меры μ для элементарных множеств в случае \mathbb{R}^n . Пусть A — элементарное множество и $\{A_n\}$ — конечная или счетная система элементарных множеств такая, что $A \subseteq \bigcup_k A_k$, тогда покажем, что $\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k)$. Выберем $\varepsilon > 0$ и такое замкнутое элементарное мно-

жество $F \subset A$, что $\mu(F) \geq \mu(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Для этого, очевидно, достаточно каждый из прямоугольников Π_i , составляющих A , заменить замкнутым прямоугольником с объемом большим, чем $\mu(\Pi_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$.

Далее, для каждого A_k выберем открытое элементарное множество G_k , содержащее A_k и удовлетворяющее условию

$$\mu(G_k) \leq \mu(A_k) + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Очевидно, что $F \subset \bigcup_k G_k$. Из системы $\{G_k\}$ по лемме Бореля — Лебега выберем конечную подсистему G_{k_1}, \dots, G_{k_p} , покрывающую F . При этом, очевидно,

$$\mu(F) \leq \sum_{i=1}^p \mu(G_{k_i}),$$

так как в противном случае множество F оказалось бы покрытым конечным числом прямоугольников с суммарным объемом меньшим, чем $\mu(F)$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \mu(A) &\leq \mu(F) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_{i=1}^p \mu(G_{k_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \sum_k \mu(G_k) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_k \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_k \mu(A_k) + \varepsilon, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε следует счетная монотонность меры μ для элементарных множеств:

$$\mu(A) \leq \sum_k \mu(A_k).$$

Отсюда, как уже говорилось, точно так же, как и в абстрактном случае, получаем счетную монотонность, также счетную аддитивность продолженной на класс \mathcal{L} меры μ^* в \mathbb{R}^n .

Таким образом, в отличие от случая построения меры на произвольной системе множеств, образующих полукольцо, в случае системы множеств из \mathbb{R}^n не требуется счетная аддитивность меры на полукольце — она вытекает из аддитивности и леммы Бореля — Лебега.

2. Часто используется следующее утверждение. Оказывается, что в определении $\mu^*(A)$ в случае \mathbb{R}^n для покрытий можно брать только открытые прямоугольники Q из полукольца P , $Q = \{x : a_i < x < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$.

В самом деле, если

$$\mu^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k \Pi_k, \Pi_k \in P} \sum_k \mu(\Pi_k), \text{ а } \mu_0^*(A) = \inf_{A \subset \bigcup_k Q_k, Q_k \in P} \sum_k \mu(Q_k),$$

где Π_k — произвольные прямоугольники, а Q_k — открытые, то всегда $\mu^*(A) \leq \mu_0^*(A)$. Докажем, что $\mu^*(A) = \mu_0^*(A)$. Пусть выполнено про-

тивное, $\mu^*(A) < \mu_0^*(A)$, $\mu_0^*(A) - \mu^*(A) = \varepsilon$. Выберем такое покрытие множества A , что

$$\sum_k \mu(\Pi_k) - \mu^*(A) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заменяем каждый прямоугольник Π_k открытым Q_k , $Q_k \supset \Pi_k$ и таким, что

$$\mu(Q_k) - \mu(\Pi_k) \leq \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^k}.$$

Тогда

$$\sum_k \mu(Q_k) - \mu^*(A) \leq \frac{3\varepsilon}{4},$$

т. е.

$$\sum_k \mu(Q_k) - \mu_0^*(A) + \varepsilon \leq \frac{3\varepsilon}{4},$$

$$\sum_k \mu(Q_k) \leq \mu_0^*(A) - \frac{\varepsilon}{4},$$

что противоречит определению $\mu^*(A)$. Таким образом, $\mu_0^*(A) = \mu^*(A)$. Поэтому, если множество A измеримо, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $G \supset A$, $G = \bigcup_k Q_k$, что $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Перейдя к дополнениям, заключаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество F , что

$$\mu^*(A \setminus F) < \varepsilon, \quad F \subset A.$$

3. Открытые множества измеримы, т. е. принадлежат σ -кольцу $\mathcal{L}(X)$ с единицей X (в этом случае мы называли кольцо σ — алгеброй). Действительно, в \mathbb{R}^n , как мы знаем из рассмотрений § 2 гл. I, открытые прямоугольники образуют счетную базу. Поэтому, поскольку всякое открытое множество A есть объединение счетной системы открытых прямоугольников (а они, очевидно, измеримы), в силу теоремы 2 множество также измеримо. Замкнутое множество, как дополнение открытого, является также измеримым. *Борелевским* называется множество (см. пример 4 п. 2 § 4 гл. I), которое может быть получено с помощью не более чем счетного числа операций, исходя из открытых множеств, причем каждая операция — это либо взятие объединения, либо пересечения, либо переход к дополнению. Всякое борелевское множество, например, единичного квадрата, является измеримым. Борелевские множества образуют наименьшее из σ -колец, содержащее открытые множества.

4. Счетные множества в \mathbb{R}^n измеримы и имеют меру нуль. Действительно, пусть $A = \{x_k\}$ — счетное множество. Покроем точку x_k открытым прямоугольником Q_k таким, что $\mu(Q_k) = \varepsilon/2^k$.

Тогда $\mu^*(A) \leq \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, т. е. $\mu^*(A) = 0$. Множество A , для которого верхняя мера равна нулю, оказывается всегда измеримым. В самом деле, заметим, что пустое множество всегда принадлежит кольцу: $\emptyset \in K_0(X)$, а также что

$$\rho(A, \emptyset) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = \mu(A) = 0.$$

5. При построении меры в \mathbb{R}^n удобно рассматривать сначала только подмножества единичного квадрата E . Тогда полукольцо P обладает единицей E и $\mu(E) = 1$. От этого ограничения можно освободиться, покрыв все \mathbb{R}^n счетной системой единичных квадратов E_k и назвав множество A измеримым, если измеримы его пересечения с каждым из квадратов и $\sum_k \mu(A \cap E_k) < \infty$, при этом

$$\mu(A) = \sum_k \mu(A \cap E_k).$$

6. Если полукольцо произвольных множеств, на котором определена исходная мера μ , не имеет единицы, то все построения остаются в силе, но мера μ^* оказывается определенной только на такой системе множеств, для каждого из которых существует покрытие $\bigcup_k C_k$ множествами из P с конечной суммой $\sum_k \mu(C_k)$.

7. Мера μ называется *полной*, если из соотношений $\mu(A) = 0$ и $A_1 \subset A$ вытекает, что $\mu(A_1) = 0$. Лебегово продолжение меры полно. Действительно, если $A_1 \subset A$ и $\mu(A) = 0$, то $\mu^*(A_1) = 0$, а любое множество B , для которого $\mu^*(B) = 0$, как уже показывалось в примере 4, измеримо.

8. Можно показать, что если исходная мера μ задана не на полукольце, а на произвольной системе множеств, то на $\mathcal{L}(X)$ она продолжается не однозначно.

9. Пусть X — произвольное множество. Тогда (X, K_σ, μ) называется *пространством с мерой*, если существует σ -кольцо K_σ подмножеств X и счетно-аддитивная мера μ на K_σ . Если $X \in K_\sigma$, то X называется измеримым пространством. Например, X — единичный квадрат в \mathbb{R}^n , μ — мера Лебега в \mathbb{R}^n , тогда (X, K_σ, μ) — измеримое пространство. Пусть X — множество положительных чисел, K_σ — множество его подмножеств, $\mu(A)$ — число элементов множества A , тогда (X, K_σ, μ) — измеримое пространство. В теории вероятности событие — это множество, а вероятность наступления события — это аддитивная или счетно-аддитивная функция множества (его мера). Часто, если ясно, о чем идет речь, для обозначения измеримого пространства (или пространства с мерой) будет использоваться просто символ X .

10. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — произвольное счетное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $x_k \in X$ его «вес» — положительное число a_n , причем потребуем, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$.

Пусть P — полукольцо всех подмножеств X . Для каждого $A \subset X$

положим $\mu(A) = \sum_{x_k \in A} \alpha_k$. Очевидно, что $\mu(X) = 1$, а также легко

проверить, что μ — счетно-аддитивная мера.

11. Приведем пример еще одной меры. Пусть $\Phi(t)$ — некоторая неубывающая, непрерывная слева функция на прямой. Положим

$$\mu(a, b) = \Phi(b) - \Phi(a+0), \quad \mu[a, b] = \Phi(b+0) - \Phi(a),$$

$$\mu(a, b] = \Phi(b+0) - \Phi(a+0), \quad \mu[a, b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Так определенная функция μ неотрицательна и аддитивна. Применяя к ней общую схему продолжения меры, можно построить класс \mathcal{L} измеримых множеств, на котором мера μ будет счетно-аддитивна. Меры, получаемые с помощью таких функций $\Phi(t)$, называются мерами Лебега—Стилтьеса. В частности, если $\Phi(t) = t$, то отвечающая ей мера будет обычной мерой Лебега на прямой.

12. В рассмотренных выше всюду мы имели дело с измеримыми множествами. Класс $\mathcal{L}(X)$ измеримых множеств содержит все открытые, замкнутые, борелевские множества и является весьма широким.

Построим сейчас пример неизмеримого множества на окружности C длины 1. Пусть α — иррациональное число. Разобьем точки окружности на классы, отнеся к одному классу те точки окружности C , которые могут быть переведены одна в другую поворотом на угол $k\alpha$, k — целое. Каждый из таких классов будет состоять из счетного множества точек. Выберем теперь в каждом классе по «представителю» — некоторую точку. Объединение всех таких точек образует неизмеримое множество Ψ_0 .

Обозначим через Ψ_k множество, получаемое из Ψ_0 с помощью поворота на угол αk .

Все множества Ψ_k попарно не пересекаются, и их объединение составляет всю окружность.

Если бы множество Ψ_0 было измеримо, то были бы измеримы и конгруэнтные ему множества Ψ_k . Поскольку $C = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \Psi_k$, $\Psi_k \cap \Psi_l = \emptyset$, $k \neq l$, то мы бы получили, что

$$\mu(C) = 1 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Psi_k).$$

Но все множества Ψ_k должны иметь одну и ту же меру, т. е. $\mu(\Psi_k) = \gamma$. Следовательно, получилось противоречие, так как если

$\mu(\Psi_k) = \gamma = 0$, то и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Psi_k) = 0 \neq 1$, а если $\gamma > 0$, то ряд

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu(\Psi_k)$ расходится. Следовательно, множество Ψ_0 и каждое Ψ_k неизмеримы.

