Глава IV

ГЕОМЕТРИЯ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ

Настоящая глава посвящена спектральной теории операторов в гильбертовом и банаховых пространствах. Важнейшими задачами этой теории являются утверждения о приведении изучаемых операторов к так называемому диагональному виду — спектральные теоремы, утверждения о полноте и базисности собственных векторов операторов, о свойствах спектра и собственных значениях. Наиболее изученным классом операторов являются вполне непрерывные операторы и их подклассы — ядерные операторы и операторы Гильберта—Шмидта.

Решение ряда важных задач спектральной теории операторов связано с теорией аналитических функций. Дело в том, что основные объекты, характеризующие спектральную задачу для оператора, такие, как резольвента, характеристический определитель, нулями которого являются собственные значения оператора, и др., являются аналитическими функциями спектрального параметра в определенных областях.

§ 1. ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА

В гл. I и II были изучены топологические, метрические, линейно топологические, нормированные пространства и некоторые свойства операторов (отображений) в них. Наиболее тонкие из приведенных свойств были получены в нормированных и банаховых пространствах. Это вполне закономерно, поскольку эти пространства являются наиболее частным случаем из изученных.

Еще более интересные теоремы будут получены в этой главе при изучении частного случая банахового пространства — гильбертова пространства.

Исторически математики подошли к изучению гильбертова пространства, пользуясь другими соображениями: необходимость его введения диктовала физика, изучение интегральных уравнений, некоторые обобщения свойств конечномерных пространств.

1. Геометрия гильбертова пространства

Дадим сразу основное определение.

Определение 1. *Гильбертовым пространством* называется множество H элементов f, g, h, ..., обладающее следующими свойствами.

1) H представляет собой линейное пространство, т. е. в H определены действия сложения элементов и умножения их на действительные или комплексные числа (в зависимости от этого H называется действительным или комплексным пространством);

2) в H введено *скалярное произведение*, т. е. числовая функция (f, g) от пары аргументов f и g, удовлетворяющая аксиомам:

а) $(af, g) = a(f, g)$ для любого числа a;

б) $(f+g, h) = (f, h) + (g, h)$;

в) $(f, g) = \overline{(g, f)}$, где черта обозначает комплексное сопряжение;

г) $(f, f) > 0$ при $f \neq 0$; $(f, f) = 0$ при $f = 0$;

3) H является полным метрическим пространством относительно расстояния $\rho(f, g) = \|f-g\|$ *), где для любого элемента $h \in H$ его норма определяется из соотношения $\|h\| = (h, h)^{1/2}$.

Приведем некоторые примеры.

Примеры.

1. Простейшим примером гильбертова пространства является конечномерное линейное пространство $\mathbf{R}^n$, если в нем ввести скалярное произведение, удовлетворяющее аксиоме 2 определения 1.

2. Рассмотрим пространство l^2, элементами которого являются последовательности чисел $\{\xi_n\}$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$. В этом пространстве естественно определяются линейные операции: если $\xi, \eta \in l^2$, $\xi = \{\xi_n\}$, $\eta = \{\eta_n\}$, то $\alpha\xi + \beta\eta = \{\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_2 + \beta\eta_2, \ldots\}$, где α и β — некоторые числа.

Введем в этом пространстве скалярное произведение элементов ξ, η по формуле

$$(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \overline{\eta}_n.$$

Согласно неравенству Коши—Буняковского (см. гл. I, § 2, п. 1) имеем

$$|(\xi, \eta)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \overline{\eta}_n\right| \leqslant \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2\right\}^{1/2} \cdot \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^2\right\}^{1/2} < \infty.$$

Поэтому скалярное произведение можно ввести по данному правилу. Нетрудно также убедиться в справедливости всех аксиом скалярного произведения. Согласно задаче 3 § 3 гл. I l^2 — полное пространство.

Таким образом, l^2 — гильбертово пространство.

3. Рассмотрим множество $L^2[a, b]$ интегрируемых с квадратом модуля по Лебегу функций на отрезке $[a, b]$. Поскольку при ин-

---

*) Ниже будет доказано неравенство Коши—Буняковского, из которого будет следовать, что функция $\rho(f, g) = \|f-g\|$ задает расстояние в H.

тегрировании по Лебегу множествами меры нуль можно пренебречь, то на самом деле элементами $L^2[a, b]$ являются классы эквивалентных между собой функций (совпадающих почти всюду).

В этом пространстве можно ввести линейные операции — обычное сложение функций и умножение функции на число.

Скалярное произведение в этом пространстве вводится по правилу

$$(f, g) = \int\limits_{[a, b]} f \cdot \bar{g} dx, \text{ где } f(x),\ g(x) \in L^2[a, b].$$

Из неравенства

$$|f(x) \cdot g(x)| \leqslant \frac{1}{2} \{|f(x)|^2 + |g(x)|^2\}$$

вытекает, что если $f, g \in L^2[a, b]$, то и произведение $f \cdot g$ принадлежит $L^2[a, b]$. Аксиомы скалярного произведения проверяются непосредственно исходя из свойств интеграла Лебега. Таким образом, $L^2[a, b]$ — гильбертово пространство.

4. Из аксиом а) и в), определяющих скалярное произведение, непосредственно следует, что число a может быть вынесено из под знака скалярного произведения, если оно является сомножителем первого аргумента, а также, что число a выносится со знаком комплексного сопряжения, если оно сомножитель второго аргумента скалярного произведения, т. е.

$$(af, g) = a(f, g), \ (f, ag) = \overline{(ag, f)} = \bar{a}(f, g).$$

5. Пусть N — нормированное пространство. Возникает вопрос: каким дополнительным условиям должна удовлетворять норма на N, чтобы она определялась некоторым скалярным произведением? Оказывается, что для этого необходимо и достаточно, чтобы для любых двух элементов f и g выполнялось равенство

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2).$$

В одну сторону это утверждение проверяется непосредственно и очевидно. Для того чтобы показать обратное, необходимо рассмотреть функцию (f, g), заданную по правилу $(f, g) = \frac{1}{4}(\|f + g\|^2 - \|f-g\|^2)$, и показать, что если исходное равенство выполнено, то функция (f, g) удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения.

В гильбертовом пространстве H важное значение имеет неравенство Коши—Буняковского, доказательство которого сейчас будет проведено. Пусть $f, g \in H$, λ — действительное число. Тогда, если положить $h = f + \lambda(f, g)g$, то, поскольку $(h, h) \geqslant 0$, имеем

$$0 \leqslant (h, h) = (f + \lambda(f, g)g,\ \ f + \lambda(f, g)g) =$$
$$= (f, f) + 2\lambda|(f, g)|^2 + \lambda^2|(f, g)|^2(g, g).$$

Следовательно, такой квадратный трехчлен (относительно λ) не может иметь различных действительных корней. Поэтому его дискриминант не является положительным, т. е.

$$|(f, g)|^4-(f, f)|(f, g)|^2(g, g)\leqslant 0.$$

Таким образом (даже в случае $(f, g)=0$),

$$|(f, g)|^2\leqslant (f, f)(g, g),$$

или

$$|(f, g)|\leqslant \|f\|\cdot\|g\|.$$

Полученное неравенство и называется *неравенством Коши—Буняковского.* Знак равенства в нем помимо тривиального случая $f=0$ или $g=0$, достигается только тогда, когда $f=-\lambda(f, g)g$ при некотором значении λ, т. е. когда векторы f и g коллинеарны.

Используя неравенство Коши—Буняковского, легко проверить, что $\|f\|=(f, f)^{1/2}$ и расстояние $\rho(f, g)=\|f-g\|$ удовлетворяют аксиомам нормы и расстояния соответственно.

Для этого фактически необходимо лишь проверить неравенства треугольника $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ и $\rho(f, g)\leqslant\rho(f, h)+\rho(g, h)$ (или, что то же, $\|f-g\|\leqslant\|f-h\|+\|g-h\|$). Но эти неравенства являются следствием неравенства Коши—Буняковского.

Наличие метрики в гильбертовом пространстве позволяет рассмотреть понятия, связанные с предельным переходом.

Отметим, что скалярное произведение (f, g) есть непрерывная функция от обеих переменных f и g. Действительно, имеем по неравенству Коши—Буняковского

$$\begin{aligned}|(f, g)-(f_n, g_n)| &= |(f, g)-(f-k_n, g-h_n)| =\\ &= |(f, h_n)+(k_n, g)-(k_n, h_n)|\leqslant\\ &\leqslant \|f\|\cdot\|h_n\|+\|g\|\cdot\|k_n\|+\|k_n\|\cdot\|h_n\|\to 0,\ n\to\infty,\end{aligned}$$

где

$$g-g_n=h_n,\ f-f_n=k_n,\ f_n\to f,\ g_n\to g,\ n\to\infty.$$

Поэтому $(f_n, g_n)\to(f, g)$ при $f_n\to f$, $g_n\to g$, что и требовалось.

Скалярное произведение позволяет ввести в H понятие *косинуса угла* между двумя отличными от нуля векторами (H — вещественное пространство):

$$\cos(\widehat{f,\ g})=\frac{(f, g)}{\|f\|\cdot\|g\|}.$$

Понятие косинуса угла в свою очередь позволяет назвать два вектора *ортогональными*, если косинус угла между ними равен нулю.

Другими словами, векторы f и g вещественного или комплексного пространства называются ортогональными, если $(f, g)=0$. Для обозначения двух ортогональных векторов используется символ $f\perp g$.

Если M и N — подмножества (подпространства) в H, то символ $M \perp N$ означает, что $f \perp g$ для любых $f \in M$ и $g \in N$.

Заметим, что если вектор f ортогонален векторам $g_1, \ldots, g_n$, то он ортогонален и их линейной комбинации $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$. Если векторы $g_1, \ldots, g_n, \ldots$ ортогональны вектору f и $g = \lim_{n\to\infty} g_n$, то вектор g также ортогонален вектору f.

Действительно, в силу непрерывности скалярного произведения имеем

$$(g, f) = \lim_{n\to\infty} (g_n, f) = 0,$$

что и требовалось.

Из сказанного следует, что совокупность всех векторов, ортогональных векторам $\{f_\alpha\}$, образует замкнутое линейное многообразие, т. е. подпространство *), которое называется *ортогональным дополнением* к множеству $\{f_\alpha\}$.

Если векторы f и g ортогональны, то легко проверяется следующее равенство: $\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = \|f\|^2 + \|g\|^2$ — теорема Пифагора или более общее соотношение:

$$\|f\|^2 = \|f_1\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2, \text{ если } f = f_1 + f_2 + \ldots + f_n,\ f_i \perp f_j,\ i \neq j.$$

В гильбертовом пространстве важную роль играют ортогональные системы векторов. Для получения такой системы применяется метод ортогонализации данной неортогональной системы — метод Шмидта.

Возьмем в H какую-нибудь последовательность элементов $\{f_n\}$, $f_n \neq 0$, каждый из которых линейно независим с предшествующими.

Покажем, что ее можно заменить ортонормированной последовательностью $\{\varphi_n\}$, т. е. такой, что $(\varphi_n, \varphi_k) = \delta_{nk}$, и каждый элемент φ_n представляет собой линейную комбинацию элементов f_m с номерами $m \leqslant n$, и обратно, каждый f_n есть линейная комбинация элементов φ_m, $m \leqslant n$:

$$\varphi_n = c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \ldots + c_{nn} f_n,$$

$$f_n = \gamma_{n1} \varphi_1 + \gamma_{n2} \varphi_2 + \ldots + \gamma_{nn} \varphi_n.$$

Построение будем вести по индукции. Положим $\varphi_1 = f_1/\|f_1\|$, тогда $c_{11}^{-1} = \gamma_{11} = \|f_1\|$. Вычтем из f_2 элемент φ_1 с некоторым числовым множителем, подобранным так, чтобы разность $h_2 = f_2 - \gamma\varphi_1$ была ортогональна вектору φ_1: $(h_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - \gamma(\varphi_1, \varphi_1) = 0$. Следовательно, γ должно быть выбрано равным (f_2, φ_1).

Так как f_2 и f_1, а следовательно, f_2 и φ_1 линейно независимы, то $h_2 \neq 0$ и мы положим $\varphi_2 = h_2/\|h_2\|$. При этом, как легко видеть,

*) Подчеркнем, что всюду подпространство — это замкнутое линейное многообразие.

φ_2 оказывается линейной комбинацией f_2 и f_1; и обратно, f_2 выражается линейно через φ_2 и φ_1. Построение указанной выше системы $\{\varphi_n\}$ легко закончить по индукции.

Дадим следующие определения.

Определение 2. Систему гильбертова (банахова) пространства H мы назовем *полной* в H, если она порождает все пространство, т. е. если произвольный элемент H может быть сколь угодно точно приближен по норме линейными комбинациями элементов этой системы.

Определение 3. Гильбертово пространство H называется *сепарабельным*, если в нем существует счетное всюду плотное множество, т. е. такое множество, замыкание которого по метрике H совпадает со всем пространством H.

Заметим, что если пространство сепарабельно, то в нем, естественно, существует и счетная полная в H система (сами элементы счетного всюду плотного множества образуют и счетную полную систему). Справедливо и обратное утверждение: если существует счетная полная в H система, то пространство H — сепарабельно. Действительно, в этом случае любой вектор можно приблизить линейной комбинацией полной системы, а затем коэффициенты этой линейной комбинации можно приблизить числами с рациональными компонентами, т. е. числами вида $\gamma=\alpha+i\beta$, где α и β— рациональные числа. Множество таких линейных комбинаций будет счетным и всюду плотным в H. Следовательно, H — сепарабельно.

Легко видеть, что если данная система $\{\varphi_n\}$ полна, то в H не существует ни одного вектора, не равного нулю, ортогонального всем векторам системы. Действительно, допустим, что для некоторого вектора $g\neq 0$ выполнены равенства $(g, \varphi_k)=0$ $(k=1, 2, \dots)$. Ортогональное дополнение к вектору g содержит все векторы φ_k, все линейные комбинации этих векторов и замыкание множества линейных комбинаций, т. е. все пространство H. В частности, $(g, g)=0$, откуда $g=0$, что противоречит допущению.

Если система $\{\varphi_n\}$ получена путем ортогонализации некоторой системы $\{f_n\}$, то в силу формул ортогонализации легко видеть, что доказывать полноту системы $\{\varphi_n\}$ можно путем доказательства всюду плотности в H всех линейных комбинаций исходных векторов $\{f_n\}$.

2. Базисы гильбертова пространства

Очень важным вопросом при изучении полных систем $\{e_i\}$ является вопрос о том, образует ли данная система базис сепарабельного пространства, т. е. можно ли любой элемент x из пространства представить в виде $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$ и притом однозначно (здесь ξ_i — числа, а ряд сходится по норме пространства).

Заметим, что данное выше определение базиса пространства сохраняется в точности и для сепарабельных банаховых пространств. Интересно отметить, что, хотя для всех основных сепарабельных банаховых пространств базисы были построены, вопрос о том, существует ли базис в произвольном сепарабельном банаховом пространстве, оказался сложным и был отрицательно решен совсем недавно *).

Отметим, что если система $\{e_i\} \subset E$, где E — банахово пространство, полна и не содержит линейно зависимых элементов, то отсюда еще не следует, что она является базисом. Действительно, возьмем, например, пространство $C\ [0, 1]$. Последовательность $\{t^k\}$, $k=0, 1, \ldots$ по теореме Вейерштрасса полна в этом пространстве, но базисом она не является. Действительно, если функция $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ представлена равномерно сходящимся рядом, то, очевидно, из равномерной сходимости следует аналитичность $f(t)$ при $|t| < 1$. Ясно, что этими функциями не исчерпывается все пространство $C\ [0, 1]$, и потому система $\{t^k\}$, $k=0, 1, \ldots$ не является базисом в $C\ [0, 1]$.

Последовательность $\{t^k\}$ не является также базисом и в гильбертовом пространстве $L^2\ [0, 1]$ (интегрируемых с квадратом по Лебегу функций, $(f, g) = \int\limits_{[0,1]} f\bar{g}\,dx$). Пусть $f \in L^2\,[0, 1]$ и $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$, где ряд сходится в метрике $L^2\ [0, 1]$. Умножим обе части этого равенства на функцию $g(t) = \begin{cases} 1, & t \leqslant s \\ 0, & t > s \end{cases}$ и проинтегрируем. Получим для любого s, $0 \leqslant s \leqslant 1$ равенство

$$\int\limits_0^s f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} s^{k+1},$$

откуда вытекает аналитичность функции $F(s) = \int\limits_0^s f(t)\,dt$ при $|s| < 1$, а значит, и функции $f(t)$ при $|t| < 1$.

Если же пространство гильбертово и сепарабельно, то оказывается, что полная ортонормированная система является базисом. Причем для коэффициентов ξ_i, которые однозначно определяются, верно равенство $\|x\|^2 = \Sigma \|\xi_i\|^2$. В данном случае коэффициенты ξ_i определить легко, поскольку система $\{e_i\}$ ортонормирована, и поэтому из соотношения $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i$ вытекает, что

$$(x, e_k) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,\ e_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,\ e_k\right) = \xi_k.$$

---

*) В 1972 г. М. Энфло построил рефлексивное сепарабельное банахово пространство, в котором базис не существует.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *В сепарабельном гильбертовом пространстве H всякая полная ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ является базисом, т. е. для любого $f \in H$ имеет место разложение*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n) \varphi_n,$$

причем $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ (*равенство Парсеваля*).

Докажем, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ сходится. Составим вектор

$g = \sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n) \varphi_n$, пусть $f = g + h$, где h подлежит определению. Вектор h ортогонален любому из векторов $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ и, следовательно, и их линейной оболочке. Действительно,

$$(h, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - (g, \varphi_j) = (f, \varphi_j) - \left(\sum_{n=1}^{p} (f, \varphi_n) \varphi_n, \varphi_j \right) =$$

$$= (f, \varphi_j) - (f, \varphi_j) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p.$$

По теореме Пифагора

$$\|f\|^2 = \|g\|^2 + \|h\|^2 = \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 + \|h\|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2.$$

Таким образом, $\sum_{n=1}^{p} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2$ при любом p. Переходя к пределу при $p \to \infty$, получим так называемое *неравенство Бесселя:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2 \leqslant \|f\|^2.$$

Положим теперь для сокращения записи $(f, \varphi_n) = \xi_n$. Пусть $s_p = \sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n$. Тогда $\|s_p - s_q\|^2 = \sum_{n=p+1}^{q} |\xi_n|^2$, $q > p$. При $p \to \infty$ эта величина стремится к нулю вследствие сходимости ряда из чисел $|\xi_n|^2$ (см. неравенство Бесселя). Поэтому последовательность $\{s_p\}$ фундаментальна и в силу полноты H сходится: $\lim\limits_{p \to \infty} s_p = s \in H$. Покажем, что $s = f$. Для этого заметим, что при фиксированном k и для всех $p > k$ справедливо соотношение $(s, \varphi_k) = \lim\limits_{p \to \infty} (s_p, \varphi_k) =$

$= \lim\limits_{p \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{p} \xi_n \varphi_n, \varphi_k \right) = \xi_k = (f, \varphi_k)$. Поэтому для любого k имеем, что $(f-s,\ \varphi_k)=(f,\ \varphi_k)-(s,\ \varphi_k)=0$; так как система $\{\varphi_n\}$ полна, то $f=s$, т. е.

$$f=\lim_{p\to\infty} s_p=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n.$$

В силу непрерывности скалярного произведения получаем

$$\|f\|^2=(f,\ f)=(\lim_{p\to\infty} s_p,\ \lim_{p\to\infty} s_p)=\lim_{p\to\infty}(s_p,\ s_p)=\lim_{p\to\infty}\sum_{n=1}^{p}|\xi_n|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2$$

Замечание 1. Если g — любой другой вектор пространства, то, очевидно, $(f,\ g)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f,\ \varphi_n)\cdot\overline{(g,\ \varphi_n)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\cdot\bar{\eta}_n=(\xi,\ \eta)_{l^2}$, где

$\eta_n=(g,\ \varphi_n)$, $g=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\eta_n\varphi_n$, причем $\xi=\{\xi_n\}$, $\eta=\{\eta_n\}\in l^2$.

Замечание 2. Если $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ — любая последовательность чисел такая, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n$ сходится в H. Если обозначить его сумму через f, то, умножая f на φ_k, будем, очевидно, иметь $\xi_k=(f,\ \varphi_k)$. Итак, между всевозможными последовательностями чисел со сходящимся рядом из их квадратов, т. е. пространством l^2, и векторами гильбертова пространства H существует взаимно-однозначное соответствие. Такое соответствие сохраняет, очевидно, и линейные операции. В линейном пространстве, состоящем из последовательностей чисел $\{\xi_n\}$ таких, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$, как было сказано в примере 2, можно ввести скалярное произведение по формуле

$$(\xi,\ \eta)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\cdot\bar{\eta}_n<\infty.$$

Из замечания 1 следует, что взаимно-однозначное соответствие между векторами произвольного сепарабельного гильбертова пространства H и векторами гильбертова пространства l^2 (вектору $f\in H$ ставится в соответствие вектор $\xi=\{\xi_n\}\in l^2$, координаты которого суть коэффициенты Фурье вектора f по ортонормированной системе $\{\varphi_n\}$: $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n\varphi_n$) сохраняет и скалярное произведение, т. е. $(f,g)_H=(\xi,\eta)$

Таким образом, любые два сепарабельных гильбертовых пространства *изоморфны* (взаимно-однозначное соответствие с сохранением линейных операций и скалярного произведения) пространству l^2 и, следовательно, изоморфны между собой; такие пространства мы различать не будем.

В частности, пространство $L^2[a, b]$, элементами которого являются классы эквивалентных между собой интегрируемых с квадратом по Лебегу функций (см. пример 3), является гильбертовым пространством, изоморфным пространству l^2. Скалярное произведение в этом пространстве, как мы знаем, вводится по правилу

$$(f, g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx, \quad f(x), \quad g(x) \in L^2[a, b],$$

$\overline{g(x)}$ означает класс функций, комплексно-сопряженных $g(x)$ (класс совпадающих между собой почти всюду функций).

Пространство $L^2[a, b]$, как мы знаем из рассмотрений гл. III, § 3, является полным пространством. Оно, очевидно, и сепарабельно. Счетным всюду плотным множеством в нем является, например, множество многочленов с рациональными коэффициентами: эти многочлены всюду плотны в $C[a, b]$, а непрерывные функции плотны в $L^2[a, b]$, таким образом, пространства $L^2[a, b]$ и l^2 — изоморфны между собой, и их можно не различать, поскольку они представляют собой различные реализации сепарабельного гильбертова пространства H.

Остановимся сейчас более подробно на свойствах полных ортонормированных систем в сепарабельных гильбертовых пространствах.

Выше отмечалось, что если данная ортонормированная система полна в гильбертовом пространстве H, то не существует ни одного вектора, отличного от нуля, ортогонального всем векторам системы.

Оказывается, справедливо и обратное утверждение. Если задана ортонормированная система $\{\varphi_n\}$ в сепарабельном гильбертовом пространстве H и если она обладает тем свойством, что не существует ни одного не равного нулю вектора, ортогонального всем векторам системы, то данная система полна в H*. Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$ не полна в H, т. е. для нее не выполнено равенство Парсеваля. Поскольку неравенство Бесселя выполнено для любой функции, то невыполнение равенства Парсеваля означает, что существует такой вектор g, что $\|g\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$, $\xi_k = (g, \varphi_k)$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$ сходится, а значит, согласно замечанию 2 после теоремы 1 существует такой вектор $f \in H$, что $(f, \varphi_k)=\xi_k$ и

---

*) Т. е. система $\{\varphi_n\}$ согласно утверждению теоремы 1 является базисом пространства H.

$\sum_{k=1}^{\infty}(f, \varphi_k)\varphi_k = f$. Но тогда $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2$. Вектор $f-g$ ортогонален всем векторам φ_k. Но $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^2 < \|g\|^2$. Поэтому $\|f\|^2 - \|g\|^2 < 0$, тогда и $\|f\| \neq \|g\|$, следовательно, $h = f-g \neq 0$. Таким образом, существует вектор $h \neq 0$, ортогональный всем векторам φ_k, и получилось противоречие с допущением. Итак, доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Для того чтобы ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ была полна в сепарабельном гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало вектора, не равного нулю, ортогонального всем векторам системы $\{\varphi_k\}$.*

3. Размерность гильбертова пространства

Сепарабельное гильбертово пространство, с одной стороны, является линейным пространством и обладает алгебраическим базисом, а с другой стороны, наличие скалярного произведения позволяет рассматривать ортогональный базис. Поэтому понятие размерности гильбертова пространства имеет два различных смысла: размерность, определяемая как мощность множества элементов, составляющих алгебраический базис (*алгебраическая размерность*) и размерность — мощность элементов полной ортонормированной системы $\{\varphi_\alpha\}$. (Ниже показано, что последняя не зависит от выбора ортонормированной системы $\{\varphi_\alpha\}$.) Эта размерность называется *ортогональной размерностью.*

В сепарабельном гильбертовом пространстве, как это следует из теоремы 1, имеется ортогональный базис (имеющий мощность счетного множества *)). Действительно, подвергнув процессу ортогонализации счетную полную в H систему, мы получим снова счетную полную и ортонормированную систему, т. е. базис. С другой стороны, если в H есть ортонормированный базис, то в H имеется и счетное всюду плотное множество. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис, M — совокупность векторов вида $\sum_{k=1}^{n}\gamma_k^{(n)}\varphi_k$, $\gamma_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} + i\beta_k^{(n)}$, $\alpha_k^{(n)}$, $\beta_k^{(n)}$ — рациональные числа. Для любого $h \in H$ любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n, чтобы $\left\| h - \sum_{k=1}^{n}(h, \varphi_k)\varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем числа (h, φ_k) заменить столь близкими к ним числами $\gamma_k^{(n)}$, чтобы $\left\| \sum_{k=1}^{n}\{(h, \varphi_k) - \gamma_k^{(n)}\}\varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, вектор

*) В п. 2 в самом определении базиса пространства предполагалась его счетность.

$f_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^{(n)} \varphi_k$ принадлежит счетному множеству M и с любой точностью аппроксимирует произвольный вектор $h \in H: \|h - f_n\| < \varepsilon$. Поэтому пространство H сепарабельно. Т. е. сепарабельные гильбертовы пространства, и только они, обладают (счетным) ортонормированным базисом.

Мощности любых двух полных ортонормированных систем в сепарабельном пространстве одинаковы. Действительно, то, что сепарабельное пространство обладает счетной ортонормированной системой, показано выше. Если допустить, что имеется еще и несчетная ортонормированная система, то, чтобы с любой точностью приблизить ее элементы, счетного множества окажется недостаточно. Поэтому пространство в этом случае будет несепарабельно, что и приводит к противоречию.

Таким образом, любая полная ортонормированная система в сепарабельном гильбертовом пространстве имеет мощность, равную мощности счетного множества, и сепарабельные гильбертовы пространства называются *счетномерными* (имеется в виду ортогональная размерность). На самом деле, в любом, не обязательно сепарабельном, гильбертовом пространстве все ортонормированные полные системы имеют одинаковую мощность, которая и называется ортогональной размерностью пространства. Доказательство этого факта мы не приводим, а дадим лишь пример несчетномерного гильбертова пространства.

Рассмотрим множество всех функций вида $e^{i\lambda t}$, $-\infty < t < +\infty$, где параметр $\lambda \in \mathbf{R}^1$. Пусть L — линейная оболочка этого множества, т. е. элементы вида $f_M = \sum_{k=1}^{M} a_k e^{i\lambda_k t}$. Определим скалярное произведение двух таких элементов по правилу

$$(f_M, g_N) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f_M \cdot \bar{g}_N dt = \lim_{T\to\infty} \sum_{k,p=1}^{M,N} a_k \bar{b}_p \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{it(\lambda_k - \mu_p)} dt =$$

$$= \sum_{k,p=1}^{M,N} \delta(\lambda_k, \mu_p) a_k \bar{b}_p, \text{ где } \delta(\lambda, \mu) = \begin{cases} 0, & \lambda \neq \mu, \\ 1, & \lambda = \mu. \end{cases}$$

Пополним L в метрике, порождаемой этим скалярным произведением. В результате получим гильбертово пространство H. Это пространство несепарабельно, так как в нем имеется континуум попарно ортогональных векторов. Согласно вышесказанному, размерность этого пространства равна мощности множества действительных чисел, т. е. континууму.

4. Ортогональные разложения в гильбертовом пространстве

Для гильбертова пространства H справедлива следующая важная теорема.

Теорема 2. *Пусть H — гильбертово пространство и L подпространство в H. Для любого вектора $f \in H$ существует разложение $f=g+h$, $g \in L$, $h \perp L$ (т. е. вектор h ортогонален любому вектору из L), при этом g и h определены однозначно.*

Обозначим $d=\inf\limits_{g\in L}\|f-g\|$. Пусть $d=0$, тогда найдется последовательность $g_n \in L$ такая, что $\|f-g_n\|\to 0$, откуда следует, что f — предельная точка для L, а потому, в силу замкнутости L, $f\in L$. Искомое разложение имеет вид $f+0$.

Пусть $d>0$. Рассмотрим последовательность $g_n \in L$, для которой $\|f-g_n\|\to d$. Простой проверкой убеждаемся, что справедливо следующее равенство:

$$2\|f-g_n\|^2+2\|f-g_m\|^2=4\left\|f-\frac{g_n+g_m}{2}\right\|^2+\|g_n-g_m\|^2.$$

При $n, m\to\infty$ левая часть стремится к $4d^2$. Первое слагаемое в правой части $\geqslant 4d^2$, так как $\frac{g_n+g_m}{2}\in L$, $\left\|f-\frac{g_n+g_m}{2}\right\|\geqslant d$. Следовательно, $\|g_n-g_m\|\to 0$. Поэтому последовательность $\{g_n\}$ фундаментальна, а в силу полноты H она сходится: $g=\lim\limits_{n\to\infty} g_n$, причем $g\in L$ в силу замкнутости L в H. Пусть $h=f-g$, тогда $h\perp L$. Действительно, для любого вектора $l\in L$ и любого числа λ

$$\begin{aligned} d^2 &\leqslant \|f-(g-\lambda l)\|^2=\|h+\lambda l\|^2=(h+\lambda l,\ h+\lambda l)=\\ &=d^2+\bar\lambda(h,\ l)+\lambda(l,\ h)+|\lambda|^2\|l\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $\bar\lambda(h,\ l)+\lambda(l,\ h)+|\lambda|^2\|l\|^2\geqslant 0$. Но это возможно при любом λ, лишь если $(h,\ l)=(l,\ h)=0$. Действительно, достаточно положить число $\lambda=t\cdot e^{i\arg(h,\ l)}$, t — вещественно.

Разложение $f=g+h$ единственно. Допустим, что $f=g+h=g'+h'$, где g, g' принадлежат L, а h, $h'\perp L$. Имеем $0=(g-g')+(h-h')$, где $(g-g')\in L$, а $(h-h')\perp L$. В силу теоремы Пифагора $g-g'=h-h'=0$, откуда $g=g'$, $h=h'$.

Совокупность всех векторов h, ортогональных подпространству L, образует (замкнутое) подпространство M, которое называется *ортогональным дополнением* подпространства L.

Таким образом, доказано, что у всякого подпространства $L\subset H$ имеется ортогональное дополнение M, причем для любого вектора $f\in H$ справедливо разложение $f=g+h$, $g\in L$, $h\in M$.

Говорят, что пространство H разложено в прямую сумму подпространств L и M, и записывают $H=L\oplus M$ или $L=H\ominus M$, где символы $\oplus$ и $\ominus$ означают соответственно, что сумма и разность «прямые», т. е. $f=g+h$, $g\in L$, $h\in M$, $g\perp h$ или $g=f-h$, $g\perp h$, и эти представления единственны.

5. Биортогональные последовательности

Пусть в гильбертовом пространстве H даны две последовательности $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 4. Пара последовательностей

$$\{f_k\},\ \{g_k\},\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \infty,$$

из H образует *биортогональную систему*, если

$$(f_j,\ g_k)=\delta_{jk}.$$

Не для всякой линейно независимой последовательности векторов существует биортогональная к ней последовательность. Например, в $L^2[0,\ 1]$ последовательность $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ линейно независима и не имеет биортогональной. Действительно, если бы такая последовательность $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ существовала, то выполнялись бы равенства

$$\int_0^1 g_m(t)\, t^m dt=1,\quad \int_0^1 g_m(t)\, t^k dt=0,\ k\neq m.$$

Но тогда было бы $\int_0^1 \{g_m(t)\, t^{m+1}\}\, t^j dt=0,\ j=0,\ 1,\ \ldots$. Однако на основании полноты системы*) $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ в $L^2[0,\ 1]$ (по теореме Вейерштрасса система $\{t^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $C[0,\ 1]$; непрерывные функции плотны в $L^2[0,\ 1]$) получили бы, что $g_m(t)\, t^{m+1}\equiv 0$, т. е. $g_m(t)\, t^m\equiv 0$, т. е. $\int_0^1 g_m(t)\, t^m dt=0$, что противоречит соотношению $\int_0^1 g_m t^m dt=1$.

Займемся более подробно изучением биортогональных систем.

Докажем один критерий существования у данной системы биортогональной.

Теорема 3. *Последовательность векторов $\{f_k\}$ имеет биортогональную последовательность в том и только том случае, когда ни при каком натуральном j вектор f_j не принадлежит замкнутой линейной оболочке остальных векторов $f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{j-1},\ f_{j+1},\ \ldots$ (Система, удовлетворяющая последнему условию, называется минимальной.) Если система минимальна и полна, то биортогональная к ней определяется единственным образом.*

Достаточность. Пусть система $\{f_k\}$ минимальна. Обозначим замкнутую линейную оболочку векторов $f_1,\ \ldots,\ f_{j-1},\ f_{j+1},\ \ldots$ через M_j, а замкнутую линейную оболочку всех векторов $f_k,\ k=1,\ 2,\ldots$ —

---

*) Т. е. любой элемент f из $L^2[0,\ 1]$ может быть с любой точностью приближен по норме $L^2[0,\ 1]$ линейными комбинациями системы.

через M. По условию при любом натуральном j справедливо соотношение $M_j \neq M$. Пусть $N_j = M \ominus M_j$ — ортогональное дополнение M_j. Возьмем вектор $g_j \in N_j$. Такой вектор g_j, очевидно, существует. Пронормируем его условием

$$(f_j, g_j) = 1.$$

Очевидно, что $(f_j, g_k) = 0$ при $j \neq k$, поскольку $g_k \in N_k$ — ортогональному дополнению к линейной оболочке $\{f_1, f_2, \ldots, f_{k-1}, f_{k+1}, \ldots\}$. Поэтому последовательность $\{g_k\}$ биортогональна к $\{f_k\}$.

Необходимость. Если последовательность $\{g_k\}$ биортогональна к $\{f_k\}$, то при любом j вектор f_j не может принадлежать M_j. Действительно, в этом случае он был бы ортогонален к вектору g_j (поскольку вектор g_j ортогонален $M_j = \{f_1, f_2, \ldots, f_{j-1}, f_{j+1}, \ldots\}$ ввиду биортогональности системы $\{g_k\}$ к $\{f_k\}$: $(g_j, f_k) = 0$, $k \neq j$. Таким образом, получилось бы, что и $(g_j, f_j) = 0$, что невозможно в силу биортогональности системы $\{g_k\}$ к $\{f_k\}$.

Пусть, наконец, система $\{f_k\}$ минимальна и полна. Тогда N_j одномерно (иначе не было бы полноты системы). Элемент g_j в таком случае однозначно определяется условиями $g_j \in N_j$, $(g_j, f_j) = 1$.

Биортогональная система позволяет определять коэффициенты разложения по базису. Действительно, если $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k$, а система $\{g_j\}$ биортогональна к $\{f_k\}$, то $(f, g_j) = c_j$.

Рассмотрим теперь банахово пространство и определим биортогональную последовательность к базису. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ — базис сепарабельного банахова пространства B. Рассмотрим числовые последовательности $y = \{c_1, \ldots, c_n, \ldots\}$ такие, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$ сходится по норме пространства B. Совокупность всех таких последовательностей образует, очевидно, линейное пространство B_1. Введем в нем норму, полагая

$$\|y\| = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|.$$

Выполнение всех аксиом нормы проверяется без труда. Покажем, что это пространство полное (т. е. банахово). Если $\{y_m\}$ — фундаментальная последовательность

$$B_1 \ni y_m = \{c_1^m, \ldots, c_n^m, \ldots\},$$

то

$$\|y_m - y_k\|_{B_1} = \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i \right\|_B < \varepsilon \text{ для } m, k \geqslant N(\varepsilon)$$

и поэтому

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i \right\| < \varepsilon, \ m, \ k \geqslant N(\varepsilon), \ \text{для любого } n.$$

Отсюда

$$\|(c_n^m - c_n^k) \varphi_n\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i - \sum_{i=1}^{n-1} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i \right\| < 2\varepsilon.$$

Поэтому

$$|c_n^m - c_n^k| \leqslant \frac{2\varepsilon}{\|\varphi_n\|}, \ m, \ k \geqslant N(\varepsilon), \ \text{для любого } n.$$

Следовательно, числовая последовательность $\{c_n^m\}$, $m = 1, 2, \ldots$, сходится к некоторому пределу $\overset{*}{c}_n$, и это имеет место при любом n. Перейдем к пределу в неравенстве $\left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i \right\| < \varepsilon$. Имеем

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - c_i^k) \varphi_i \right\| \leqslant \varepsilon, \ \text{т. е. } \left\| \sum_{i=1}^{n} (c_i^m - \overset{*}{c}_i) \varphi_i \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Положим

$$s_n^m = \sum_{i=1}^{n} c_i^m \varphi_i, \quad \overset{*}{s}_n = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{c}_i \varphi_i.$$

Учитывая предыдущее неравенство, будем иметь

$$\|\overset{*}{s}_{n+p} - \overset{*}{s}_n\| \leqslant \|s_{n+p}^m - s_n^m\| + 2\varepsilon \ \text{для } m \geqslant N(\varepsilon), \ \text{для любого } n.$$

Пусть задано некоторое $\delta > 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2\varepsilon < \delta/2$, затем, зафиксировав $N(\varepsilon)$, возьмем M_0 так, чтобы

$$\|s_{n+p}^m - s_n^m\| < \frac{\delta}{2} \ \text{для } n \geqslant M_0, \ \text{для любого } p > 0$$

(это возможно в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^m \varphi_n$). Тогда $\|\overset{*}{s}_{n+p} - \overset{*}{s}_n\| < \delta$ для $n \geqslant M_0$, т. е. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overset{*}{c}_n \varphi_n$ сходится, а поэтому $y^* = \{\overset{*}{c}_1, \ldots, \overset{*}{c}_n, \ldots\} \in B_1$. Кроме того, имеем, что $\sup\limits_n \left\| \sum\limits_{i=1}^{n} (c_i^m - \overset{*}{c}_i) \varphi_i \right\| \leqslant \varepsilon$ для $m \geqslant N(\varepsilon)$, т. е. $\|y_m - y^*\|_{B_1} \leqslant \varepsilon$ для $m \geqslant N(\varepsilon)$, и полнота пространства B_1 доказана.

Очевидно, каждому $x = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \xi_i \varphi_i \in B$ соответствует единственный элемент $y_x=\{\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots\}\in B_1$; обратно, каждому элементу $y=\{\xi_i\}\in B_1$ соответствует единственный элемент $x_y\in B$, а именно

$$x_y=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i.$$

Таким образом, можно считать, что определен оператор $x=Ay$, взаимно-однозначно отображающий B_1 на B. Легко видеть, что оператор A линеен. Кроме того,

$$\|Ay\|=\|x\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i\right\|\leqslant\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\right\|=\|y\|,\ x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i,$$

т. е. он ограничен. По теореме Банаха об обратном операторе существует обратный оператор $y=A^{-1}x$, который также является линейным и ограниченным.

Пусть $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i\in B$. Определим функционал F_k, полагая $F_k(x)=\xi_k$. Очевидно, функционал F_k — линеен. Кроме того,

$$|F_k(x)|=|\xi_k|=\frac{|\xi_k|\ \|\varphi_k\|}{\|\varphi_k\|}=\frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{k}\xi_i\varphi_i-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\xi_i\varphi_i\right\|}{\|\varphi_k\|}\leqslant$$

$$\leqslant 2\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i\right\|\frac{1}{\|\varphi_k\|}=\frac{2\|y\|}{\|\varphi_k\|}=\frac{2\|A^{-1}x\|}{\|\varphi_k\|}\leqslant\frac{2\|A^{-1}\|}{\|\varphi_k\|}\|x\|.$$

Следовательно, $\|F_k\|\leqslant 2\|A^{-1}\|/\|\varphi_k\|$, т. е. функционалы F_k ограничены для любого k.

Таким образом, для любого $x\in B$ имеем

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}F_i(x)\varphi_i=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i.$$

Положим, в частности, $x=\varphi_j$. Тогда $\xi_i=\begin{cases}1, & \text{если } i=j,\\ 0, & \text{если } i\neq j\end{cases}$ в силу единственности разложения x по базису, т. е.

$$(F_i, \varphi_j)=F_i(\varphi_j)=\delta_{ij},\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

а (F_i, φ_j) — означает уже не скалярное произведение в гильбертовом пространстве, а другую запись функционала $F_i(\varphi_j)$. По этому поводу шла речь в гл. II. Назовем последовательность $\{F_i\}$ *сопряженно биортогональной* к последовательности $\{\varphi_i\}$. Подчеркнем, что $F_i\in B^*$ — сопряженному пространству, и, вообще говоря, B^* не совпадает с B. В определении 4 биортогональная к данной система была определена как последовательность, принадлежащая тому же пространству H, что и исходная система. Последовательность $\{F_i\}\in B^*$, и поэтому она названа сопряженно биортогональной.

В случае гильбертова пространства последовательность, биортогональную к базису, можно всегда указать в исходном же пространстве. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что гильбертово пространство обладает свойством $H=H^*$. Действительно, справедлива следующая теорема об изоморфизме пространств H и H^*.

Теорема 4. *Пусть H — действительное гильбертово пространство. Для всякого непрерывного линейного функционала F на H существует единственный элемент $h_0\in H$ такой, что*

$$F(h)=(h,\ h_0),\ h\in H,$$

причем $\|F\|=\|h_0\|$. Обратно, если $h_0\in H$, то $F(h)=(h,\ h_0)$ — непрерывный линейный функционал и $\|F\|=\|h_0\|$. Таким образом, пространства H и H^* изоморфны.

Очевидно, что для любого вектора $h_0\in H$ по формуле $F(h)=(h,\ h_0)$ определяется линейный функционал. Так как $|F(h)|\leqslant\|h\|\ \|h_0\|$, то этот функционал непрерывен и $\|F\|\leqslant\|h_0\|$. При $h=h_0$ в написанном неравенстве достигается знак равенства: $F(h_0)=(h_0,\ h_0)=\|h_0\|^2=\|h_0\|\ \|h_0\|$. Поэтому

$$\|F\|=\|h_0\|.$$

Покажем, что всякий непрерывный линейный функционал представим в виде скалярного произведения с некоторым вектором h_0. Если $F=0$, то полагаем $h_0=0$. Пусть теперь $F\neq 0$ и $H_0=\{h:F(h)=0\}$ — подпространство нулей функционала F (так как F непрерывен, то H_0 — замкнуто). Заметим, что теперь $H_0\neq H$. В таком случае по теореме об ортогональном дополнении существует отличный от нуля элемент $f_0\in H\ominus H_0$. Рассмотрим элементы $F(h)f_0—F(f_0)h$, где h пробегает все H. Эти элементы принадлежат H_0. Следовательно, $(F(h)f_0—F(f_0)h,\ f_0)=0$, откуда $F(h)(f_0,\ f_0)=(h,\ F(f_0)\ f_0)$. Если положить $h_0=\dfrac{F(f_0)}{(f_0,\ f_0)}f_0$, то из полученного равенства будет вытекать $F(h)=(h,\ h_0)$. Это и есть требуемое представление функционала.

Оно единственно. Допустим противное, тогда $(h,\ h_0')=(h,\ h_0'')$ для любого вектора $h\in H$, $h_0'\neq h_0''$. Взяв $h=h_0'—h_0''$, получили бы, что $\|h_0'—h_0''\|=0$, т. е. $h_0'=h_0''$, что противоречит допущению, что $h_0'\neq h_0''$.

Замечание 1. Теорема 4 верна и в случае комплексного пространства H, но отображение H в H^* будет уже сопряженным изоморфизмом, т. е. элементу λh_0 соответствует функционал $\bar{\lambda}F$.

Замечание 2. Теорема 4 устанавливает и общий вид линейного непрерывного функционала в H. А именно, всякий линейный непрерывный функционал в H имеет вид $F(h)=(h, h_0)$, где h_0 — фиксированный элемент пространства.

Пусть теперь $\{\varphi_n\}$ — базис гильбертова пространства H и пусть $g=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i$. Как и в случае банахова пространства, введем функционалы F_i, ставящие в соответствие вектору g коэффициент ξ_i его разложения по базису $\{\varphi_n\}$: $F_i(g)=\xi_i$.

Используя теорему об общем виде функционала в гильбертовом пространстве, представим функционал $F_i(g)$ в виде скалярного произведения, т. е. запишем, что $F_i(g)=(g, g_i)$, где g_i — некоторый вектор из пространства H.

Выбирая в качестве g вектор φ_j, $j=1, 2, \ldots$ и пользуясь соотношениями, справедливыми для произвольного банахова пространства: $F_i(\varphi_j)=\delta_{ij}$, получим $F_i(\varphi_j)=(\varphi_j, g_i)=\delta_{ij}$, т. е. $\{g_i\}$ — биортогональная система к $\{\varphi_j\}$. Здесь уже запись (φ_j, g_i) означает скалярное произведение в H. Система $\{g_i\}$ определяется единственным образом.

Если вектор g ортогонален всем g_i для любого $i=1, 2, \ldots$, то $\xi_i=(g, g_i)=0$ для любого i, и, следовательно, так как $\{\varphi_i\}$ — базис, имеем, что $g=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\varphi_i=0$. Поэтому согласно утверждению 1 биортогональная последовательность к базису всегда полна *) в H.

Более того, имеет место

Теорема 5 (теорема Банаха). *Биортогональная последовательность $\{\psi_j\}$ к базису $\{\varphi_j\}$ гильбертова пространства H также является базисом пространства H.*

Любой вектор $f\in H$ разлагается в сходящийся по норме ряд

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f, \psi_j)\varphi_j,$$

а поэтому для любого $h\in H$ числовой ряд

$$(f, h)=\sum_{j=1}^{\infty}(f, \psi_j)(\varphi_j, h)$$

сходится. Таким образом, $(f, h)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(f, \sum\limits_{j=1}^{n}(h, \varphi_j)\psi_j\right)$ для любого вектора $f\in H$. Но это означает, что последовательность

$$h_n=Q_nh=\sum_{j=1}^{n}(h, \varphi_j)\psi_j, \; n=1, 2, \ldots, h\in H$$

*) Заметим, что система $\{g_i\}$ не является, вообще говоря, как это требуется в утверждении 1, ортонормированной. Однако, применив к системе $\{g_i\}$ метод ортогонализации, мы получим согласно утверждению 1, что полученная ортонормированная система полна. Отсюда в соответствии с формулами ортогонализации вытекает полнота и системы $\{g_i\}$.

слабо сходится к вектору h. Действительно, для любого непрерывного линейного функционала $F=(\cdot, f)$ имеет место равенство $F(h_n)=(h_n, f)$ и $\overline{F(h_n)}=(f, h_n)\to(f, h)=\overline{F(h)}$ при $n\to\infty$. Но, как было показано в гл. II, всякая слабо сходящаяся последовательность ограничена, а поэтому при любом n имеем $\|Q_nh\|\leqslant M\cdot\|h\|$, $\|h\|=1$, следовательно, $\|Q_n\|\leqslant M=\text{const}$. Таким образом, доказана равномерная ограниченность норм операторов Q_n.

В силу полноты последовательности $\{\psi_j\}$ в H для любого $\varepsilon>0$ и любого $h\in H$ найдутся числа c_j^ε $(j=1, 2, \ldots, N_\varepsilon)$ такие, что $\left\|h-\sum\limits_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^\varepsilon\psi_j\right\|<\varepsilon$, и, стало быть, для вектора

$$Q_n\left(h-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^\varepsilon\psi_j\right)=Q_nh-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^\varepsilon\psi_j,\quad n>N_\varepsilon,$$

имеем

$$\left\|Q_nh-\sum_{j=1}^{N_\varepsilon}c_j^\varepsilon\psi_j\right\|\leqslant M\varepsilon,\quad n>N_\varepsilon.$$

Из полученных неравенств следует, что при $n>N_\varepsilon$

$$\|Q_nh-h\|<(1+M)\,\varepsilon.$$

Таким образом, любой вектор $h\in H$ разлагается в сходящийся по норме ряд $h=\sum\limits_{j=1}^{\infty}c_j\varphi_j$, причем коэффициенты c_j, $j=1, 2, \ldots$ однозначно определяются из равенств

$$c_j=(h, \varphi_j),\ j=1, 2, \ldots .$$

Определение 5. Системы $f_1, f_2, \ldots$ и $g_1, g_2, \ldots$ называются *квадратично-близкими,* если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|f_k-g_k\|^2<\infty.$$

Теорема 6. *Если $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве H, а $f_1, f_2, \ldots$ — ортонормированная система векторов, квадратично-близкая к базису $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, то $f_1, f_2, \ldots$ — также ортонормированный базис пространства H.*

Докажем, что если вектор $f_0\perp f_i$ для любого $i=1, 2, \ldots$, то $f_0=0$. В силу утверждения 1 этого параграфа из этого будет следовать полнота системы $f_1, f_2, \ldots$, а в силу теоремы 1 будет следовать, что эта система является и базисом.

Допустим, что из соотношений $f_0\perp f_i$, $i=1, 2, \ldots$ не следует, что $f_0=0$, т. е. пусть $f_0\neq0$. Но тогда $f_0, f_1, f_2, \ldots$ — ортогональное множество ненулевых векторов, а потому оно линейно независимо. Покажем, что этого не может быть. Выберем такое M, что

$\sum\limits_{k>M}\|\varphi_k-f_k\|^2<1$. Убедимся, что $M+1$ векторов $f_0, f_1, \ldots, f_M$ — линейно зависимы. Пусть

$$g_k=\sum_{j=1}^{M}(f_k, \varphi_j)\,\varphi_j, \quad k=0,1,\ldots,M.$$

Векторов g_k всего $M+1$ штук, и все они принадлежат замкнутой линейной оболочке векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$. Поэтому векторы $g_0, g_1, \ldots, g_M$ линейно зависимы. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{M}c_k g_k=0$. Тогда, подставляя в это равенство выражение для g_k, имеем

$$\sum_{k=0}^{M}c_k\sum_{j=1}^{M}(f_k, \varphi_j)\,\varphi_j=\sum_{j=1}^{M}\Bigl(\sum_{k=0}^{M}c_k f_k, \varphi_j\Bigr)\varphi_j=0.$$

Векторы φ_j, $j=1, 2, \ldots, M$ линейно независимы. Следовательно, в последнем соотношении все коэффициенты — нули, т. е. $\Bigl(\sum\limits_{k=0}^{M}c_k f_k, \varphi_j\Bigr)=0$, $j=1,2,\ldots,M$. Пусть $h=\sum\limits_{k=0}^{M}c_k f_k$. Тогда получается, что h ортогонален векторам $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_M$.

Вычислим норму вектора h. Имеем: $\|h\|^2=\sum\limits_{k=1}^{\infty}|(h, \varphi_k)|^2=$ $=\sum\limits_{k=M+1}^{\infty}(h, \varphi_k)|^2$. С другой стороны, вектор h принадлежит замкнутой линейной оболочке векторов $f_0, f_1, \ldots, f_M$, т. е. ортогонален $f_{M+1}, f_{M+2}, \ldots$. Поэтому

$$\|h\|^2=\sum_{k=M+1}^{\infty}|(h, \varphi_k)-(h, f_k)|^2\leqslant\sum_{k=M+1}^{\infty}\|h\|^2\|\varphi_k-f_k\|^2<\|h\|^2.$$

Отсюда следует, что вектор $h=0$, т. е. векторы $f_0, f_1, \ldots, f_M$ линейно зависимы.

6. Матричное представление линейного ограниченного оператора в H

Остановимся теперь на матричном представлении ограниченного оператора в ортонормированном базисе.

Пусть A — определенный на всем сепарабельном гильбертовом пространстве H линейный ограниченный оператор. Покажем, что он допускает матричное представление, которое аналогично матричному представлению линейного оператора в конечномерном пространстве.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в H. Положим $A\varphi_n = g_n$, $(g_k, \varphi_j) = (A\varphi_k, \varphi_j) = a_{jk}$, $j, k = 1, 2, \ldots$. Числа a_{jk} — коэффициенты Фурье в разложении вектора g_k по базису φ_j. Поэтому

$$g_k = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}\varphi_j, \quad k = 1, 2, \ldots$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{jk}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(g_k, \varphi_j)|^2 < \infty, \quad j, k = 1, 2, \ldots .$$

Покажем, что матрица $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ определяет оператор A, т. е. покажем, что по матрице $\{a_{jk}\}$ и ортонормированному базису $\{\varphi_k\}$ можно однозначно восстановить оператор. Было показано, что $A\varphi_k = g_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{jk}\varphi_j$, $k = 1, 2, \ldots$. Задача состоит в нахождении значения Af для любого вектора $f \in H$. Пусть

$f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k\varphi_k$ и $f_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k\varphi_k$. Тогда $Af_N = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \eta_k^N\varphi_k$, где $\eta_k^N = \sum\limits_{j=1}^{N} a_{kj}\xi_j$.

Имеем, далее, в силу непрерывности оператора A, что

$$c_k = (Af, \varphi_k) = \lim_{N\to\infty} (Af_N, \varphi_k) = \lim_{N\to\infty} \eta_k^N = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} a_{kj}\xi_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j.$$

Следовательно, для любого вектора $f \in H$ справедливо равенство $Af = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\varphi_k$, где $c_k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{kj}\xi_j$, т. е. действительно получено матричное представление оператора A в базисе $\{\varphi_k\}$.

Примеры.

1. Строго выпуклые множества. Если точка h гильбертова пространства H принадлежит интервалу, соединяющему точки f и g (отрезком, соединяющим точки f и g, называется совокупность векторов вида $tf + (1-t)g$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$), то h представимо в виде $h = tf + (1-t)g$, $0 < t < 1$ и называется *внутренней точкой* отрезка. Если точка выпуклого множества не служит внутренней ни для какого отрезка, принадлежащего этому множеству, то она называется *крайней точкой* этого множества. Замкнутое выпуклое множество в H называется *строго выпуклым*, если все его граничные точки крайние.

Покажем, что, например, единичный шар в любом гильбертовом пространстве — строго выпуклое множество. Граничные точки замкнутого единичного шара есть векторы f, для которых $\|f\| = 1$. Поэтому следует показать, что если $f = tg + (1-t)h$, где $0 < t < 1$, $\|f\| = 1$, $\|g\| \leqslant 1$, $\|h\| \leqslant 1$, то $f = g = h$. Имеем, что $1 = (f, f) =$

$=(f, tg+(1-t)h)=t(f, g)+(1-t)(f, h)$. Но $|(f, g)|\leqslant 1$, $|(f, h)|\leqslant \leqslant 1$, и в силу строгой выпуклости единичного замкнутого круга на плоскости имеем, что $(f, g)=(f, h)=1$. Но тогда неравенство Коши—Буняковского превращается в точное равенство. Следовательно, векторы g и f и векторы h и f коллинеарны, т. е. $g=\alpha f$, $h=\beta f$, α, β — коэффициенты. Тогда $1=(f, g)=(f, \alpha f)=\alpha$, $1= =(f, h)=(f, \beta h)=\beta$, т. е. $f=g=h$.

2. Сильная и слабая сходимость в H. Гильбертово пространство является метрическим пространством, а следовательно, и топологическим пространством. Сильная топология, как мы знаем, задается системой окрестностей нуля вида $\Sigma_{0,\varepsilon}=\{f: \|f\|<\varepsilon\}$, ε — произвольное положительное число.

Слабая топология задается системой окрестностей нуля вида $\Sigma_{\varepsilon,n}=\{f: |F_i(f)|<\varepsilon,\ i=1, 2, \ldots, n\}$, где F_i, $i=1, 2, \ldots, n$ — линейные непрерывные функционалы на H. Учитывая теорему 4 об общем виде функционала в H, для задания слабой топологии достаточно задать систему окрестностей нуля вида $\Sigma_{0,n}= =\{f: |(f, h_i)|<\varepsilon,\ i=1, 2, \ldots, n\}$.

Покажем, что каждое множество, замкнутое в слабой топологии, замкнуто и в сильной топологии.

Пусть M — замкнутое в слабой топологии множество в H и $f_n\in M$, $\|f_n-f\|\to 0$. Докажем, что $f\in M$. Заметим для этого, что из сильной сходимости следует слабая. В самом деле, справедлива оценка

$$|(f_n, g)-(f, g)|\leqslant\|f_n-f\|\cdot\|g\|\to 0.$$

Таким образом, если $\{f_n\}$ сходится к вектору f сильно, т. е. $\|f_n-f\|\to 0$ при $n\to\infty$, то $\{f_n\}$ сходится к f слабо. Поскольку M замкнуто в слабой топологии, т. е. относительно слабой сходимости, и $f_n\in M$, то получаем, что $f\in M$, что и требовалось.

Заметим, что из слабой сходимости естественно не следует сильная сходимость. В самом деле, пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная последовательность. Тогда для любого вектора $f\in H$ коэффициент Фурье (f, φ_n) по этой ортонормированной системе в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(f, \varphi_n)|^2$ стремится к нулю: $(f, \varphi_n)\to 0$ при $n\to\infty$. Следовательно, φ_n слабо сходится к нулю. Однако, поскольку $\|\varphi_n\|=1$ для любого n, последовательность $\{\varphi_n\}$ сильно к нулю не сходится. Отсюда, в частности, следует, что множество $\{\varphi_n\}$ не замкнуто в слабой топологии. А в сильной топологии оно дискретно, не имеет предельных точек (так как эта последовательность ортонормирована), а поэтому замкнуто.

Докажем еще одно утверждение, часто оказывающееся полезным. А именно, если последовательность $\{f_n\}$ сходится к вектору f слабо и $\|f_n\|\to\|f\|$, то $\|f_n-f\|\to 0$, т. е. $f_n\to f$ сильно. Действительно,

$$\|f_n-f\|^2=(f_n-f, f_n-f)=\|f_n\|^2-(f, f_n)-(f_n, f)+\|f\|^2.$$

В силу слабой сходимости f_n к f имеем, что $(f, f_n)\to\|f\|^2$, $(f_n, f)\to\|f\|^2$. Согласно условию $\|f_n\|\to\|f\|$, поэтому $\|f_n-f\|\to 0$ при $n\to\infty$, что и требовалось.

3. Пространство $A^2(D)$. Пусть $D=\{z: |z|<1\}$ — открытый круг комплексной плоскости $\mathbf{C}$, $A^2(D)$ — совокупность всех аналитических в D и интегрируемых с квадратом модуля функций. Тогда $A^2(D)$ — линейное пространство по отношению к обычным операциям с функциями. На этом множестве можно ввести и скалярное произведение, положив $(f,g)=\int\limits_D f(z)\overline{g(z)}\,dz$. Можно показать, что это пространство полное по отношению к введенной метрике и поэтому является гильбертовым. Простая проверка показывает, что функции $\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\,z^n$ образуют ортонормированную систему. Действительно,

$$\frac{(m+1)(n+1)}{\pi}\int\limits_{|z|<r} z^n\overline{z}^m dz=\frac{(m+1)(n+1)}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^r e^{i(n-m)}\rho^{n+m+1}d\rho d\theta=$$

$$=\frac{2(m+1)(n+1)}{(m+n+2)}\,r^{m+n+2}\delta_{n,m},$$

где

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}1, & \text{если } n=m,\\ 0, & \text{если } n\neq m.\end{cases}$$

Таким образом, положив $r=1$, получим $(\varphi_n, \varphi_m)=\delta_{n,m}$. На самом деле, векторы $\varphi_n(z)$ образуют полную систему, т. е. базис в пространстве $A^2(D)$.

Действительно, пусть функция $f(z)\in A^2(D)$ разложена в ряд Тейлора: $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2}\alpha_n\varphi_n(z)$.

В силу равномерной сходимости ряда Тейлора имеем, что $(f,\varphi_n)=\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2}\alpha_n$. Согласно неравенству Бесселя ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\pi}{n+1}|\alpha_n|^2$ сходится. Поэтому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2}\alpha_n\varphi_n(z)=f(z)$ сходится по норме пространства $A^2(D)$.

Таким образом, выше даны два разных доказательства того, что система $\{\varphi_n\}$ — базис пространства $A^2(D)$. С одной стороны, допустив, что $f\perp\varphi_n$ для любого n, мы бы получили по формуле $(f,\varphi_n)=\left(\frac{\pi}{n+1}\right)^{1/2}\alpha_n$, что все $\alpha_n=0$, т. е. что функция $f(z)\equiv 0$, т. е. система $\{\varphi_n\}$ полна, а поэтому — и базис. С другой стороны, показано, что всякая функция f может быть разложена в сходящийся по норме ряд по системе $\{\varphi_n\}$, и притом единственным образом, т. е. система $\{\varphi_n\}$ — базис пространства $A^2(D)$.

4. Пример всюду плотного множества в l^2. Пусть $0<|\alpha|<1$.

Оказывается, что замкнутая линейная оболочка множества всех векторов вида

$$g_k=(1,\ \alpha^k,\ \alpha^{2k},\ \ldots),\ k=1,\ 2,\ \ldots$$

совпадает со всем пространством l^2.

Действительно, пусть вектор $f=(\xi_0,\ \xi_1,\ \ldots)$ — ортогональный всем векторам g_k. Имеем

$$0=(f,g_k)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n\overline{\alpha}^{nk}=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n z_k^n,$$

где $z_k=\bar{\alpha}^k$, $k=1,\ 2,\ \ldots$.

Поэтому, как это легко заключить из вида коэффициентов ряда Тейлора, аналитическая в круге $|z|<1$ функция $\Sigma\xi_n z^n$ имеет бесконечно много нулей $z_k\to 0$ при $k\to\infty$.

Такая функция есть тождественный нуль, следовательно, все коэффициенты $\xi_n=0$, а поэтому вектор $f=0$, что и требовалось показать.

5. Счетно-аддитивная мера в H. Введем счетно-аддитивную неотрицательную функцию μ на гильбертовом пространстве H. Потребуем, чтобы $\mu(\Sigma)>0$ для любого непустого открытого множества $\Sigma\subset H$ и чтобы $\mu(f+\Sigma)=\mu(\Sigma)$ для любого вектора f и любого открытого множества Σ. Оказывается, что для любой такой счетно-аддитивной функции и любого непустого шара B будет выполнено соотношение $\mu(B)=\infty$. Другими словами, если указанную функцию назвать мерой в H, то мера любого непустого шара в H бесконечна.

Пусть $\{\varphi_k\}$ — ортонормированная система в H. Пусть $B_n=\left\{f:\left\|f-\frac{r}{2}\varphi_n\right\|<\frac{r}{4},\ r>0\right\}$.

Таким образом, B_n — шары с центрами в точках $\frac{r}{2}\varphi_n$ и радиусами $r/4$. Если $f\in B_n$, то

$$\|f\|\leqslant\left\|f-\frac{r}{2}\varphi_n\right\|+\left\|\frac{r}{2}\varphi_n\right\|<r,$$

т. е. $f\in B$, так что $B_n\subset B$. Если $f\in B_n$, $g\in B_m$, то при $n\neq m$ имеем, что $\|f-g\|>0$, т. е. шары B_n и B_m не пересекаются. Действительно,

$$\left\|\frac{r}{2}\varphi_n-\frac{r}{2}\varphi_m\right\|\leqslant\left\|\frac{r}{2}\varphi_n-f\right\|+\|f-g\|+\left\|g-\frac{r}{2}\varphi_m\right\|,$$

$$\|f-g\|\geqslant r\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{r}{4}-\frac{r}{4}>0.$$

Таким образом, шар B содержит бесконечно много непересекающихся открытых шаров одинаковой положительной меры, т. е.

$$\mu(B) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \infty.$$

6. Базис из тригонометрических функций. В пространстве $L^2[0, 2\pi]$ тригонометрическая система функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\right\}$, $n=0, \pm 1, \ldots$ образует базис пространства, и, следовательно, всякий вектор $f \in L^2[0, 2\pi]$ может быть разложен в сходящийся по норме ряд

$$f = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n, \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad c_n = (f, \varphi_n) = \int_0^{2\pi} f(t) \overline{\varphi_n(t)}\, dt.$$

Докажем полноту системы $\{\varphi_n\}$. Согласно теореме 1 отсюда будет следовать, что она образует базис, так как очевидно, что она ортонормирована. Допустим, что существует функция $g \in L^2[0, 2\pi]$, отличная от нуля, и такая, что

$$\int_0^{2\pi} g(t) e^{-int}\, dt = 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots.$$

Интегрируя эти соотношения по частям, получаем, что для любой константы C выполняются соотношения

$$\int_0^{2\pi} \{F(t) - c\} e^{-int}\, dt = 0, \quad F(t) = \int_0^t g(\xi)\, d\xi, \; n = \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Подберем постоянную c так, чтобы это равенство имело место и при $n=0$, т. е. положим $c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t)\, dt$. По теореме Вейерштрасса при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такой тригонометрический полином $\sigma(t) = \sum_{k=-N}^{N} A_k e^{ikt}$, что $|\Phi(t) - \sigma(t)| < \varepsilon$, где $\Phi(t) = F(t) - c$. Поэтому

$$\int_0^{2\pi} \Phi(t) \overline{\Phi(t)}\, dt = \int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2\, dt = \int_0^{2\pi} \overline{\Phi(t)} [\Phi(t) - \sigma(t)]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \int_0^{2\pi} |\Phi(t)|\, dt \leqslant \varepsilon (2\pi)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2\, dt \right)^{1/2}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} |\Phi(t)|^2 dt \leqslant 2\pi\varepsilon^2.$$

Поскольку ε произвольно, то $\Phi(t) \equiv 0$, т. е. $F(t) \equiv \text{const}$. Следовательно, $g(t) = 0$ почти всюду (см. гл. III, § 4).

ЗАДАЧИ

1. Многочлены, получающиеся при ортогонализации функций $1, x, x^2, \ldots$ в пространстве $L^2[-1, 1]$, называются *многочленами Лежандра.* Показать, что n-й многочлен Лежандра имеет вид

$$P_n(x) = c_n[(x^2-1)^n]^{(n)}.$$

2. Доказать полноту системы полиномов Лежандра в пространстве $L^2[-1, 1]$.

3. Во множестве функций, удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty$, определим скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = \int_{-1}^{1} \frac{x(t)\, y(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Показать, что ортогонализация системы функций $x_n(t) = t^n$ $n = 0, 1, \ldots$ относительно этого скалярного произведения приводит (с точностью до постоянной) к многочленам $T_n(t) = \cos(n \arccos t)$, $n = 1, 2, \ldots$ *(полиномы Чебышева)*.