13. Условие $X \in K_0(X)$ в ряде случаев оказывается слишком сильным. Поэтому часто рассматривают более слабые условия, когда X принадлежит к $K_\sigma^0(X)$ — минимальному σ -кольцу, содержащему исходное полукольцо $P(X)$. Тогда все множество X является счетным объединением множеств из полукольца: $X = \bigcup_k X_k$, $X_k \in P(X)$.

Мера μ в этом случае называется σ -конечной.

Множество A называется измеримым по Лебегу относительно σ -конечной меры μ , если измеримы все множества

$$A \cap X_k, \quad k=1, 2, \dots$$

Мерой множества A называется сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap X_i)$, если он сходится, и $+\infty$ в противном случае.

Нетрудно убедиться, что измеримые множества по-прежнему образуют σ -алгебру, а определенная выше верхняя мера является счетно-аддитивной, причем обе части равенства

$$\mu\left(\bigcup_k A_k\right) = \sum_k \mu(A_k)$$

могут равняться бесконечности.

§ 2. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Переходим теперь к изучению важного класса функций, которые называются измеримыми. Именно для таких функций в следующем параграфе будет построена теория интеграла.

Рассмотрим измеримое пространство X , т. е. произвольное множество с выделенной в нем σ -алгеброй подмножеств (единица — само множество X) и с заданной на этой σ -алгебре счетно-аддитивной мерой. (Множества являются измеримыми, если они принадлежат указанной σ -алгебре).

Дадим следующее определение.

Определение 7. Вещественнозначная функция $f(x)$, заданная на измеримом пространстве X , называется измеримой, если при любом числе $a \in \mathbb{R}^1$ измеримо множество $\{x: f(x) > a\}$.

Справедливо следующее простое утверждение.

Утверждение. Функция $f(x)$ будет измеримой, если при любом числе a измеримо одно из следующих множеств:

$$\{x: f(x) \geq a\}, \quad \{x: f(x) < a\}, \quad \{x: f(x) \leq a\}.$$

Доказательство утверждения следует из представлений:

$$\{x: f(x) \geq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x: f(x) > a - \frac{1}{k}\right\}, \quad \{x: f(x) < a\} = X \setminus \{x: f(x) \geq a\},$$

$$\{x: f(x) \leq a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x: f(x) < a + \frac{1}{k}\right\}, \quad \{x: f(x) > a\} = X \setminus \{x: f(x) \leq a\},$$

а также из того, что само X измеримо, пересечения измеримых множеств, дополнения измеримого множества до всего X — измеримы (X — измеримое пространство).

Справедливы следующие свойства измеримых функций.

Свойство 1. Если функция $f(x)$ измерима, то и функция $|f(x)|$ измерима.

Действительно,

$$\{x: |f(x)| > a\} = \{x: f(x) > a\} \cup \{x: f(x) < -a\}.$$

Свойство 2. Если функции $f_n(x)$ измеримы, то функции

$$f_{\sup}(x) = \sup_n f_n(x), \quad f_{\inf}(x) = \inf_n f_n(x);$$

$$\overline{f}(x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad \underline{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x),$$

а также функции $f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$, $f^-(x) = -\min\{f(x), 0\}$ измеримы.

Действительно,

$$\{x: f_{\sup}(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f_n(x) > a\},$$

$$\overline{f}(x) = \inf_m g_m(x), \quad g_m(x) = \sup_{n \geq m} f_n(x).$$

Для функций $f_{\inf}(x)$, $\underline{f}(x)$ доказательство аналогично. В частности, предел измеримых функций измерим. Функции $f^+(x)$, $f^-(x)$, очевидно, также измеримы.

Свойство 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ — измеримые, принимающие конечные значения вещественные функции, определенные на множестве X , функция $F(u, v)$ вещественна и непрерывна на \mathbb{R}^2 , то функция $F(f(x), g(x))$ измерима. В частности, функции $f+g$, $f \cdot g$, f^m , где m — натуральное число, измеримы.

В самом деле, пусть I_n — прямоугольник:

$$I_n = \{u, v: a_n < u < b_n, \quad c_n < v < d_n\}, \quad a_n < b_n, \quad c_n < d_n.$$

Тогда, поскольку прямоугольники I_n образуют базу в \mathbb{R}^2 , а в силу непрерывности $F(u, v)$ на \mathbb{R}^2 множество, на котором $F(u, v) > a$, a — вещественно, открыто, то можно записать

$$\{u, v: F(u, v) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Множество $\{x: f(x), g(x) \in I_n\} = \{x: a_n < f(x) < b_n\} \cap \{x: c_n < g(x) < d_n\}$ — измеримо.

Поэтому множество

$$\{x: F(f(x), g(x)) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x: f(x), g(x) \in I_n\}$$

— измеримо, что и требовалось.

Комплекснозначная функция называется измеримой, если измеримы ее вещественная и мнимая часть.

Для измеримых функций можно определять различные типы сходимостей. Например, а) равномерная сходимость:

$f_n \xrightarrow{\text{равн.}} f$, если $\sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$; б) сходимость почти

всюду: $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$, если $f_n(x)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ для всех x , кроме подмножества меры нуль; в) сходимость по мере $f_n \xrightarrow{\text{по мере}} f$, если для любого $\varepsilon > 0$ $\mu\{x: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Из равномерной сходимости следует, очевидно, сходимость почти всюду и по мере. Из сходимости почти всюду на измеримом пространстве X ($\mu(X) < \infty$) следует сходимость по мере. Это следует из того, что множества $E_{n,\varepsilon} = \bigcup_{k \geq n} \{x: |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$ обладают свойством $E_{1,\varepsilon} \supset E_{2,\varepsilon} \supset \dots$ и $\mu(E_{n,\varepsilon}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Нетрудно убедиться, что из сходимости последовательности функций по мере не следует, вообще говоря, сходимость почти всюду, например, последовательность $f_1^{(k)}, f_2^{(k)}, \dots, f_k^{(k)}, k=1, 2, \dots$,

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{k} < x \leq \frac{i}{k}, \quad i=1, 2, \dots, k, \\ 0 & \text{для остальных } x \end{cases}$$

сходится к нулю по мере, но не сходится к нулю ни в одной точке.

Однако, если несколько изменить исходную последовательность, то обратное утверждение справедливо: если $f_n \rightarrow f$ по мере, то существует подпоследовательность $\{f_{n(k)}\}$, сходящаяся к f почти всюду. В самом деле, пусть $P_{n,\varepsilon} = \{x: |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. По условию $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(P_{n,\varepsilon}) = 0$ при $\varepsilon > 0$. Поэтому для любого натурального

k существует такой номер $n(k)$, что $\mu(P_{n(k), 1/k}) < 1/2^k$. Утверждается, что подпоследовательность $f_{n(k)}$ — искомая: множество тех x , где $f_{n(k)}(x)$ не стремится к $f(x)$, содержится в множестве $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{n(k), 1/k}$, а поэтому оно имеет меру нуль (здесь

\lim означает верхний предел последовательности множеств).

Следующие две теоремы играют важную роль в теории измеримых функций и проясняют их структуру.

Теорема (Егоров). Пусть X — измеримое пространство ($\mu(X) < \infty$) и $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ на X , тогда для любого $\delta > 0$ существует

множество $E_\delta \subset X$ такое, что $\mu(E_\delta) < \delta$ и на $X \setminus E_\delta$ f_n сходятся к f равномерно, $n \rightarrow \infty$.

Пусть $E_{n,\varepsilon} = \bigcup_{k \geq n} \{x: |f_k(x) - f(x)| > \varepsilon\}$. Для любого натурального p существует такой номер $n(p)$, что $\mu(E_{n(p), 1/p}) < \delta/2^p$. Пусть $E_\delta = \bigcup_{p=1}^{\infty} E_{n(p), 1/p}$, тогда $\mu(E_\delta) < \delta$ и при $k > n(p)$ $|f_k(x) - f(x)| \leq 1/p$, если $x \in E_\delta$, что и требовалось.

Теорема (Лузин). Пусть $f(x)$ принимает конечные значения и измерима на измеримом пространстве X , $\mu(X) < \infty$, X — подмножество \mathbb{R}^n . Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $A_\varepsilon \subset X$, что $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f(x)$ непрерывна на A_ε (т. е. непрерывна как функция, заданная на A_ε).

Так как $f = f^+ - f^-$, то можно считать $f \geq 0$. Пусть сначала f — простая функция, т. е. $f(x) = c_i$ при $x \in X_i$, $\bigcup_{i=1}^m X_i = X$, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $i \neq j$, X_i — измеримы. Согласно примеру 1) для каждого X_i найдем такое замкнутое множество $F_i \subset X_i$, что $\mu(X_i \setminus F_i) < \varepsilon/m$. Пусть $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$, $F_i \cap F_j = \emptyset$, $i \neq j$. Тогда $\mu(X \setminus F) < \varepsilon$ и $f(x)$ непрерывна на F . В самом деле, пусть $x_0 \in F$, тогда $x_0 \in F_j$ на некотором j , все F_j замкнуты, число их конечно, значит, x_0 — предельная точка только F_j . Функция $f(x)$ постоянна на F_j , поэтому непрерывна на F_j , а по сказанному — и на F . Пусть теперь $f(x)$ — произвольная, конечная, неотрицательная и измеримая функция. Образует последовательность простых функций

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{v-1}{k}, & \text{если } \frac{v-1}{k} \leq f(x) < \frac{v}{k}, \quad 1 \leq v \leq k^2, \\ k, & \text{если } f(x) \geq k. \end{cases}$$

Простой проверкой убеждаемся, что f_1, f_2, \dots сходятся на X к f . По теореме Егорова существует множество $E_{\varepsilon/2} \subset X$ такое, что $\mu(E_{\varepsilon/2}) < \varepsilon/2$ и f_k сходятся равномерно к f на $X \setminus E_{\varepsilon/2}$. По доказанному для каждой f_k найдется такое множество $F_\varepsilon^k \subset X$, что $\mu(X \setminus F_\varepsilon^k) < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ и $f_k(x)$ непрерывны на F_ε^k . На множестве

$$A_\varepsilon = X \setminus (E_{\varepsilon/2} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus F_\varepsilon^k))$$

функции $f_k(x)$ непрерывны и последовательность f_1, f_2, \dots сходится к f равномерно, т. е. $f(x)$ непрерывна на A_ε . Далее,

$$\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon,$$

что и требовалось.

§ 3. ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА

В настоящем параграфе строится интеграл Лебега по абстрактной мере.

Определение 8. Вещественная функция $s(x)$, определенная на множестве X , называется *простой*, если множество значений функции s конечно.

Пусть множество значений функции s состоит из различных чисел c_1, c_2, \dots, c_n и

$$E_i = \{x : s(x) = c_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда очевидно, что простая функция $s(x)$ представляется как линейная комбинация (конечная) характеристических функций $X_{E_i}(x)$ множеств $E_i, i = 1, 2, \dots, n$, т. е.

$$s(x) = \sum_{i=1}^n c_i X_{E_i}(x), \quad X_{E_i}(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_i, \\ 0, & x \notin E_i. \end{cases}$$

Следующая лемма об аппроксимации простыми функциями будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть f — вещественная функция, определенная на множестве X . Тогда существует последовательность $\{s_n(x)\}$ простых функций такая, что $s_n(x) \rightarrow f(x)$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $x \in X$. Если f измерима, то существует последовательность измеримых функций $\{s_n(x)\}$, сходящаяся поточечно к $f(x)$. Если $f \geq 0$, то последовательность $\{s_n\}$ можно считать монотонно возрастающей. Последовательность $\{s_n\}$ сходится к f равномерно, если f ограничена.

Если $f \geq 0$ *, то положим

$$E_{ni} = \left\{ x : \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{i}{2^n} \right\}, \quad F_n = \{x : f(x) \geq n\},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2, \dots, n \cdot 2^n.$$

Положим

$$s_n = \sum_{i=1}^{n \cdot 2^n} \frac{i-1}{2^n} X_{E_{ni}} + n X_{F_n}.$$

Очевидно, что s_n удовлетворяют всем условиям теоремы для функций $f \geq 0$. Действительно, зафиксируем $x = x_0$ и рассмотрим случай $f(x_0) < \infty$:

$$|f(x_0) - s_n(x_0)| \leq \left| f(x_0) - \frac{i-1}{2^n} \right| + n X_{F_n}(x_0).$$

* В случае произвольной функции $f(x)$ следует воспользоваться представлением $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$.

если
$$\frac{j-1}{2^n} \leq f(x_0) < \frac{j}{2^n},$$
 т. е.

$$|f(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{1}{2^n} + nX_{F_n}(x_0) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

так как если $f(x_0) < \infty$, то при n , достаточно большом ($n \geq N$), $f(x_0) < n$ и, значит, $x_0 \in F_n$, $X_{F_n}(x_0) = 0$, $n \geq N$. Очевидно так-

же, что при $n \rightarrow \infty$ мы всегда можем добиться того, чтобы $\frac{j-1}{2^n} \leq$

$\leq f(x_0) < \frac{j}{2^n}$ при некотором j , $1 \leq j \leq n \cdot 2^n$. Если f ограничена на множестве X , то величина $nX_{F_n}(x) = 0$ для всех $x \in X$ при достаточно большом n , поэтому согласно проведенной выше оценке стремление $s_n(x)$ к $f(x)$ будет происходить равномерно относительно $x \in X$. Если же в точке x_0 $f(x_0) = +\infty$, то, очевидно, и $s_n(x_0) \rightarrow +\infty$, так как в этом случае $X_{F_n}(x_0) = 1$. Последовательность $s_n(x)$ по своему построению монотонно возрастающая.

Если функция f измерима, то все множества E_{n_i} , F_n измеримы, поэтому измеримы и функции $X_{E_{n_i}}$, X_{F_n} и их комбинации.

1. Определение интеграла Лебега

Мы определим *) интегрирование функций на измеримом пространстве X с σ -кольцом \mathcal{K} и мерой μ .

Определение 9. Пусть $s(x) = \sum_{i=1}^n c_i X_{E_i}(x)$, $x \in X$, $c_i > 0$ — измеримая, простая неотрицательная функция. Пусть множество $E \in \mathcal{L}(X)$, т. е. множество E измеримо. *Интегралом Лебега по множеству E такой простой функции называется число*

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i).$$

Если функция f измерима, $f \geq 0$, то *интегралом Лебега функции f по измеримому множеству E относительно меры μ называется число*

$$\int_E f d\mu = \sup_s I_E(s),$$

где верхняя грань берется по всем простым функциям s таким, что $0 \leq s \leq f$. Число $\int_E f d\mu$ может быть равно и бесконечности.

* Данная схема построения интеграла Лебега изложена в книге: Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1977.

Если f — простая функция, то $\int_E f d\mu = I_E(f)$. Действительно, но, $\int_E f d\mu \geq I_E(f)$. Покажем, что

$$\int_E f d\mu \leq I_E(f).$$

Пусть s — простая функция, отличная от f : $0 \leq s \leq f$. Возьмем какое-нибудь $E_i = \{x : f(x) = c_i\}$ и рассмотрим интегралы от f и s по $E \cap E_i$. Тогда, если $E_{ji} = \{x \in E_i : s(x) = k_{ji}\}$, $\bigcup_j E_{ji} = E \cap E_i$, то $I_{E_i}(f) = c_i \mu(E \cap E_i)$,

$$I_{E_i}(s) = \sum_j k_{ji} \mu((E \cap E_i) \cap E_{ji}).$$

Имеем

$$I_{E_i}(s) \leq \max_j k_{ji} \sum_{j=1}^m \mu((E \cap E_i) \cap E_{ji}) \leq c_i \sum_{j=1}^m \mu((E \cap E_i) \cap E_{ji}).$$

Но

$$(E \cap E_i) \cap E_{ji} \cap (E \cap E_i) \cap E_{ki} = \emptyset \text{ при } j \neq k.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^m \mu((E \cap E_i) \cap E_{ji}) = \mu\left(\bigcup_j (E \cap E_i) \cap E_{ji}\right).$$

Далее,

$$\bigcup_{j=1}^m (E \cap E_i) \cap E_{ji} = E \cap E_i.$$

Следовательно,

$$I_{E_i}(s) \leq c_i \mu(E \cap E_i) = I_{E_i}(f).$$

Таким образом, если $s \leq f$, то

$$I_E(s) \leq I_E(f), \quad \sup_s I_E(s) \leq I_E(f), \quad \int_E f d\mu \leq I_E(f).$$

Отсюда и следует равенство $\int_E f d\mu = I_E(f)$, если f — простая функция.

Определение 10. Интегралом Лебега произвольной функции f по измеримому множеству E называется число

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu,$$

если хотя бы один из интегралов справа конечен.

Определение 11. Функция f называется интегрируемой (или суммируемой) по Лебегу на измеримом множестве E по мере μ , если оба интеграла $\int_E f^+ d\mu$, $\int_E f^- d\mu$ конечны. Класс интег-

рируемых по Лебегу на множестве E по мере μ функций будем обозначать $L^1(\mu)$.

Следует подчеркнуть, что при данных определениях интеграл Лебега от функции может быть определен и равняться $+\infty$ или $-\infty$, но функция может не быть интегрируемой по Лебегу. Функция интегрируема по Лебегу только тогда, когда ее интеграл по этому множеству конечен.

2. Свойства интеграла Лебега

Докажем следующие свойства интеграла Лебега.

Свойство 1. Если функция f измерима и ограничена ($|f| \leq K$) на множестве E и $\mu(E) < +\infty$, то f интегрируема в смысле Лебега по множеству E , т. е. $f \in L^1(\mu)$.

Если $f \geq 0$ — простая, измеримая, ограниченная функция, то

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= I_E(f) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) \leq K \cdot \sum_{i=1}^n \mu(E \cap E_i) = \\ &= K \cdot \mu\left(\bigcup_{i=1}^n E \cap E_i\right) \leq K \cdot \mu(E) < \infty, \quad (f \leq K). \end{aligned}$$

Если же f — простая и меняет знак, то утверждение следует из представления

$$f = f^+ - f^-.$$

Таким образом, для простых функций все доказано. В общем случае для $f \geq 0$ оно следует из того, что $\int_E f d\mu = \sup_s I_E(s)$, где s — простые функции такие, что $0 \leq s \leq f$, а поэтому s ограничены одним и тем же числом K ($f \leq K$), следовательно, $I_E(s)$ ограничены одним и тем же числом $K \cdot \mu(E)$. Представление $f = f^+ - f^-$ заканчивает доказательство.

Свойство 2. Если f измерима на E , $\mu(E) < +\infty$ и $a \leq f(x) \leq b$, то

$$a \cdot \mu(E) \leq \int_E f d\mu \leq b \cdot \mu(E).$$

Утверждение следует из свойства 1:

$$f(x) \leq b, \quad -f(x) \leq -a.$$

Свойство 3. Если f и $g \in L^1(\mu)$ и если $f(x) \leq g(x)$ для всех $x \in E$, то

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

Для простых функций неравенство проверяется непосредственно. Пусть f и g неотрицательны. Тогда

$$\int_E f d\mu = \sup_s I_E(s), \quad s \leq f,$$

$$\int_E g d\mu = \sup_t I_E(t), \quad t \leq g,$$

s, t — простые функции. Поскольку $s \leq f \leq g$, то ясно, что $\sup_s I_E(s) \leq \sup_t I_E(t)$. В общем случае надо воспользоваться представлениями

$$f = f^+ - f^-, \quad g = g^+ - g^-, \quad f^+ \leq g^+, \quad g^- \leq f^-.$$

Свойство 4. Если $f \in L^1(\mu)$, то $cf \in L^1(\mu)$ на E , для любого числа c , не равного бесконечности, и

$$\int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu.$$

Свойство 4 следует из аналогичного свойства для простых функций взятием верхней грани.