4. Функции, получающиеся при ортогонализации системы $x_n(t) = t^n e^{-t}$, $n = 0, 1, \ldots$ в пространстве $L^2[0, \infty)$ называются *функциями Лагерра.* Показать, что n-я функция Лагерра имеет вид

$$L_n(t) = c_n e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-2t}).$$

5. Система функций Хаара χ_k, $\chi_k \in \overline{C^2}[0, 1]$ ($\overline{C^2}[0, 1]$ — пространство кусочно-непрерывных функций, принимающих в точках разрыва значения, равные полусумме предельных значений слева и справа, причем метрика в этом пространстве вводится по правилу: $\|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \rho^2(x, y) = \int\limits_0^1 [x(t) - y(t)]^2 dt$) определяется следующим образом:

$$\chi_1 = 1, \quad \chi_2 = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ -1, & \frac{1}{2} < t < 1; \end{cases}$$

$$\chi_{2^k+s} = \begin{cases} \sqrt{2^k}, & t \in \left(\frac{s-1}{2^k}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}\right), \\ -\sqrt{2^k}, & t \in \left(\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{s}{2^k}\right), \\ 0, & t \overline{\in} \left(\frac{s-1}{2^k}, \frac{s}{2^k}\right). \end{cases} \quad 1 \leqslant s \leqslant 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Доказать, что эта система ортонормирована и каждая функция из $C[0, 1]$ может быть равномерно аппроксимирована полиномами по системе Хаара.

6. Построить в пространстве $L^2[a, b]$ ортогональную систему непрерывных функций $a_1(x), a_2(x), \dots$, обладающую следующими свойствами:

а) из того, что $\int\limits_a^b f(x)a_n(x)dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$, следует, что $f(x) \equiv 0$, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$;

б) линейные комбинации функций $a_1(x)$, $a_2(x), \dots$ неплотны в пространстве $L^2[a, b]$.

7. Пусть $\{f_k\}$ — полная система векторов в H. Пусть $\lambda_{1n}^{(1)}$, $\lambda_{1n}^{(n)}$ — наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы Грама $\{\alpha_{jk}\}_{j,k=1}^n$, $\alpha_{jk} = (f_k, f_j)$. Если $\varliminf\limits_{k\to\infty} \lambda_{1k}^{(1)} = A > 0$, $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \lambda_{1k}^{(n)} = B < \infty$, то последовательность $\{f_k\}$ является базисом в H.

8. Доказать, что всякий линейный, ограниченный, обратимый оператор A преобразует любой ортонормированный базис пространства H в другой базис пространства H. Последний называется *базисом Рисса*. Если последовательность $\{\psi_j\}$ — базис Рисса, то последовательность $\{\varphi_j\} = \{\psi_j/\|\psi_j\|\}$ — также базис Рисса.

9. Если последовательность $\{\psi_j\}$ — базис Рисса, то существуют числа $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ такие, что для любого n и любых чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

$$a_2 \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2 \leqslant \Big\| \sum_{j=1}^n \gamma_j \psi_j \Big\|^2 \leqslant a_1 \sum_{j=1}^n |\gamma_j|^2.$$

10. Если последовательность $\{\psi_j\}$ — базис Рисса, то для любого $f \in H$

$$\sum_{j=1}^\infty |(f, \psi_j)|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^\infty |(f, g_j)|^2 < \infty,$$

где $\{g_j\}$ — биортогональная к $\{\psi_j\}$ последовательность.

11. Базис пространства H называется *перестановочным*, если при любых перестановках его членов он остается базисом H. Всякий ортонормированный базис перестановочен, более того, базис Рисса перестановочен.

12. Последовательность, векторов g_j называется *ω-линейно независимой*, если равенство $\sum\limits_{j=1}^\infty c_j g_j = 0$ невозможно при $0 < \sum\limits_{j=1}^\infty |c_j|^2 \|g_j\|^2 < \infty$. Доказать, что всякая ω-линейно независимая последовательность $\{g_j\}$, квадратично-близкая к базису Рисса, является базисом Рисса.

13. Доказать, что если определенный всюду в сепарабельном гильбертовом пространстве H линейный оператор A допускает матричное представление в каком-нибудь ортонормированном базисе, то он ограничен.

§ 2. Спектральные теоремы

Прежде чем приступить к изложению спектральных теорем, дадим несколько важных понятий, относящихся к операторам.

Подчеркнем, что всюду в этом параграфе, кроме п. 12, рассматриваются линейные, ограниченные операторы, определенные на всем пространстве.

1. Сопряженный оператор

Определение 1. Оператор A^* называется *сопряженным* к линейному ограниченному оператору A, если для всех f, $g \in H$ выполнено равенство

$$(Af, g) = (f, A^*g).$$

При фиксированном g (Af, g) представляет собой линейный функционал, примененный к переменному элементу f; в силу теоремы 4, доказанной в § 1, существует однозначно определенный элемент g^* такой, что $(Af, g) = (f, g^*)$ для любого f. Положим $A^*g = g^*$; так определенный оператор, очевидно, линеен. Покажем, что он ограничен и его норма равна норме оператора A. Пусть $f = A^*g$, тогда можно записать, что

$$(A^*g, A^*g) = (AA^*g, g) \leqslant \|AA^*g\| \, \|g\| \leqslant \|A\| \, \|A^*g\| \, \|g\|.$$

Поэтому $\|A^*g\| \leqslant \|A\| \, \|g\|$, $\|A^*\| \leqslant \|A\|$. Точно так же, положив $g = Af$, получим, что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. Следовательно, $\|A\| = \|A^*\|$.

Единичный оператор E и нулевой оператор O совпадают со своим сопряженным, т. е. $E = E^*$, $O^* = O$.

Определение 2. Если линейный ограниченный оператор совпадает со своим сопряженным, то он называется *симметрическим* (*самосопряженным*).

Из определения сопряженного оператора вытекают следующие равенства:

$$(aA)^* = \bar{a}A^*, \quad (A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \quad (A_1A_2)^* = A_2^*A_1^*, \quad (A^*)^* = A.$$

Если последовательность $\{A_n\}$ сходится по норме к A, то, в силу того что $\|A^*\| = \|A\|$, последовательность $\{A_n^*\}$ сходится по норме к $A^* : A_n^* \rightrightarrows A^*$ при $n \to \infty$.

Сопряженный оператор можно определить и для более общих (чем гильбертово) пространств. Пусть заданы, например, два линейных нормированных пространства N_1 и N_2 и оператор $A : N_1 \to N_2$. Пусть $\Phi(g)$ — линейный функционал на N_2. Если $g = Af$, $f \in N_1$, $g \in N_2$, то $\Phi(g) = \Phi(Af) = F(f)$, где $F(f)$ — функционал, определенный на N_1. Очевидно, что функционал F — линеен. Таким образом, получается, что каждому функционалу Φ из N_2^* ставится в соответствие функционал F из N_1^*, т. е. построен оператор $A^* : N_2^* \to N_1^*$. Этот оператор A^* называется *сопряженным* к оператору A, равенство $\Phi(g) = F(f)$ записывается в виде $F = A^*\Phi$. Если вспомнить, что в нормированных (или линейных) пространствах запись функционала $\Phi(g)$ можно представить в виде, аналогичном виду функционала в гильбертовом пространстве, т. е. с помощью аналога скалярного произведения, то из сказанного выше получается запись, вполне аналогичная записи в гильбертовых пространствах:

$$\Phi(g) = (g, \Phi) = (Af, \Phi) = F(f) = (f, F) = (f, A^*\Phi).$$

Здесь $\Phi(g)=(g,\ \Phi)=(\Phi,\ g)$ — запись функционала в форме, аналогичной скалярному произведению (см. п. 5 § 2 гл. II). Точно так же получаем, что $F(f)=(f,\ F)=(F,\ f)$. В частности, элементы g и Φ называются *ортогональными* (в нормированном пространстве!), если $\Phi(g)=(g,\ \Phi)=(\Phi,\ g)=0$.

В случае нормированных пространств все свойства сопряженного оператора, справедливые для гильбертова пространства, сохраняются.

Будем говорить, что последовательность операторов $\{A_n\}$ в гильбертовом пространстве H *слабо сходится* к оператору A, если для любых $f,\ g\in H$

$$(A_nf,\ g)\to(Af,\ g).$$

Очевидно, что если $\{A_n\}$ слабо сходится к A, то и $\{A_n^*\}$ слабо сходится к A^* при $n\to\infty$.

Напротив, из поточечной сходимости $A_n\to A$ не следует, вообще говоря, поточечная сходимость $A_n^*\to A^*$ при $n\to\infty$. Действительно, пусть в l^2 заданы операторы

$$A_n(x_1,\ x_2,\ \ldots)=(x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots),\ x=(x_1,\ x_2,\ \ldots)\in l^2,$$

тогда

$$A_n^*(x_1, x_2, \ldots)=(0, \ldots, 0, x_1, x_2, \ldots),$$

где перед x_1 стоят n нулей. При этом $A_nx\to 0$ при $n\to\infty$ для любого x, тогда как $\|A_n^*x\|=\|x\|$. Если для оператора A существует обратный оператор A^{-1}, то справедливы равенства $A^*(A^{-1})^*=(A^{-1}A)^*=E^*=E$. Следовательно, оператор A^* также имеет обратный и $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

2. Понятие о вполне непрерывном операторе

Гильберт первый обратил внимание на один важный класс операторов, аппроксимируемых конечномерными, а именно на вполне непрерывные операторы.

Определение 3. Определенный всюду в H линейный оператор A называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество точек в такое множество, из всякой бесконечной последовательности которого можно выделить сходящуюся подпоследовательность к некоторому элементу H *) (в смысле метрики в H).

Вполне непрерывный оператор ограничен. Действительно, в противном случае существовала бы последовательность векторов $\{f_k\}$, $k=1,\ 2,\ \ldots$, для которой $\|f_k\|=1$, $\|Af_k\|>k$, однако из

*) Можно показать, что вполне непрерывные операторы (отображения), и только они, переводят замкнутый единичный шар в компактное множество. Легко также убедиться, что при вполне непрерывном отображении замыкание образа ограниченного множества есть множество компактное. Часто такие операторы называют *компактными*.

множества точек $\{Af_k\}$ нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, т. е. получается противоречие.

Легко доказываются следующие утверждения.

Утверждение 1. *Если A вполне непрерывен, а оператор B определен всюду в H и ограничен, то AB вполне непрерывен.*

Утверждение 2. *Если A_1, A_2 — вполне непрерывные операторы, то $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ — также вполне непрерывный оператор.*

Теорема 1. *Если A — ограниченный линейный оператор, определенный всюду в H, и если A^*A вполне непрерывен, то и оператор A вполне непрерывен.*

Пусть M — какое-нибудь бесконечное ограниченное множество точек f, причем $\|f\|<c$. Пусть $\{f_k\}$ — некоторая последовательность элементов этого множества, которая оператором A^*A переводится в сходящуюся последовательность. Поскольку

$$\|Af_n - Af_m\|^2 = (A(f_n - f_m),\ A(f_n - f_m)) =$$

$$= (A^*A(f_n - f_m),\ f_n - f_m) \leqslant \|A^*Af_n - A^*Af_m\| \cdot \|f_n - f_m\|$$

и

$$\lim_{n,m\to\infty} \|A^*Af_n - A^*Af_m\| = 0, \quad \|f_n - f_m\| \leqslant 2c,$$

то $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|Af_n - Af_m\| = 0$, т. е. $\{Af_n\}$ сходится.

Следствие 1. *Если оператор A вполне непрерывен, то тем же свойством обладает и оператор A^*.*

Действительно, если оператор A вполне непрерывен, то вполне непрерывен и оператор $AA^* = (A^*)^*A^*$; остается применить только что доказанную теорему.

Следствие 2. *Если A — вполне непрерывный оператор, а линейный оператор B, определенный всюду в H, ограничен, то оператор BA вполне непрерывен.*

Действительно, оператор $(BA)^* = A^*B^*$ будет вполне непрерывным, следовательно, вполне непрерывен и оператор BA.

Теорема 2. *Оператор A, являющийся пределом (в смысле сходимости по норме в пространстве операторов) вполне непрерывных операторов, вполне непрерывен.*

Рассмотрим последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n\to\infty$. Тогда существует последовательность A_{ε_i} вполне непрерывных операторов такая, что $\|A - A_{\varepsilon_i}\| < \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Пусть M — произвольное ограниченное множество точек $f \in H$, причем $\|f\| \leqslant c$. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ — произвольная бесконечная последовательность. Выделим из этой последовательности подпоследовательность $\{f_{1k}\}_1^\infty$, которая оператором A_{ε_1} переводится в сходящуюся последовательность. Из этой последовательности выделим подпоследовательность $\{f_{2k}\}_1^\infty$, которая оператором A_{ε_2} переводится в сходящуюся последовательность. Продолжим этот процесс неограниченно. Рассмотрим диагональную последовательность $\{f_{kk}\}_1^\infty$. Докажем, что эта последовательность переводится оператором A в сходящуюся. Прежде всего заметим, что она переводится в сходящуюся каждым из операторов A_{ε_i}. Далее,

$$\|Af_{nn}-Af_{mm}\| \leqslant \|(A-A_{\varepsilon_k})f_{nn}\| + \|(A-A_{\varepsilon_k})f_{mm}\| +$$
$$+\|A_{\varepsilon_k}f_{nn}-A_{\varepsilon_k}f_{mm}\| \leqslant 2c\varepsilon_k + \|A_{\varepsilon_k}f_{nn}-A_{\varepsilon_k}f_{mm}\|.$$

Выбирая сначала достаточно большим номер k, а затем номера n и m, мы сделаем правую часть сколь угодно малой. Следовательно, последовательность $\{Af_{nn}\}$ сходится в H.

3. Абсолютная норма оператора

Рассмотрим понятие абсолютной нормы оператора. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство и A — линейный ограниченный оператор, определенный всюду в H. Пусть $\{f_k\}_1^\infty$ и $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — два произвольных ортонормированных базиса в H. Предположим, что

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |(Af_k, \varphi_i)|^2 < \infty.$$

Класс операторов, для которых выполняется это неравенство, называется *классом Шмидта.* Так как (Af_k, φ_i), $i=1, 2, \ldots$ — коэффициенты Фурье вектора Af_k в базисе $\{\varphi_i\}_1^\infty$, то согласно равенству Парсеваля

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |(Af_k, \varphi_i)|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af_k\|^2.$$

С другой стороны, $(A^*\varphi_i, f_k) = (\varphi_i, Af_k)$ — коэффициенты Фурье вектора $A^*\varphi_i$ в базисе $\{f_k\}_1^\infty$. Поэтому

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |(Af_k, \varphi_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|A^*\varphi_i\|^2.$$

Таким образом, величина $\|A\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i,k=1} |(Af_k, \varphi_i)|^2}$ не зависит от выборов базисов $\{f_k\}$ и $\{\varphi_i\}$, а зависит лишь от оператора A. Эта величина $\|A\|_2$ называется *абсолютной нормой**) оператора A.

Поскольку в качестве f_1 можно взять любой единичный вектор, то

$$\|Af_1\| \leqslant \|A\|_2, \quad \|A\| \leqslant \|A\|_2,$$

т. е. обычная норма не превосходит его абсолютной нормы. Легко

*) Величину $\|A\|_2$ называют также *нормой Шмидта.*

видеть, что если C — произвольный ограниченный оператор, то

$$\|CA\|_2 \leqslant \|C\| \, \|A\|_2, \ \|AC\|_2 \leqslant \|C\| \, \|A\|_2.$$

Далее,

$$\|A+B\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|Af_j + Bf_j\|^2} \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \{\|Af_j\| + \|Bf_j\|\}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|Af_j\|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} \|Bf_j\|^2} = \|A\|_2 + \|B\|_2,$$

A и B — линейные операторы.

Положим в формулах выше $f_k = \varphi_k$ для любого индекса k. Тогда

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} |(A\varphi_k, \varphi_i)|^2} = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2},$$

где $a_{ik} = (A\varphi_k, \varphi_i)$. Таким образом, если $\|A\| < \infty$, то оператор A допускает матричное представление, причем

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < \infty.$$

Более того, справедлива

Теорема 3. *Если $\|A\|_2 < \infty$, т. е. оператор принадлежит классу Шмидта, то оператор A вполне непрерывен.*

Пусть $\{g_k\}_1^{\infty}$ — какой-нибудь ортонормированный базис пространства H. Тогда $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \|A^* g_k\|^2}$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем число M столь большим, чтобы $\sum_{k=M+1}^{\infty} \|A^* g_k\|^2 < \varepsilon^2$. Пусть A_ε — оператор, определенный по формуле

$$A_\varepsilon f = \sum_{k=1}^{M} (Af, g_k) \, g_k.$$

Оператор A_ε — конечномерный и поэтому вполне непрерывен. При любом $f \in H$ имеем, что

$$\|Af - A_\varepsilon f\|^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} |(Af, g_k)|^2 = \sum_{k=M+1}^{\infty} |(f, A^* g_k)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|^2 \sum_{k=M+1}^{\infty} \|A^* g_k\|^2 \leqslant \varepsilon^2 \|f\|^2.$$

Следовательно, $\|A-A_\varepsilon\|<\varepsilon$ и оператор A, как предел (по норме пространства операторов) вполне непрерывных операторов, является сам вполне непрерывным.

Рассмотрим теперь конкретный пример оператора из класса Шмидта — *интегральный оператор Гильберта—Шмидта.*

Пусть φ — функция из пространства $L^2\,[a,\,b]$, а функция $K(s,\,t)\in L^2([a,\,b]\times[a,\,b])$, т. е. $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K^2(s,t)|\,dsdt<\infty$. Определим оператор A по следующему правилу:

$$A\varphi=\int\limits_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt.$$

Покажем прежде всего, что так действительно определен ограниченный оператор на гильбертовом пространстве $L^2[a,\,b]$.

Заметим сначала, что в силу теоремы Фубини для почти всех s существует интеграл $\int\limits_a^b |K^2(s,t)|\,dt$, т. е. как функция t ядро $K(s,\,t)$ почти при всех s принадлежит $L^2[a,\,b]$. Так как произведение функций с суммируемым квадратом суммируемо, то функция $A\varphi$ существует для почти всех $s\in[a,\,b]$. Покажем, что $A\varphi\in$ $\in L^2[a,\,b]$. По неравенству Коши—Буняковского для почти всех s имеем

$$|A\varphi|^2=\left|\int\limits_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\,dt\right|^2\leqslant\int\limits_a^b |K^2(s,t)|\,dt\cdot\int\limits_a^b|\varphi^2(t)|\,dt=$$

$$=\|\varphi\|^2\int\limits_a^b|K^2(s,t)|\,dt.$$

Интегрируя по s и заменяя повторный интеграл двойным, получаем

$$\|A\varphi\|^2\leqslant\|\varphi\|^2\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K^2(s,t)|\,dsdt,$$

т. е.

$$\|A\|\leqslant\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K^2(s,t)|\,dsdt,$$

и оператор A действительно ограничен.

Покажем сейчас, что интегральный оператор A Гильберта—Шмидта является на самом деле вполне непрерывным и, более того, оператором из класса Шмидта, причем

$$\|A\|_2^2=\int\limits_a^b\int\limits_a^b|K^2(s,t)|\,dsdt.$$

Пусть $\{f_k(s)\}$ и $\{\varphi_i(t)\}$ — полные ортонормированные системы в $L^2[a, b]$ (с аргументом s) и $L^2[a, b]$ (с аргументом t). Тогда система $\{f_k(s)\varphi_i(t)\}$ — полная ортонормированная система в $L^2([a, b]\times[a, b])$. Действительно, ортонормированность проверяется непосредственно. Докажем полноту. Пусть функция $\omega(s, t)\in L^2([a, b]\times[a, b])$ и ортогональна каждой из функций системы $\{\theta_{k,i}=f_k(s)\varphi_i(t)\}$, т. е. $(\omega, \theta_{k,i})=0$ для всех k и i. Тогда, как мы знаем, функция

$$\omega_k(t)=\int_a^b \omega(s, t) f_k(s)\, ds$$

принадлежит $L^2[a, b]$. Поэтому

$$(\omega, \theta_{k,i})=(\omega, f_k\varphi_i)=(\omega_k, \varphi_i).$$

Таким образом, из того, что $(\omega, \theta_{k,i})=0$ для всех k и i, следует, что $(\omega_k, \varphi_i)=0$, и в силу полноты системы $\{\varphi_i\}$ следует, что $\omega_k=0$ для всех k. Далее, $\omega_k(t)$ определено для почти всех t и равно нулю при каждом k для почти всех t. В силу полноты $\{f_k\}$ вытекает, что $\omega(s, t)=0$ для почти всех s и t, т. е. $\omega=0$ как элемент $L^2([a, b]\times[a, b])$ и система $\{f_k(s)\ \varphi_i(t)\}$ полна.

Вернемся теперь к вычислению абсолютной нормы оператора A. Имеем в силу полноты и ортонормированности $\{f_k\varphi_i\}$:

$$\|A\|_2^2=\sum_{k,i=1}^{\infty}|(Af_k, \varphi_i)|^2=\sum_{k,i=1}^{\infty}\left|\int_a^b\int_a^b K(s, t)\, f_k(s)\, \varphi_i(t)\, dsdt\right|^2=$$

$$=\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2 dsdt.$$

Таким образом, при условии, что $\int_a^b\int_a^b |K(s, t)|^2\, dsdt<\infty$, оператор

$A\varphi=\int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$ является оператором из класса Шмидта.

4. Альтернатива Фредгольма

Часто приходится находить решения различных интегральных или дифференциальных уравнений.

Примером интегрального уравнения может быть уравнение

$$\varphi(s)=\int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt+f(s),$$

где f и K — заданные функции, а φ — искомая функция. Математики давно рассматривали и изучали отдельные виды интегральных уравнений. Так, например, еще в 1823 г. Абель рассмотрел уравнение вида, несколько отличного от приведенного выше, а именно уравнение

$$f(s)=\int\limits_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^{\alpha}}\,dt, \quad 0<\alpha<1, \quad f(0)=0,$$

где f — заданная функция, а φ — искомая, и показал, что решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi(t)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int\limits_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}\,ds.$$

К решению интегральных уравнений сводятся и многие дифференциальные уравнения.

Например, рассмотрим хорошо известное уравнение Штурма—Лиувилля

$$-y''+q(x)\,y=\rho^2 y,$$

где $q(x)$ — известная функция, ρ — некоторый числовой параметр, y — функция, подлежащая определению.

Методом вариации произвольных постоянных нетрудно, например, убедиться, что решение задачи Коши $(y(0)=0,\ y'(0)=1)$ данного уравнения можно найти из следующего интегрального уравнения:

$$y(x)=\frac{1}{\rho}\sin\rho x+\frac{1}{\rho}\int\limits_0^x \sin\rho(x-\xi)\,q(\xi)\,y(\xi)\,d\xi.$$

Причем важно подчеркнуть, что часто рассматриваемые интегральные уравнения, которые в ряде случаев можно записать в виде

$$\varphi=K\varphi+f$$

(φ — искомая функция, K — интегральный оператор, f — заданная функция), оказываются уравнениями с вполне непрерывным оператором K.

Докажем сейчас важную теорему относительно разрешимости таких уравнений, причем в дальнейшем нас не будет интересовать конкретный вид оператора K. Всюду в дальнейшем будем считать, что K — произвольный вполне непрерывный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H.

Положив $A=E-K$, где E — единичный оператор, уравнение можно переписать в виде

$$A\varphi=f.$$

Наряду с этим уравнением рассмотрим в H однородное уравнение

$$A\varphi_0=0$$

и два уравнения с сопряженным оператором — неоднородное

$$A^*\varphi=g$$

и однородное

$$A^*\varphi_0=0.$$

Теорема (альтернатива Фредгольма). *Справедливы следующие утверждения.*

а) *Неоднородное уравнение $A\varphi=f$ разрешимо для тех и только для тех векторов $f\in H$, которые ортогональны всем решениям сопряженного уравнения $A^*\varphi_0=0$.*

б) *Либо однородное уравнение $A\varphi_0=0$ имеет ненулевое решение, либо неоднородное уравнение имеет при любом $f\in H$ одно и только одно решение.*

в) *Однородные уравнения $A\varphi_0=0$ и $A^*\varphi_0=0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений.*

Сделаем несколько замечаний в связи с сформулированной теоремой.

Во-первых, если бы оператор K был, например, интегральным оператором с вырожденным ядром вида $K(s, t)=\sum_{i=1}^{n} P_i(s)Q_i(t)$, то нетрудно убедиться, что все уравнения сведутся к системам линейных алгебраических уравнений, для которых все утверждения теоремы сведутся к известным утверждениям из курса линейной алгебры. Интегральный оператор с произвольным ядром $K(s, t)\in L^2([a, b]\times[a, b])$ можно аппроксимировать оператором с вырожденным ядром и таким способом доказать теорему. Подчеркнем, что мы рассматриваем абстрактные операторы в H, и, следовательно, приведем доказательство, не связанное с рассмотрением вырожденных ядер.

Во-вторых, все, что сказано выше, может быть в точности перенесено и на случай, когда оператор A действует из одного банахова пространства B_1 в другое B_2, и в этой теории возникает ряд новых, широко используемых понятий, которые мы сейчас и поясним. Пусть $\operatorname{Ker}(A)=Z(A)$ — *ядро* оператора A, т. е. совокупность всех решений уравнения

$$A\varphi_0=0, \quad \varphi_0\in B_1.$$

Пусть $R(A)$ обозначает *образ* оператора A в B_2, т. е. совокупность всех $f\in B_2$, для которых разрешимо уравнение $A\varphi=f$. Ясно, что $\ker A$ — подпространство (как прообраз при непрерывном отображении). Множество $R(A)$ не всегда замкнуто. Аналогично можно определить $\ker A^*=Z(A^*)$ и $R(A^*)$. Если $R(A)$ и $R(A^*)$ — замкнутые подпространства, можно определить банаховы пространства (фактор-пространства)

$$\operatorname{coker} A=B_2/R(A) \text{ и } \operatorname{coker} A^*=B_1{}^*/R(A^*).$$

Они называются *коядрами* операторов A и A^* соответственно.

Пусть

$$\alpha(A)=\dim\ker A,\quad \beta(A)=\dim\operatorname{coker} A,$$

$$i(A)=\alpha(A)-\beta(A),$$

(dim — означает размерность). Оператор A называется *фредгольмовым,* если числа $\alpha(A)$ и $\beta(A)$ конечны. В этом случае $i(A)$ называется *индексом оператора* A.

В конечномерном случае, когда $\dim B_1=N_1$, $\dim B_2=N_2$, легко проверить равенства

$$N_1-\alpha(A)=N_2-\beta(A)=\operatorname{rang} A,$$

$$N_2-\alpha(A^*)=N_1-\beta(A^*)=\operatorname{rang} A^*,$$

а поскольку $\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A^*$ (теорема о ранге матрицы), то

$$\alpha(A)=\beta(A^*),\quad \beta(A)=\alpha(A^*),\quad i(A)=-i(A^*).$$

После сделанных общих замечаний перейдем непосредственно к доказательству альтернативы Фредгольма в случае, когда операторы A и A^* действуют из гильбертова пространства H в это же пространство H.

Покажем прежде всего, что в рассматриваемом случае многообразие $R(A)$ — область значений оператора A — замкнуто, т. е. является подпространством, многообразие $R(A^*)$ — замкнуто и что справедливы разложения

$$H=Z(A)\oplus R(A^*),$$

$$H=Z(A^*)\oplus R(A).$$

Действительно, пусть $f_n\in R(A)$ и $f_n\to f$. Существуют такие векторы $\varphi_n\in H$, что

$$f_n=A\varphi_n=\varphi_n-K\varphi_n,$$

где $A=E-K$. Всегда можно считать, что векторы φ_n ортогональны к $Z(A)$ (для этого, если необходимо, из φ_n надо вычесть его проекцию на $Z(A)$). Покажем, что $\|\varphi_n\|$ ограничены в совокупности. В самом деле, если это не так, то существует подпоследовательность, для которой $\|\varphi_{n_k}\|\to\infty$. Поэтому $\frac{\varphi_{n_k}}{\|\varphi_{n_k}\|}-K\frac{\varphi_{n_k}}{\|\varphi_{n_k}\|}\to 0$ при $n_k\to\infty$. Перейдя снова к подпоследовательности $\{\widetilde{\varphi}_{n_k}\}$, можно считать в силу вполне непрерывности K, что последовательность $\left\{\frac{K\widetilde{\varphi}_{n_k}}{\|\widetilde{\varphi}_{n_k}\|}\right\}$ сходится. Поэтому и $\left\{\frac{\widetilde{\varphi}_{n_k}}{\|\widetilde{\varphi}_{n_k}\|}\right\}$ будет сходиться, скажем, к вектору $z\in H$. Тогда $\|z\|=1$, $Az=0$, т. е. $z\in Z(A)$. Однако мы считаем векторы φ_n ортогональными $Z(A)$, а поэтому и $z\perp Z(A)$. Получилось противоречие, следовательно, $\|\varphi_n\|$ ограничены в совокупности. Вместе с тем в этом случае последовательность $\{K\varphi_n\}$ можно считать сходящейся, а тогда из уравнения $f_n=\varphi_n-K\varphi_n$ будет следовать, что $\{\varphi_n\}$ — сходится. Пусть $\varphi=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n$, тогда $f=A\varphi$, что и требовалось. Для $R(A^*)$ доказательство аналогично.

Покажем теперь справедливость разложений для H. Пусть $h\in Z(A)$, тогда $(h, A^*\varphi)=(Ah, \varphi)=0$ для всех $\varphi\in H$, т. е. $Z(A)\perp R(A^*)$. Остается заметить, что никакой ненулевой вектор z не может быть одновременно ортогонален $Z(A)$ и $R(A^*)$, т. е. что действительно $H=Z(A)\oplus R(A^*)$. Пусть существует $z\in H$ и такой, что $z\perp R(A^*)$. Тогда для любого $\varphi\in H$ имеем $(Az, \varphi)=$ $=(z, A^*\varphi)=0$, т. е. $z\in Z(A)$, что и требовалось.

Из доказанных утверждений вытекает утверждение а) теоремы. Действительно, $f\perp Z(A^*)$ тогда и только тогда, если $f\in R(A)$, т. е. существует такой вектор φ, что $A\varphi=f$.

Перейдем теперь к доказательству утверждения б) теоремы.

Для каждого целого k положим $H^k=R(A^k)$ (в частности, $H^1=R(A)$). Очевидны включения $H\supset H^1\supset H^2\supset\ldots$, а по доказанному все H^k замкнуты, при этом $A(H^k)=H^{k+1}$.

Покажем, что, во-первых, существует такой номер l, что $H^{k+1}=H^k$ для всех $k\geqslant l$, а также, что если $Z(A)=\{0\}$, то $R(A)=H$, и обратно, если $R(A)=H$, то $Z(A)=\{0\}$.

В самом деле, если l не существует, то все H^k различны. Построим ортонормированную последовательность $\{\varphi_k\}$ такую, что $\varphi_k\in H^k$ и $\varphi_k\perp H^{k+1}$. Пусть $p>k$, тогда

$$K\varphi_p-K\varphi_k=-\varphi_k+(\varphi_p+A\varphi_k-A\varphi_p)$$

и, следовательно, $\|K\varphi_p-K\varphi_k\|\geqslant 1$, так как $\varphi_p+A\varphi_k-A\varphi_p\in H^{k+1}$. Поэтому из последовательности $\{K\varphi_k\}$ нельзя выбрать сходящейся подпоследовательности, что противоречит вполне непрерывности оператора K.

Далее, если $Z(A)=\{0\}$, то оператор A взаимно-однозначен и, следовательно, если при этом $R(A)\neq H$, то цепочка $\{H^k\}$ состоит из различных пространств, что противоречит сказанному выше. Поэтому $R(A)=H$, аналогично, $R(A^*)=H$, если $Z(A^*)=\{0\}$.

Если же $R(A)=H$, то из разложения $H=R(A)\oplus Z(A^*)$ следует, что $Z(A^*)=\{0\}$, а тогда и $R(A^*)=H$. Из разложения $H=R(A^*)\oplus Z(A)$ получаем, что $Z(A)=\{0\}$, что и требовалось.

Таким образом, утверждение б) теоремы доказано. Действительно, доказанные выше утверждения, что если $Z(A)=\{0\}$, то $R(A)=H$, а также, что если $R(A)=H$, то $Z(A)=\{0\}$, и составляют содержание пункта б) теоремы.

Докажем, наконец, часть в) теоремы. Предположим, что пространство $Z(A)$ — бесконечномерно. Тогда в нем существует бесконечная ортонормированная система $\{\varphi_k\}$ и при этом $K\varphi_k=\varphi_k$. Следовательно, если $n\neq m$, то $\|K\varphi_n-K\varphi_m\|=\sqrt{2}$, и из последовательности $\{K\varphi_k\}$ нельзя выделить сходящуюся, что противоречит вполне непрерывности оператора K.

Пусть $\alpha=\dim Z(A)$ — размерность пространства $Z(A)$, $\beta=$ $=\dim Z(A^*)$ — размерность $Z(A^*)$. Предположим что $\dim Z(A)<$

$<\dim Z(A^*)$. Пусть $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\alpha\}$ — ортонормированный базис в $Z(A)$, а $\{\psi_1, \ldots, \psi_\beta\}$ — ортонормированный базис в $Z(A^*)$. Пусть $T\varphi = A\varphi + \sum_{j=1}^{\alpha} (\varphi, \varphi_j)\psi_j$. Так как оператор T получается из оператора A прибавлением конечномерного, то все результаты, доказанные выше для A, справедливы и для T. Покажем, что уравнение $T\varphi=0$ имеет только тривиальное решение. Пусть $A\varphi + \sum_{j=1}^{\alpha} (\varphi, \varphi_j)\psi_j = 0$. Так как все векторы ψ_j ортогональны векторам вида $A\varphi$, то получаем, что $A\varphi=0$, $(\varphi, \varphi_j)=0$, $1 \leqslant j \leqslant \alpha$.

Поэтому вектор φ является, с одной стороны, линейной комбинацией векторов φ_j, а с другой — ортогонален им, следовательно, $\varphi=0$.

Таким образом, уравнение $T\varphi=0$ имеет только тривиальные решения, но тогда согласно пункту б) теоремы существует вектор f такой, что $Af + \sum_{j=1}^{\alpha} (f, \varphi_j)\psi_j = \psi_{\alpha+1}$.

Умножив скалярно это равенство на $\psi_{\alpha+1}$, получим слева 0, а справа 1. Таким образом, предположение, что $\alpha<\beta$, неверно. Следовательно, $\alpha \geqslant \beta$, т. е. $\dim Z(A) \geqslant \dim Z(A^*)$. Заменяя оператор A на A^*, получим, что $\beta \geqslant \alpha$, и, следовательно, $\dim Z(A) = \dim Z(A^*)$.