Свойство 5. Если $\mu(E) = 0$, а f — измерима, то

$$\int_E f d\mu = 0.$$

Из определения интеграла Лебега для простых функций получаем, что

$$I_E(s) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i) = 0.$$

Поэтому для $f \geq 0$ имеем, что

$$\int_E f d\mu = \sup_s I_E(s) = 0, \quad s \leq f.$$

Таким образом,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu = 0,$$

что и требовалось.

Свойство 6. Если $f \in L^1(\mu)$ на E , $A \in \mathcal{F}(X)$ (измеримо), $A \subset E$, то $f \in L^1(\mu)$ на A .

Если $f \geq 0$ — простая функция на E , то для ее сужения \hat{f} на A справедливо:

$$I_A(\hat{f}) = \sum_{i=1}^n c_i \mu(A \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^n c_i \mu(E \cap E_i),$$

где

$$A_i = \{x \in A : \hat{f}(x) = c_i\}.$$

Пусть теперь $f \geq 0$ — произвольная функция, $f \in L^1(\mu)$, тогда $\sup_{\hat{s} \leq \hat{f}} I_A(\hat{s}) \leq \sup_{s \leq f} I_E(s)$, где \hat{s}, \hat{f} — сужения функций s и f на $\hat{A} \subset E$. Как и выше, доказательство заканчивает представление $f = f^+ - f^-$.

Докажем теперь основные теоремы теории интеграла Лебега.
Теорема 3. Пусть f измерима и неотрицательна на множестве X . Для $A \in \mathcal{L}(X)$ определим $\varphi(A) = \int_A f d\mu$. Тогда функция φ — счетно-аддитивная функция на $\mathcal{L}(X)$. То же верно, если $f \in L^1(\mu)$ на X .

Мы должны показать, что $\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, если $A_n \in \mathcal{L}(X)$ для всех n , $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Если f — характеристическая функция, то счетная аддитивность функции φ следует из счетной аддитивности меры μ . Действительно,

$$\int_A X_E d\mu = \mu(A \cap E).$$

Если f — простая функция, т. е.

$$f = \sum_{i=1}^m c_i X_{E_i}(x),$$

то

$$\varphi(A) = \int_A f d\mu = I_A(f) = \sum_{i=1}^m c_i \mu(A \cap E_i).$$

В силу счетной аддитивности μ получаем, что

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Далее, для каждой простой измеримой функции s такой, что $0 \leq s \leq f$, имеем

$$I_A(s) = \int_A s d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} s d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n),$$

поскольку $s \leq f$.

Поэтому

$$\varphi(A) = \sup_{0 \leq s \leq f} I_A(s) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Докажем обратное неравенство.

Если $\varphi(A_n) = +\infty$ при каком-нибудь n , то так как $\varphi(A) \geq \varphi(A_n)$ для всех n , $\varphi(A) = \int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu$. Поэтому пусть $\varphi(A_n) < +\infty$ для любого n . Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем измеримую простую функцию s так, что $0 \leq s \leq f$ и

$$\int_{A_1} s d\mu \geq \int_{A_1} f d\mu - \varepsilon, \quad \int_{A_2} s d\mu \geq \int_{A_2} f d\mu - \varepsilon.$$

Тогда

$$\varphi(A_1 \sqcup A_2) \geq \int_{A_1 \sqcup A_2} s d\mu = \int_{A_1} s d\mu + \int_{A_2} s d\mu \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2) - 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\varphi(A_1 \sqcup A_2) \geq \varphi(A_1) + \varphi(A_2).$$

Поэтому для любого n

$$\varphi(A_1 \sqcup A_2 \sqcup \dots \sqcup A_n) \geq \varphi(A_1) + \dots + \varphi(A_n).$$

Поскольку $A \supset A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n$, то $I_A(s) \geq I_{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n}(s)$ и

$$\sup_s I_A(s) \geq \sup_s I_{A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n}(s),$$

т. е.

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=1}^n \varphi(A_i).$$

Откуда

$$\varphi(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi(A_i).$$

Если f — произвольная функция, то надо рассмотреть представление $f = f^+ - f^-$ и применить доказанное утверждение.

Следствие. Если $B, A \in \mathcal{Z}(X)$, $B \subset A$, $\mu(A \setminus B) = 0$ и функция f измерима, то

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu.$$

В самом деле,

$$A = B \sqcup (A \setminus B), \quad \int_A f d\mu = \int_B f d\mu + \int_{A \setminus B} f d\mu = \int_B f d\mu,$$

поскольку $\mu(A \setminus B) = 0$.

Приведенное следствие показывает, что множествами меры нуль при интегрировании по Лебегу можно пренебречь.

В связи с этим дадим следующее определение.

Определение 12. Если свойство T выполнено для каждого $x \in E \setminus A$ и если $\mu(A) = 0$, то будем говорить, что свойство T выполнено почти всюду на измеримом множестве E , или для почти всех $x \in E$ при заданной мере μ .

Если $\mu(\{x: f(x) \neq g(x)\} \cap E) = 0$, то f эквивалентна g на E , $f \sim g$ на E . Так $f \sim f$; из $f \sim g$ следует, что $g \sim f$; из $f \sim g$, $g \sim h$ следует, что $f \sim h$:

$$\{x: f \neq h\} \subset \{x: f \neq g\} \cup \{x: g \neq h\}.$$

Если $f \sim g$ на E , то для любого $A \subset E$ $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$, если один из этих интегралов существует. Действительно, пусть A' — то множество, где $f \neq g$. Тогда

$$\mu(A') = 0, \quad \int_A f d\mu = \int_{A \setminus A'} f d\mu + \int_{A'} f d\mu = \int_{A \setminus A'} g d\mu + \int_{A'} g d\mu = \int_A g d\mu.$$

Теорема 4. Если $f \in L^1(\mu)$, то и $|f| \in L^1(\mu)$ и

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu.$$

Пусть $E = A \sqcup B$, где $f \geq 0$ на A и $f \leq 0$ на B . Поскольку интеграл Лебега — аддитивная функция множества, то

$$\int_E |f| d\mu = \int_A |f| d\mu + \int_B |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_B f^- d\mu < +\infty.$$

Поэтому $|f| \in L^1(\mu)$. Далее, $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$,

$$\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu, \quad -\int_E f d\mu \leq \int_E |f| d\mu,$$

поэтому $\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$, что и требовалось.

Теорема 5. Пусть функция f измерима на E , $|f| \leq g$, $g \in L^1(\mu)$, тогда $f \in L^1(\mu)$.

Всегда $f^+ \leq g$, $f^- \leq g$, значит, если $0 \leq s \leq f^+$ и s — простая функция, то $s \leq g$, поскольку $\int_E g d\mu = \sup_s \int_E s d\mu < +\infty$, то и $\int_E f^+ d\mu < +\infty$. Аналогично проводятся рассуждения для f^- .

Теорема (Чебышев). Если функция $f(x) \geq 0$ на $A \in \mathcal{F}(X)$, то $\mu\{x: x \in A, f(x) \geq c\} \leq \frac{1}{c} \int_A f d\mu$ для любого числа $c > 0$.

Пусть $A' = \{x : x \in A, f(x) \geq c\}$. Тогда

$$\int_A f d\mu = \int_{A'} f d\mu + \int_{A \setminus A'} f d\mu \geq \int_{A'} f d\mu \geq c\mu(A'),$$

что и требовалось.

Следствие. Если $\int_A |f| d\mu = 0$, то $f = 0$ почти всюду.

По теореме Чебышева

$$\mu \left\{ x : x \in A, |f| \geq \frac{1}{n} \right\} \leq n \int_A |f| d\mu = 0 \text{ для } n = 1, 2, \dots$$

Поэтому

$$\mu \{x : x \in A, f \neq 0\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu \left\{ x : x \in A, |f| \geq \frac{1}{n} \right\} = 0,$$

поскольку

$$\{x : x \in A, f \neq 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ x : x \in A, |f| \geq \frac{1}{n} \right\}.$$

Свойство 5 интеграла Лебега утверждало, что интеграл по множеству нулевой меры равен нулю для измеримой функции f . Справедлива следующая теорема, которая выражает свойство абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Теорема 6. Если функция f интегрируема по мере μ на измеримом множестве E , то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \int_e f d\mu \right| < \varepsilon$$

для любого измеримого $e \subset E$ такого, что $\mu(e) < \delta$.

Если $|f|$ ограничена числом $K < +\infty$, то по доказанному

$$\left| \int_e f d\mu \right| \leq K\mu(e),$$

и утверждение теоремы очевидно. Пусть $E_n = \{x : x \in E, n \leq |f(x)| < n+1\}$, $B_N = \bigcup_{n=0}^N E_n$, $C_N = E \setminus B_N$. Тогда в силу σ -аддитивности интеграла

$$\int_E |f| d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu.$$

Выберем N так, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{E_n} |f| d\mu = \int_{C_N} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2},$$

и пусть

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2(N+1)}.$$

Если теперь $\mu(e) < \delta$, то

$$\left| \int_e f d\mu \right| \leq \int_e |f| d\mu = \int_{e \cap B_N} |f| d\mu + \int_{e \cap C_N} |f| d\mu \leq (N+1)\mu(e) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

3. Предельный переход под знаком интеграла Лебега

Важную роль в анализе играют теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Теорема 7 (теорема о монотонной сходимости). Пусть множество E измеримо и пусть $\{f_n\}$ — такая последовательность измеримых функций, что $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots$, $x \in E$. Пусть f определена равенством

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \text{ для любого } x \in E.$$

Тогда

$$\int_E f_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Используя свойство 3 интеграла Лебега, имеем, что $0 \leq \int_E f_1 d\mu \leq \int_E f_2 d\mu \leq \dots$. Поэтому существует такое α , что $\int_E f_n d\mu \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$; а так как $\int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$, то

$$\alpha \leq \int_E f d\mu.$$

Пусть число $0 < c < 1$ и пусть s — простая измеримая функция такая, что $0 \leq s \leq f$. Пусть $E_n = \{x : f_n(x) \geq cs(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Согласно свойству монотонности последовательности $\{f_n\}$ получаем: $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \dots$ и, поскольку $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, то $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Для любого n имеем, что $\int_E f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq c \int_{E_n} s d\mu$. Пусть $\varphi(E_n) = \int_{E_n} s d\mu$, $\varphi(E) = \int_E s d\mu$. Тогда из непрерывности счетно-аддитивной функции множества следует, что $\varphi(E_n) \rightarrow \varphi(E)$, $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, $\alpha \geq c \int_E s \, d\mu$. Устремим теперь c к единице, тогда $\alpha \geq \int_E s \, d\mu$ и $\alpha \geq \sup_{0 \leq s \leq f} \int_E s \, d\mu = \int_E f \, d\mu$. Таким образом, $\alpha = \int_E f \, d\mu$, т. е. $\int_E f_n \, d\mu \rightarrow \int_E f \, d\mu$, что и требовалось.