Теорема (альтернатива Фредгольма) полностью доказана.

5. Проектирующие операторы

Пусть G — некоторое подпространство гильбертова пространства H и F — его ортогональное дополнение, т. е. $H=G\oplus F$ или $F=H\ominus G$. Это означает, что каждый вектор $h\in H$ однозначно представим в виде $h=g+f$, $g\in G$, $f\in F$. Вектор g называется *проекцией* h на G.

Определенный во всем гильбертовом пространстве H оператор, который каждому вектору $h\in H$ относит его проекцию на подпространство G, называется *проектирующим* оператором на G (оператором проектирования на G, ортопроектором) и обозначается символом P или P_G, так что

$$g=Ph=P_Gh.$$

Проектирующий оператор, очевидно, линеен. Кроме того, он ограничен и его норма равна единице. Действительно, так как $\|h\|^2=\|g\|^2+\|f\|^2$, то $\|g\|\leqslant\|h\|$, т. е. $\|Ph\|\leqslant\|h\|$. Однако если $h\in G$, то $g=h$, так что $\|Ph\|=\|h\|$. Следовательно, $\|P\|=1$.

Для проектирующих операторов справедливо равенство $P^2=P$. Действительно, для любого вектора $h\in H$ вектор $g=Ph\in G$, и поэтому $P^2h=Ph$, т. е. $P^2=P$. Пусть h_1, $h_2 \in H$, $h_1=g_1+f_1$, $h_2=g_2+f_2$. В таком случае

$$(g_1, h_2)=(g_1, g_2)=(h_1, g_2), \quad (Ph_1, h_2)=(h_1, Ph_2),$$

т. е. $P^*=P$. Проектирующий оператор определяется этими двумя свойствами.

Теорема 4. *Если P есть линейный определенный всюду в H оператор, для которого при любых h_1, $h_2 \in H$*

$$(P^2h_1, h_2)=(Ph_1, h_2),$$

$$(Ph_1, h_2)=(h_1, Ph_2),$$

то существует подпространство $G \subset H$, оператором проектирования на которое является P.

Оператор P ограничен:

$$\|Ph\|^2=(Ph, Ph)=(P^2h, h)=(Ph, h), \quad \|Ph\|^2 \leqslant \|Ph\| \cdot \|h\|,$$

т. е. $\|Ph\| \leqslant \|h\|$.

Обозначим через G множество векторов $g \in H$, для которых $Pg=g$. Ясно, что G — линейное многообразие, докажем, что оно замкнуто, т. е. подпространство. Пусть $g_n \in G$, $n=1, 2, \ldots$ и $g_n \to g$. Тогда $Pg_n=g_n$ и $Pg-g_n=Pg-Pg_n=P(g-g_n)$, откуда $\|Pg-g_n\| \leqslant \|g-g_n\|$. Устремим $n \to \infty$, получим $\|Pg-g\| \leqslant 0$, т. е. $Pg=g$, и замкнутость G доказана.

Обозначим через P_G оператор проектирования на G. Покажем, что $P_G=P$. Для любых $h \in H$ вектор $Ph=g \in G$, так как $P(Ph)=Ph$. Подпространству G принадлежит также $P_G h$. Поэтому необходимо доказать, что $(Ph-P_G h, g')=0$, или $(Ph, g')=(P_G h, g')$ при любом $g' \in G$. Но это следует из того, что

$$(Ph, g')=(h, Pg')=(h, g'),$$

$$(P_G h, g')=(h, P_G g')=(h, g').$$

Заметим, что если P — оператор проектирования на G, то $E-P$, где E — единичный оператор, есть также оператор проектирования, причем $E-P$ проектирует на $H \ominus G$. Действительно, $(E-P)^*=E-P$, $(E-P)^2=E-P$, причем для любого вектора $h \in H$ имеем $(E-P)h=h-g=f$, где $f \in H \ominus G$.

Теорема 5. *Произведение двух проектирующих операторов P_{G_1} и P_{G_2} является проектирующим оператором тогда и только тогда, когда они перестановочны:*

$$P_{G_1}P_{G_2}=P_{G_2}P_{G_1};$$

если это условие выполнено, то $P_{G_1}P_{G_2}=P_G$, где $G=G_1 \cap G_2$.

Если произведение двух операторов $P_{G_1}P_{G_2}$ есть проектирующий оператор, то

$$P_{G_1}P_{G_2}=(P_{G_1}P_{G_2})^*=P_{G_2}^*P_{G_1}^*=P_{G_2}P_{G_1}.$$

Вектор $g = P_{G_1}P_{G_2}h = P_{G_2}P_{G_1}h$ в силу первого представления принадлежит G_1, а в силу второго — G_2, т. е. он принадлежит $G_1 \cap G_2$, следовательно, $G \subset G_1 \cap G_2$. Так как в обратную сторону включение очевидно, то необходимость в теореме доказана.

Допустим теперь, что $P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_2}P_{G_1} = P$. Отсюда следует, что $P^2 = (P_{G_1}P_{G_2})^2 = P_{G_1}P_{G_2}P_{G_1}P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_1}P_{G_2}P_{G_2} = P_{G_1}P_{G_2} = P$. Далее,

$P^* = (P_{G_1}P_{G_2})^* = P^*_{G_2}P^*_{G_1} = P_{G_2}P_{G_1} = P$. Но эти два свойства показывают,

что $P_{G_1}P_{G_2}$ является проектирующим оператором.

Следствие. *Два подпространства G_1, G_2 ортогональны в том и только том случае, когда* $P_{G_1}P_{G_2} = 0$.

Сформулируем ниже три утверждения, которыми будем пользоваться и доказательство которых проведем ниже.

Утверждение 3. *Сумма проектирующих операторов*

$$P_{G_1} + P_{G_2} + \ldots + P_{G_n} = Q \quad (n < \infty)$$

есть проектирующий оператор в том и только том случае, когда $P_{G_j}P_{G_k} = 0$ $(j \neq k)$, т. е. тогда и только тогда, когда подпространства G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ попарно ортогональны, и в этом случае $Q = P_G$, где $G = G_1 \oplus G_2 \oplus \ldots \oplus G_n$.

Утверждение 4. *Разность двух проектирующих операторов $P_{G_1} - P_{G_2}$ есть проектирующий оператор тогда и только тогда, когда $G_2 \subset G_1$, и в этом случае $P_{G_1} - P_{G_2}$ есть оператор проектирования на $G_1 \ominus G_2$.*

Утверждение 5. *Соотношение $G_2 \subset G_1$ эквивалентно неравенству $\|P_{G_2}f\| \leqslant \|P_{G_1}f\|$ или неравенству $(P_{G_2}f, f) \leqslant (P_{G_1}f, f)$ для любого $f \in H$.*

Доказательство утверждения 3.

Необходимость. Пусть оператор Q является проектирующим оператором. Для двух различных индексов j, k в силу неравенства $0 \leqslant (Pf, f) \leqslant \|f\|^2$, справедливого для любого f и для любого проектирующего оператора P, имеем

$$(P_{G_j}f, f) + (P_{G_k}f, f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} (P_{G_i}f, f) = (Qf, f) \leqslant \|f\|^2.$$

Положив $f = P_{G_j}h$, получаем

$$\|P_{G_j}h\|^2 + (P_{G_k}P_{G_j}h, P_{G_j}h) \leqslant \|P_{G_j}h\|^2.$$

Следовательно,

$$(P_{G_k}P_{G_j}h, P_{G_j}h) = \|P_{G_k}P_{G_j}h\|^2 = 0.$$

Так как последнее равенство справедливо для любого вектора h, то

$$P_{G_k}P_{G_j}=0,$$

а в силу следствия из теоремы 5 получаем $G_j\perp G_k$.

Достаточность условия следует из теоремы 4. В силу соотношения $P_{G_j}P_{G_k}=0$, $j\neq k$ имеем $Q^2=Q$ и $Q^*=Q$. Равенство $G=G_1\oplus G_2\oplus\ldots\oplus G_n$ очевидно.

Доказательство утверждения 4.

Достаточность. Пусть $G_2\subset G_1$. Рассмотрим подпространство $G=G_1\ominus G_2$. Так как $G\perp G_1$ и $G\oplus G_2=G_1$, то в силу утверждения 3 имеем, что оператор $P_{G_1}=P_G+P_{G_2}$ является проектирующим. Отсюда имеем, что разность $P_{G_1}-P_{G_2}$ есть проектирующий оператор.

Необходимость. Пусть оператор $P_G=P_{G_1}-P_{G_2}$ является проектирующим оператором. Отсюда имеем, что сумма

$$P_G+P_{G_2}=P_{G_1}$$

является проектирующим оператором, а следовательно, из утверждения 3 имеем

$$G\oplus G_2=G_1, \text{ т. е. } G_2\subset G_1.$$

Доказательство утверждения 5.

Необходимость. Пусть $G_2\subset G_1$. В силу утверждения 4 имеем проектирующий оператор

$$P_G=P_{G_1}-P_{G_2}, \text{ где } G=G_1\ominus G_2.$$

Поэтому для любого $f\in H$

$$(P_Gf,\ f)=(P_{G_1}f,\ f)-(P_{G_2}f,\ f)\geqslant 0.$$

Достаточность. Рассмотрим подпространства $L_1=H\ominus G_1$ и $L_2=H\ominus G_2$.

Пусть $f\in L_1$, тогда $P_{G_1}f=0$. Отсюда в силу неравенства $\|P_{G_2}f\|\leqslant\|P_{G_1}f\|$ для любого вектора $f\in H$ имеем $P_{G_2}f=0$, т. е. $f\in L_2$. Поэтому $L_1\subset L_2$, что равносильно включению $G_2\subset G_1$.

6. Спектр оператора

Одна из главных задач, связанная с изучением линейных операторов в гильбертовом или банаховом пространстве, состоит в отыскании элементов, сохраняющих под действием оператора свое направление, т. е. элементов, удовлетворяющих уравнению $Af=\lambda f$, где λ — число. Каждый такой элемент $f\neq 0$ называется *собственным вектором* оператора, а λ — *собственным значением*.

Решения уравнения $Af=\lambda_1 f$, λ_1 — фиксировано, образуют, очевидно, в силу линейности и непрерывности оператора A подпространство H_{λ_1}. Его размерность называется *кратностью собствен-*

ного значения λ_1, а подпространство называется *собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ_1. Если $\dim H_{\lambda_1}=1$, то собственное значение λ_1 называется *простым*.

Данные выше определения собственного значения и собственного вектора обобщают известные понятия из линейной алгебры, в частности, совокупность всех собственных значений называется в линейной алгебре спектром матрицы.

В общем случае линейного ограниченного оператора в бесконечномерном пространстве ситуация сложнее. Дадим определение спектра оператора.

Рассмотрим оператор $A-\lambda E=B(\lambda)$. Допустим, что для некоторого λ оператор $A-\lambda E$ имеет обратный $R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}$. Оператор R_λ называется *резольвентным оператором* для оператора A. Значения λ, при которых R_λ существует, определен во всем пространстве и ограничен, называются *регулярными* значениями оператора A (или принадлежащими *резольвентному множеству* оператора A). Совокупность всех значений λ, не являющихся регулярными, называется *спектром* оператора A, в частности, все собственные значения принадлежат спектру.

Таким образом, спектр оператора — это множество, дополнительное (в комплексной плоскости) к резольвентному.

Из рассмотрений гл. II об обратных операторах следуют утверждения:

а) Если λ таково, что $\frac{1}{|\lambda|}\|A\|=q<1$, то оператор $A-\lambda E$ имеет ограниченный обратный и при этом $R_\lambda=-\frac{1}{\lambda}\left(E+\frac{A}{\lambda}+\frac{A^2}{\lambda^2}+\ldots\right)$. Таким образом, спектр оператора A принадлежит множеству $|\lambda|\leqslant\|A\|$. В § 3 этот результат будет уточнен.

б) Если λ — регулярное значение, то и $\lambda+\Delta\lambda$ при $|\Delta\lambda|<\|(A-\lambda E)^{-1}\|^{-1}$ также есть регулярное значение. Отсюда получается, что совокупность регулярных значений (резольвентное множество) есть открытое множество, а спектр, как его дополнение, — замкнутое множество.

В конечномерном пространстве, как мы знаем, могут быть только две возможности:

— Уравнение $Af=\lambda f$ имеет ненулевое решение, т. е. λ — собственное значение для оператора (матрицы) A; оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ при этом не существует.

— Существует ограниченный (определенный на всем пространстве) оператор $(A-\lambda E)^{-1}$, т. е. λ — регулярная точка.

В бесконечномерном пространстве имеется еще и третья возможность:

— Оператор $(A-\lambda E)^{-1}$ существует, т. е. уравнение $Af=\lambda f$ имеет лишь нулевое решение, но этот оператор определен не на всем пространстве *).

---

*) Таким образом, спектру принадлежат те и только те значения λ, при

В соответствии с этим спектр оператора делится на:

1. *Точечный* спектр — те значения λ, при которых существует ненулевое решение $Af=\lambda f$. Точечный спектр оператора, очевидно, совпадает с множеством собственных значений оператора.

2. *Непрерывный спектр* — те значения λ, для которых оператор $B(\lambda)=(A-\lambda E)$ обладает обратным $B^{-1}(\lambda)=R_\lambda$ с плотной областью определения, однако эта область не совпадает со всем пространством.

3. *Остаточный спектр* — те значения λ, для которых оператор $B(\lambda)=(A-\lambda E)$ обладает обратным $B^{-1}(\lambda)=R_\lambda$, однако область его определения не плотна во всем пространстве.

Рассмотрим примеры.

Примеры.

1. Пусть в банаховом пространстве $C[0, 1]$ задан оператор умножения на независимую переменную:

$$Af(x)=xf(x).$$

Покажем, что любое вещественное число $\lambda\in[0, 1]$ принадлежит остаточному спектру оператора. Собственных функций и собственных значений у этого оператора нет, так как если $Af(x)=$ $=xf(x)=\lambda f(x)$, то $(x-\lambda)f(x)=0$ на отрезке $[0, 1]$. Поэтому $f(x)\equiv 0$. Таким образом, однородное уравнение имеет только тривиальное решение и оператор $R_\lambda=B^{-1}(\lambda)=(A-\lambda E)^{-1}$ существует. Область определения R_λ состоит из функций, которые в точке $\lambda, \lambda\in[0, 1]$ обязаны обращаться в нуль. Следовательно, область определения R_λ не плотна в $C\ [0, 1]$, т. е. любое число λ, принадлежащее отрезку $[0, 1]$, является точкой остаточного спектра оператора.

2. Пусть в гильбертовом пространстве l^2 задан оператор сдвига: если $\xi=\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$, то

$$A\xi=A(\xi_1, \xi_2, \ldots)=(0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Оператор $A^{-1}=(A-0\cdot E)^{-1}$ существует и осуществляет взаимно-однозначное отображение, но определен он только на последовательностях, у которых первая координата равна нулю. Множество таких последовательностей не является плотным в l^2. Следовательно, точка $\lambda=0$ принадлежит остаточному спектру оператора A.

Таким образом, мы ввели следующую классификацию спектра линейного ограниченного оператора: спектр состоит из трех множеств — точечного, непрерывного, остаточного, причем эти множества не пересекаются.

которых $A-\lambda E$ не имеет ограниченного обратного, определенного во всем пространстве. Причины, по которым это может произойти, могут быть различными. В соответствии с этим дается та или иная классификация спектра.

7. Симметрические операторы. Свойства квадратичной формы оператора

Сейчас мы приступаем к изучению ограниченных, определенных на всем гильбертовом пространстве симметрических операторов. После этого будут доказаны спектральные теоремы.

Важную роль при изучении симметрического оператора играет его квадратичная форма.

В случае симметрического оператора A значения отвечающей ему *квадратичной формы* (Af, f) всегда действительны, так как

$$(Af, f) = (f, A^*f) = (f, Af) = \overline{(Af, f)}.$$

Верно и обратное утверждение: если в комплексном гильбертовом пространстве для некоторого оператора A квадратичная форма (Af, f) действительна, то A — симметрический оператор. Действительно, всегда справедливо равенство

$$(A(f+g), f+g) - (A(f-g), f-g) + i(A(f+ig), f+ig) - \\ - i(A(f-ig), f-ig) = 4(Af, g).$$

Поменяв в нем местами f и g и перейдя к комплексно-сопряженным значениям, получим

$$(f+g, A(f+g)) - (f-g, A(f-g)) + i(f+ig, A(f+ig)) - \\ - i(f-ig, A(f-ig)) = 4(f, Ag).$$

Если квадратичная форма (Af, f) принимает только действительные значения, то $(f, Af) = \overline{(Af, f)} = (Af, f)$ и левые части этих двух равенств совпадают. Отсюда следует, что $(Af, g) = (f, Ag)$, т. е. $A^* = A$.

Заметим, что это предложение справедливо только в случае комплексного гильбертова пространства.

Если квадратичная форма действительна, то все собственные значения оператора тоже действительны. В этом случае собственное число $\lambda = (Af, f)/(f, f)$, где f — собственный вектор.

Собственные элементы f и g, отвечающие различным собственным значениям λ и μ, ортогональны. Действительно, $\lambda(f, g) = (\lambda f, g) = (Af, g) = (f, Ag) = (f, \mu g) = \mu(f, g)$ и $(f, g) = 0$, если $\lambda \neq \mu$.

Для квадратичной формы (Af, f) имеем неравенства

$$|(Af, f)| \leqslant \|Af\| \; \|f\| \leqslant \|A\| \; \|f\|^2.$$

Пусть наименьшая постоянная M, при которой для любого вектора f выполнено неравенство

$$|(Af, f)| \leqslant M\|f\|^2,$$

обозначена через N_A, тогда $N_A \leqslant \|A\|$.

Это неравенство верно и для несимметрического оператора. Если же оператор симметрический, то эти две постоянные равны.

В самом деле, так как $(A^2 f, f) = (Af, Af)$, то при любом $\lambda > 0$ справедливо

$$\|Af\|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(A\left(\lambda f + \frac{1}{\lambda} Af\right), \lambda f + \frac{1}{\lambda} Af\right) - \right.$$

$$\left. - \left(A\left(\lambda f - \frac{1}{\lambda} Af\right), \lambda f - \frac{1}{\lambda} Af\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left[N_A \left\| \lambda f + \frac{1}{\lambda} Af \right\|^2 + N_A \left\| \lambda f - \frac{1}{\lambda} Af \right\|^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} N_A \left[\lambda^2 \|f\|^2 + \frac{1}{\lambda^2} \|Af\|^2\right].$$

Если $\|Af\| \neq 0$, то последнее выражение достигает своего наименьшего значения при $\lambda^2 = \|Af\|/\|f\|$, откуда следует, что

$$\|Af\|^2 \leqslant N_A \|Af\| \cdot \|f\|, \ \|Af\| \leqslant N_A \|f\|,$$

эти неравенства справедливы и тогда, когда $\|Af\| = 0$. Таким образом, $\|A\| \leqslant N_A$. Следовательно, $\|A\| = N_A$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 6. *Если A — линейный ограниченный, определенный на всем пространстве, симметрический оператор в H, то все его собственные значения действительны, собственные элементы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, квадратичная форма (Af, f) действительна и, наконец, наименьшая постоянная N_A, для которой $\|Af, f\| \leqslant N_A \|f\|^2$, равна $\|A\|$.*

Заметим далее, что сумма симметрических операторов есть симметрический оператор, линейная комбинация их с действительными коэффициентами есть также симметрический оператор. В силу непрерывности скалярного произведения пределы по норме, поточечные и слабые пределы симметрических операторов есть симметрические операторы. Произведение симметрических операторов будет симметрическим оператором только тогда, когда сомножители перестановочны, т. е. $A_1 A_2 = A_2 A_1$ (пишут $A_1 \smile A_2$).

Между симметрическими операторами определяется отношение порядка $A \geqslant B$, если $(Af, f) \geqslant (Bf, f)$ для любого $f \in H$.

Линейный оператор, обладающий тем свойством, что $(Af, f) \geqslant 0$, называется *положительным*. Положительный оператор в комплексном гильбертовом пространстве симметричен. Это следует из того, что в этом случае квадратичная форма вещественна, а выше было показано, что тогда A — симметричен.

Для положительного симметрического оператора выполняется *обобщенное неравенство Шварца*: $|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f)(Ag, g)$. Действительно, пусть $h_\lambda = f + \lambda (Af, g) g$ и λ — действительное число. Тогда $0 \leqslant (Ah_\lambda, h_\lambda) = (Af, f) + 2\lambda |(Af, g)|^2 + \lambda^2 |(Af, g)|^2 \times$ $\times (Ag, g)$, и дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неположителен. Отсюда и получается доказательство.

Нижней и верхней гранями симметрического оператора A называются соответственно наибольшее m и наименьшее M из чисел, для которых выполняются неравенства

$$m(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant M(f, f),$$

т. е. неравенства $mE \leqslant A \leqslant ME$. Другими словами, M служит верхней гранью, а m — нижней гранью значений квадратичной формы (Af, f), когда f подчинено условию $\|f\|=1$. Но, как мы показали в предыдущей теореме, верхняя грань $|(Af, f)|$ равна норме оператора A, следовательно,

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\}.$$

Отсюда, в частности, следует, что соотношения $A \geqslant B$ и $A \leqslant B$ могут выполняться только тогда, когда $A=B$. В самом деле, если они оба выполняются, то для оператора $C=A-B$ будем иметь $(Cf, f)=0$, откуда $m_C=M_C=0$, поэтому $\|C\|=0$.

Введенное отношение порядка между операторами, очевидно, транзитивно, т. е. если $A \geqslant B$, а $B \geqslant C$, то $A \geqslant C$. Кроме того, если $A \geqslant B$, то $A+C \geqslant B+C$ и $kA \geqslant kB$ для любого оператора $C=C^*$ и любого числа $k>0$.

Хотя эти свойства отношения порядка и напоминают свойства, которыми обладают действительные числа, между теми и другими есть важное различие: можно указать два симметрических оператора, ни один из которых не превосходит другого в указанном смысле. Мы видим, что множество симметрических операторов частично упорядочено.

Теорема 7. *Всякая монотонная ограниченная последовательность симметрических операторов $\{A_n\}$ сходится поточечно к некоторому симметрическому оператору.*

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$0 \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \ldots \leqslant E.$$

Пусть $m<n$, тогда $A_{mn}=A_n-A_m \geqslant 0$. Воспользуемся обобщенным неравенством Шварца для оператора A_{mn}:

$$\|A_{mn}f\|^4 = (A_{mn}f, A_{mn}f)^2 \leqslant (A_{mn}f, f)\,(A^2_{mn}f, A_{mn}f).$$

Поскольку $0 \leqslant A_{mn} \leqslant E$, то $\|A_{mn}\| \leqslant 1$ и

$$\|A_mf - A_nf\|^4 \leqslant [(A_nf, f) - (A_mf, f)]\,\|f\|^2.$$

Числовая последовательность $\{(A_nf, f)\}$ ограничена и не убывает, следовательно, она сходится; таким образом, последовательность векторов $\{A_nf\}$ фундаментальна и в силу полноты H сходится. Оператор A, определенный равенством $Af = \lim\limits_{n\to\infty} A_nf$ для любого $f \in H$, очевидно, линеен и симметричен.

8. Квадратный корень из симметрического оператора

Квадрат симметрического оператора всегда является положительным оператором: $(A^2f, f)=(Af, Af)\geqslant 0$ для любого f.

Возникает вопрос, а можно ли извлечь корень из симметрического положительного оператора?

Справедлива следующая

Теорема 8. *Каждому симметрическому положительному оператору A соответствует единственный положительный симметрический квадратный корень, который обозначается $A^{1/2}$ $((A^{1/2})^2=A)$. Он представляет собой поточечный предел некоторой последовательности многочленов от A и в силу этого перестановочен со всеми операторами, перестановочными с A.*

Будем считать, не ограничивая общности, что $0\leqslant A\leqslant E$. Пусть $A=E-B$ $(0\leqslant B\leqslant E)$ и $X=A^{1/2}=E-Y$. Тогда решение уравнения $X^2=(A^{1/2})^2=A$ эквивалентно решению уравнения

$$Y=\frac{1}{2}(B+Y^2).$$

Решаем это уравнение методом последовательных приближений:

$$Y_0=0,\ Y_1=\frac{1}{2}B,\ \ldots,\ Y_{n+1}=\frac{1}{2}(B+Y_n^2),\ \ n\geqslant 0.$$

Покажем, что последовательность $\{Y_n\}$ сходится и предел ее служит решением требуемого уравнения.

Покажем прежде всего, что Y_n представляет собой многочлен относительно B с неотрицательными действительными коэффициентами; такой же вид имеет и оператор Y_n-Y_{n-1}. Пусть $n=1$. Тогда эти утверждения верны. Допустим, что они верны и при $n=m$, покажем их справедливость при $n=m+1$.

Для оператора Y_{m+1} утверждение очевидно, оно следует из его вида. Имеем для оператора

$$Y_{m+1}-Y_m=\frac{1}{2}(B+Y_m^2)-\frac{1}{2}(B+Y_{m-1}^2)=\frac{1}{2}(Y_m+Y_{m-1})(Y_m-Y_{m-1}).$$

Здесь мы воспользовались перестановочностью Y_m и Y_{m-1}, что следует из предположения индукции (они многочлены от B). В правой части стоит произведение двух многочленов от B с действительными неотрицательными коэффициентами, а поэтому доказательство по индукции закончено.

Далее, если $B\geqslant 0$, то $B^n\geqslant 0$, $n=2, 3, \ldots$. Действительно, при $n=2k$ $(B^{2k}f, f)=\|B^kf\|^2\geqslant 0$, а при $n=2k+1$ имеем $(B^{2k+1}f, f)=(BB^kf, B^kf)=(Bg, g)$ для любого вектора f. Поэтому $Y_n\geqslant 0$ и $Y_n-Y_{n-1}\geqslant 0$. Наконец, $\|Y_n\|\leqslant 1$ для любого n. В самом деле, при

$n=0$ это верно, а для остальных n доказывается по индукции с помощью равенства

$$Y_{n+1}=\frac{1}{2}(B+Y_n^2),\ n\geqslant 0.$$

Применим теперь только что доказанную теорему о монотонных последовательностях операторов. Получаем, что последовательность симметрических операторов $\{Y_n\}$ монотонная, а поэтому сходится, и ее предел — оператор Y — удовлетворяет уравнению

$$Y=\frac{1}{2}(B+Y^2)\ \left(\lim_{n\to\infty}Y_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(B+Y_n^2)\right).$$

Таким образом, построен симметрический положительный оператор Y, который является пределом последовательности многочленов от A, кроме того,

$$X^2=A,\ X=E-Y.$$

Докажем единственность квадратного корня. Пусть X' — положительный симметрический оператор такой, что $X'^2=A$. Так как $X'A=X'(X')^2=(X')^2X'=AX'$, то X' перестановочен со всеми многочленами от оператора A, а также с пределами таких многочленов и, в частности, с X. Возьмем и рассмотрим квадратные корни Z, Z' соответственно из X и X', построенные так, как только что был построен корень из A. Пусть $g=(X-X')f$ для любого $f\in H$. Имеем

$$\|Zg\|^2+\|Z'g\|^2=(Z^2g,g)+(Z'^2g,g)=(Xg,g)+(X'g,g)=$$
$$=((X+X')(X-X')f,g)=((X^2-X'^2)f,g)=((A-A)f,g)=0,$$

поэтому $Zg=Z'g=0$ и, следовательно, $Xg=ZZg=0$ и $X'g=Z'Z'g=0$. Отсюда получаем, что $\|(X-X')f\|^2=((X-X')^2f,f)=((X-X')g,f)=0$, т. е. $(X-X')f=0$. Так как это справедливо для любого $f\in H$, то $X'=X$.

9. Спектральная теорема для симметрического оператора в n-мерном пространстве

Хорошо известно, что при решении задач о приведении матрицы к жордановой форме возникает вопрос о нахождении ее собственных значений, а также собственных и присоединенных векторов.

Если матрица задана числами $\{a_{ik}\}$, то, чтобы найти собственные векторы и собственные значения, необходимо решить систему

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}-\lambda\delta_{ik})f_k=0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

Для того чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю. Определитель является многочленом по λ степени n и обращается в нуль хотя бы при одном значении λ. Поэтому в конечномерном комплексном пространстве линейный оператор A, заданный матрицей $\{a_{ik}\}$ (не обязательно эрмитово симметрической), имеет хотя бы одно собственное значение. В общем случае ничего большего утверждать нельзя, например, оператор $y=Af$, где

$$A=\{a_{ik}\}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет единственное собственное значение $\lambda=1$, притом оно простое, т. е. размерность отвечающего ему собственного подпространства равна 1.

Но если матрица эрмитово симметрическая ($a_{ik}=\overline{a}_{ki}$), или, что то же, $(Af,\ g)=(f,\ Ag)$ для любых $f,\ g\in\mathbf{R}^n$, то существует ортонормированная система из n собственных векторов

$$f_i=(f_{i1},\ f_{i2},\ \ldots,\ f_{in}),\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

соответствующих собственным значениям λ_i. Взяв их в качестве нового базиса и разложив вектор f по базису, мы запишем, что

$$(Af,\ f)=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\overline{g}_i g_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\overline{a}_k a_k=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k|a_k|^2,$$

где $f=(g_1,\ \ldots,\ g_n)$ *). Таким образом, квадратичная форма приведена к диагональному виду. Имея в виду обобщения, получим этот результат в иной форме.

Занумеруем собственные значения в порядке их возрастания: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_p$ (здесь $p\leqslant n$).

Пусть H_{λ_i}— собственное подпространство оператора A, отвечающее собственному значению λ_i, $1\leqslant i\leqslant p$. Как мы видели, если оператор A симметрический, т. е. $a_{ik}=\overline{a}_{ki}$, то при $\lambda_i\neq\lambda_k$ $H_{\lambda_i}\perp H_{\lambda_k}$.

Кроме того, $\mathbf{R}^n=H_{\lambda_1}\oplus H_{\lambda_2}\oplus\ldots\oplus H_{\lambda_p},\ p\leqslant n.$

Положим $H(\lambda_i)=\sum\limits_{j=1}^{i}\oplus H_{\lambda_j}$. Тогда можно записать, что

$$H=\sum_{i=1}^{p}\oplus[H(\lambda_i)\ominus H(\lambda_{i-1})],\quad H(\lambda_0)=\{0\}.$$

---

*) В новом базисе из векторов f_i вектор f представляется в виде $f=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i f_i$.

(Здесь всюду равенства понимаются в том смысле, что всякий вектор из $H=\mathbf{R}^n$ однозначно разлагается по своим составляющим из правой части.)

Подпространства $H(\lambda_i)$ образуют возрастающую последовательность подпространств

$$\{0\}=H(\lambda_0)\subset H(\lambda_1)\subset\ldots\subset H(\lambda_p)=H.$$

Обозначим через $E(\lambda_i)$ оператор ортогонального проектирования на подпространство $H(\lambda_i)$, получим согласно утверждению 5 п. 5, что

$$0=E(\lambda_0)\leqslant E(\lambda_1)\leqslant\ldots\leqslant E(\lambda_{p-1})\leqslant E(\lambda_p)=E.$$

Пусть E_{λ_i} — оператор проектирования на $H(\lambda_i)\ominus H(\lambda_{i-1})$. Согласно утверждению 4 п. 5, $E_{\lambda_i}=E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})$. Поэтому в терминах проекционных операторов разложение

$$H=\sum_{i=1}^{p}[H(\lambda_i)\ominus H(\lambda_{i-1})]$$

можно записать в виде

$$E=\sum_{i=1}^{p}[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})]=\sum_{i=1}^{p}E_{\lambda_i},\ E(\lambda_0)=0$$

(E — единичный оператор, т. е. оператор проектирования на все H). Поскольку E_{λ_i} является оператором проектирования на собственное подпространство H_{λ_i}, то $AE_{\lambda_i}f=\lambda_i E_{\lambda_i}f$ для любого $f\in H$, т. е. $AE_{\lambda_i}=\lambda_i E_{\lambda_i}$. Отсюда

$$A=A\sum_{i=1}^{p}[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})]=A\sum_{i=1}^{p}E_{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i E_{\lambda_i}=$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})].$$

Так как

$$E_{\lambda_i}\cdot E_{\lambda_k}=E_{\lambda_k}E_{\lambda_i}=\begin{cases}0 \text{ при } i\neq k,\\ E_{\lambda_k} \text{ при } i=k,\end{cases}$$

то для степеней оператора A верна формула

$$A^m=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i^m E_{\lambda_i}.$$

Следовательно, многочлен степени n от оператора A

$$p(A)=\alpha_0E+\alpha_1A+\ldots+\alpha_nA^n,$$

α_i — числа, может быть записан в виде

$$p(A)=\sum_{i=1}^{p} p(\lambda_i) E_{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{p} p(\lambda_i)[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})].$$

Позже мы убедимся, что подобные формулы будут иметь место в случае произвольного симметрического оператора в гильбертовом пространстве. Формула

$$A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})]$$

называется *спектральным разложением* симметрического оператора A в $\mathbf{R}^n$, ее можно переписать в виде

$$(Af,\ g)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(\Delta_i E(\lambda) f,\ g) \text{ для любых } f,\ g\in H,$$

$$(\Delta_i E(\lambda) f,\ g)=(E(\lambda_i) f,\ g)-(E(\lambda_{i-1}) f,\ g).$$

Таким образом, доказана спектральная теорема для симметрического оператора в конечномерном пространстве.

Теорема 9. *Всякому симметрическому оператору A в конечномерном пространстве $\mathbf{R}^n$ можно поставить в соответствие некоторое семейство проекционных операторов $E(\lambda_i)$, $i=1, 2, \ldots, p\leqslant n$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — собственные значения оператора A, которые обладают свойствами:*

(а) $E(\lambda_i)\leqslant E(\lambda_j)$ *при* $\lambda_i\leqslant\lambda_j$;

(б) $E(\lambda_p)=E$, $E(\lambda_0)=0$;

(в) *с помощью* $E(\lambda_i)$ *оператор* A *представим в виде*

$$A=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i[E(\lambda_i)-E(\lambda_{i-1})]=\int_{-\infty}^{+\infty}\lambda dE(\lambda),$$

где интеграл символически обозначает сумму, стоящую слева.