Следствие 1. Пусть $f = f_1 + f_2$, где $f_i \in L^1(\mu)$, $i = 1, 2$. Тогда $f \in L^1(\mu)$ и

$$\int_E f \, d\mu = \int_E f_1 \, d\mu + \int_E f_2 \, d\mu.$$

Если $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ и простые, то утверждение следует из определения интеграла для простой функции. Если $f_1 \geq 0$, $f_2 \geq 0$ произвольны, выберем монотонно возрастающие последовательности $\{s'_n\}$, $\{s''_n\}$ неотрицательных измеримых простых функций, сходящихся к f_1 и f_2 соответственно. Пусть

$$s_n = s'_n + s''_n.$$

Тогда

$$\int_E s_n \, d\mu = \int_E s'_n \, d\mu + \int_E s''_n \, d\mu.$$

Устремим теперь $n \rightarrow \infty$ и применим теорему 7 о предельном переходе. Этим доказательство в данном случае закончено.

Пусть теперь $f_1 \geq 0$, $f_2 \leq 0$. Положим

$$A = \{x : f(x) \geq 0\}, \quad B = \{x : f(x) < 0\}.$$

Тогда функции f , f_1 , $-f_2$ неотрицательны на A . Поэтому

$$\int_A f_1 \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A (-f_2) \, d\mu = \int_A f \, d\mu - \int_A f_2 \, d\mu.$$

Аналогично, функции $-f$, f_1 , $-f_2$ неотрицательны на B , так что

$$\int_B (-f_2) \, d\mu = \int_B f_1 \, d\mu + \int_B (-f) \, d\mu,$$

$$\int_B f_1 \, d\mu = \int_B f \, d\mu - \int_B f_2 \, d\mu.$$

В общем случае надо выбрать четыре множества E_i , на каждом из которых f_1 и f_2 сохраняют знак. По доказанному

$$\int_{E_i} f \, d\mu = \int_{E_i} f_1 \, d\mu + \int_{E_i} f_2 \, d\mu, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Следствие 2. Пусть E — измеримое множество. Если $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in E, \quad \text{то} \quad \int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

В самом деле, частичные суммы ряда для $f(x)$ образуют монотонно возрастающую последовательность. Осталось применить предыдущую теорему.

Теорема (Фату). Пусть множество E — измеримо, $\{f_n\}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций и

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \text{для любого } x \in E, \quad n = 1, 2, \dots,$$

тогда

$$\int_E f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Положим $g_n(x) = \inf_{i \geq n} f_i(x)$ для любого $n = 1, 2, \dots$ и $x \in E$.

Тогда g_n измеримы на E и

$$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \dots,$$

$$g_n(x) \leq f_n(x),$$

$$g_n(x) \rightarrow f(x), \quad n \rightarrow \infty.$$

Согласно теореме 7 о предельном переходе получаем, что

$$\int_E g_n d\mu \rightarrow \int_E f d\mu. \quad \text{Поскольку } \int_E g_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu, \quad \text{то } \int_E f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Теорема (теорема Лебега об ограниченной сходимости). Пусть $E \in \mathcal{L}(X)$ и $\{f_n\}$ — последовательность измеримых функций такая, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $x \in E$, $n \rightarrow \infty$. Если существует функция $g \in L^1(\mu)$ такая, что

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad x \in E,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$. Теорема справедлива, если $f_n \rightarrow f$ почти всюду на E .

Заметим, что из теоремы 5 следует, что $f_n \in L^1(\mu)$, а также, что $f \in L^1(\mu)$. По теореме Фату

$$\int_E (f + g) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (f_n + g) d\mu,$$

так как $f_n + g \geq 0$. Поэтому $\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$. Аналогично,

$\int_E (g - f) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E (g - f_n) d\mu$, так как $g - f_n \geq 0$. Следовательно,

$$-\int_E f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\int_E f_n d\mu \right],$$

т. е.

$$\int_E f d\mu \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

Поэтому существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$ и $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$.

Следствие. Если $\mu(E) < +\infty$, последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена на E и $f_n \rightarrow f$ при всех $x \in E$, то

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu.$$

В рассмотренных выше мы предполагали, что f — вещественная функция. Если f — комплексная функция, $f = \varphi_1 + i\varphi_2$, то, как уже говорилось, она измерима; если измеримы φ_1 и φ_2 . Легко видеть, что сумма и произведение комплексных измеримых функций измеримы, модуль комплексной измеримой функции ($|f| = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}$) также измерим.

Комплексная функция f интегрируема по Лебегу на измеримом множестве E ($f \in L^1(\mu)$), если f измерима и $\int_E |f| d\mu < \infty$, при этом по определению

$$\int_E f d\mu = \int_E \varphi_1 d\mu + i \int_E \varphi_2 d\mu.$$

Ясно, что $f \in L^1(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(\mu)$, поскольку $|\varphi_1| \leq |f|$, $|\varphi_2| \leq |f|$, $|f| \leq |\varphi_1| + |\varphi_2|$. Очевидно, что все основные факты теории интеграла для вещественных функций остаются справедливыми и для комплексных функций.

4. Связь интеграла Лебега с интегралом Римана

Важным является вопрос о связи интеграла Лебега с интегралом Римана. Справедлива следующая теорема.

Теорема 8. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ ($f \in R$), то она интегрируема и по Лебегу на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_{[a, b]} f dx = \int_a^b f(x) dx = R \int_a^b f(x) dx.$$

Напомним, что разбиением P отрезка $[a, b]$ называется множество точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Пусть

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad U(P, f) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad L(P, f) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i,$$

$d(P) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ — диаметр разбиения P .

Функция $f(x)$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение P , что $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$. Разбиение P является *измельчением* разбиения P , если каждая точка разбиения P служит точкой разбиения P . Пусть теперь $\{P_k\}$ — такая последовательность разбиений отрезка $[a, b]$, что P_{k+1} — измельчение разбиения P_k и диаметр разбиения P_k стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ ($d(P_k) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$). Пусть

$$U_k(a) = L_k(a) = f(a), \quad U_k(x) \equiv M_i, \quad L_k(x) \equiv m_i, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда $U(P_k, f) = \int_{[a, b]} U_k(x) dx$, $L(P_k, f) = \int_{[a, b]} L_k(x) dx$. Поскольку P_{k+1} — измельчение разбиения P_k , то

$$U_1(x) \geq U_2(x) \geq \dots \geq f(x) \geq \dots \geq L_2(x) \geq L_1(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Положим $U(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} U_k(x)$, $L(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} L_k(x)$.

Пусть теперь $f \in R$. Так как $d(P_k) \rightarrow 0$, то

$$U(P_k, f) \rightarrow R \int_a^b f(x) dx, \quad L(P_k, f) \rightarrow R \int_a^b f(x) dx.$$

В силу теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега имеем

$$\int_{[a, b]} U_k dx \rightarrow \int_{[a, b]} U dx, \quad \int_{[a, b]} L_k dx \rightarrow \int_{[a, b]} L dx.$$

Поэтому

$$\int_{[a, b]} U dx = \int_{[a, b]} L dx = R \int_a^b f(x) dx.$$

Но $L(x) \leq f(x) \leq U(x)$. Следовательно,

$$\int_{[a, b]} L(x) dx \leq \int_{[a, b]} f(x) dx \leq \int_{[a, b]} U(x) dx = \int_{[a, b]} L(x) dx.$$

Поэтому $L(x) = f(x) = U(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Действительно, $\int_{[a, b]} (U - f) dx = \int_{[a, b]} \varphi(x) dx = 0$ и $\varphi(x) \geq 0$. Тогда по следствию из теоремы Чебышева получаем, что $\varphi(x) = 0$ почти всюду. Следовательно, $U = f = L$ почти всюду.

Функции U и L измеримы, поэтому измерима и функция f . Таким образом, $f \in L^1(\mu)$ и

$$\int_{[a,b]} L dx = \int_{[a,b]} f dx = \int_{[a,b]} U dx = R \int_a^b f(x) dx.$$

5. Пространство L^p

Развитый аппарат теории меры и интеграла Лебега позволяет ввести в рассмотрение важный в приложениях класс пространств $L^p(\mu)$, $p \geq 1$. (При $p=1$ получаем пространство $L^1(\mu)$ суммируемых по Лебегу функций.)

Определение 13. Функция $f(x) \in L^p(\mu)$ на измеримом пространстве X со счетно-аддитивной мерой μ , если $f(x)$ измерима и $|f(x)|^p \in L^1(\mu)$.

Заметим, что поскольку при интегрировании по Лебегу множеством меры нуль можно пренебречь, то на самом деле элементами пространства $L^p(\mu)$ являются классы эквивалентных между собой функций (совпадающих почти всюду). Из неравенства Юнга (см. пример 4 п. 1 § 2 гл. I)

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1$$

следует, что если $f \in L^p(\mu)$ и $g \in L^p(\mu)$, $p \geq 1$, то $f+g \in L^p(\mu)$ *) и

$$\left(\int_X |f(x) + g(x)|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X |g(x)|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Если положить $\|f\|_{L^p} = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$, то пространство $L^p(\mu)$, $p \geq 1$ превращается в нормированное пространство с обычными операциями между функциями, а метрика

$$\rho(f, g) = \|f - g\|_{L^p}$$

делает его и метрическим пространством. Аксиомы нормы и расстояния проверяются непосредственно с использованием доказанного неравенства.

Важной является следующая теорема.

Теорема 9. Пространство $L^p(\mu)$, ($p \geq 1$) — полное нормированное (метрическое) пространство.

Пусть $\{f_m\}$ — фундаментальная последовательность:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{L^p} = 0.$$

*) При $p=1$ используется очевидное неравенство: $|f+g| \leq |f| + |g|$.

Докажем, что эта последовательность сходится к элементу из $L^p(\mu)$. Найдем номер N_k такой, чтобы

$$\|f_n - f_m\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}, \quad n, m \geq N_k.$$

Тогда

$$\|f_{N_k} - f_{N_{k+1}}\| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Рассмотрим частичные суммы $s_n(x)$ следующего ряда:

$$f_{N_1} + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)),$$

$$s_n(x) = f_{N_1} + \sum_{k=1}^n (f_{N_{k+1}}(x) - f_{N_k}(x)) = f_{N_{n+1}}(x).$$

Докажем, что введенный выше ряд сходится абсолютно почти всюду.

Выберем произвольную функцию $g(x) \in L^q(\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда в силу легко устанавливаемого неравенства *)

$$\int_X |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q},$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1, \quad q > 1,$$

получаем соотношение

$$\int_X |g \cdot (f_{N_{k+1}} - f_{N_k})| d\mu \leq \left(\int_X |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}|^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} <$$

$$< \frac{1}{2^k} \|g\|_{L^q}.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_X |g(f_{N_{k+1}} - f_{N_k})| d\mu < \|g\|_{L^q}.$$

Применяя следствие 2 теоремы 7, поменяем местами суммирование и интегрирование. В результате получим, что

$$\int_X F(x) d\mu < \infty, \quad F(x) \geq 0 \text{ на } X,$$

*) Это неравенство устанавливается так же, как и соответствующее неравенство для L^p (см. § 2 гл. I).

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |g(f_{N_{k+1}} - f_{N_k})|.$$

Следовательно, $F(x) < +\infty$ почти всюду на X . Отсюда уже следует, что ряд

$$|f_{N_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| < +\infty$$

почти всюду. В противном случае, выбирая g отличной от нуля на множестве положительной меры (там, где ряд расходится), мы бы пришли к противоречию с тем, что $F(x) < +\infty$ *). Поскольку $s_n(x) = f_{N_{n+1}}(x)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{N_{n+1}}(x) = f(x)$$

существует почти всюду. Покажем, что так определенная функция $f(x)$, во-первых, принадлежит $L^p(\mu)$ и, во-вторых, есть предел по норме $L^p(\mu)$ исходной последовательности $\{f_m(x)\}$.

В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ и $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\|f_{N_m} - f_{N_n}\|_{L^p} \leq \varepsilon, \quad N_n, N_m \geq N(\varepsilon).$$

Тогда по теореме Фату

$$\|f - f_{N_n}\|_{L^p} \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \|f_{N_m} - f_{N_n}\|_{L^p} \leq \varepsilon, \quad N_n > N(\varepsilon)$$

Таким образом,

$$f - f_{N_n} \in L^p(\mu), \quad f = (f - f_{N_n}) + f_{N_n} \in L^p(\mu).$$

Запишем неравенство:

$$\|f - f_m\|_{L^p} \leq \|f - f_{N_n}\|_{L^p} + \|f_{N_n} - f_m\|_{L^p}.$$

Выберем m и N_n столь большими, чтобы каждое слагаемое в правой части не превосходило $\varepsilon/2$. Тогда $\|f - f_m\|_{L^p} \leq \varepsilon$ и, следовательно, f_m стремится к f по норме L^p .

В различных разделах анализа часто используется утверждение о том, что в пространстве $L^p(\mu)$, $X \in \mathbb{R}^n$, $\mu(X) < \infty$ непрерывные функции образуют всюду плотное множество. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что любой элемент пространства $L^p(\mu)$ может быть с любой точностью приближен по норме

*) При $p = 1$ можно воспользоваться неравенством

$$\int_X \left[|f_{N_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{N_{k+1}} - f_{N_k}| \right] d\mu \leq \|f_{N_1}\|_{L^1} + 1$$

и отсюда заключить, что этот ряд сходится почти всюду.

$L^p(\mu)$ непрерывной функцией. Покажем сначала, что характеристическую функцию $\chi_M(x)$ измеримого множества M , $\mu(M) < \infty$ можно приблизить непрерывными функциями. Согласно примеру 1 из § 1 этой главы для данного множества M существуют замкнутое множество F_M и открытое G_M такие, что

$$F_M \subset M \subset G_M, \quad \mu(G_M) - \mu(F_M) < \varepsilon.$$

Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\rho(x, X \setminus G_M)}{\rho(x, X \setminus G_M) + \rho(x, F_M)},$$

где $\rho(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A . Эта функция $f_\varepsilon(x)$ равна 0 при $x \in X \setminus G_M$, равна единице при $x \in F_M$ и непрерывна, так как все входящие в ее определение функции непрерывны и знаменатель нигде не обращается в 0. Функция $|\chi_M(x) - f_\varepsilon(x)| \leq 1$, $x \in G_M \setminus F_M$, и равна 0 вне этого множества. Следовательно,

$$\|\chi_M(x) - f_\varepsilon(x)\|_{L^p} = \left(\int_X |\chi_M(x) - f_\varepsilon(x)|^p d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon^{1/p}.$$

Из доказанного следует, что любую простую измеримую функцию можно аппроксимировать в $L^p(\mu)$ последовательностью непрерывных функций (простая функция есть конечная линейная комбинация характеристических).

Пусть теперь $f \in L^p(\mu)$ и $f \geq 0$, а $\{s_n\}$ — такая монотонно возрастающая последовательность простых неотрицательных измеримых функций, что $s_n(x) \rightarrow f(x)$ при всех x . Далее, $|f - s_n|^p \leq |f|^p$, поэтому по теореме Лебега об ограниченной сходимости $\|f - s_n\|_{L^p} \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$, т. е. s_n стремятся к f в $L^p(\mu)$. Представление $f = f^+ - f^-$ заканчивает доказательство для любой функции $f \in L^p(\mu)$.

Если в изученном нами классе пространств $L^p(\mu)$, $p \geq 1$ положить $p=1$ и $p=2$, то мы приходим к двум важным примерам банаховых пространств $L^1(\mu)$ и $L^2(\mu)$. Пространство $L^1(\mu)$ называется пространством суммируемых функций; определяемая его нормой сходимость называется *сходимостью в среднем*.

Пространство $L^2(\mu)$ состоит из классов эквивалентных функций с интегрируемым квадратом модуля. Сходимость, задаваемая нормой этого пространства, называется *сходимостью в среднем квадратичном*.

Для случая отрезка $X=[a, b]$ и меры Лебега на отрезке оно обычно обозначается $L^2[a, b]$.

§ 4. АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ МНОЖЕСТВ. ТЕОРЕМА РАДОНА—НИКОДИМА

1. Абсолютно непрерывные функции множеств

Пусть на измеримом пространстве (X, K_σ, μ) задана на множествах $A \in K_\sigma$ еще одна σ -аддитивная мера $\nu(A) < \infty$.

Определение 1. Мера $\nu(A)$ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры $\mu(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $\nu(A) < \varepsilon$, как только $\mu(A) < \delta$.

Определение 1'. Мера $\nu(A)$ называется *абсолютно непрерывной* относительно меры $\mu(A)$, если $\nu(A) = 0$, как только $\mu(A) = 0$.

Докажем эквивалентность этих определений.

Пусть $\nu(A)$ — абсолютно непрерывная мера в смысле определения 1. Если $\mu(A) = 0$, то тогда $\nu(A) < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Т. е. $\nu(A) = 0$. Таким образом, $\nu(A)$ абсолютно непрерывна в смысле определения 1'.

Пусть теперь $\nu(A) = 0$, как только $\mu(A) = 0$. Нужно показать, что ν — абсолютно непрерывна в смысле определения 1. Предположим противное. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ и последовательность множеств $A_n \in K_\sigma$ таких, что $\mu(A_n) < 1/2^n$ и $\nu(A_n) \geq \varepsilon_0$.

Положим

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

и

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_n.$$

Имеем $\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$ и $\nu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(E_n)$, поскольку меры μ и ν σ -аддитивны и $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \dots$.

Однако

$$\mu(E_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

а

$$\nu(E_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon_0.$$

Поэтому $\mu(E) = 0$, $\nu(E) \geq \varepsilon_0$, что противоречит определению 1'.

Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Пусть $f(x) \geq 0$ и $f(x) \in L^1(\mu)$.

Положим для $A \in K_\sigma$

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Тогда $\nu(A)$ — пример меры, абсолютно непрерывной относительно меры μ .

Пример 2. Пусть $X = [0, 1]$, K_σ — измеримые по Лебегу множества, μ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$. Определим меру $\nu(A)$ следующим образом:

$$\nu(A) = \begin{cases} 1, & \text{если } \frac{1}{2} \in A, \\ 0, & \text{если } \frac{1}{2} \notin A. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $\nu(A)$ — аддитивная мера и $\nu(\{1/2\}) = 1$.

Поэтому $\nu(A)$ не является абсолютно непрерывной мерой относительно меры Лебега.

2. Теорема Радона — Никодима

Докажем следующую лемму.

Лемма. Пусть $\nu(A)$ — мера, абсолютно непрерывная относительно меры μ . Если $\nu(X) \neq 0$, то существует функция $f(x) \geq 0$, не эквивалентная нулю, $f(x) \in L^1(\mu)$ и

$$\nu(A) \geq \int_A f d\mu$$

для любого $A \in \mathcal{K}_\sigma$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Положим $f_0(x) \equiv \varepsilon$. Рассмотрим все множества $A \in \mathcal{K}_\sigma$ такие, что

$$\nu(A) < \int_A f_0 d\mu.$$

Пусть $\lambda_1 = \sup \mu(A)$ по всем таким множествам A . Рассмотрим два случая:

$$a) \lambda_1 = \mu(X);$$

$$b) \lambda_1 < \mu(X).$$

Покажем, что во втором случае искомая функция $f(x)$ найдется.

Выберем A_1 так, чтобы $\mu(A_1) > \lambda_1/2$. На $X \setminus A_1$ рассмотрим снова все множества $A \in \mathcal{K}_\sigma$, для которых

$$\nu(A) < \int_A f_0 d\mu.$$

Пусть $\lambda_2 = \sup \mu(A)$ по всем таким множествам A . Покажем, что

$$\lambda_2 \leq \lambda_1/2.$$

Действительно, если бы $\lambda_2 > \lambda_1/2$, тогда существовало бы множество A' такое, что

$$\nu(A') < \int_{A'} f_0 d\mu,$$

$$\mu(A') > \frac{\lambda_1}{2}.$$

Тогда $\mu(A' \cup A_1) > \lambda_1$ и

$$\nu(A' \cup A_1) < \int_{A' \cup A_1} f_0 d\mu,$$

что противоречит выбору числа λ_1 .