10. Вполне непрерывные операторы. Спектральная теорема

Наиболее простым обобщением спектральной теоремы для конечномерного случая является ее аналог для вполне непрерывных операторов.

Пусть A — вполне непрерывный симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда, как было показано,

$$\sup_{\|f\|=1}|(Af,\ f)|=\sup_{\|f\|=1}\|Af\|=\|A\|.$$

Пусть $\{g_n\}$ — последовательность элементов такая, что $\|g_n\|=1$ и $|(Ag_n,\ g_n)|\to\|A\|$ при $n\to\infty$. Допустим, что нумерация такая, что

$(Ag_n,\ g_n)$ сама сходится к некоторому вещественному числу λ_1; $\lambda_1=\|A\|$ или $\lambda_1=-\|A\|$. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$\|Ag_n\|^2-2\lambda_1(Ag_n,\ g_n)+\lambda_1^2\|g_n\|=\|Ag_n-\lambda_1 g_n\|^2\geqslant 0.$$

Поскольку

$$\|Ag_n\|^2\leqslant\|A\|^2=\lambda_1^2,\ (Ag_n,\ g_n)\to\lambda_1,\ \|g_n\|^2=1,$$

то $\|Ag_n-\lambda_1 g_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, а поэтому $Ag_n-\lambda_1 g_n\to 0$ при $n\to\infty$. Так как A вполне непрерывный оператор, то $\{Ag_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\{Ag_{n_k}\}$; так как $Ag_{n_k}-\lambda_1 g_{n_k}\to 0$, то $\{g_{n_k}\}$ также сходится к некоторому пределу f_1. Имеем $Af_1=\lim Ag_{n_k}$, $\|f_1\|=\lim\|g_{n_k}\|=1$, и, следовательно, $Af_1=\lambda_1 f_1$. Кроме того,

$$|(Af_1,\ f_1)|=|(\lambda_1 f_1,\ f_1)|=|\lambda_1|=\|A\|,$$

$$\|Af_1\|=\|\lambda_1 f_1\|=|\lambda_1|=\|A\|.$$

Таким образом, всякий вполне непрерывный симметрический оператор $A\neq 0$ имеет по крайней мере одно отличное от нуля собственное значение λ_1. Собственный вектор является решением экстремальной задачи: найти вектор φ, $\|\varphi\|=1$, при котором $|(A\varphi,\ \varphi)|$ достигает своего максимума. Этот собственный вектор обозначим f_1. Попытаемся найти другие собственные векторы оператора A, ортогональные f_1. Рассмотрим такое разложение: $H=H_1\oplus L_1$, где $L_1=\{f_1\}$ — подпространство, образованное вектором f_1. Подпространство H_1 инвариантно относительно оператора A, т. е. $AH_1\subset H_1$. Действительно, $(Af,\ f_1)=(f,\ Af_1)=(f,\ \lambda_1 f_1)=\lambda_1(f,\ f_1)=0$ для любого $f\in H_1$. Поэтому образ вектора также принадлежит H_1.

Оператор A, если его рассмотреть в H_1, является вполне непрерывным и симметрическим. Следовательно, в H_1 существует собственный вектор f_2, $\|f_2\|=1$, и соответствующее собственное значение λ_2 равно по абсолютной величине наибольшему значению $|(Af,\ f)|$, $\|Af\|$, при условии, что $f\in H_1$, $f\perp f_1$ и $\|f\|=1$. Этот процесс можно продолжить.

Таким образом, получим бесконечную систему $\{f_n\}$ собственных векторов; эта система ортонормированная. По самому построению $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\ldots$. Покажем, что $\lambda_n\to 0$ при $n\to\infty$. Допустим противное, тогда $\left\{\dfrac{1}{\lambda_n}f_n\right\}$ будет ограничена и последовательность образов $\{f_n\}$ при отображении A будет содержать сходящуюся подпоследовательность, что невозможно, так как $\|f_i-f_j\|^2=2$, $i\neq j$. Пусть f — любой вектор из H. Положим

$$h_n=f-\sum_{i=1}^{n}(f,\ f_i)f_i.$$

Так как каждый h_n принадлежит подпространству H_n, образованному векторами, ортогональными векторам $f_1, f_2, ..., f_n$, то $\|Ah_n\| \leqslant |\lambda_{n+1}| \cdot \|h_n\|$; кроме того,

$$\|h_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |(f, f_i)|^2 \leqslant \|f\|^2, \quad \lambda_{n+1} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

поэтому $Ah_n = Af - \sum_{i=1}^{n} (f, f_i) Af_i \to 0$ при $n \to \infty$, что можно записать так:

$$Af = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, f_i) f_i = \sum_{i=1}^{\infty} (f, Af_i) f_i = \sum_{i=1}^{\infty} (Af, f_i) f_i.$$

Такой ряд сводится к конечной сумме, если все λ_i начиная с некоторого номера равны нулю. Последовательность (конечная или бесконечная) чисел $\lambda_i \neq 0$ содержит каждое отличное от нуля собственное значение оператора A столько раз, какова его кратность, так как в противном случае существовал бы собственный вектор φ, отвечающий собственному значению $\lambda \neq 0$, ортогональный всем f_i. Тогда

$$0 \neq A\varphi = \lambda\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi, f_i) f_i = 0,$$

и, тем самым, получилось противоречие. Из сказанного также следует, что любое собственное значение $\lambda \neq 0$ оператора A имеет конечную кратность. В противном случае необходимо снова рассмотреть множество $\left\{\frac{1}{\lambda}\varphi_k\right\}$, где $A\varphi_k = \lambda\varphi_k$. Формулу $Af = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, f_i) f_i$ запишем в виде

$$Af = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) f, \quad E(\lambda) f = \begin{cases} \sum\limits_{\lambda_k < \lambda} (f, f_k) f_k & \text{при } \lambda < 0, \\ f - \sum\limits_{\lambda_k > \lambda} (f, f_k) f_k & \text{при } \lambda \geqslant 0. \end{cases}$$

Выше написан интеграл Стилтьеса. Заметим, что $E(\lambda)$, как функция от λ, постоянна между любыми двумя последовательными собственными значениями оператора A, равна 0 для значений λ, меньших всех собственных значений, и равна единичному оператору E для значений λ, больших всех собственных значений. Когда λ, изменяясь, переходит через собственное значение λ_p, то $E(\lambda)$ претерпевает скачок, равный $\widehat{E}(\lambda_p) = E(\lambda_p) - E(\lambda_p - 0)$, $\widehat{E}(\lambda_p)$ — проекционный оператор , проектирующий на собственное подпространство, соответствующее данному собственному значению λ_p.

Таким образом,

$$(E(\lambda_p)-E(\lambda_p-0))f=\widehat{E}(\lambda_p)f=\sum_{\lambda_k=\lambda_p}(f,\ f_k)f_k \text{ при } \lambda_p\neq 0,$$

$$\widehat{E}(0)f=f-\sum_{\lambda_k\neq 0}(f,\ f_k)f_k.$$

Итак, доказана спектральная теорема для симметрического вполне непрерывного оператора.

Теорема 10. *Всякому симметрическому вполне непрерывному оператору A в H можно поставить в соответствие некоторое семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, зависящее от действительного параметра λ, которое обладает свойствами:*

(а) $E(\lambda)\leqslant E(\mu)$ *при* $\lambda\leqslant\mu$;

(б) $E(\lambda+0)=E(\lambda)$;

(в) $E(\lambda)=0$ *при* λ, *меньшем наименьшего собственного значения оператора,* $E(\lambda)=E$ *при* λ, *большем наибольшего собственного значения оператора. С помощью* $E(\lambda)$ *оператор представим в виде*

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda).$$

11. Спектральная теорема для симметрического ограниченного оператора

Пусть A — симметрический оператор. Произвольному многочлену с действительными коэффициентами

$$p(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_n\lambda^n$$

поставим в соответствие симметрический оператор

$$p(A)=a_0E+a_1A+\ldots a_nA^n.$$

Такое соответствие, очевидно, однородно, аддитивно и мультипликативно; это означает, что многочленам $cp(\lambda)$, $p(\lambda)+q(\lambda)$, $p(\lambda)\cdot q(\lambda)$ соответствуют операторы $cp(A)$, $p(A)+q(A)$, $p(A)\times\times q(A)$. Далее, это соответствие положительного типа, т. е. если $p(\lambda)\geqslant 0$ при $m\leqslant\lambda\leqslant M$, где M и m — верхняя и нижняя грани оператора A, то оператор $p(A)\geqslant 0$.

Для доказательства представим $p(\lambda)$ в виде

$$p(\lambda)=d\prod_i(\lambda-\alpha_i)\prod_j(\beta_j-\lambda)\prod_k[(\lambda-\gamma_k)^2+\delta_k^2],$$

где $d\geqslant 0$, $\alpha_i\leqslant m$, $\beta_j\geqslant M$, а множители в квадратных скобках соответствуют попарно сопряженным комплексным корням и при $\delta_k=0$ корням, заключенным между m и M. В силу того что многочлен $p(\lambda)\geqslant 0$, они четной кратности. Если подставить оператор

A, то мы получим представление оператора $p(A)$ в виде произведения перестановочных операторов, причем положительных. Отсюда следует, что $p(A)$ — положительный оператор. Действительно, если A_1 и A_2 — перестановочные положительные симметрические операторы, то A_1A_2 является положительным и симметрическим оператором:

$$(A_1A_2f,\ f)=(A_1A_2^{1/2}A_2^{1/2}f,\ f)=(A_2^{1/2}A_1A_2^{1/2}f,\ f)=(A_1A_2^{1/2}f,\ A_2^{1/2}f)\geqslant 0.$$

Симметричность очевидна. Отсюда даже следует, что неравенство $A_1\geqslant A_2$ сохраняется, если обе его части умножить на один и тот же положительный симметрический оператор C, перестановочный с A_1 и A_2:

$$A_1C=CA_1\geqslant CA_2=A_2C.$$

Таким образом, мы можем сказать, что если два многочлена таковы, что $p(\lambda)\geqslant q(\lambda)$, $m\leqslant\lambda\leqslant M$, то $p(A)\geqslant q(A)$.

Займемся теперь распространением рассматриваемого соответствия на функции, отличные от полиномов. Обозначим буквой C класс, который состоит из всех непрерывных на отрезке $[m,\ M]$ вещественных функций $\{\varphi\}$, а также из всех кусочно-непрерывных функций (обозначим $\{\psi\}$), которые являются пределами монотонно убывающих, сходящихся в каждой точке последовательностей непрерывных функций $\{\varphi_n\}$. Справедлива

Лемма 1. *Для всякой функции $\psi(\lambda)\in C$, $m\leqslant\lambda\leqslant M$ можно построить бесконечную последовательность полиномов $p_n(\lambda)$, $m\leqslant\lambda\leqslant M$, монотонно убывающую и сходящуюся в каждой точке к функции $\psi(\lambda)$.*

По определению класса C существует последовательность $\{\varphi_n\}$ — монотонно убывающая, сходящаяся в каждой точке к $\psi(\lambda)$. Пусть n фиксировано, приблизим непрерывную функцию $\varphi_n(\lambda)+\frac{3}{2^{n+2}}$ с точностью $\frac{1}{2^{n+2}}$ полиномом $p_n(\lambda)$, $m\leqslant\lambda\leqslant M$. Имеем $\left|p_n(\lambda)-\left[\varphi_n(\lambda)+\frac{3}{2^{n+2}}\right]\right|\leqslant\frac{1}{2^{n+2}}$. Следовательно, в каждой точке λ: $\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant p_n(\lambda)-\varphi_n(\lambda)\leqslant\frac{1}{2^n}$, а поэтому вместе с $\varphi_n(\lambda)$ многочлен $p_n(\lambda)$ стремится к $\psi(\lambda)$ при $n\to\infty$ в каждой точке λ. Последовательность $p_n(\lambda)$ монотонно убывающая:

$$p_{n+1}(\lambda)\leqslant\varphi_{n+1}(\lambda)+\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant\varphi_n(\lambda)+\frac{1}{2^{n+1}}\leqslant p_n(\lambda),$$

что и требовалось.

Построим теперь операторы $p_n(A)$. Они симметрические, монотонно убывают, ограничены снизу оператором αE, где $\alpha=\inf\limits_{m\leqslant\lambda\leqslant M}\psi(\lambda)$. Согласно теореме 7 п. 6 они поточечно сходятся к некоторому оператору, который по определению примем за $\psi(A)$. Оператор $\psi(A)$ не зависит от частного выбора последовательности $\{p_n(\lambda)\}$: если $\{q_n(\lambda)\}$ — другая последовательность такого же типа, то $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(A) = \lim\limits_{n\to\infty} q_n(A)$. В самом деле, каково бы ни было целое число r, неравенства

$$p_s(\lambda) \leqslant q_r(\lambda) + \frac{1}{r}, \; q_s(\lambda) \leqslant p_r(\lambda) + \frac{1}{r}$$

выполняются при достаточно больших s в каждой точке λ, а в силу теоремы о конечных покрытиях — и для всех $\lambda \in [m, M]$.

Действительно, неравенства в силу непрерывности входящих в него функций выполнены и в некоторых окрестностях каждой точки λ. Выбирая конечное подпокрытие отрезка $[m, M]$, получим требуемый результат. Тогда $p_s(A) \leqslant q_r(A) + \frac{E}{r}$, $q_s(A) \leqslant p_r(A) + \frac{E}{r}$. Переходя в этих неравенствах к пределу сначала при $s \to \infty$, а затем при $r \to \infty$, получим, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(A) = \lim_{n\to\infty} q_n(A).$$

Тем же рассуждением легко показать, что если

$$\psi_1(\lambda) \geqslant \psi_2(\lambda), \; m \leqslant \lambda \leqslant M, \text{ то } \psi_1(A) \geqslant \psi_2(A).$$

Таким образом, соответствие между операторами и функциями класса C, как легко заключить, монотонно, аддитивно, однородно и мультипликативно (последние три свойства следуют из свойств предела).

Очевидно, соответствие между симметрическим оператором A и функциями можно распространить на более широкий класс, чем C, а именно на класс C_1 функций, которые можно представить в виде разностей функций, принадлежащих C. Указанные выше свойства монотонности, аддитивности, однородности и мультипликативности можно сохранить.

Среди «функций» симметричного оператора A, которые только что были определены, имеются и проекционные операторы; они соответствуют функциям $e(\lambda)$, принимающим только значения 0 и 1. При этом, очевидно, $[e(\lambda)]^2 = e(\lambda)$, а поэтому $[e(A)]^2 = e(A)$. Оператор $e(A)$ — симметрический, как предел симметрических, и $[e(A)]^2 = e(A)$, поэтому, как мы знаем, он проекционный.

Рассмотрим, в частности, функцию $e_\mu(\lambda)$, зависящую от параметра μ и принимающую значения 1 и 0 соответственно при $\lambda \leqslant \mu$ и при $\lambda > \mu$, а при $\mu < m$, $e_\mu(\lambda) = 0$ и $e_\mu(\lambda) = 1$ при $\mu \geqslant M$; функция $e_\mu(\lambda) \in C$, следовательно, ей соответствует проекционный оператор $e_\mu(A)$, который обозначим $E(\mu)$. Так как

$$e_\mu(\lambda) e_\nu(\lambda) = e_\mu(\lambda), \quad \mu < \nu,$$

то по свойству мультипликативности соответствия получим

$$E(\mu) \cdot E(\nu) = E(\nu) E(\mu) = E(\mu).$$

Поскольку $e_\mu(\lambda) \leqslant e_\nu(\lambda)$ при $\mu \leqslant \nu$, то и $E(\mu) \leqslant E(\nu)$; так как в интервале $m \leqslant \lambda \leqslant M$, согласно определению, $e_\mu(\lambda)=0$ при $\mu<m$ и $e_\mu(\lambda)=1$ при $\mu \geqslant M$, то $E(\mu)=0$ при $\mu<m$ и $E(\mu)=E$ при $\mu \geqslant M$.

Функция $E(\mu)$ как функция параметра μ непрерывна справа. Действительно, зафиксируем какое-нибудь значение μ и возьмем убывающую последовательность многочленов $p_n(\lambda)$, стремящихся к $e_\mu(\lambda)$, $\lambda \in [m, M]$, причем потребуем, чтобы $p_n(\lambda) \geqslant e_{\mu+\frac{1}{n}}(\lambda)$.

Тогда $p_n(A) \geqslant E\left(\mu+\frac{1}{n}\right) \geqslant E(\mu)$. Так как $p_n(A) \to E(\mu)$ при $n\to\infty$, то $E\left(\mu+\frac{1}{n}\right) \to E(\mu)$ при $n\to\infty$. Поэтому, если $\varepsilon\to 0$, так что $0<\varepsilon<1/n$, то $E\left(\mu+\frac{1}{n}\right) \geqslant E(\mu+\varepsilon) \geqslant E(\mu)$. Следовательно, $E(\mu+\varepsilon) \to E(\mu)$ при $\varepsilon\to 0$.

Получим теперь интегральное представление для оператора A. Заметим, если $\mu<\nu$, то, очевидно, выполнены неравенства

$$\mu[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)] \leqslant \lambda[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)] \leqslant \nu[e_\nu(\lambda)-e_\mu(\lambda)],$$

поэтому можно записать:

$$\mu(E(\nu)-E(\mu)) \leqslant A(E(\nu)-E(\mu)) \leqslant \nu\cdot(E(\nu)-E(\mu)).$$

Пусть $\mu_0<m<\mu_1<\mu_2<\ldots<\mu_{n-1}<M \leqslant \mu_n$. Записав неравенства, приведенные выше, для $\mu=\mu_{k-1}$, $\nu=\mu_k$, $k=1, 2, \ldots, n$ и просуммировав, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_{k-1}(E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})) \leqslant A\sum_{k=1}^{n}(E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu_k(E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})).$$

Из этих сумм вторая равна $A(E(\mu_n)-E(\mu_0))=A(E-0)=A$, и при $\max\limits_k(\mu_k-\mu_{k-1}) \leqslant \varepsilon$ разность между первым и последними членами этих неравенств не превосходит εE. Поэтому $\left\| A-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E(\mu_k)-E(\mu_{k-1}))\right\| \leqslant \varepsilon$, где λ_k заключено между μ_k и μ_{k-1}.

Если число n частичных интервалов (μ_{k-1}, μ_k) неограниченно увеличивать так, чтобы наибольшая из длин стремилась к нулю, то суммы $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(E(\mu_k)-E(\mu_{k-1}))$ будут по норме стремиться к оператору A. Поскольку $E(\lambda)$ как функция λ постоянна при $\lambda \geqslant M$ и при $\lambda<m$, то полученный результат можно записать по анало-

гии с обычными интегралами Стилтьеса в виде

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE(\lambda).$$

Функцию $E(\lambda)$ в точке m мы считаем равной $E(m-0)=0$.

Как отмечалось, интегральные суммы по норме стремятся к оператору A, поэтому для любых f, $g \in H$ будет выполнено соотношение

$$(Af, g) = \int_{m-0}^{M} \lambda d(E(\lambda) f, g)$$

(поскольку из сходимости по норме следует слабая сходимость). Левая часть этого равенства определена независимо от $E(\lambda)$. Согласно теоремам об обычном интеграле Стилтьеса числовая функция $(E(\lambda)f, g)$ с точностью до постоянного слагаемого определяется равенством выше в точках ее непрерывности, а также при $\lambda = m-0$, $\lambda = M$. А так как эта функция непрерывна справа и в точке M принимает значение (f, g), то она всюду определена однозначно, а отсюда следует, что и семейство $E(\lambda)$ единственным образом определяется по оператору A. Таким образом, доказана спектральная теорема для линейного ограниченного симметрического оператора.

Теорема 11. *Всякому симметрическому оператору A в H, имеющему нижнюю грань m и верхнюю грань M, можно поставить в соответствие единственное семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, зависящее от действительного параметра λ, $\lambda \in [m, M]$, которое обладает свойствами:*

а) $E(\lambda) \leqslant E(\mu)$ *при* $\lambda \leqslant \mu$;

б) $E(\lambda+0) = E(\lambda)$;

в) $E(\lambda) = 0$ *при* $\lambda < m$ *и* $E(\lambda) = E$ *при* $\lambda \geqslant M$. *С помощью* $E(\lambda)$ *оператор A представляется в виде*

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \int_{m-0}^{M} \lambda \, dE(\lambda). \text{ *)}$$

Пример. Рассмотрим в пространстве $L^2[0, 1]$ оператор умножения на независимую переменную. $Af(x) = xf(x)$. Имеем $A^2 f(x) = x^2 f(x)$, для любого многочлена $p(x)$ имеем, что $p(A)f(x) = p(x)f(x)$. Для любой функции $\psi(x)$ из класса C получаем $\psi(A)f(x) = \psi(x)f(x)$.

---

*) Очевидно, что для многочлена $p(\lambda)$, а также для любой непрерывной функции $u(\lambda)$ справедливы представления:

$$p(A) = \int_{m-0}^{M} p(\lambda) \, dE(\lambda), \quad u(A) = \int_{m-0}^{M} u(\lambda) \, dE(\lambda).$$

Нам надлежит вычислить проекционный оператор, соответствующий функции

$$e_\mu(x)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad x\leqslant\mu,\\ 0 & \text{при} \quad x>\mu.\end{cases}$$

Эта функция принадлежит классу C, поэтому, в частности, $E_\mu f(x)=e_\mu(x)f(x)$, т. е. проекционный оператор $E(\mu)$ спектрального семейства действует в пространстве $L^2[0,1]$ как оператор умножения на функцию $e_\mu(x)$. Имеем, очевидно, что

$$A=x=\int\limits_0^1\lambda\, de_\lambda(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

12. Спектральная теорема для унитарного оператора

По аналогии с доказательством спектральной теоремы для ограниченных симметрических операторов можно получить и спектральную теорему для унитарных операторов, которые сейчас будут определены. Спектральная теорема для унитарных операторов будет существенно использована также при доказательстве спектральной теоремы для неограниченных симметрических операторов.

Определение 4. Линейный оператор V в гильбертовом пространстве H называется *изометрическим*, если он не меняет величины скалярного произведения, т. е. если

$$(Vf,\ Vg)=(f,\ g)\ \text{ для любых } f,\ g\in H.$$

Если при этом V отображает H на все H, то V называется *унитарным.*

Утверждение 6. *Ограниченный линейный оператор U, отображающий гильбертово пространство H в себя, является унитарным тогда и только тогда, когда $U^*=U^{-1}$.*

Если U унитарный, то из соотношения

$$\|Uf\|=\|f\|$$

следует, что уравнение $Uf=0$ не имеет решений, кроме $f=0$. Откуда следует существование обратного оператора U^{-1}, определенного *) во всем H:

$$D_U=R(U)=H.$$

Пусть $g=U^{-1}h$, тогда для любого $h\in H$ имеем $(Uf,\ h)=(f,\ U^{-1}h)$, т. е. $U^*=U^{-1}$. Обратно, из условия $U^*=U^{-1}$ следует инвариантность скалярного произведения:

$$(Uf,\ Ug)=(f,\ U^*Ug)=(f,\ U^{-1}Ug)=(f,\ g).$$

---

*) Через D_U и $R(U)$ соответственно обозначаются область определения и область значения оператора U.

В силу ограниченности оператора U оператор U^* определен во всем пространстве H, поэтому имеем

$$R(U) = D_{U^{-1}} = D_{U^*} = H.$$

Пример.

В пространстве $H = L^2(-\infty, +\infty)$ оператор U действует на любой вектор $x(t) \in L^2(-\infty, +\infty)$ следующим образом:

$$Ux(t) = x(t+a),$$

где a — произвольное вещественное число. U представляет собой унитарный оператор.

В конечномерном пространстве всякий оператор с нулевым ядром производит отображение на все пространство. Поэтому любой изометрический оператор в конечномерном пространстве является унитарным. В общем случае это не так. Пусть в пространстве l^2 оператор V действует на любой вектор $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$ следующим образом: $V\xi = \xi_0 = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$. Оператор V является изометричным, но не унитарным.

Для унитарных операторов справедлива спектральная теорема, аналогичная теореме 11 для симметрических ограниченных операторов. Докажем ее. Начнем с того, что тригонометрическому многочлену

$$P(e^{i\varphi}) = \sum_{k=-m}^{n} c_k e^{ik\varphi}$$

поставим в соответствие оператор

$$P(U) = \sum_{k=-m}^{n} c_k U^k,$$

где U — унитарный оператор, коэффициенты c_k могут быть любыми комплексными числами. Очевидно, введенное соответствие однородно, аддитивно и мультипликативно. Сопряженному многочлену

$$\overline{P(e^{i\varphi})} = \sum_{k=-m}^{n} \bar{c}_k e^{-ik\varphi}$$

соответствует оператор

$$T = \sum_{k=-m}^{n} \bar{c}_k U^{-k},$$

который является сопряженным к оператору $P(U)$:

$$(P(U))^* = \Big(\sum_{k=-m}^{n} c_k U^k\Big)^* = \sum_{k=-m}^{n} \bar{c}_k U^{-k} = T.$$

Из представлений для $P(U)$ и T получаем, что оператор $P(U)$ будет симметрическим тогда и только тогда, когда $n=m$, $c_k=\bar{c}_{-k}$, т. е. в том и только в том случае, когда $P(e^{i\varphi})$ принимает вещественные значения.

Следующая лемма позволяет утверждать, что введенное соответствие — положительного типа, т. е. если

$$P(e^{i\varphi})\geqslant 0 \quad (0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi),$$

то

$$P(U)\geqslant 0.$$

Лемма 2. *Всякий тригонометрический многочлен $P(e^{i\varphi})\geqslant 0$ может быть представлен в виде квадрата модуля некоторого другого тригонометрического многочлена $Q(e^{i\varphi})$:*

$$P(e^{i\varphi})=|Q(e^{i\varphi})|^2.$$

В силу вещественности $P(e^{i\varphi})$ имеем

$$P(e^{i\varphi})=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\varphi}, \text{ где } c_k=\bar{c}_{-k}.$$

Запишем представление

$$P(e^{i\varphi})=e^{-in\varphi}\cdot(c_{-n}+c_{-n+1}e^{i\varphi}+\ \dots\ +c_n e^{i2n\varphi})=$$

$$=e^{-in\varphi}\cdot M(e^{i\varphi}),$$

где

$$M(z)=z^{2n}\cdot\overline{M\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad z\neq 0.$$

Лемму достаточно доказать для многочленов $P(e^{i\varphi})>0$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, так как в общем случае можно к $P(e^{i\varphi})$ прибавить $\varepsilon>0$, а затем перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. В силу сделанного предположения многочлен $M(z)$ не имеет нулей на окружности $|z|=1$.

Из соотношения для $P(e^{i\varphi})$ заключаем, что если z_k — нуль $M(z)$, лежащий внутри окружности, то $\frac{1}{\bar{z}_k}$ также является нулем, лежащим вне окружности $|z|=1$ той же кратности, что и z_k, и наоборот.

Следовательно,

$$M(z)=c_n\prod_k (z-z_k)^{l_k}\left(z-\frac{1}{\bar{z}_k}\right)^{l_k}=$$

$$=c_n\prod_k (z-z_k)^{l_k}\,\frac{z^{l_k}}{\bar{z}_k^{l_k}}\left(\bar{z}_k-\frac{1}{z}\right)^{l_k}=$$

$$= (-1)^n c_n z^n \prod_k (z - z_k)^{l_k} \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_k\right)^{l_k} \frac{1}{\bar{z}_k^{l_k}} =$$

$$= cz^n \prod_k (z - z_k)^{l_k} \left(\frac{1}{z} - \bar{z}_k\right)^{l_k}.$$

Поэтому

$$P(e^{i\varphi}) = e^{-in\varphi} M(e^{i\varphi}) = c \prod_k (e^{i\varphi} - z_k)^{l_k} (e^{-i\varphi} - \bar{z}_k)^{l_k} =$$

$$= c \prod_k (e^{i\varphi} - z_k)^{l_k} \overline{\prod_k (e^{i\varphi} - z_k)^{l_k}}.$$

Постоянная $c > 0$ в силу $P(e^{i\varphi}) > 0$. Следовательно, многочлен

$$Q(e^{i\varphi}) = \sqrt{c} \prod_k (e^{i\varphi} - z_k)^{l_k}$$

является искомым.

В силу доказанной леммы положительный многочлен можно представить в виде

$$P(e^{i\varphi}) = Q(e^{i\varphi}) \overline{Q(e^{i\varphi})},$$

поэтому

$$P(U) = Q(U) Q(U)^*$$

и, следовательно, при любом $f \in H$

$$(P(U) f, f) = (Q(U) Q(U)^* f, f) = (Q(U)^* f, Q(U)^* f) \geqslant 0.$$

Установленное соответствие между тригонометрическими многочленами и операторами распространим на более общие функции с периодом 2π с сохранением линейности, мультипликативности и монотонности. Введем класс функций C, который состоит из всех непрерывных на единичной окружности вещественных функций $\{\eta(e^{i\varphi})\}$, а также из всех кусочно-непрерывных $\{\Psi(e^{i\varphi})\}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, которые являются пределами монотонно убывающих, сходящихся в каждой точке последовательностей $\{\eta_n(e^{i\varphi})\}$. Аналогично доказательству леммы 1 для симметрических ограниченных операторов доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *Для всякой функции $\Psi(e^{i\varphi}) \in C$ можно построить бесконечную последовательность тригонометрических многочленов $\{P_n(e^{i\varphi})\}_1^\infty$, монотонно убывающую и сходящуюся в каждой точке к функции $\Psi(e^{i\varphi})$.*

Последовательность симметрических операторов $P_n(U)$ монотонно убывает и ограничена снизу оператором αE, где $\alpha = \inf\limits_{0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi} \Psi(e^{i\varphi})$. Следовательно, по теореме 7 п. 7 они поточечно сходятся к некоторому симметрическому оператору, который примем за $\Psi(U)$. Подобно тому как это было сделано в п. 11 для симметрических ограниченных операторов, показывается, что оператор $\Psi(U)$ не зависит от частного выбора последовательности $P_n(e^{i\varphi})$.

Таким образом, соответствие между функциями и операторами распространено на весь класс C с сохранением свойств этого соответствия, справедливых для тригонометрических многочленов. Рассмотрим класс C_1 функций, которые можно представить в виде разностей функций, принадлежащих классу C, при этом функции

$$\Psi_3(e^{i\varphi})=\Psi_1(e^{i\varphi})-\Psi_2(e^{i\varphi})$$

мы ставим в соответствие оператор

$$\Psi_3(U)=\Psi_1(U)-\Psi_2(U).$$

Оператор $\Psi_3(U)$ определен однозначно. Действительно, пусть $\Psi_3(e^{i\varphi})$ представлена другим способом в виде разности двух функций из C:

$$\Psi_3(e^{i\varphi})=\Psi_4(e^{i\varphi})-\Psi_5(e^{i\varphi}).$$

Тогда из тождества

$$\Psi_1(e^{i\varphi})-\Psi_2(e^{i\varphi})=\Psi_4(e^{i\varphi})-\Psi_5(e^{i\varphi})$$

следует тождество

$$\Psi_1(e^{i\varphi})+\Psi_5(e^{i\varphi})=\Psi_4(e^{i\varphi})+\Psi_2(e^{i\varphi}),$$

обе части которого принадлежат классу C, поэтому, воспользовавшись аддитивностью соответствия для функций класса C, имеем

$$\Psi_1(U)+\Psi_5(U)=\Psi_4(U)+\Psi_2(U).$$

Откуда

$$\Psi_1(U)-\Psi_2(U)=\Psi_4(U)-\Psi_5(U).$$

Построенное соответствие будет монотонно и для функций из C_1, т. е. из неравенства

$$\Psi_1(e^{i\varphi})\geqslant\Psi_2(e^{i\varphi})$$

вытекает

$$\Psi_1(U)\geqslant\Psi_2(U).$$

Действительно, из определения функций класса C_1 имеем

$$\Psi_1(e^{i\varphi})=\Psi_3(e^{i\varphi})-\Psi_4(e^{i\varphi}),$$

$$\Psi_2(e^{i\varphi})=\Psi_5(e^{i\varphi})-\Psi_6(e^{i\varphi}),$$

где $\Psi_i(e^{i\varphi})\in C$, $i=3, 4, 5, 6$.

Из условия

$$\Psi_3(e^{i\varphi})-\Psi_4(e^{i\varphi})\geqslant\Psi_5(e^{i\varphi})-\Psi_6(e^{i\varphi})$$

получаем

$$\Psi_3(e^{i\varphi})+\Psi_6(e^{i\varphi})\geqslant\Psi_5(e^{i\varphi})+\Psi_4(e^{i\varphi}).$$

Откуда, в силу монотонности соответствия, для функций из класса C имеем

$$\Psi_3(U)+\Psi_6(U)\geqslant\Psi_5(U)+\Psi_4(U),$$

т. е.

$$\Psi_3(U)-\Psi_4(U)\geqslant\Psi_5(U)-\Psi_6(U),$$

т. е. $\Psi_1(U)\geqslant\Psi_2(U)$.