Выберем множество A_2 так, чтобы $\mu(A_2) > \lambda_2/2$, и продолжим этот процесс до бесконечности. Получим последовательность чисел $\{\lambda_n\}$ и множеств $\{A_n\}$ таких, что

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_n/2,$$

$$\mu(A_n) > \lambda_n/2$$

и $\lambda_n = \sup \mu(A)$, где верхняя грань берется по всем множествам $A \in K_0$, $A \subset X \setminus A_1 \setminus A_2 \setminus \dots \setminus A_{n-1}$ таким, что

$$\nu(A) < \int_A f_0 d\mu.$$

Из этих условий следует, что

$$\lambda_{n+1} \leq \lambda_1/2^n.$$

Пусть $E = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$. Докажем, что для любого множества $A \subset X \setminus E$ такого, что $\mu(A) > 0$, выполняется неравенство

$$\nu(A) \geq \int_A f_0 d\mu.$$

Действительно, если бы для некоторого A_0 выполнялись неравенства

$$\nu(A_0) < \int_{A_0} f_0 d\mu \text{ и } \mu(A_0) > 0, A_0 \subset X \setminus E,$$

то это означало бы, что при любом n

$$\lambda_n \geq \mu(A_0).$$

Это соотношение противоречит неравенству $\lambda_{n+1} \leq \lambda_1/2^n$. Заметим, далее, что $\mu(E) \leq \lambda_1 < \mu(X)$, поскольку

$$\nu(E) < \int_E f_0 d\mu.$$

Поэтому функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E, \\ f_0(x), & x \notin E \end{cases}$$

не эквивалентна 0. Очевидно, что $f(x) \geq 0$, $f(x) \in L^1(\mu)$.

Пусть $A \in K_0$ — произвольное измеримое множество. Тогда

$$\nu(A) = \nu(A \cap E) + \nu(A \setminus E) \geq \nu(A \setminus E) \geq \int_{A \setminus E} f d\mu = \int_A f d\mu.$$

Итак, во втором случае искомая функция $f(x)$ найдется.

Если же $\lambda_1 = \mu(X)$, то существует последовательность множеств $A_n \in K_\sigma$, $\mu(A_n) \rightarrow \mu(X)$ и таких, что

$$\nu(A_n) \leq \int_{A_n} f_0 d\mu = \varepsilon \mu(A_n).$$

В силу абсолютной непрерывности меры ν

$$\nu(X \setminus A_n) \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда

$$\nu(X) \leq \varepsilon \mu(X).$$

Поэтому, если $\varepsilon < \nu(X)/\mu(X)$, то случай а) невозможен.

Лемма доказана.

Пусть, как и выше, (X, K_σ, μ) — измеримое пространство. Докажем следующую важную теорему.

Теорема (Радон—Никодим). Пусть $\nu(A)$ — мера, абсолютно непрерывная по мере μ . Тогда существует функция $f(x) \in L^1(\mu)$, $f(x) \geq 0$ и такая, что

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

для любого множества $A \in K_\sigma$. (Функцию f можно назвать производной меры ν по мере μ .)

Пусть F^+ — множество всех функций $f(x) \in L^1(\mu)$, $f(x) \geq 0$ и

$$\int_A f d\mu \leq \nu(A)$$

для любого $A \in K_\sigma$. Пусть

$$M = \sup_{f \in F^+} \int_X f d\mu$$

и $f_n(x)$ таковы, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = M.$$

Положим

$$g_n(x) = \max[f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)].$$

Для любого $A \in K_\sigma$

$$\int_A g_n d\mu \leq \nu(A).$$

Действительно, множество A можно представить в виде $\bigcup_{k=1}^n A_k$, где A_k не пересекаются и $g_n(x) = f_k(x)$ при $x \in A_k$. Поэтому

$$\int_A g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} g_n d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f_k d\mu \leq \sum_{k=1}^n \nu(A_k) = \nu(A).$$

Положим

$$f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x),$$

который существует для почти всех (по мере μ) $x \in X$ по теореме о монотонной сходимости. Тогда

$$\int_X f_0 d\mu = M$$

и

$$\int_A f_0 d\mu \leq \nu(A) \text{ для } A \in K_\sigma.$$

Покажем, что

$$\nu(A) - \int_A f_0 d\mu = 0.$$

Действительно, $\lambda(A) = \nu(A) - \int_A f_0 d\mu$ — мера, абсолютно непрерывная относительно μ . Если $\lambda(A) \neq 0$, то согласно лемме существует $f(x) \geq 0$, не равная нулю почти всюду, $f \in L^1(\mu)$ и такая, что

$$\lambda(A) - \int_A f d\mu \geq 0.$$

То есть $f + f_0 \in F^+$ и $\int_X (f + f_0) d\mu > M$. Данное противоречие доказывает теорему.

§ 5. ПРЯМОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР. ТЕОРЕМА ФУБИНИ

В различных вопросах анализа большую роль играют теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (или многократных интегралов к повторным). В случае кратных интегралов Лебега основополагающей в этом вопросе является теорема Фубини.

1. Прямое произведение мер

Если Y_1, Y_2, \dots, Y_n — системы подмножеств множеств X_1, X_2, \dots, X_n , то

$$Y = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n = \prod_{k=1}^n Y_k$$

обозначает систему подмножеств множества

$$X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \prod_{k=1}^n X_k,$$

представимых в виде

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{k=1}^n A_k,$$

где $A_k \in Y_k$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение. Если $P_1(X_1), P_2(X_2), \dots, P_n(X_n)$ — полукольца, то и $P(X) = P_1(X_1) \times P_2(X_2) \times \dots \times P_n(X_n) = \prod_{k=1}^n P_k(X_k)$ есть полукольцо.

Для простоты рассмотрим случай $n=2$. Пусть $A, B \in P(X)$. Если $A = A_1 \times A_2, B = B_1 \times B_2$, где $A_i, B_i \in P_i(X_i), i=1, 2$, то

$$A \cap B = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in P_1(X_1) \times P_2(X_2) = P(X).$$

Пусть дополнительно $B_1 \subset A_1, B_2 \subset A_2$, тогда существуют множества $B_1^{(i)} \in P_1(X_1), B_2^{(j)} \in P_2(X_2), i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m$ такие, что

$$A_1 \setminus B_1 = \bigcup_{i=1}^n B_1^{(i)}, A_2 \setminus B_2 = \bigcup_{j=1}^m B_2^{(j)}.$$

Поэтому

$$(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m (B_1^{(i)} \times B_2^{(j)}),$$

где

$$B_1^{(i)} \times B_2^{(j)} \in P_1(X_1) \times P_2(X_2).$$

Заметим, что из того, что системы $K_1(X_1), K_2(X_2), \dots, K_n(X_n)$ — кольца, еще не вытекает, вообще говоря, что их произведение будет кольцом.

Пусть $P_1(X_1)$ и $P_2(X_2)$ — два полукольца, а μ и ν — меры на $P_1(X_1)$ и $P_2(X_2)$. Рассмотрим полукольцо $P(X) = P_1(X_1) \times P_2(X_2)$ и определим на нем функцию $\mu \times \nu$, полагая $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$. Эта функция, как можно убедиться, аддитивна и называется произведением мер μ и ν .

Докажем следующую лемму.

Лемма. Если меры μ и ν счетно-аддитивны, то этим свойством обладает и мера $\mu \times \nu$.

Для любого множества $C = A \times B$ из полукольца $P_1(X_1) \times P_2(X_2)$ определим функцию

$$f_C(x_1) = X_A(x_1) \nu(B),$$

где $X_A(x_1)$ — характеристическая функция множества A . Пусть $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k, C_k \in P(X) = P_1(X_1) \times P_2(X_2)$. Из счетной аддитив-

ности меры ν вытекает, что

$$f_C(x_1) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{C_k}(x_1).$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости следует равенство

$$\int_X f_C d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_X f_{C_k} d\mu.$$

Поэтому

$$(\mu \times \nu)(C) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(C_k),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим отображение $C \rightarrow f_C$, определенное по правилу

$$f_C(x_1) = X_A(x_1) \cdot \nu(B), \quad C = A \times B.$$

Распространим его на минимальное кольцо $K_0(X)$, содержащее полукольцо $P(X)$ по правилу

$$f_{\bigcup_{k=1}^n C_k} = \sum_{k=1}^n f_{C_k}.$$

Заметим, что если $C_1 = A_1 \sqcup B$, $C_2 = A_2 \sqcup B$, где $B = C_1 \cap C_2$, то $f_{C_1} - f_{C_2} = f_{A_1} - f_{A_2}$, $f_{C_1 \Delta C_2} = f_{A_1} + f_{A_2}$.

Поэтому

$$\left| \int_X (f_{C_1} - f_{C_2}) d\mu \right| \leq \|f_{C_1} - f_{C_2}\|_{L^1(\mu)} \leq (\mu \times \nu)(C_1 \Delta C_2) = \rho(C_1, C_2).$$

Поэтому отображение $C \rightarrow f_C$ продолжается до отображения всей σ -алгебры измеримых по мере $(\mu \times \nu)$ множеств из $\mathcal{L}(X_1 \times X_2)$ в пространство $L^1(\mu)$ суммируемых по мере μ на X_1 функций по формуле

$$f_{\lim_n C_n} = \lim_n f_{C_n},$$

где первый предел берется в $\mathcal{L}(X_1 \times X_2)$, а второй — в $L^1(\mu)$. Действительно, приведенные выше неравенства дают оценку расстояния $\rho(f_{C_1}, f_{C_2})$ в пространстве $L^1(\mu)$ через расстояние в пространстве $\mathcal{L}(X_1 \times X_2)$ измеримых функций. Поэтому предельные переходы можно делать, и отображение $C \rightarrow f_C$ продолжается на всю σ -алгебру.

Справедливы следующие леммы.

Лемма. Пусть множество $C \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2)$. Тогда для почти всех $x \in X_1$ множество $C_x \subset X_2$, задаваемое формулой $C_x = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in C\}$, измеримо по мере ν и $\nu(C_x) = f_C(x_1)$.

Для множеств, составляющих минимальное кольцо $K_0(X)$, $X = X_1 \times X_2$, это следует из определения f_C .

Если $\{C^{(n)}\}$ — монотонная последовательность множеств^{*)}, то в силу счетной аддитивности меры ν справедливо соотношение

$$\nu(\lim_n C_{x_1}^{(n)}) = \lim_n \nu(C_{x_1}^{(n)}).$$

Поэтому равенство $\nu(C_{x_1}) = f_C(x_1)$ остается справедливым при монотонных предельных переходах.

Покажем, что всякое измеримое множество C ($C \in \mathcal{L}(X_1 \times X_2)$) может быть с точностью до множества меры нуль получено из множеств минимального кольца $K_0(X) = K_0(X_1 \times X_2)$ двумя монотонными предельными переходами. Действительно, пусть

$$C_n \in K_0(X_1 \times X_2) \text{ и } \rho(C_n, C) \leq 2^{-n},$$

где аппроксимация берется по мере $\mu \times \nu$. Пусть $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k}$.

Тогда $(\mu \times \nu)(C \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k}) = 0$, $(\mu \times \nu)(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_{n+k} \setminus C) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, т. е.

$(\mu \times \nu)(D \Delta C) = 0$. Поэтому f_C и f_D совпадают почти всюду.

Следовательно, для почти всех $x_1 \in X_1$

$$f_C(x_1) = f_D(x_1) = \nu(D_{x_1}) = \nu(C_{x_1}).$$

Рассмотрим два пространства с мерой (X_1, K_0^1, μ) и (X_2, K_0^2, ν) . Справедлива следующая лемма.

Лемма. Пусть μ и ν — σ -конечные меры, C — измеримое по мере $(\mu \times \nu)$ подмножество в $X_1 \times X_2$. Тогда для почти всех $x_1 \in X_1$ (по мере μ) множество C_{x_1} измеримо по мере ν , функция $f_C(x_1) = \nu(C_{x_1})$ измерима по мере μ и

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_{X_1} f_C d\mu$$

(причем обе части могут одновременно равняться бесконечности).

Если множество C имеет конечную меру, то справедливость леммы следует из утверждения, содержащегося в предыдущей лемме, а также из того, что соотношение $(\mu \times \nu)(C) = \int_{X_1} f_C d\mu$,

сохраняется при переходе к пределу слева в пространстве $\mathcal{L}(X_1 \times X_2)$, а справа — в пространстве $L^1(\mu)$.

Если мера множества C бесконечна, то существует возрастающее семейство подмножеств конечной меры $C_n \subset C$ таких, что $\bigcup C_n = C$ и $(\mu \times \nu)(C_n) \rightarrow \infty$. Тогда

$$f_C(x_1) = \lim_n f_{C_n}(x_1) \text{ и } \int_{X_1} f_{C_n} d\mu = (\mu \times \nu)(C_n) \rightarrow \infty.$$

^{*)} См. гл. I, § 1, п. 1.

Замечание 1. В силу того, что меры μ и ν , а также множества X_1 и X_2 всюду в рассмотрениях входят симметрично, можно записать, что

$$(\mu \times \nu)(C) = \int_{X_2} \mu(C_{x_2}) d\nu,$$

где $C_{x_2} = \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in C\}$. Отсюда следует также, что

$$\int_{X_1} \nu(C_{x_1}) d\mu = \int_{X_2} \mu(C_{x_2}) d\nu.$$

Замечание 2. Если имеется произведение трех пространств с мерой

$$(X_1, K_\sigma^1(X_1), \mu), (X_2, K_\sigma^2(X_2), \nu), (X_3, K_\sigma^3(X_3), \lambda),$$

то аналогично можно записать, что

$$(\mu \times \nu \times \lambda)(C) = \int_{X_1 \times X_2} \lambda(C_{x_1, x_2}) d(\mu \times \nu) = \int_{X_3} (\mu \times \nu)(C_{x_3}) d\lambda,$$

где

$$C_{x_1, x_2} = \{x_3 \in X_3 : (x_1, x_2, x_3) \in C\},$$

$$C_{x_3} = \{(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 : (x_1, x_2, x_3) \in C\}.$$

2. Теорема Фубини

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема (Фубини). Пусть $f(x_1, x_2)$ — суммируемая по мере $(\mu \times \nu)$ функция на произведении пространств $(X_1, K_\sigma^1(X_1), \mu)$ и $(X_2, K_\sigma^2(X_2), \nu)$. Тогда

а) для почти всех $x_1 \in X_1$ (по мере μ) функция $f(x_1, x_2)$ суммируема на X_2 (по мере ν) и ее интеграл по X_2 является суммируемой функцией на X_1 ;

б) для почти всех $x_2 \in X_2$ (по мере ν) функция $f(x_1, x_2)$ суммируема на X_1 (по мере μ), а ее интеграл по X_1 является суммируемой функцией на X_2 ;

в) верны следующие равенства:

$$\int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2) d(\mu \times \nu) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1, x_2) d\nu \right) d\mu = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1, x_2) d\mu \right) d\nu;$$

г) для неотрицательных измеримых по мере $(\mu \times \nu)$ функций из существования одного из повторных интегралов вытекает существование кратного, т. е. суммируемость $f(x_1, x_2)$ на $X_1 \times X_2$.

Рассмотрим случай неотрицательной функции f . Пусть множество $C \subset X_1 \times X_2 \times X_3$, где $X_3 = \mathbf{R}^1$ — числовая ось с обычной мерой Лебега $\lambda = dx_3$, причем

$$C = \{(x_1, x_2, x_3) \in (X_1 \times X_2 \times \mathbf{R}^1) : 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}.$$

Применим к этому случаю соотношения, выписанные в замечании 2. Получим

$$C_{x_1, x_2} = \{x_3 \in \mathbb{R}^1 : 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\}; \quad \lambda(C_{x_1, x_2}) = f(x_1, x_2);$$

$$C_{x_1} = \{(x_2, x_3) \in X_2 \times \mathbb{R}^1 : 0 \leq x_3 \leq f(x_1, x_2)\};$$

$$(\mu \times \lambda)(C_{x_1}) = \int_{X_2} f(x_1, x_2) dv.$$

Отсюда вытекают все утверждения теоремы в случае неотрицательной функции. Разложение $f = f^+ - f^-$ заканчивает доказательство в общем случае.

Примечание. Пусть $K_\sigma(X)$ — некоторое σ -кольцо. Вещественная (или комплексная) функция ν на $K_\sigma(X)$ называется *зарядом* (комплексным зарядом), если она счетно-аддитивна в следующем смысле: для любых $A_k \in K_\sigma(X)$ из того, что $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$

принадлежит $K_\sigma(X)$, следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k)$ сходится и его сумма равна $\nu(A)$.

Понятие заряда является естественным расширением понятия меры, и многие факты, о которых говорилось выше, остаются справедливыми и для зарядов.

ЗАДАЧИ

1. Показать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и пересечения, вообще говоря, не является кольцом.

2. Доказать, что система множеств, замкнутая относительно операций объединения и разности, является кольцом.

3. Обозначим через $X = \{a, b, c\}$ множество, состоящее из трех элементов. Пусть 2^X — множество всех его подмножеств. Описать все полукольца и кольца, которые можно построить из элементов 2^X .

4. Доказать, что мощность множества измеримых по Лебегу подмножеств отрезка $[0, 1]$ больше мощности континуума.

5. Доказать, что всякое измеримое по Лебегу множество на прямой есть объединение борелевского множества и множества меры нуль.

6. Найти меру Лебега подмножества единичного квадрата плоскости, состоящего из точек (x, y) таких, что $|\sin x| < 1/2$, а $\cos(x+y)$ иррационально.

7. Пусть функция f интегрируема по Лебегу на множестве X , $\mu(X) < \infty$. Тогда

$$\int_X f d\mu = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_k \xi_k \mu(\{x \in X, t_k \leq f < t_{k+1}\}),$$

где $T = \{t_k\}$ — разбиение вещественной оси, $d(T)$ — диаметр разбиения, ξ_k — любая точка такая, что $\xi_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Таким образом, интеграл Лебега может быть вычислен как предел интегральных сумм, но, в отличие от интеграла Римана, берется разбиение области значения функции f . Докажите это.

(Утверждение этой задачи остается верным и в случае $\mu(X) = \infty$, если дополнительно предположить, что $\xi_k = 0$ для тех k , для которых отрезок $[t_k, t_{k+1}]$ содержит точку 0.)

8. Пусть φ — монотонно возрастающая гладкая функция на отрезке $[a, b]$, $\psi = \varphi^{-1}$ — обратная к ней.

Рассмотрев интеграл как предел интегральных сумм, доказать, что

$$\int_{[a, b]} \varphi dx = \int_{[\varphi(a), \varphi(b)]} y \psi' dy.$$

9. При каких значениях параметров α и β функция $x^\alpha \sin x^\beta$, определенная на $[0, 1]$, интегрируема по Лебегу.

10. Пусть $f \geq 0$ и измерима на X , $\mu(X) < \infty$. Тогда f суммируема тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \mu(\{x \in X : f \geq 2^k\})$ сходится. Докажите это.

11. Вычислить интеграл Лебега по отрезку $[0, \pi]$ функции

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \sin x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

12. Пусть g — измеримая функция на вещественной оси, f — непрерывная вещественная функция. Показать, что $h = g(f)$, вообще говоря, неизмерима.

13. Пусть f — вещественная функция. При каких n из измеримости $[f]^n$ следует измеримость f ?

14. Пусть f — дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция. Доказать, что f' — измерима по Лебегу.

15. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость следующие последовательности функций:

$$f_n(x) = \frac{nx}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad f_n(x) = x^n, \quad x \in [0, 1].$$

16. Пусть $f_n(x) = \frac{n \sin nx}{1 + n^2 \sin^2 x}$, $x \in [0, \pi]$. Пусть $\delta > 0$ задано. Указать явно множество E_δ такое, что на множестве $[0, \pi] \setminus E_\delta$ $f_n(x)$ сходится равномерно (см. теорему Егорова).