В частности, классу C_1 принадлежат функции $e_\mu(\varphi)$, $0\leqslant\mu\leqslant 2\pi$, определенные следующим образом: $e_0(\varphi)\equiv 0$, $e_{2\pi}(\varphi)\equiv 1$ и для $0<\mu<2\pi$

$$e_\mu(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad 2k\pi<\varphi\leqslant 2k\pi+\mu;\\ 0, & \text{если}\quad 2k\pi+\mu<\varphi\leqslant 2(k+1)\pi,\ k=0,\ \pm1,\dots\end{cases}$$

Легко видеть, что функция $e_0^1(\varphi)$, равная 1 в точках $\varphi=2k\pi$ и равная нулю во всех остальных точках, принадлежит классу C. Далее, введем функцию $e_\mu^1(\varphi)$, $0<\mu<2\pi$:

$$e_\mu^1(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{когда}\quad 2k\pi\leqslant\varphi\leqslant 2k\pi+\mu;\\ 0, & \text{когда}\quad 2k\pi+\mu<\varphi<2(k+1)\pi,\end{cases}$$

которая также принадлежит C. В силу того что

$$e_\mu(\varphi)=e_\mu^1(\varphi)-e_0^1(\varphi),$$

заключаем, что $e_\mu(\varphi)$ принадлежит классу C_1 и мы можем сопоставить этой функции оператор

$$E(\mu)=e_\mu(U)\qquad(E(0)=0,\quad E(2\pi)=E).$$

Так как функции $e_\mu(\varphi)$ совпадают со своими квадратами, следовательно, им соответствуют проекционные операторы: $E(\mu)=(E(\mu))^2$, $E^*(\mu)=E(\mu)$. Если $0\leqslant r<\mu\leqslant 2\pi$, то $e_r(\varphi)\leqslant e_\mu(\varphi)$, поэтому $E(r)\leqslant E(\mu)$. Покажем теперь, что $E(\mu)$ как функция μ непрерывна справа. Функция $e_\mu^1(\varphi)$ принадлежит классу C, следовательно, в силу леммы 3 можно построить убывающую последовательность тригонометрических многочленов $P_n(e^{i\varphi})$, которая стремится к $e_\mu^1(\varphi)$, причем так, что при достаточно больших n выполняются неравенства

$$P_n(e^{i\varphi})\geqslant e^1_{\mu+\frac{1}{n}}(\varphi).$$

Тогда для соответствующих операторов имеем при $n\to\infty$:

$$E^1\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\to E^1(\mu).$$

В силу представления

$$E^1(\mu)=E(\mu)+E^1(0),$$

которое следует из представления для функций $e^1_\mu(\varphi)=e_\mu(\varphi)+$ $+e^1_0(\varphi)$, получаем

$$E\left(\mu+\frac{1}{n}\right)\to E(\mu) \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

т. е.

$$\lim_{\lambda\to\mu+0} E(\lambda)=E(\mu).$$

Рассмотрим разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ точками

$$0=\mu_0<\mu_1< \ldots <\mu_n=2\pi.$$

В каждом из интервалов $[\mu_{k-1}, \mu_k]$ выберем произвольную точку φ_k. Для любого фиксированного целого r и любого $\varphi\in[0, 2\pi]$ справедливо неравенство

$$\left|e^{ir\varphi}-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[e_{\mu_k}(\varphi)-e_{\mu_{k-1}}(\varphi)\right]\right|\leqslant|r|\max_k(\mu_k-\mu_{k-1}).$$

Действительно, для $\mu_{l-1}<\varphi\leqslant\mu_l$ имеем

$$\left|e^{ir\varphi}-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[e_{\mu_k}(\varphi)-e_{\mu_{k-1}}(\varphi)\right]\right|=|e^{ir\varphi}-e^{ir\varphi_l}|=$$

$$=2\left|\sin\frac{r(\varphi-\varphi_l)}{2}\right|\leqslant|r|\,|\varphi-\varphi_l|\leqslant|r|(\mu_l-\mu_{l-1}).$$

Для $\varphi=0$ неравенство также справедливо, так как левая часть его обращается в нуль. Отсюда при достаточно малом диаметре разбиения отрезка $[0, 2\pi]$ получим, что

$$\overline{\left(e^{ir\varphi}-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[e_{\mu_k}(\varphi)-e_{\mu_{k-1}}(\varphi)\right]\right)}\times$$

$$\times\left(e^{ir\varphi}-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[e_{\mu_k}(\varphi)-e_{\mu_{k-1}}(\varphi)\right]\right)\leqslant\varepsilon^2.$$

Переходя к операторам, находим

$$0\leqslant\left(U^r-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})\right]\right)^*\left(U^r-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})\right]\right)\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2E,$$

откуда следует, что

$$\left\|U^r-\sum_{k=1}^{n} e^{ir\varphi_k}\left[E(\mu_k)-E(\mu_{k-1})\right]\right\|\leqslant\varepsilon.$$

Последнее неравенство означает справедливость представления

$$U^r=\int_0^{2\pi} e^{ir\varphi}\,dE(\varphi).$$

Единственность семейства проекционных операторов $E(\varphi)$, соответствующего оператору U, следует из свойств интеграла Стилтьеса и доказывается аналогично доказательству единственности для ограниченного симметрического оператора (теорема 11).

Резюмируем полученные результаты:

Теорема 12. *Всякому унитарному оператору U можно поставить в соответствие единственное семейство проекционных операторов $E(\varphi)$, зависящее от действительного параметра φ, $\varphi\in[0, 2\pi]$, которое обладает свойствами:*

а) $E(\varphi_1)\leqslant E(\varphi_2)$ *при* $\varphi_1\leqslant\varphi_2$;

б) $E(\varphi+0)=E(\varphi)$;

в) $E(0)=0$, $E(2\pi)=E$.

С помощью $E(\varphi)$ оператор U представляется в виде

$$U=\int_0^{2\pi} e^{i\varphi}\,dE(\varphi).$$

Для любого тригонометрического многочлена и даже для любой непрерывной функции $u(e^{i\varphi})$ справедливо

$$u(U)=\int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi})\,dE(\varphi),$$

причем интеграл понимается как предел по норме пространства соответствующих интегральных сумм.

13. Неограниченные операторы

Многие важные операторы являются неограниченными. Рассмотрим, например, оператор

$$T=-d^2/dx^2$$

в гильбертовом пространстве $H=L^2[0, \pi]$. Пусть область определения оператора T состоит из бесконечно дифференцируемых на отрезке $[0, \pi]$ функций, удовлетворяющих условиям

$$y(0)=y(\pi)=0.$$

Тогда функции

$$y_n(x)=\sin nx$$

принадлежат области определения, причем

$$Ty_n=n^2y_n,\quad Ty_n=\lambda_n y_n,\quad \lambda_n=n^2.$$

Поскольку оператор T имеет сколь угодно большие собственные значения, то он не является ограниченным. Итак, оператор в гильбертовом пространстве H — это линейное отображение некоторого линейного многообразия D_T пространства H в пространство H. Поэтому, чтобы задать неограниченный оператор, вначале нужно описать область, на которой он определен, а затем указать, как он действует на этой области. При изучении неограниченных операторов важную роль играет понятие графика оператора.

Определение 5. *График G_T линейного оператора T есть множество пар*

$$\{f, Tf\},$$

где f пробегает область определения D_T.

Следовательно, G_T является подмножеством в гильбертовом пространстве

$$\mathscr{H} = H \oplus H,$$

состоящем из всевозможных пар $\{f, g\}$, $f \in H$, $g \in H$ и основные операции в котором введены посредством формул:

$$c\{f, g\} = \{cf, cg\},$$
$$\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\},$$
$$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2).$$

Два оператора T_1 и T_2 называются *совпадающими*, если $G_{T_1} = G_{T_2}$. Если же $G_{T_2} \supset G_{T_1}$, то T_2 называется *расширением* оператора T_1. В этом случае пишут $T_2 \supset T_1$. Иными словами, $T_2 \supset T_1$ тогда и только тогда, когда $D_{T_2} \supset D_{T_1}$ и $T_2 f = T_1 f$ для всех $f \in D_{T_1}$. Оператор T называется *замкнутым*, если график этого оператора — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = H \oplus H$. Оператор T *допускает замыкание*, если он имеет замкнутое расширение.

Определение 6. Оператор T_1 называется *замыканием* оператора T, если $G_{T_1} = \overline{G}_T$ (где $\overline{G}_T$ — замыкание многообразия G_T).

В этом случае оператор T_1 обозначают $\overline{T}$. Ясно, что оператор $\overline{T}$ является наименьшим замкнутым расширением оператора T. Естественно попытаться построить замкнутое расширение любого оператора T посредством замыкания его графика. Однако оказывается, что подпространство $\overline{G}_T$, вообще говоря, не всегда обязано быть графиком какого-либо оператора. Для примера рассмотрим в гильбертовом пространстве l^2 оператор S, действующий следующим образом:

$$Se_n = ne_1, \quad e_n = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{n}, 0 \ldots), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

область определения которого состоит из множества финитных последовательностей. Точки вида $(e_n/n, e_1)$ принадлежат G_S. Следовательно, точка $(0, e_1)$ принадлежит $\overline{G}_S$. Поэтому $\overline{G}_S$ не является графиком какого-либо оператора, поскольку при линейном отображении нулевой вектор должен переходить в нулевой.

Пусть T — линейный оператор, область определения D_T которого всюду плотна в H. Пусть g — какой-нибудь элемент из H, которому можно поставить в соответствие некоторый элемент g^* таким образом, чтобы для всех $f \in D_T$ выполнялось равенство

$$(Tf,\ g) = (f,\ g^*).$$

Множество пар g и g^*, для которых справедливо равенство при любом $f \in D_T$, не пусто, поскольку, как легко видеть, что равенство выполняется во всяком случае при $g = g^* = 0$. Далее, если D_T плотно в H, то элемент g^* однозначно определяется элементом g. В самом деле, допуская противное, имеем

$$(Tf,\ g) = (f,\ g_1^*),\ (Tf,\ g) = (f,\ g_2^*) \text{ для всех } f \in D_T.$$

Откуда получаем, что при любом $f \in D_T$

$$(f,\ g_1^*) - (f,\ g_2^*) = (f,\ g_1^* - g_2^*) = 0.$$

Так как D_T всюду плотно в H, то в силу непрерывности операции скалярного произведения заключаем, что $g_1^* = g_2^*$. Таким образом, соответствие

$$g^* = T^* g,$$

при котором равенство $(Tf,\ g) = (f,\ T^*g)$ справедливо для всех $f \in D_T$, задает некоторый оператор T^*, называемый *сопряженным оператором* по отношению к T. Покажем, что оператор T^* является линейным оператором. Пусть g_1 и g_2 принадлежат области определения оператора T^*. Тогда для всех $f \in D_T$ имеем

$$(Tf,\ \alpha g_1 + \beta g_2) = \bar{\alpha}(Tf,\ g_1) + \bar{\beta}(Tf,\ g_2) = \bar{\alpha}(f,\ T^*g_1) +$$
$$+ \bar{\beta}(f,\ T^*g_2) = (f,\ \alpha T^*g_1) + (f,\ \beta T^*g_2) = (f,\ \alpha T^*g_1 + \beta T^*g_2).$$

Поэтому $\alpha g_1 + \beta g_2$ принадлежит D_{T^*} и $T^*(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha T^*g_1 + \beta T^*g_2$. Отметим следующие соотношения, которые непосредственно следуют из определения сопряженного оператора:

а) $(cT)^* = \bar{c} \cdot T^*$, $c \neq 0$.

б) Если $S \subset T$, то $S^* \supset T^*$.

в) $(T_1 + T_2)^* \supset T_1^* + T_2^*$, если область определения оператора $T_1 + T_2$ плотна в H.

Введем в гильбертовом пространстве $\mathscr{H} = H \oplus H$ унитарный оператор V (аналог поворота на плоскости на угол $\pi/2$):

$$V\{f,\ g\} = \{-g,\ f\}.$$

Пусть область определения D_T оператора T плотна в H. Тогда для определения сопряженного оператора $T^*g = g^*$ имеем уравнение

$$(Tf,\ g) = (f,\ g^*),$$

которое выполняется для всех $f \in D_T$.

С помощью оператора V это уравнение записывается в виде

$$(V\{f,\ Tf\},\ \{g,\ g^*\})=0.$$

Это означает, что элементы пространства $\mathscr{H}$, принадлежащие G_{T^*}, ортогональны VG_T. Обозначим через $M^\perp$ множество векторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, ортогональных к $M\subset\mathscr{H}$. Итак, имеем

$$G_{T^*}=(VG_T)^\perp.$$

Поскольку ортогональное дополнение образует замкнутое линейное многообразие, то из этого соотношения следует, что оператор T^* замкнут.

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть M — линейное подмножество гильбертова пространства H, тогда*

$$\overline{M}=(M^\perp)^\perp,$$

где $\overline{M}$ — замыкание M.

Обозначим через L замыкание линейного многообразия M. Тогда L — подпространство гильбертова пространства H. Покажем, что

$$L^\perp=M^\perp.$$

Действительно, если $x\in M^\perp$, то для любого $y\in M$ $(x,\ y)=0$. Для любого элемента $f\in L$ существует последовательность $\{y_n\}$ такая, что $y_n\in M$, $n=1,\ 2,\ \ldots$ и $y_n\to f$, $n\to\infty$. В силу непрерывности скалярного произведения получаем $(x,\ f)=0$ для любых $f\in L$, откуда следует, что $x\in L^\perp$, и мы имеем включение

$$M^\perp\subset L^\perp.$$

Обратное включение $L^\perp\subset M^\perp$ вытекает из соотношения $M\subset L$. Покажем теперь, что $(L^\perp)^\perp=L$, откуда и будет следовать доказываемое нами утверждение. Действительно, в силу теоремы 2 п. 4 § 1 гл. IV справедливо представление

$$H=L\oplus L^\perp,$$

т. е. каждый вектор $h\in H$ однозначно представляется в виде

$$h=x+y,\quad x\in L,\quad y\in L^\perp.$$

Если $h\in L$, то $y=0$, и для любого вектора $v\in L^\perp$

$$(h,\ v)=(x,\ v)=0,$$

откуда заключаем, что $h\in(L^\perp)^\perp$.

Обратно, пусть

$$f\in(L^\perp)^\perp,\quad f=x+y,\quad x\in L,\quad y\in L^\perp,$$

тогда

$$0=(f,\ y)=(y,\ y),$$

откуда $y=0$ и, следовательно, $f\in L$.

На основании леммы 4 равенство $G_{T^*}=(VG_T)^{\perp}$ запишется в виде

$$G_{T^*}=\mathcal{H}\ominus\overline{VG_T}.$$

В силу унитарности V имеем $\overline{VG_T}=V\overline{G_T}$ и, следовательно,

$$G_{T^*}=\mathcal{H}\ominus V\overline{G}_T.$$

Из этого соотношения следует следующее утверждение.

Утверждение 7. *Справедливо следующее соотношение:*

$$Z(T^*)=H\ominus\overline{R(T)},$$

где $Z(T^*)$ — пространство нулей оператора T^*, $R(T)$ — область значений оператора T, а $\overline{R(T)}$ — замыкание $R(T)$.

Пусть $f\in Z(T^*)$, следовательно,

$$\{f,\ 0\}\in G_{T^*}.$$

В силу равенства $G_{T^*}=\mathcal{H}\ominus V\overline{G}_T$ имеем

$$\{f,\ 0\}\in\mathcal{H}\ominus V\overline{G}_T,$$

откуда получаем, что

$$\{f,\ 0\}\perp\{T\varphi,\ -\varphi\}\ \text{для любого вектора}\ \varphi\in D_T.$$

Таким образом,

$$f\perp T\varphi\ \text{для любого}\ \varphi\in D_T,$$

т. е.

$$f\perp\overline{R(T)}.$$

Легко видеть, что проведенные рассуждения можно провести в обратном порядке.

Теорема 13. *Оператор T с областью определения, всюду плотной в H, допускает замыкание тогда и только тогда, когда D_{T^*} всюду плотна в H. В этом случае*

$$\overline{T}=T^{**}.$$

Пусть область определения оператора T^* плотна в H. Тогда из соотношения $G_{T^*}=\mathcal{H}\ominus V\overline{G_T}$ имеем

$$G_{T^{**}}=\mathcal{H}\ominus VG_{T^*}.$$

Рассмотрим замыкание G_T — линейного подмножества в $\mathcal{H}$. В силу леммы 4 имеем

$$\overline{G}_T=(G_T^{\perp})^{\perp}.$$

Учитывая, что $V^2=-E$, получаем

$$(G_T^{\perp})^{\perp}=((V^2G_T)^{\perp})^{\perp}.$$

Заметим, что в силу унитарности V

$$V(M^{\perp})=(VM)^{\perp}$$

для любого линейного подмножества M в $\mathscr{H}$. Следовательно,

$$((V^2G_T)^{\perp})^{\perp}=(V(VG_T)^{\perp})^{\perp}=(VG_{T^*})^{\perp}.$$

Итак,

$$\overline{G_T}=(VG_{T^*})^{\perp}.$$

Отсюда в силу равенства $G_{T^{**}}=\mathscr{H}\ominus VG_{T^*}$ получаем, что $\bar{G}_T$ является графиком $G_{T^{**}}$, т. е. $\bar{T}=T^{**}$. Обратно, предположим, что D_{T^*} не плотна в H. Тогда существует вектор $f\neq 0$, ортогональный всем векторам из D_{T^*}. Следовательно, элемент $\{0,f\}\in\mathscr{H}$ будет ортогонален всем элементам вида $\{-T^*g,\ g\}$, где g пробегает D_{T^*}. Поэтому вектор $\{0,\ f\}$ будет ортогонален $V\{g,\ T^*g\}$, $g\in D_{T^*}$. Отсюда получаем, что $(VG_{T^*})^{\perp}$ не является графиком оператора. В силу равенства $\overline{G_T}=(VG_{T^*})^{\perp}$ имеем, что $\overline{G_T}$ не является графиком оператора, поэтому оператор T не допускает замыкания, что противоречит условию теоремы.

Следствие. *Если T допускает замыкание, то*

$$T^*=(\overline{T^*})=T^{***}=(\bar{T})^*.$$

Определение 7. Линейный оператор T в гильбертовом пространстве H называется *симметрическим*, или *эрмитовым*, если область определения D_T плотна в H и $(Tf,\ g)=(f,\ Tg)$ для любых векторов $f,\ g\in D_T$. Равносильное условие: оператор T симметрический, если его область определения D_T плотна в H и

$$T\subset T^*.$$

Отсюда заключаем, что симметрический оператор всегда допускает замыкание. Из теоремы 13 следует, что T^{**} является наименьшим замкнутым расширением T, поэтому справедливы включения $T\subset T^{**}\subset T^*$.

Поскольку $\dot{T}^*=T^{***}$, то из последнего включения следует, что оператор T^{**} также является симметрическим оператором. Поэтому в дальнейшем при рассмотрении симметрических операторов мы всегда будем предполагать, что они замкнуты.

Определение 8. Оператор T называется *самосопряженным*, если $T=T^*$.

Теорема 14 (критерий самосопряженности). *Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда самосопряженность оператора T эквивалентна каждому из следующих двух условий:*

а) *T замкнут и* $Z(T^* \pm iE)=\{0\}$;

б) $R(T \pm iE)=H$.

Докажем, что из самосопряженности T следует условие а). Пусть $\varphi \in D_{T^*}$ и $T^*\varphi = i\varphi$. Тогда $T\varphi = i\varphi$ и

$$(\varphi,\ T^*\varphi) = (T\varphi,\ \varphi) = i(\varphi,\ \varphi).$$

Кроме того,

$$(\varphi, T^*\varphi) = (\varphi,\ i\varphi) = -i(\varphi,\ \varphi).$$

Следовательно, $\varphi = 0$, т. е.

$$Z(T^* - iE) = \{0\}.$$

Аналогично доказывается, что

$$Z(T^* + iE) = \{0\}.$$

Докажем, что из условия а) следует условие б). В силу утверждения 7 имеем, что $R(T \mp iE)$ — плотное множество в H. Покажем замкнутость $R(T \mp iE)$. В силу симметричности T для всех $\varphi \in D_T$ имеем

$$\|(T \pm iE)\varphi\|^2 = (T\varphi \pm i\varphi,\ T\varphi \pm i\varphi) =$$
$$= \|T\varphi\|^2 + (T\varphi,\ \pm i\varphi) + (\pm i\varphi,\ T\varphi) + (\pm i\varphi,\ \pm i\varphi) =$$
$$= \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Из полученного соотношения следует, что если $\varphi_n \in D_T$ и $(T \pm \pm iE)\varphi_n \to f_0$, то φ_n сходится к некоторому вектору φ_0 и $T\varphi_n$ также сходится. В силу замкнутости T имеем $\varphi_0 \in D_T$ и $(T \pm iE)\varphi_0 = f_0$. Отсюда $R(T \pm iE)$ — замкнутое множество, и поэтому

$$R(T \pm iE) = H.$$

Теперь покажем, что условие б) влечет самосопряженность T.

Пусть $\varphi \in D_{T^*}$. Поскольку $R(T - iE) = H$, то существует $f \in D_T$ такой, что $(T - iE)f = (T^* - iE)\varphi$. Так как $D_T \subset D_{T^*}$, то $\varphi - f \in D_{T^*}$ и

$$(T^* - iE)(f - \varphi) = 0.$$

По условию б) $R(T + iE) = H$, следовательно, в силу утверждения 7 имеем

$$Z(T^* - iE) = \{0\}.$$

Откуда следует, что $f = \varphi \in D_T$. Тогда $D_{T^*} = D_T$, т. е. T — самосопряженный оператор.

Докажем теперь следующий простой критерий самосопряженности симметрического оператора.

Утверждение 8. *Если для симметрического оператора T существует такое число λ, что как элементы вида $(T - \lambda E)x$, так и элементы вида $(T - \bar{\lambda}E)x$ $(x \in D_T)$ пробегают всё H, когда x пробегает D_T, то T — самосопряженный оператор.*

Пусть $y \in D_{T^*}$, тогда для всех $x \in D_T$ имеем

$$((T - \bar{\lambda}E)x,\ y) = (x,\ (T^* - \lambda E)y).$$

В силу условия теоремы существует $h \in D_T$ такой, что

$$(T-\lambda E)h=(T^*-\lambda E)y.$$

Тогда в силу симметричности T получаем

$$(x, (T^*-\lambda E)y)=(x, (T-\lambda E)h)=((T-\bar{\lambda}E)x, h),$$

отсюда для всех $x \in D_T$

$$((T-\bar{\lambda}E)x, y)=((T-\bar{\lambda}E)x, h).$$

Так как $(T-\bar{\lambda}E)x$ пробегает всё H, то $y=h \in D_T$, следовательно, T — самосопряженный.

Пример.

В гильбертовом пространстве $L^2[0, 1]$ введем оператор

$$T=-\frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения D_T, состоящей из всех функций $f(x)$ со следующими свойствами: $f(x)$ и $f'(x)$ — абсолютно непрерывны на отрезке $[0, 1]$,

$$\frac{d^2f}{dx^2} \in L^2[0, 1], \ f(0)=f(1)=0.$$

Замечание. Функция $f(x)$ на $[a, b]$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i')-f(x_i)|<\varepsilon$$

для любого конечного набора интервалов $[x_i, x_i']$, удовлетворяющих условию $x_i, x_i' \in [a, b]$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i'-x_i|<\delta.$$

Для таких функций справедлива теорема. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то $f(x)$ почти всюду дифференцируема, $f'(x) \in L^1[a, b]$. Обратно, если $g(x) \in L^1[a, b]$, то функция*

$$G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$$

абсолютно непрерывна и $G'(x)=g(x)$ почти всюду. (Ср. с теоремой Радона — Никодима, гл. III.)

Проинтегрировав два раза по частям, убеждаемся, что для $f(x), g(x) \in D_T$

$$(Tf,\ g)=\int_0^1 -\frac{d^2f(x)}{dx^2}\cdot\overline{g(x)}\,dx=\left[-\frac{df(x)}{dx}\cdot\overline{g(x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{d\overline{g(x)}}{dx}\cdot f(x)\right]\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\cdot\overline{\left(-\frac{d^2g(x)}{dx^2}\right)}\,dx=(f,\ Tg).$$

Кроме того, множество D_T, как легко видеть, плотно в $L^2[0,\ 1]$.

Итак, T — симметрический оператор. Покажем, что $R(T)=L^2[0,\ 1]$, откуда в силу утверждения 8 будет вытекать самосопряженность оператора T. Действительно, для любой функции $h(x)\in L^2[0,\ 1]$ введем функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x)=-\int_0^x\left[\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right]dt+x\int_0^1\left[\int_0^t h(\tau)\,d\tau\right]dt.$$

В силу сделанного выше замечания $f(x)\in D_T$, причем

$$Tf=h.$$

Желая свести изучение неограниченного симметрического оператора к изучению изометрического оператора, введем так называемое преобразование Кэли. Пусть T — замкнутый симметрический оператор. Оператор $V=(T-iE)\cdot(T+iE)^{-1}$ называется *преобразованием Кэли* оператора T. Существование оператора $(T+iE)^{-1}$ следует из соотношения

$$\|(T\pm iE)h\|^2=(Th,\ Th)\pm i(h,\ Th)\mp i(Th,\ h)+(h,\ h)=$$
$$=\|Th\|^2+\|h\|^2,$$

показывающего, что уравнение

$$(T+iE)h=0$$

не имеет других решений, кроме 0. Областью определения и областью значений оператора V являются соответственно множества векторов вида

$$f=(T+iE)h,$$
$$g=(T-iE)h,$$

когда h пробегает все D_T.

Докажем, что D_V и $R(V)$ — замкнутые множества, а следовательно, являются подпространствами в H.

Пусть

$$f_n=(T\pm iE)h_n \text{ и } f_n\to f,\ n\to\infty.$$

Имеем

$$\|f_n-f_m\|^2=\|(T\pm iE)(h_n-h_m)\|^2=$$
$$=\|T(h_n-h_m)\|^2+\|h_n-h_m\|^2,$$

откуда из фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ следует существование

$$\lim_{n\to\infty} h_n \text{ и } \lim_{m\to\infty} Th_m.$$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, тогда в силу замкнутости оператора T заключаем:

$$\lim_{n\to\infty} Th_n = Th.$$

Таким образом,

$$f = (T \pm iE)h,$$

что и доказывает замкнутость D_V и $R(V)$. Оператор V — изометрический. Действительно, из соотношения

$$\|(T \pm iE)h\|^2 = \|Th\|^2 + \|h\|^2$$

следует

$$\|(T - iE)h\| = \|(T + iE)h\|,$$

т. е., что

$$\|(T - iE)(T + iE)^{-1}f\| = \|f\|.$$

Если предположить, что оператор T — самосопряженный, то его преобразование Кэли есть оператор унитарный. Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что

$$D_V = R(V) = H,$$

а это следует из теоремы 14.

Покажем, что оператор T однозначно восстанавливается по его преобразованию Кэли. Из соотношений $f = (T + iE)h$, $g = (T - iE)h$ имеем

$$Vf = (T - iE)h.$$

Складывая и вычитая выражение для Vf и для f, получаем

$$(E + V)f = 2Th,$$

$$(E - V)f = 2iEh.$$

Из последнего равенства следует, что если $(E - V)f = 0$, то $h = 0$, но тогда в силу соотношения $f = (T + iE)h$ имеем, что $f = 0$. Таким образом, оператор $(E - V)^{-1}$ существует и

$$T = i(E + V)(E - V)^{-1}.$$

Перейдем теперь к доказательству спектральной теоремы для неограниченных самосопряженных операторов.

Докажем следующую лемму.

Лемма 4. *Пусть $H_1, H_2, \ldots H_i, \ldots$ — последовательность подпространств гильбертова пространства H, попарно ортогональных и в совокупности порождающих все H. Проекцию произвольного элемента f на подпространство H_i обозначим f_i. Пусть T_1,*

$T_2, \ldots, T_i, \ldots$ — последовательность линейных операторов, обладающая тем свойством, что на H_i оператор T_i ведет себя как ограниченный самосопряженный оператор, отображающий H_i само в себя. Тогда в H существует и единствен самосопряженный оператор T, совпадающий с T_i на каждом H_i $(i=1, 2, \ldots)$. Область определения оператора T состоит из тех элементов f, для которых сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i f_i\|^2,$$

и для таких f

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} T_i f_i. \tag{$*$}$$

Оператор T, определенный равенством $(*)$, линеен. Область определения D_T плотна в H, так как содержит элементы вида $\sum_{i=1}^{n} f_i$. Оператор T является симметрическим оператором, так как для любых f, g из D_T

$$(Tf, g) = \sum_{i=1}^{\infty} (T_i f_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i, T_i g_i) = (f, Tg).$$

Пусть g — какой-нибудь элемент, принадлежащий D_{T^*}. Тогда для любого $f \in D_T$

$$(Tf, g) = (f, T^* g),$$

откуда следует, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} (T_i f_i, g_i) = \sum_{i=1}^{\infty} (f_i, (T^* g)_i).$$

Возьмем в качестве f какой-нибудь элемент подпространства H_j, тогда последнее равенство примет вид

$$(T_j f_j, g_j) = (f_j, (T^* g)_j).$$

По условию леммы T_j самосопряжен в H_j, поэтому

$$(T_j f_j, g_j) = (f_j, T_j g_j),$$

следовательно,

$$(T^* g)_j = T_j g_j.$$

Откуда получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|T_j g_j\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \|(T^* g)_j\|^2 = \|T^* g\|^2.$$

Таким образом, g принадлежит области определения оператора T и

$$Tg=\sum_{i=1}^{\infty} T_i g_i=\sum_{i=1}^{\infty} (T^*g)_i=T^*g.$$

Отсюда следует, что $T^*\subset T$, а так как T — симметрический оператор, то $T^*=T$.

Для доказательства единственности предположим, что существует другой самосопряженный оператор T', совпадающий с T_i на H_i. В силу замкнутости оператора T' к области его определения будут принадлежать все f, для которых сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} T'f_i$, причем

$$\sum_{i=1}^{\infty} T'f_i=\sum_{i=1}^{\infty} T_i f_i=T'f.$$

Сходимость ряда ортогональных элементов

$$\sum_{i=1}^{\infty} T_i f_i$$

эквивалентна сходимости ряда из квадратов их норм

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T_i f_i\|^2.$$

Поэтому совокупность таких f совпадает с D_T, и для них $T'f=Tf$. Таким образом, $T'\supset T$. В силу самосопряженности операторов T и T' имеем $T'=T$.

Пусть $V=\int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}dF(\varphi)$ — спектральное разложение унитарного оператора V, являющегося преобразованием Кэли самосопряженного оператора T. С помощью соответствия

$$\lambda=-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},\quad 0<\varphi<2\pi$$

между интервалом $(0, 2\pi)$ и числовой осью $(-\infty, +\infty)$ получим семейство проекционных операторов

$$E(\lambda)=F(\varphi)=F(-2\operatorname{arcctg}\lambda),\quad -\infty<\lambda<+\infty.$$

Действительно, функция $F(\varphi)$ непрерывна в точке 2π, так как $(E-V)^{-1}$ существует и, следовательно, 1 не является собственным значением оператора V. Поэтому имеем

$$E(+\infty)=F(2\pi-0)=E,$$

$$E(-\infty)=F(+0)=0.$$

Свойства

$$E(\lambda) \leqslant E(\mu) \text{ при } \lambda < \mu$$

и

$$E(\lambda+0) = E(\lambda),$$

очевидно, выполнены ввиду монотонности и непрерывности функции $\lambda = -\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$.

Рассмотрим множество точек $\{\varphi_m\}$ на интервале $(0, 2\pi)$, удовлетворяющих уравнению

$$-\operatorname{ctg}\frac{\varphi_m}{2} = m \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Проекционные операторы

$$P_m = F(\varphi_m) - F(\varphi_{m-1})$$

будут попарно ортогональны, кроме того,

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} P_m = \lim_{k\to+\infty} F(\varphi_k) - \lim_{l\to-\infty} F(\varphi_l) = E - O = E.$$

Обозначим через H_m подпространство, соответствующее проекционному оператору P_m. Так как оператор P_m перестановочен с V, а следовательно, и с $T = i(E+V)(E-V)^{-1}$, то подпространство H_m приводит *) операторы V и T. Функция $(1-e^{i\varphi})^{-1}$ непрерывна в интервале $\varphi_{m-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi_m$, поэтому для $f \in H_m$ имеем

$$Tf = TP_m f = i(E+V)\cdot(E-V)^{-1}\cdot P_m f =$$

$$= \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} i(1+e^{i\varphi})\cdot(1-e^{i\varphi})^{-1}\, dF(\varphi) f =$$

$$= \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \left(-\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right) dF(\varphi) f = \int_{m-1}^{m} \lambda\, dE(\lambda) f.$$

Мы получили, что в каждом H_m оператор T действует как ограниченный самосопряженный оператор

$$T_m = \int_{m-1}^{m} \lambda\, dE(\lambda).$$

Поскольку подпространства $H_0, H_{-1}, H_1 \ldots$ попарно ортогональны

*) Если P — перестановочный с оператором T проектор, а $Q = E - P$ и $H_P = PH$, $H_Q = QH$, то говорят, что подпространство H_P *приводит* оператор T, если T может быть восстановлен по своим частям T_P и T_Q, действующим в подпространства H_P и H_Q, причем область определения оператора T состоит из тех векторов, проекции которых на H_P и H_Q принадлежат соответственно областям определения операторов T_P и T_Q.

и порождают все H, то в силу леммы 4 оператор T представляется в виде

$$Tf=\sum_{-\infty}^{\infty}\int_{m-1}^{m}\lambda dE(\lambda)f_m=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda)f.$$

Итак, доказана

Теорема 15. *Любому самосопряженному оператору T в гильбертовом пространстве H можно поставить в соответствие единственное семейство проекционных операторов $E(\lambda)$, зависящее от действительного параметра λ, которое обладает свойствами:*

а) $E(\lambda)\leqslant E(\mu)$ *при* $\lambda\leqslant\mu$;

б) $E(\lambda+0)=E(\lambda)$;

в) $E(\lambda)\to 0$ *при* $\lambda\to-\infty$, $E(\lambda)\to E$ *при* $\lambda\to\infty$. *С помощью* $E(\lambda)$ *оператор представим в виде*

$$T=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE(\lambda).$$

14. Спектр симметрического ограниченного оператора

В настоящем пункте будут изучены свойства спектра симметрического оператора. Многое, о чем говорится в этом пункте, справедливо и для неограниченного оператора. Однако здесь мы рассматриваем только ограниченные симметрические операторы.

Теорема 16. *Для того чтобы точка λ была регулярным значением симметрического ограниченного оператора A, необходимо и достаточно существование положительной постоянной r такой, что для любого $f\in H$*

$$\|Af-\lambda f\|\geqslant r\|f\|.$$

Необходимость. Пусть λ — регулярное значение; тогда существует оператор $R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}$ и $\|R_\lambda\|=d<\infty$; для любого вектора $f\in H$ имеем

$$\|f\|=\|R_\lambda(A-\lambda E)f\|\leqslant d\|(A-\lambda E)f\|.$$

Поэтому справедливо соотношение

$$\|(A-\lambda E)f\|\geqslant\frac{1}{d}\|f\|=r\|f\|.$$

Достаточность. Пусть $g=Af-\lambda f$ для любого $f\in H$. Тогда g пробегает некоторое линейное многообразие L. В силу того, что $\|(A-\lambda E)f\|\geqslant r\|f\|$, соответствие между векторами $\{f\}$ и $\{g\}$ взаимно-однозначно, ибо если f_1 и f_2 переходят в один и тот же вектор g, то

$$Af_1-\lambda f_1-Af_2+\lambda f_2=(A-\lambda E)(f_1-f_2).$$

Значит,

$$\|f_1-f_2\| \leqslant \frac{1}{r}\|(A-\lambda E)(f_1-f_2)\|=0, \text{ т. е. } f_1=f_2.$$

Покажем, что L всюду плотно в H и замкнуто, т. е. что $L=$ $=$H, а затем воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе (см. гл. II).

Допустим, что L не всюду плотно в H, тогда существует вектор $f_0\neq 0$, $f_0\in H$ и такой, что $(f_0, g)=0$ для любого вектора $g\in$ $\in L$. Это означает, что $(f_0, Af-\lambda f)=0$ для любого $f\in H$. Тогда $Af_0-\bar{\lambda}f_0=0$, $f_0\neq 0$. Но это невозможно: если λ — комплексное, то получилось бы, что симметрический оператор имеет комплексное собственное число; если λ — вещественно, то $\bar{\lambda}=\lambda$, $\|f_0\|\leqslant\frac{1}{r}\times$ $\times\|Af_0-\lambda f_0\|=0$, и поэтому $f_0=0$.

Покажем, что L замкнуто. Пусть $\{g_n\}\subset L$ и $g_n=(A-\lambda E)f_n$, $g_n\to g$. Тогда

$$\|f_n-f_m\|\leqslant\frac{1}{r}\|(A-\lambda E)(f_n-f_m)\|=\frac{1}{r}\|g_n-g_m\|.$$

Поскольку последовательность $\{g_n\}$ сходится, то сходится и последовательность $\{f_n\}$. Пусть $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$. При этом

$$(A-\lambda E)f=\lim_{n\to\infty}(A-\lambda E)f_n=\lim_{n\to\infty}g_n=g,$$

т. е. $g\in L$. Итак, $L=H$. Кроме того, соответствие $g=(A-\lambda E)f$ взаимно-однозначно. Поэтому существует ограниченный обратный оператор $f=(A-\lambda E)^{-1}g=R_\lambda g$, определенный на всем H. Имеем

$$\|(A-\lambda E)^{-1}g\|=\|f\|\leqslant\frac{1}{r}\|(A-\lambda E)f\|=\frac{1}{r}\|g\|, \text{ т. е. } \|R_\lambda\|\leqslant\frac{1}{r}.$$

Следовательно, λ — регулярное значение оператора A.

Следствие. *Точка λ принадлежит спектру ограниченного симметрического оператора A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{f_n\}$ такая, что $\|Af_n-\lambda f_n\|\leqslant c_n\|f_n\|$, где $c_n\to 0$ при $n\to\infty$. Заметим, что можно считать, что $\|f_n\|=1$, а тогда $\|Af_n-\lambda f_n\|\to 0$.*

Теорема 17. *Комплексные числа $\lambda=\alpha+i\beta$, где $\beta\neq 0$ — суть регулярные значения ограниченного симметрического (самосопряженного) оператора A.*

Если $g=(A-\lambda E)f$, то

$$(g, f)=(Af, f)-\lambda(f, f),\ (f, g)=\overline{(g, f)}=(Af, f)-\bar{\lambda}(f, f).$$

Поэтому

$$(f, g)-(g, f)=(\lambda-\bar{\lambda})(f, f)=2i\beta\|f\|^2,$$

$$2|\beta|\cdot\|f\|^2\leqslant|(f, g)|+|(g, f)|\leqslant 2\|g\|\cdot\|f\|,$$

$$\|g\|\geqslant|\beta|\cdot\|f\|, \text{ т. е. } \|(A-\lambda E)f\|\geqslant|\beta|\cdot\|f\|,$$

а далее следует применить предыдущую теорему.

Теорема 18. *Спектр симметрического (самосопряженного) ограниченного оператора A лежит целиком на отрезке $[m, M]$ вещественной оси, где m и M — нижняя и верхняя грани оператора соответственно.*

Из предыдущей теоремы следует, что спектр оператора A лежит на вещественной оси. Докажем, что точки, лежащие вне отрезка $[m, M]$, являются регулярными точками оператора. Пусть, например, $\lambda>M$, $\lambda=M+d$, $d>0$; имеем

$$((A-\lambda E)f, f)=(Af, f)-\lambda(f, f)\leqslant M(f, f)-\lambda(f, f)=-d\|f\|^2.$$

Отсюда

$$|((A-\lambda E)f, f)|\geqslant d\|f\|^2.$$

С другой стороны, справедливо неравенство

$$|((A-\lambda E)f, f)|\leqslant\|(A-\lambda E)f\|\cdot\|f\|.$$

Поэтому $\|(A-\lambda E)f\|\geqslant d\|f\|$, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается случай $\lambda<m$.

Теорема 19. *Числа m, M являются точками спектра оператора.*

Заметим, что если оператор A заменить оператором $A_\mu=A-\mu E$, то его спектр сдвинется влево на $\mu>0$, а числа m и M заменятся на $m-\mu$ и $M-\mu$. Будем сразу считать, что $0\leqslant m\leqslant M$. В таком случае, как было доказано, справедливо равенство $M=\|A\|$. При изучении вполне непрерывных операторов было доказано, что для симметрического оператора существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|f_n\|=1, \quad n=1, 2, 3, \dots,$$

$$\|Af_n-\|A\|\cdot f_n\|\to 0 \qquad (n\to\infty).$$

(Вполне непрерывностью в этом месте не пользовались.) Для доказательства теоремы достаточно применить следствие, приведенное после теоремы 16.

Следствие. *Каждый ограниченный самосопряженный оператор имеет непустой спектр.*

Примеры.

1. Пусть $A=E$. Тогда спектр A состоит из одного собственного значения 1, соответствующее собственное подпространство $H_1=H$. При $\lambda\neq 1$, $R_\lambda=\dfrac{1}{1-\lambda}E$ есть ограниченный оператор.

2. Пусть A задан в $L^2[0, 1]$ формулой $Af(x)=xf(x)$. Очевидно, $m=0$, $M\leqslant 1$. Покажем, что все точки $[0, 1]$ принадлежат спектру оператора A, а поэтому $M=1$. Пусть $0\leqslant\lambda\leqslant 1$. Рассмот-

рим *) отрезок $[\lambda, \lambda+\varepsilon] \subset [0, 1]$. Пусть

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} & \text{при } x \in [\lambda, \lambda+\varepsilon], \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} [\lambda, \lambda+\varepsilon]. \end{cases}$$

Имеем

$$\|f_\varepsilon(x)\|^2 = \int_0^1 f_\varepsilon^2(x)\,dx = 1, \text{ т. е. } \|f_\varepsilon(x)\| = 1.$$

Далее,

$$(A-\lambda E) f_\varepsilon(x) = (x-\lambda) f_\varepsilon(x), \ \|(A-\lambda E) f_\varepsilon(x)\|^2 =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_\lambda^{\lambda+\varepsilon} (x-\lambda)^2\,dx = \frac{\varepsilon^2}{3}.$$

При $\varepsilon \to 0$ имеем $\|(A-\lambda E) f_\varepsilon\| \to 0$, следовательно, λ — точка спектра при любом λ, удовлетворяющем неравенствам $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В то же время оператор A не имеет собственных значений (это доказывается так же, как и в пространстве $C[0, 1]$). Таким образом, оператор имеет только непрерывный спектр.

Теорема 20. *Для того чтобы λ_0 было собственным значением ограниченного симметрического (самосопряженного) оператора A, необходимо и достаточно, чтобы λ_0 было точкой разрыва функции $E(\lambda)$.*

Необходимость. Пусть для некоторого $f_0 \neq 0$

$$Af_0 - \lambda_0 f_0 = 0.$$

Тогда $((A-\lambda_0 E)^2 f_0, f_0) = 0$ и, следовательно,

$$\int_{m-0}^{M} (\lambda-\lambda_0)^2\,d(E(\lambda) f_0, f_0) = 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, а интегрирующая монотонно возрастает, то и $\int_\alpha^\beta (\lambda-\lambda_0)^2\,d(E(\lambda) f_0, f_0) = 0$ для любого полуинтервала $(\alpha, \beta]$. В частности, $\int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} (\lambda-\lambda_0)^2 \times$ $\times\, d(E(\lambda) f_0, f_0) = 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Так как $(\lambda-\lambda_0)^2 \geqslant \varepsilon^2$, то

$$\varepsilon^2 \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{M} d(E(\lambda) f_0, f_0) = \varepsilon^2 [(f_0, f_0) - (E(\lambda_0+\varepsilon) f_0, f_0)] = 0.$$

*) При $\lambda=1$ следует рассмотреть отрезок $[1-\varepsilon, 1]$.

Следовательно,

$$(f_0, f_0) - (E(\lambda_0+\varepsilon) f_0, f_0) = 0, \; E(\lambda_0+\varepsilon) f_0 = f_0.$$

Аналогично, $E(\lambda_0-\varepsilon) f_0 = 0$. Поэтому $E(\lambda_0+\varepsilon) f_0 - E(\lambda_0-\varepsilon) f_0 = f_0$. Поэтому $(E(\lambda_0+\varepsilon) - E(\lambda_0-\varepsilon)) f_0 = f_0 \neq 0$, т. е. λ_0 — действительно точка разрыва для $E(\lambda)$, причем собственный элемент f_0 принадлежит подпространству, соответствующему оператору

$$E(\Delta) = E(\lambda_0) - E(\lambda_0-\varepsilon).$$

Достаточность. Пусть $E(\lambda_0-0) \neq E(\lambda_0)$ и f_0 — любой элемент из подпространства $E(\Delta)$, соответствующего оператору $E(\lambda_0) - E(\lambda_0-\varepsilon)$. Тогда $(E(\lambda_0) - E(\lambda_0-0)) f_0 = f_0$, т. е. f_0 принадлежит ортогональному дополнению пространства G_{λ_0-0} в пространстве G_{λ_0}*). Поэтому $E(\lambda_0) f_0 = f_0$, $E(\lambda_0-0) f_0 = 0$, тем более $E(\lambda) f_0 = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и, следовательно, $E(\Delta) f_0 = f_0$ для $\Delta = (\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0]$. Но тогда

$$Af_0 = AE(\Delta) f_0 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0} \lambda \, dE(\lambda) f_0,$$

$$\lambda_0 f_0 = \lambda_0 E(\Delta) f_0 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0} \lambda_0 \, dE(\lambda) f_0.$$

Следовательно,

$$Af_0 - \lambda_0 f_0 = \int_{\lambda_0-\varepsilon}^{\lambda_0} (\lambda - \lambda_0) \, dE(\lambda) f_0.$$

Отсюда

$$\|Af_0 - \lambda_0 f_0\| \leqslant \varepsilon \|E(\Delta) f_0\| \leqslant \varepsilon \|f_0\|.$$

Так как ε произвольно, то $\|Af_0 - \lambda_0 f_0\| = 0$. Одновременно доказано, что все подпространство, на которое проектирует оператор $E(\Delta) = E(\lambda_0) - E(\lambda_0-0)$, состоит из собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ_0.

15. Спектр и резольвента неограниченных операторов

Точно так же, как и в случае ограниченных операторов (см. г. 6), можно ввести понятия резольвентного множества, спектра и для неограниченных операторов.

Так же, как и для ограниченных операторов, если для некоторого λ_1 уравнение $Tf = \lambda_1 f$ имеет ненулевое решение f, то число λ_1 называется собственным значением (собственным числом) оператора T, а решение f — собственным вектором, соответствующим собственному значению λ_1.

---

*) Здесь G_{λ_0-0} и G_{λ_0} — подпространства, на которые операторы $E(\lambda_0-0)$ и $E(\lambda_0)$ соответственно проектируют все пространство.

Совокупность всех собственных векторов $\{f\}$, отвечающих λ_1, и нуль-вектор называют собственным подпространством H_λ вечающим собственному значению λ_1. Его размерность называется кратностью собственного значения λ_1.

Пусть D_T — область определения, а $R(T)$ — область значений линейного неограниченного оператора в гильбертовом пространстве H. Пусть $B(\lambda) = T - \lambda E$. Числа λ, при которых область значений оператора $B(\lambda)$ плотна в H и существует непрерывный обратный оператор $B^{-1}(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$, называются регулярными значениями оператора T (принадлежат резольвентному множеству). Оператор $B^{-1}(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$ называется резольвентным оператором, или резольвентой оператора T, и обозначается через R_λ. Таким образом,

$$R_\lambda = (T - \lambda E)^{-1} = B^{-1}(\lambda).$$

Множество, дополнительное к резольвентному (в комплексной плоскости), называется спектром оператора T (обозначается $\sigma(T)$).

Можно дать следующую классификацию спектра оператора.

1. Множество комплексных чисел λ, при которых $B(\lambda)$ не имеет обратного оператора, называется точечным спектром. Очевидно, что он совпадает с множеством собственных значений оператора.

2. Множество комплексных чисел λ, при которых оператор $B(\lambda)$ обладает обратным с плотной областью определения, но $B^{-1}(\lambda) = R_\lambda$ не является непрерывным, называется непрерывным спектром.

3. Множество комплексных чисел λ, при которых оператор $B(\lambda)$ обладает обратным, однако, область его определения не плотна в H, называется остаточным спектром.

Рассмотрим примеры.

Примеры.

1. Пусть $H = L^2(-\infty, \infty)$ и оператор T — оператор умножения на независимую переменную:

$$Tf = xf.$$

Опишем область определения D_T этого оператора. Очевидно, что функции $f(x)$ и $xf(x)$ должны принадлежать $L^2(-\infty, \infty)$, на таких функциях $Tf = xf$. Пусть $Tf = xf = \lambda f$, покажем, что тогда любое вещественное число λ принадлежит непрерывному спектру оператора T. Собственных функций у этого оператора нет, так как если $(x - \lambda) f(x) = 0$ почти всюду, то $f(x) = 0$ почти всюду, т. е. $f = 0$ как элемент $L^2(-\infty, \infty)$. Таким образом, однородное уравнение имеет только тривиальное решение и оператор $R_\lambda = B^{-1}(\lambda) = (T - \lambda E)^{-1}$ существует.

Заметим, что все функции $\{g(x)\}$, равные нулю вне некоторой окрестности точки λ (своей для каждой функции), входят в область определения оператора R_λ. Следовательно, область определения R_λ плотна в $L^2(-\infty, \infty)$. Оператор $R_\lambda = \dfrac{1}{x-\lambda}$ на этой области неограничен. Таким образом, любое число $\lambda \in \mathbf{R}^1$ принадлежит непрерывному спектру.

2. Рассмотрим оператор $T = i\dfrac{d}{dx}$, действующий в $L^2(0, 1)$. Пусть область определения этого оператора состоит из абсолютно непрерывных на $[0, 1]$ функций $\varphi(x)$, имеющих $\varphi'(x) \in L^2(0, 1)$ и удовлетворяющих условию:

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Очевидно, что D_T плотна в $L^2(0, 1)$ и оператор T является неограниченным. Кроме того, оператор T — симметрический: для любых $\varphi, \psi \in D_T$ имеем

$$(T\varphi, \psi) = \int_0^1 i\varphi'\overline{\psi}dx = i\varphi\overline{\psi}\,|_0^1 + \int_0^1 \varphi\,\overline{(i\psi)'}\,dx = \int_0^1 \varphi\overline{T\psi}dx = (\varphi, T\psi).$$

Заметим, что соотношение

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$$

будет выполняться и в том случае, когда $\varphi \in D_T$, а функция $\psi(x)$ является абсолютно непрерывной и $\psi'(x) \in L^2(0, 1)$. Поэтому $\psi \in D_{T^*}$ и

$$T^*\psi = i\frac{d}{dx}\psi.$$

Оказывается, что множество абсолютно непрерывных функций ψ, имеющих суммируемые с квадратом производные, является областью определения оператора T^* и

$$T^*\psi = i\psi'.$$

Пусть $\psi \in D_{T^*}$. Тогда для любой $\varphi \in D_T$ имеем:

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T^*\psi) = (\varphi, \psi^*) = \int_0^1 \varphi(x)\overline{\psi^*(x)}\,dx =$$

$$= -i\int_0^1 \varphi(x)\frac{d}{dx}\overline{\left\{\int_0^x i\psi^*(t)\,dt + C\right\}}dx = -i\varphi(x)\overline{\left\{-\int_0^x i\psi^*(t)\,dt + C\right\}}\Big|_0^1 +$$

$$+ i\int_0^1 \varphi'(x)\overline{\left\{-\int_0^x i\psi^*(t)\,dt + C\right\}}dx = \int_0^1 i\varphi'(x)\overline{\left\{-\int_0^x i\psi^*(t)\,dt + C\right\}}dx,$$

где C — произвольная постоянная.

Мы получили, что для любой $\varphi \in D_T$

$$\int_0^1 \varphi'(x) \overline{\left\{\psi(x) + \int_0^x i\psi^*(t)\,dt - C\right\}}\,dx = 0.$$

Постоянную C выберем из условия обращения в ноль интеграла:

$$\int_0^1 \left\{\psi(x) + \int_0^x i\psi^*(t)\,dt - C\right\} dx = 0.$$

Тогда функция

$$\varphi_0(x) = \int_0^x \left\{\psi(s) + \int_0^s i\psi^*(t)\,dt - C\right\} ds$$

принадлежит области определения оператора T, и соотношение

$$\int_0^1 \varphi'(x) \overline{\left\{\psi(x) + \int_0^x i\psi^*(t)\,dt - C\right\}}\,dx = 0$$

перепишется при $\varphi = \varphi_0$ в виде

$$\int_0^1 \left|\psi(x) + \int_0^x i\psi^*(t)\,dt - C\right|^2 dx = 0.$$

Следовательно, почти всюду

$$\psi(x) = -i \int_0^x \psi^*(t)\,dt + C,$$

т. е.

$$i\psi'(x) = \psi^*(x) = T^*\psi.$$

Откуда следует, что $\psi(x)$ является абсолютно непрерывной на $[0, 1]$ функцией и $\psi'(x) \in L^2[0, 1]$.

Покажем, например, что точки $\lambda = \pm i$ принадлежат остаточному спектру рассматриваемого оператора.

Действительно, для любой функции $\varphi(x) \in D_T$ и $e^x \in D_{T^*}$ имеем

$$((T + iE)\varphi, e^x) = (\varphi, (T^* - iE)e^x) = (\varphi, ie^x - ie^x) = 0.$$

Элемент e^x ортогонален линейному многообразию $R(T + iE)$, и, следовательно, $R(T + iE)$ не плотно в $L^2[0, 1]$. Аналогично показывается, что элемент e^{-x} ортогонален $R(T - iE)$, т. е. $\lambda = -i$ также принадлежит остаточному спектру оператора T.

Пусть T — самосопряженный оператор в H.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 21. *Всякое комплексное число λ, для которого $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, принадлежит резольвентному множеству самосопряжен-*

ного оператора T, для таких λ резольвента R_λ — ограниченный оператор, для которого

$$\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Кроме того,

$$\operatorname{Im}((T-\lambda E)\ f, f) = -\operatorname{Im}\lambda\|f\|^2, \quad f \in D_T.$$

Для $f \in D_T$ имеем, что $(Tf, f) = (f, Tf) = \overline{(Tf, f)}$, т. е. скалярное произведение вещественно. Отсюда получаем, что

$$\operatorname{Im}((T-\lambda E)f, f) = \operatorname{Im}(Tf, f) - \operatorname{Im}\lambda(f, f) = -\operatorname{Im}\lambda\|f\|^2.$$

По неравенству Коши — Буняковского имеем

$$\|(T-\lambda E)f\|\ \|f\| \geqslant |((T-\lambda E)f, f)| = |(Tf, f) - \lambda(f, f)| \geqslant$$
$$\geqslant |\operatorname{Im}\lambda|\ \|f\|^2,$$

т. е.

$$\|(T-\lambda E)f\| \geqslant |\operatorname{Im}\lambda|\ \|f\|.$$

Следовательно, обратный оператор $(T-\lambda E)^{-1}$ существует. Покажем, что область значений оператора $(T-\lambda E)$ плотна в H, если $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Допустим противное, что существует вектор $h \perp R(T-\lambda E)$ — области значений оператора $(T-\lambda E)$, $h \neq 0$. Тогда

$$0 = ((T-\lambda E)f, h) = (f, (T-\bar{\lambda}E)h), \quad f \in D_T.$$

Но D_T плотна в H, поэтому $(T-\bar{\lambda}E)h = 0$, т. е. $Th = \bar{\lambda}h$, что противоречит тому, что (Th, h) вещественно. Следовательно, при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ R_λ существует, ограниченна и $\|R_\lambda\| \leqslant \dfrac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}$.

Теорема 22. *Пусть T — замкнутый линейный оператор в H. Тогда при любом λ из резольвентного множества резольвента $R_\lambda = (T-\lambda E)^{-1}$ представляет собой непрерывный (ограниченный) оператор, определенный во всем H.*

Поскольку λ принадлежит резольвентному множеству, то $D_{(T-\lambda E)^{-1}} = R(T-\lambda E)$ — плотно в H, причем существует такая постоянная $d > 0$, что

$$\|(T-\lambda E)f\| \geqslant d\|f\|, \quad f \in D_T.$$

Покажем, что область значений оператора $T-\lambda E$ совпадает со всем H.

Пусть для некоторой последовательности $\{f_n\}$ существует предел в H последовательности $(T-\lambda E)f_n$, равный g, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}(T-\lambda E)f_n = g.$$

Тогда предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f$ тоже существует. Но оператор T — замкнутый, поэтому $(T-\lambda E)f=g$. Следовательно, $R(T-\lambda E)=H$, поскольку по условию $\overline{R(T-\lambda E)}=H$.

ЗАДАЧИ

1. Построить пример оператора в гильбертовом пространстве H, область значений которого не замкнута.

2. Пусть H — гильбертово пространство, $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис. Пусть линейный оператор A задан по правилу

$$A\varphi_j=\lambda_j\varphi_j, \quad \lambda_j\in C.$$

Доказать, что спектр такого оператора совпадает с замыканием множества $\{\lambda_i\}$. Показать, что всякое замкнутое ограниченное множество комплексной плоскости является спектром некоторого оператора указанного вида.

3. В пространстве l^p оператор S действует на любой вектор $\xi\in l^p$, $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots)$ следующим образом: $S\xi=\xi_0=(\xi_2, \xi_3, \ldots)$. Найти спектр оператора S, $p\geqslant 1$.

4. Рассмотрим в пространстве $L^2[0, 1]$ оператор B:

$$Bf(x)=\int\limits_0^x f(y)\,dy, \quad f\in L^2[0, 1].$$

Переводит ли оператор B какой-нибудь ненулевой вектор в нуль? Будет ли оператор B^*B оператором с конечной абсолютной нормой? Доказать, что $B+B^*$ — оператор проектирования на одномерное подпространство из констант. Показать, что спектр оператора $A=(E+B)^{-1}$ состоит из точки $\{1\}$ и $\|A\|=1$.

5. *Раствором* двух линейных многообразий в H называется норма разности операторов, проектирующих H на замыкания этих линейных многообразий. Значит, если раствор линейных многообразий M_1, M_2 обозначить $\theta(M_1, M_2)$, то $\theta(M_1, M_2)=\|P_2-P_1\|$, где P_1, P_2 — операторы проектирования на $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ соответственно. Доказать, что если $\theta(M_1, M_2)<1$, то размерности линейных многообразий M_1 и M_2 одинаковы.

6. Пусть ограниченный и определенный во всем пространстве оператор A таков, что всякий элемент вида Af может быть представлен по форме:

$$Af=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i(f, \varphi_i)\varphi_i,$$

где $\{\varphi_i\}_1^\infty$ — ортонормированная последовательность, а $\mu_i\to 0$ при $i\to\infty$. Доказать, что тогда A вполне непрерывен.

7. Для ограниченного линейного оператора A существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}=r(A)$ (см. теорему 1 на с. 269), который называется *спектральным радиусом* оператора A. Доказать, что $r(\alpha A)=|\alpha|r(A)$ для любого числа α, а если операторы A и B коммутируют (т. е. $AB=BA$), то

$$r(A+B)\leqslant r(A)+r(B),$$
$$r(AB)\leqslant r(A)r(B).$$

8. Найти спектр и спектральный радиус операторов A в $L^2[0, 1]$, заданных по формулам:

$$Ax(t)=\int\limits_0^1 \ln(ts)\,x(s)\,ds, \quad Ax(t)=\int\limits_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^\alpha x(s)\,ds,$$

а также операторов $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$, заданных по формулам:

$$Ax(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \quad Ax(t) = tx(t).$$

9. Показать, что спектральный радиус оператора A: $C[0, 1] \to C[0, 1]$, определенного по формуле $Ax(t) = \int_0^t K(t, s)\,x(s)\,ds$, $K(t, s)$ — непрерывная функция двух аргументов на квадрате $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, равен нулю.

10. Показать, что спектр оператора $A: C[0, 1] \to C[0, 1]$, определенного по формуле $Ax(t) = x(t^2)$, лежит на единичном круге.

11. Найти собственные векторы и собственные значения интегрального оператора A в $L^2[0, 1]$, заданного формулой

$$Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)\,x(s)\,ds,$$

где $K(t, s) = \cos 2\pi(t - s)$ или $K(t, s) = \min(t, s)$.

12. В гильбертовом пространстве $H = L^2(-\infty, \infty)$ рассмотрим оператор умножения на независимую переменную $Tf(x) = xf(x)$ с областью определения D_T, состоящей из функций, для которых

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Доказать, что T — самосопряженный оператор и его спектральное разложение имеет вид

$$Tf = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE(\lambda) f = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda d(e_\lambda(x) f(x)),$$

где

$$e_\lambda(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leqslant \lambda, \\ 0, & \text{если } x > \lambda. \end{cases}$$

§ 3. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРЫ

1. Аналитические свойства резольвенты

Всюду ниже рассмотрения ведутся в гильбертовом пространстве H. Операторы, которые здесь встречаются, не являются, вообще говоря, самосопряженными. Такие операторы называются *несамосопряженными*.

Определение 1. *Векторнозначной (операторнозначной) функцией* на гильбертовом пространстве H называется функция $h(\lambda)$ (оператор $A(\lambda)$), которая при каждом значении параметра λ из поля коэффициентов P является вектором (ограниченным линейным оператором) в H.

Определение 2. Векторнозначная функция $h(\lambda)$ (операторнозначная $A(\lambda)$) на H называется *аналитической* функцией комплексного параметра λ в некоторой области G плоскости λ, если в каждой точке $\lambda \in G$ отношение $\frac{h(\lambda+\Delta\lambda)-h(\lambda)}{\Delta\lambda}$ $\left(\frac{A(\lambda+\Delta\lambda)-A(\lambda)}{\Delta\lambda}\right)$ сходится по норме H (равномерной норме) к некоторому пределу $h'(\lambda)$ $(A'(\lambda))$, являющемуся векторнозначной (операторнозначной) функцией.

Для векторнозначных и операторнозначных функций имеют место все основные свойства скалярных аналитических функций комплексного переменного. В частности, для $h(\lambda)$ и $A(\lambda)$ справедливы теорема Коши о вычетах, представление функций интегралом Коши. В окрестности изолированной особой точки λ_0 имеет место разложение в ряды Лорана:

$$h(\lambda)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{h_n}{(\lambda-\lambda_0)^n},\quad A(\lambda)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_n}{(\lambda-\lambda_0)^n},$$

сходящиеся по норме локально равномерно по λ, причем $h_0 \in H$, A_n — линейные ограниченные операторы на H.

Заметим, что в случае векторнозначных (операторнозначных) функций полюс, существенно особая точка, устранимая особенность определяются аналогично скалярному случаю. Если в G функции $h(\lambda)$ и $A(\lambda)$ имеют в качестве особых точек лишь полюса, т. е. в разложениях в ряды Лорана присутствует лишь конечное число членов с отрицательными степенями $(\lambda-\lambda_0)$, то $h(\lambda)$ и $A(\lambda)$ называются *мероморфными* функциями.

Функция $h(\lambda)$ $(A(\lambda))$ называется *целой*, если она аналитична во всей комплексной плоскости. Порядком целой функции $h(\lambda)$ $(A(\lambda))$ называется число

$$\rho_h=\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\frac{\ln\ln\|h(\lambda)\|}{\ln|\lambda|}\quad\left(\rho_A=\overline{\lim_{|\lambda|\to\infty}}\frac{\ln\ln\|A(\lambda)\|}{\ln|\lambda|}\right).$$

Аналогично скалярному случаю определяется тип целой функции $h(\lambda)$ или $A(\lambda)$. Для функций $\|h(\lambda)\|$ или $\|A(\lambda)\|$ справедлив принцип максимума, а также утверждения типа теорем Линделефа.

Рассмотрим, например, случай, когда $A(\lambda)$ не зависит от λ, а является «скалярным» оператором, т. е. пусть A — линейный ограниченный оператор в гильбертовом пространстве H. Пусть λ_0 — регулярное значение ограниченного оператора A, т. е. в этой точке существует ограниченный, определенный на всем пространстве, оператор $R_{\lambda_0}=(A-\lambda_0 E)^{-1}$. Тогда, как известно (п. 6 § 2) существует окрестность точки λ_0 такая, что все точки этой окрестности также являются регулярными точками оператора A. Покажем, что резольвентный оператор $R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}$, определенный в этой окрестности, является аналитической операторнозначной функцией, причем $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n R_\lambda = n!\ R_\lambda^{n+1}$.

В самом деле, в силу тождества Гильберта для резольвент

$$R_\lambda - R_z = (\lambda - z) R_\lambda R_z,$$

которое легко выводится из следующего соотношения:

$$R_\lambda - R_z = R_\lambda (A - zE) R_z - R_\lambda (A - \lambda E) R_z =$$
$$= R_\lambda A R_z - z R_\lambda R_z - R_\lambda A R_z + \lambda R_\lambda R_z = (\lambda - z) R_\lambda R_z,$$

следует, что R_λ и R_z коммутируют. Кроме того, $R_\lambda = [1 - (z - \lambda) R_\lambda] R_z$. Разлагая выражение в квадратной скобке в ряд при $\lambda = \lambda_0$, мы приходим к соотношению (заменяя для удобства z на λ):

$$R_\lambda = [1 - (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}]^{-1} R_{\lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}.$$

Ряд в правой части абсолютно сходится, по крайней мере для тех λ, которые удовлетворяют условию

$$|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}.$$

Разложение R_λ (в окрестности точки λ_0)

$$R_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}$$

называют *рядом Неймана* для резольвенты.

Это разложение показывает, что R_λ — голоморфная функция от λ, ряд Тейлора которой имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^n R_\lambda = n!\; R_\lambda^{n+1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Для $|\lambda| > \|A\|$ резольвента R_λ допускает разложение (см. п. 6 § 2)

$$R_\lambda = -\lambda^{-1} (1 - \lambda^{-1} A)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

Из наших рассмотрений следует, что спектр оператора A всегда непуст. Действительно, в противном случае R_λ была бы целой функцией, ограниченной во всей комплексной плоскости, отсюда по теореме Лиувилля для целых функций следовало бы, что $R_\lambda = \mathrm{const}$, а поскольку $R_\lambda \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то $R_\lambda = 0$.

Заметим также, что каждое собственное значение λ_0 оператора A есть особая точка аналитической функции R_λ. В самом деле, допустим противное, что λ_0 — регулярная точка (устранимая особенность аналитической функции R_λ). Тогда существует предел по норме пространства

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} R_\lambda = R_{\lambda_0}.$$

Поэтому

$$(A-\lambda_0 E) R_{\lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0} (A-\lambda E) R_\lambda = E.$$

Таким образом, существует $(A-\lambda_0 E)^{-1} = R_{\lambda_0}$, т. е. λ_0 не является собственным значением. Получилось противоречие.

Теорема 1. *Для ограниченного линейного оператора A существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = r(A),$$

который называется спектральным радиусом. Имеет место оценка $r(A) \leqslant \|A\|$. Если $|\lambda| > r(A)$, то резольвента R_λ существует и может быть представлена сходящимся по норме рядом:

$$R_\lambda = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} A^n.$$

Действительно, пусть $r_0 = \inf_{n\geqslant 1} \|A^n\|^{1/n}$. Тогда, если показать, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|A^n\|^{1/n} \leqslant r_0$, то и существование предела $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ будет также показано.

Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем k так, что $\|A^k\|^{1/k} \leqslant r_0 + \varepsilon$. Для целого n определим q из условия $n = pk + q$, $0 \leqslant q \leqslant k-1$ (p — целое). Поскольку $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$, то

$$\|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A^k\|^{p/n} \cdot \|A\|^{q/n} \leqslant (r_0+\varepsilon)^{kp/n} \|A\|^{q/n}.$$

Поскольку $pk/n \to 1$, $q/n \to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|A^n\|^{1/n} \leqslant r_0 + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \|A^n\|^{1/n} \leqslant r_0$. Существование предела $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$ доказано. Далее, $\|A^n\| \leqslant \leqslant \|A\|^n$ и $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \leqslant \|A\|$, т. е. $r(A) \leqslant \|A\|$. Отсюда получаем, что ряд для R_λ сходится при $|\lambda| > r(A)$. Действительно, если $|\lambda| \geqslant r(A) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то $\|\lambda^{-n} A^n\| = |\lambda^{-n}| \cdot \|A^n\| \leqslant (r(A) + \varepsilon)^{-n} \times \times \left(r(A) + \frac{\varepsilon}{2}\right)^n$ при достаточно больших n (здесь использовано неравенство для $|\lambda|$ и свойство предела $r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}$). Поэтому ряд для R_λ с общим членом $\lambda^{-n} A^n$ сходится по норме. То, что это ряд для резольвенты, проверяется умножением его слева и справа на $(A-\lambda E)$.

Заметим, что для симметрического оператора A справедливо равенство для спектрального радиуса:

$$r(A)=\|A\|.$$

Действительно, поскольку

$$(A^2f, f)=(Af, Af)=\|Af\|^2,$$

то справедливы равенства: $\|A^2\|=\|A\|^2$, $\|A^4\|=\|A\|^4$, ..., $\|A^{2^m}\|=\|A\|^{2^m}$. В случае произвольного показателя n выберем m, чтобы $2^m-n=p\geqslant 0$. Тогда $\|A\|^{n+p}=\|A^{n+p}\|\leqslant\|A^n\|\cdot\|A^p\|\leqslant\|A^n\|\cdot\|A\|^p$, т. е. $\|A\|^n\leqslant\|A^n\|$. Противоположное неравенство всегда справедливо, таким образом,

$$r(A)=\lim_{n\to\infty}(\|A^n\|)^{1/n}=\|A\|.$$

Поэтому легко видеть, что для нормы резольвенты R_λ симметрического оператора A справедливы соотношения

$$\|R_\lambda\|=r(R_\lambda)=\frac{1}{d(\lambda,\ S(A))},$$

где $d(\lambda,\ S(A))$ — расстояние от точки λ, где определена резольвента R_λ, до спектра $S(A)$ оператора A.

Поскольку область сходимости ряда для резольвенты есть множество $|\lambda|>r(A)$, то на границе круга сходимости, т. е. при $|\lambda|=r(A)$, существует по крайней мере одна точка спектра оператора A. Если же радиус сходимости ряда будет равен нулю, то точка $\lambda=0$ будет точкой спектра, так как в противном случае резольвента была бы целой функцией, ограниченной во всей плоскости, чего быть, как мы знаем, не может.

Итак, можно резюмировать полученные результаты.

Спектр линейного ограниченного оператора A в гильбертовом (или банаховом) пространстве лежит внутри круга $|\lambda|\leqslant r(A)$. На границе круга имеется по крайней мере одна точка спектра. Вне этого круга резольвента R_λ представляется сходящимся по операторной норме рядом

$$R_\lambda=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n-1}A^n.$$

Для симметрического ограниченного оператора справедливы равенства

$$r(A)=\|A\|,\quad \|R_\lambda\|=r(R_\lambda)=d^{-1}(\lambda,\ S(A)).$$

Продолжим изучение операторнозначных функций.

Через $A^*(\lambda)$ мы будем обозначать операторнозначную функцию, значения которой при каждом $\lambda_0 \in G$ есть операторы $A^*(\lambda_0)$, сопряженные к оператору $A(\bar{\lambda}_0)$.

В дальнейшем операторнозначную функцию $A(\lambda)$, определенную в области G, будем называть просто оператором. При этом, конечно, подразумевается, что $A(\lambda_0)$ является линейным оператором при каждом $\lambda_0 \in G$.

Определение 3. Оператор $A(\lambda)$ называется *вполне непрерывным в области* G, если операторы $A(\lambda_0)$ вполне непрерывны в каждой точке λ_0 области G.

Заметим, что если оператор $A(\lambda)$ вполне непрерывен в окрестности изолированной особой точки $\lambda = \lambda_0$, то коэффициенты ряда Лорана являются вполне непрерывными операторами. Этот факт следует из выражения A_n в виде интеграла

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint A(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^{-n-1} d\lambda$$

и теоремы 2 п. 2 § 2 этой главы. Действительно, заменяя интеграл конечными суммами, мы представим A_n как предел сходящихся по норме вполне непрерывных операторов.

Заметим также, что выше написан интеграл от операторнозначной функции, который есть предел по равномерной норме операторных интегральных сумм

$$\sum_i A(\mu_i)(\mu_i - \lambda_0)^{-n-1} \Delta\lambda_i,$$

где μ_i — точки деления, а предел берется при стремлении диаметра разбиений к нулю. В данном случае берутся разбиения окружности, содержащей внутри особую точку λ_0. Такой интеграл обладает всеми основными свойствами интеграла от скалярной функции.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\lambda \in F \subset G$, F — замкнутое ограниченное подмножество комплексной плоскости. Пусть $A(\lambda)$ — вполне непрерывный оператор, являющийся аналитической операторнозначной функцией в области G, вектор f принадлежит ограниченному множеству M гильбертова пространства H. Тогда из всякой бесконечной последовательности множества $\{A(\lambda) f\}$, $\lambda \in F$, $f \in M$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство леммы получается из того факта, что из всякого бесконечного множества $\{\lambda\}$, принадлежащего замкнутому подмножеству F комплексной плоскости, можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, а также из вполне непрерывности оператора $A(\lambda)$.

Продолжим наши рассмотрения.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в H. Запишем матричное представление вполне непрерывной аналитической в области G операторной функции $A(\lambda)$. Если $g(\lambda)=A(\lambda)f$, то $g_k=g_k(\lambda)=(A(\lambda)f,\ \varphi_k)$ и $g=(g_1, g_2, \ldots)$. Пусть

$$f=\sum_{i=1}^{\infty} f_i\varphi_i,\ f^N=\sum_{i=1}^{N} f_i\varphi_i, \text{ тогда } Af^N=\sum_{i=1}^{N} f_i A\varphi_i=\sum_{i=1}^{N} f_i \sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\varphi_k,$$

$$\text{где } A\varphi_i=\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}\varphi_k.$$

Перейдем к пределу при $N\to\infty$, получим

$$\lim_{N\to\infty} Af^N=Af=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}f_i\right)\varphi_k,$$

но $Af=\sum_{k=1}^{\infty} g_k\varphi_k$. Таким образом, $g_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}f_i=(Af,\ \varphi_k)=(g,\ \varphi_k)$.

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Если вполне непрерывный оператор $A(\lambda)$ есть аналитическая операторная функция λ в области G, то для каждого замкнутого ограниченного множества $F\subset G$ можно указать последовательность чисел $\varepsilon_n\to 0$, для которых выполняются неравенства:*

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}f_i\right|^2<\varepsilon_n\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2,$$

$$\sum_{i=n}^{\infty}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ki}f_i\right|^2<\varepsilon_n\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2.$$

Достаточно установить только первое неравенство, второе есть следствие вполне непрерывности оператора $A^*(\lambda)$. Разделив обе части первого неравенства на $\|f\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|f_i|^2$, придем к неравенству

$$\sum_{k=n}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}l_i\right|^2<\varepsilon_n,\quad l_i=\frac{f_i}{\|f\|}.$$

Тогда $\sum_{i=1}^{\infty}|l_i|^2=1$, т. е. $\|l\|=1$, если $l=(l_1,\ l_2, \ldots)$. По предыдущей лемме из множеств элементов $\{A(\lambda)l\}$, $\lambda\in F$, $\|l\|=1$ можно извлечь сходящуюся в H подпоследовательность. Другими словами, множество $\overline{\{A(\lambda)l\}}$, $\lambda\in F$, $\|l\|=1$ — компактно. Тогда, если $g^0(\lambda)=A(\lambda)l$ и $g^0(\lambda)=(g_1{}^0(\lambda),\ g_2{}^0(\lambda),\ \ldots,\ g_k{}^0(\lambda),\ \ldots)$, то $g_k^0(\lambda)=$

$=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}l_i$. Следовательно, требуемые неравенства можно записать так:

$$\sum_{k=n}^{\infty} |g_k^0(\lambda)|^2 < \varepsilon_n, \ \lambda \in F, \ \varepsilon_n \to 0.$$

Однако, согласно задаче 9 п. 3 § 3 гл. I эти неравенства справедливы, что и требовалось.

Заметим, что, очевидно, справедливо и обратное. Если неравенства, записанные в условиях леммы 2, справедливы, то множество $\overline{\{A(\lambda)\, l\}}$ — компактно. Таким образом, свойство вполне непрерывного оператора, установленное в лемме 1, эквивалентно выполнению первого неравенства, доказываемого в лемме 2.

Определение 4. *Резольвентой* $R(\lambda_0)$ оператора $A(\lambda_0)$ называют оператор, для которого выполнено соотношение

$$(E+R(\lambda_0))(E-A(\lambda_0))=E,$$

где E — единичный оператор.

Если резольвента существует, то, очевидно, можно записать соотношение

$$E+R(\lambda_0)-(E+R(\lambda_0))A(\lambda_0)=E,$$

т. е.

$$R(\lambda_0)=(E+R(\lambda_0))A(\lambda_0)=A(\lambda_0)+R(\lambda_0)A(\lambda_0).$$

Отсюда при условии, что $A(\lambda_0)$ — вполне непрерывный оператор, а $R(\lambda_0)$ — ограниченный оператор, получаем, используя свойства вполне непрерывных операторов, что $R(\lambda_0)$ является также вполне непрерывным оператором.

Следующая теорема имеет важное значение в теории несамосопряженных операторов.

Теорема 2. *Пусть $A(\lambda)$ является вполне непрерывным оператором при любом значении λ, принадлежащем некоторой области G, и при $\lambda \in G$ $A(\lambda)$ — аналитическая операторная функция. Если при некотором $\lambda=\lambda_0 \in G$ существует и является ограниченным оператором резольвента $R(\lambda_0)$, то $R(\lambda)$ существует во всей области G, за исключением множества изолированных точек, и является мероморфной функцией λ.*

Рассмотрим уравнение

$$g=A(\lambda)g+f,$$

которое в матричной записи выглядит так:

$$g_k=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}g_i+f_k, \ k=1, 2, \ldots,$$

где

$$g=(g_1, g_2, \ldots), \quad f=(f_1, f_2, \ldots).$$

Обозначим через H_n подпространство, натянутое на векторы вида $(g_1, g_2, \ldots, g_n, 0, 0, \ldots)$, а через H_{n_1} — подпространство, натянутое на векторы $(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$. Пусть P и P_1 — проекционные операторы, соответствующие этим подпространствам. Обозначим через F_0 произвольную замкнутую ограниченную подобласть области G, содержащую точку λ_0. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ — числа, соответствующие множеству F_0 в неравенствах леммы 2. Выберем n столь большим, чтобы $\varepsilon_{n+1}<1$. Первые n уравнений системы $g_k=\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ki}g_i+f_k$ запишем в операторной форме

$$Pg=PAPg+PAP_1g+Pf, \tag{$*$}$$

а остальные уравнения запишутся так:

$$P_1g=P_1APg+P_1AP_1g+P_1f. \tag{$**$}$$

Согласно выбору номера n мы имеем, что

$$\|P_1A\|<\varepsilon_{n+1}, \quad \lambda\in F_0.$$

Поэтому оператор $E-P_1A$ в области F_0 имеет резольвенту, так как он имеет в этой области обратный оператор. Для резольвенты $R_1(\lambda)$ в F_0, очевидно, справедливо разложение

$$E+R_1=E+P_1A+(P_1A)^2+\ldots$$

Очевидно также в силу равномерной сходимости ряда, что резольвента является аналитической функцией λ, причем

$$\|E+R_1\|\leqslant 1+\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_{n+1}^2+\ldots=\frac{1}{1-\varepsilon_{n+1}}.$$

Применим оператор $E+R_1$ слева к равенству $(**)$, имеем

$$(E+R_1)P_1g=(E+R_1)P_1APg+(E+R_1)P_1AP_1g+(E+R_1)P_1f.$$

Отсюда

$$P_1g=(E+R_1)P_1APg+(E+R_1)P_1f+[(E+R_1)P_1AP_1-R_1P_1]g.$$

Оператор, стоящий выше в квадратных скобках, равен нулю, так как

$$(E+R_1)(P_1A-E+E)P_1-R_1P_1=-P_1+(E+R_1)P_1-R_1P_1=0.$$

Поэтому уравнение $(**)$ эквивалентно уравнению

$$P_1g=(E+R_1)P_1APg+(E+R_1)P_1f. \tag{$**$}'$$

Аналогично заключаем, что уравнение $(*)$ эквивалентно равенству

$$Pg=PA[E+(E+R_1)P_1A]Pg+P[E+A(E+R_1)P_1]f. \tag{$*$}'$$

Последнее уравнение представляет собой систему алгебраических линейных уравнений относительно $g_1, g_2, \ldots, g_n$, коэффициенты которых, согласно сказанному выше, являются голоморфными функциями параметра $\lambda \in F_0$. Далее, оператор $E - A(\lambda_0)$ имеет обратный. Поэтому уравнение $[E - A(\lambda)]g = f$ и, в частности, уравнение $(*)'$ имеют решение при любой правой части f. Тогда, как это хорошо известно из курса линейной алгебры, определитель $\Delta_n(\lambda)$ системы $(*)'$ отличен от нуля в точке λ_0 и решение системы $(*)'$ записывается в виде

$$Pg = \frac{L(\lambda) P[E + A(E + R_1) P_1] f}{\Delta_n(\lambda)},$$

где $L(\lambda)$ — определенный «разрешающий» оператор, аналитически зависящий от λ. Явный вид его можно найти, например, по правилу Крамера. Функция $\Delta_n(\lambda)$ — голоморфная функция на F_0 и обращается в нуль в конечном числе точек. Подставляя вместо Pg в уравнение $(**)'$ найденное выше выражение через «разрешающий» оператор, запишем

$$P_1 g = (E + R_1) P_1 A \frac{L(\lambda) P[E + A(E + R_1) P_1] f}{\Delta_n(\lambda)} + (E + R_1) P_1 f.$$

Окончательно получим, что

$$g = Pg + P_1 g = (E + R) f = \frac{L(\lambda) \cdot P[E + A(E + R_1) P_1] f}{\Delta_n(\lambda)} +$$
$$+ \frac{(E + R_1) P_1 A L(\lambda) P[E + A(E + R_1) P_1] f}{\Delta_n(\lambda)} + (E + R_1) P_1 f.$$

Поэтому

$$E + R = \frac{1}{\Delta_n(\lambda)} \{E + (E + R_1) P_1 A\} \{L(\lambda) P[E + A(E + R_1) P_1]\} +$$
$$+ (E + R_1) P_1.$$

Все входящие в правую часть операторы являются аналитическими на F_0 функциями. Единственными особыми точками правой части могут быть нули функции $\Delta_n(\lambda)$, которые являются полюсами функции $E + R$, причем их конечное число. Теорема доказана.

2. Теорема Келдыша

Определение 5. Пусть $A(\lambda)$ — вполне непрерывный оператор, аналитически зависящий от параметра $\lambda \in G$. Нетривиальное решение g уравнения $g = A(\lambda_0) g$ называется *собственным вектором* оператора $A(\lambda)$. Соответствующее значение параметра λ_0 называется *собственным значением* оператора, отвечающим данному собственному вектору g.

Определение 6. Элемент g_k называется *присоединенным вектором порядка* k к собственному вектору g, если удовлетворяет следующим соотношениям:

$$g = A(\lambda_0) g,$$

$$g_1 = A(\lambda_0) g_1 + \frac{1}{1!} \frac{\partial A(\lambda_0)}{\partial \lambda} g,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_k = A(\lambda_0) g_k + \frac{1}{1!} \frac{\partial A(\lambda_0)}{\partial \lambda} g_{k-1} + \dots + \frac{1}{k!} \frac{\partial^k A(\lambda_0)}{\partial \lambda^k} g.$$

Говорят, что элементы $g, g_1, g_2, \dots$ образуют *цепочку присоединенных векторов*. Заметим, что в случае, когда $A(\lambda)$ есть полином относительно λ,

$$A(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 + \dots + \lambda^m A_m,$$

то функция $u(t)$ вида

$$u(t) = e^{\lambda t} \left(g_k + \frac{t}{1!} g_{k-1} + \dots + \frac{t^k}{k!} g \right)$$

удовлетворяет уравнению

$$u = A_0 u + A_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \dots + A_m \frac{\partial^m u}{\partial t^m}.$$

Поэтому вопросы обоснования применимости, например, метода Фурье для нахождения решений таких операторных уравнений приводят к доказательству теорем полноты собственных и присоединенных векторов оператора $A(\lambda)$.

Известно, что для вполне непрерывного оператора при заданном собственном значении, отличном от нуля, число линейно независимых собственных векторов конечно (см. § 2, п. 10 этой главы). Можно показать, что в случае, когда резольвента $R(\lambda)$ оператора $A(\lambda)$ есть мероморфная функция λ, порядок присоединенных векторов не превосходит порядка полюса резольвенты при $\lambda = \lambda_0$.

Пусть g — собственный вектор. Обозначим через m максимальный порядок присоединенных к g векторов. Число $m+1$ будем называть *кратностью* собственного вектора g.

Определение 7. *Канонической системой собственных и присоединенных векторов при $\lambda = \lambda_0$*

$$g^{(k)}, g_1^{(k)}, \dots, g_{m_k}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

называется система, обладающая свойствами:

а) вектор $g^{(1)}$ есть собственный вектор, кратность которого достигает возможного максимума $m_1 + 1$;

б) вектор $g^{(k)}$ есть собственный вектор, не выражающийся линейно через $g^{(1)}, \dots, g^{(k-1)}$, кратность которого достигает возможного максимума $m_k + 1$;

в) векторы $g^{(k)}, g_1^{(k)}, \dots, g_{m_k}^{(k)}$ образуют цепочку присоединенных векторов;

г) векторы $\{g^{(k)}\}$ образуют базис подпространства собственных векторов при $\lambda=\lambda_0$.

Число $N=m_1+1+m_2+1+\ldots$ называется *кратностью собственного значения* $\lambda=\lambda_0$.

Непосредственно из определения канонической системы собственных и присоединенных векторов следует, что произвольный присоединенный вектор порядка p есть линейная комбинация векторов $g_i^{(k)}$ при $i\leqslant p$. Кратность собственного вектора $c_1 g^{(1)}+ +\ldots+c_\nu g^{(\nu)}$ при $c_\nu\neq 0$ равна m_ν. Числа $m_1, m_2, \ldots$ не зависят от выбора канонической системы.

Определение 8. Система собственных и присоединенных векторов вполне непрерывного оператора $A(\lambda)$ называется *n-кратно полной*, если любой набор из n векторов $f_0, f_1, \ldots, f_{n-1}$ может быть представлен как предел по норме пространства линейных комбинаций

$$f_{\nu,N}=\sum_{k=1}^{N}\sum_{(p)} a_{p,N}^{(k)} g_p^{(k,\nu)},\ \nu=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$$

с коэффициентами, не зависящими от ν, где

$$g_p^{(k,\nu)}=\left[\frac{d^\nu}{dt^\nu}e^{\lambda_k t}\left(g_p^{(k)}+g_{p-1}^{(k)}\frac{t}{1!}+\ldots+g^{(k)}\frac{t^p}{p!}\right)\right]_{t=0},$$

λ_k — собственные значения вполне непрерывного оператора $A(\lambda)$.

В частности, при $n=1$ это определение совпадает с обычным определением полноты системы собственных и присоединенных векторов. В случае, когда кратности всех собственных векторов равны единице, вектор $f_{\nu,N}$ имеет вид

$$f_{\nu,N}=\sum_{k=1}^{N} a_N^{(k)}\lambda_k^\nu g^{(k)}.$$

Пусть B — вполне непрерывный самосопряженный оператор. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\varphi=\mu B\varphi.$$

Обозначим через μ_i собственные значения этой задачи, а через φ_i — ортогональную систему собственных векторов. Условимся, что если $B\varphi_i=0$, то $\mu_i=\infty$.

Определение 9. Оператор B называется *полным*, если система собственных векторов φ_i, отвечающая собственным значениям $\mu_i\neq\infty$, полна в H.

Определение 10. Нижняя грань чисел ρ', для которых $\sum_{i=1}^{\infty}|\mu_i|^{-\rho'}<\infty$, называется *порядком* ρ оператора B.

Через B^α, $\alpha>0$ обозначается оператор $B^\alpha=\int\lambda^\alpha dE(\lambda)$, где $E(\lambda)$ — разложение единицы оператора B.

Важное значение в затронутых нами вопросах играет следующая теорема полноты.

Теорема 3 (Келдыш). *Пусть B — полный, самосопряженный, вполне непрерывный оператор конечного порядка, $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ — произвольные вполне непрерывные операторы. Для каждого из уравнений*

$$g = (A_0 + \lambda B^{\frac{1}{n}} A_1 + \ldots + \lambda^{n-1} B^{\frac{n-1}{n}} A_{n-1} + \lambda^n B)\, g,$$

$$g = (A_0^* + \lambda A_1^* B^{\frac{1}{n}} + \ldots + \lambda^{n-1} A_{n-1}^* B^{\frac{n-1}{n}} + \lambda^n B)\, g$$

система собственных и присоединенных векторов n-кратно полна.

3. Корневые векторы и корневые подпространства несамосопряженных операторов

Продолжим изучение спектральных свойств линейных ограниченных операторов, определенных на всем гильбертовом пространстве H. Так же, как и в предыдущем пункте, рассматриваемые операторы являются, вообще говоря, несамосопряженными.

Определение 11. Вектор $f \neq 0$ называется *корневым для собственного значения* λ_0 линейного оператора A, если существует натуральное число s такое, что

$$(A - \lambda_0 E)^s f = 0.$$

Множество всех корневых векторов оператора A, отвечающих одному и тому же собственному значению λ_0, вместе с нулевым вектором образует многообразие L_{λ_0}, называемое *корневым многообразием.* Размерность этого многообразия называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_0. Если эта размерность конечна, то данное многообразие замкнуто и является подпространством. Изолированное собственное значение, алгебраическая кратность которого конечна, называется *нормальным собственным значением.* В общем случае ограниченного линейного оператора A многообразие L_{λ_0} не является замкнутым. Если же L_{λ_0} оказывается замкнутым, то его называют *корневым подпространством.*

Пусть $R_\lambda = (A - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора A, $\sigma(A)$ — спектр оператора A, т. е. те точки λ, где не существует ограниченного оператора R_λ. Введем оператор

$$P_{\sigma_1} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} R_\lambda d\lambda,$$

где Γ_1 — замкнутый спрямляемый контур, ограничивающий некоторую область G_1, содержащую изолированную часть σ_1 спектра оператора A. Контур Γ_1 состоит из регулярных точек оператора A и имеет положительную ориентацию. Расстояние от σ_1 до замкнутого множества, дополнительного к G_1, положительно. Отметим следующие свойства оператора P_{σ_1}:

а) *Если спектр $\sigma(A)$ оператора A разбит на две непересекающиеся замкнутые части σ_1 и σ_2 $(\sigma(A)=\sigma_1\bigcup\sigma_2,\ \sigma_1\bigcap\sigma_2=\varnothing)$, то*

$$P_{\sigma_1}+P_{\sigma_2}=E.$$

Действительно, пусть Γ_1 и Γ_2 ограничивают σ_1 и σ_2 соответственно, тогда

$$P_{\sigma_1}+P_{\sigma_2}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1\bigcup\Gamma_2}R_\lambda d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\|A\|+1}R_\lambda d\lambda,$$

так как спектр линейного ограниченного оператора лежит в круге $C_z=\{z:|z|\leqslant\|A\|\}$, ибо $R_\lambda=(A-\lambda E)^{-1}=-\frac{E}{\lambda}-\frac{A}{\lambda^2}-\ldots-$ $-\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}-\ldots$ сходится при $|\lambda|>\|A\|$ равномерно на любом компакте в дополнении к кругу C_z. Подставляя написанное разложение резольвенты в интеграл и интегрируя почленно, в силу соотношений

$$\int\limits_{|\lambda|=a}\frac{d\lambda}{\lambda^n}=0,\ n\neq 1,\quad \int\limits_{|\lambda|=a}\frac{d\lambda}{\lambda}=2\pi i,\ a>0,$$

получим, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\|A\|+1}R_\lambda d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\|A\|+1}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\lambda^{n+1}}\right]d\lambda=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=\|A\|+1}\frac{d\lambda}{\lambda^{n+1}}=E,$$

где $A^0=E$, а интегрирование и суммирование можно поменять местами в силу равномерной сходимости (по операторной норме) ряда для резольвенты.

б) *Оператор P_{σ_1} — проекционный оператор (такие операторы называют еще операторами параллельного проектирования), т. е. $P_{\sigma_1}^2=P_{\sigma_1}$, $P_{\sigma_1}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}R_\lambda d\lambda$, Γ_1 — содержит часть σ_1 спектра оператора A, причем эта часть отстоит на положительном расстоянии от остального спектра.*

Действительно, рассмотрим контур Γ', содержащий множество σ_1, лежащий целиком внутри Γ_1, состоящий также из регулярных точек оператора A. Такой контур в силу наших предположений о σ_1 существует. Тогда по теореме Коши

$$P_{\sigma_1}=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}R_\lambda d\lambda.$$

Следовательно,

$$P_{\sigma_1}^2 = P_{\sigma_1} P_{\sigma_1} = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_1} R_\lambda d\lambda \cdot \int\limits_{\Gamma'} R_z dz = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\Gamma_1\,\Gamma'} R_\lambda R_z d\lambda dz.$$

Используя тождество Гильберта для резольвент

$$R_\lambda - R_z = (\lambda - z) R_\lambda R_z,$$

последний интеграл можно записать в виде

$$P_{\sigma_1}^2 = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\Gamma_1\,\Gamma'} \frac{R_\lambda - R_z}{\lambda - z} d\lambda dz = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\iint\limits_{\Gamma_1\,\Gamma'} \frac{R_\lambda}{\lambda - z} d\lambda dz - \right.$$

$$\left. - \iint\limits_{\Gamma_1\,\Gamma'} \frac{R_z}{\lambda - z} d\lambda dz \right] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \left[\int\limits_{\Gamma_1} R_\lambda d\lambda \int\limits_{\Gamma'} \frac{dz}{\lambda - z} - \int\limits_{\Gamma'} R_z dz \int\limits_{\Gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - z} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma'} R_z dz = P_{\sigma_1},$$

т. е. P_{σ_1} — проекционный оператор.

Заметим, что выше мы воспользовались тем, что

$$\int\limits_{\Gamma'} \frac{dz}{\lambda - z} = 0$$

(так как точка λ находится вне контура Γ'), а также равенством

$$\int\limits_{\Gamma_1} \frac{d\lambda}{\lambda - z} = 2\pi i.$$

в) *Пусть* $H_{\sigma_1} = P_{\sigma_1} H$, *тогда* H_{σ_1} — *инвариантно для оператора* A, *т. е.*

$$P_{\sigma_1} A = A P_{\sigma_1}.$$

Это равенство следует из соотношения $R_\lambda A = A R_\lambda$.

г) *Если* A_{σ_1} — *сужение оператора* A *на* H_{σ_1} *и* $\sigma(A_{\sigma_1})$ — *спектр оператора* A_{σ_1}, *то* $\sigma(A_{\sigma_1}) \subset \underline{\sigma_1}$.

В самом деле, пусть $\xi \overline{\in} \sigma_1$. Тогда

$$(A - \xi E) R_\lambda = (A - \lambda E + (\lambda - \xi) E) R_\lambda = E + (\lambda - \xi) R_\lambda.$$

Перепишем это равенство в виде

$$(A - \xi E) \cdot \frac{R_\lambda}{\lambda - \xi} = \frac{E}{\lambda - \xi} + R_\lambda.$$

Выберем контур Γ_1, охватывающий σ_1, но такой, что точка ξ остается вне области, заключенной внутри Γ_1. Проинтегрируем последнее равенство, умноженное на $-\frac{1}{2\pi i}$. Получим

$$-\frac{1}{2\pi i}(A-\xi E)\int_{\Gamma_1}\frac{R_\lambda}{\lambda-\xi}\,d\lambda=\frac{E}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{d\lambda}{\lambda-\xi}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}R_\lambda d\lambda=R_{\sigma_1},$$

так как

$$\int_{\Gamma_1}\frac{d\lambda}{\lambda-\xi}=0.$$

Таким образом,

$$(A_{\sigma_1}-\xi E)\,B_{\sigma_1}=P_{\sigma_1},$$

где $B_{\sigma_1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{R_\lambda}{\lambda-\xi}\,d\lambda$, т. е. в силу того, что все операторы перестановочны, следует, что оператор $R_{\xi\sigma_1}$ — резольвента оператора A_{σ_1} — существует (ξ находится вне области, заключенной внутри Γ_1) и представляет собой сужение оператора $\frac{-1}{2\pi i}\times$ $\times\int_{\Gamma_1}\frac{R_\lambda}{\lambda-\xi}\,d\lambda$ на H_{σ_1}. Из сказанного следует, что $\sigma(A_{\sigma_1})$ совпадает с частью спектра оператора A, попавшей в G — область, заключенную внутри Γ_1, т. е. с σ_1. Заметим, что в наших рассуждениях множество σ_1 может быть и пустым.

Пусть A — вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда вне сколь угодно малой окружности с центром в нуле спектр оператора A состоит из конечного числа собственных значений. Пусть λ_0 — произвольное отличное от нуля собственное значение оператора A. В силу сказанного выше существует окружность Γ_{λ_0} с центром в точке λ_0 такая, что λ_0 является единственной точкой спектра оператора A внутри этой окружности. Введем соответствующий проекционный оператор $P_{\lambda_0}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\lambda_0}}R_\lambda d\lambda.$

д) *Проектор P_{λ_0} где $\lambda_0\neq 0$ и является точкой спектра (т. е. собственным значением) вполне непрерывного оператора A, является конечномерным, т. е. $H_{\lambda_0}=P_{\lambda_0}H$ — конечномерное подпространство.*

В самом деле, любая точка $\lambda_0\neq 0$, принадлежащая спектру $\delta(A)$ оператора A, образует изолированную часть спектра. Отделим точку λ_0 от остальных точек спектра малой окружностью Γ и запишем равенство

$$R_\lambda=-\frac{1}{\lambda}[(A-\lambda E)-A]\,R_\lambda=\frac{-E}{\lambda}+\frac{1}{\lambda}AR_\lambda.$$

Тогда

$$P_{\lambda_0}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}R_\lambda d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\lambda}{\lambda}-\frac{A}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{R_\lambda}{\lambda}\,d\lambda=A\cdot B,$$

где $B = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{R_\lambda}{\lambda}\,d\lambda$. Поскольку A — вполне непрерывный оператор, B — ограниченный, получаем, что P_{λ_0} — вполне непрерывен. Покажем, что подпространство $H_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}H$ конечномерно. Допустив противное, мы построили бы в нем с помощью процесса ортогонализации бесконечную ортонормированную систему $\{\varphi_k\}$ и имели бы, с одной стороны, в силу инвариантности H_{λ_0} относительно P_{λ_0}, что $P_{\lambda_0}\varphi_k = \varphi_k$, т. е. из последовательности в силу вполне непрерывности P_{λ_0} можно выделить сходящуюся подпоследовательность, а с другой стороны, имеем, что $\|\varphi_k - \varphi_i\|^2 = 2$, т. е. сделать это невозможно. Полученное противоречие и доказывает конечномерность H_{λ_0}.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, λ_0 — его собственное значение, не равное нулю. Тогда корневое подпространство L_{λ_0} конечномерно и совпадает с пространством $H_{\lambda_0} = P_{\lambda_0}H$.*

Докажем, что $L_{\lambda_0} = H_{\lambda_0}$. Прежде всего заметим, что $L_{\lambda_0} \supset H_{\lambda_0}$. В самом деле, так как сужение A_{λ_0} оператора A на H_{λ_0} имеет спектром только точку λ_0 (свойство в)) и пространство H_{λ_0} является конечномерным (свойство г)), то H_{λ_0} распадается на конечное число подпространств, в каждом из которых A есть клетка Жордана вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

т. е. H_{λ_0} аннулируется некоторой степенью оператора $A - \lambda_0 E$, следовательно, $H_{\lambda_0} \subset L_{\lambda_0}$. Пусть теперь $L_{\lambda_0} \neq H_{\lambda_0}$. Тогда существует вектор $h \in L_{\lambda_0}$ и $h \overline{\overline{\in}} H_{\lambda_0}$. Запишем разложение вектора h: $h = h_1 + h_2$, $h_1 \in H_{\lambda_0}$, $h_2 \in L_{\lambda_0} \ominus H_{\lambda_0} = H_{\lambda_0}^{\perp}$ — ортогональному дополнению H_{λ_0} в L_{λ_0}. Существует такое натуральное число s_1, что $(A - \lambda_0 E)^{s_1} h = 0$, поскольку h — корневой вектор. По доказанному выше существует такое натуральное число s_2, что $(A - \lambda_0 E)^{s_2} h_1 = 0$, так как $h_1 \in H_{\lambda_0}$. Если взять $s = \max(s_1, s_2)$, то $(A - \lambda_0 E)^s h_2 = 0$. Выберем наименьшее из чисел s такое, что $(A - \lambda_0 E)^s h_2 = 0$. Получим, что $(A - \lambda_0 E)^{s-1} h_2 \neq 0$. Тогда $f = (A - \lambda_0 E)^{s-1} h_2$ — собственный вектор оператора A, поскольку

$$(A - \lambda_0 E) f = (A - \lambda_0 E)^s h_2 = 0.$$

Вместе с тем спектр оператора A в $H_{\lambda_0}^{\perp}$ состоит из множества $\sigma(A) \diagdown \{\lambda_0\}$. Таким образом, допустив, что $h_2 \neq 0$, $h_2 \in H_{\lambda_0}^{\perp}$, мы построили по нему собственный вектор $f \neq 0$ с данным собственным значением λ_0 и пришли таким образом к противоречию. Поэтому $L_{\lambda_0} = H_{\lambda_0}$, и подпространство L_{λ_0} конечномерно вместе с H_{λ_0}. Другими словами, отличный от нуля спектр вполне непрерывного оператора состоит из нормальных собственных значений.

Определение 12. Линейный ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве H, называется *конечномерным*, если его образ AH является конечномерным подпространством H. Размерность этого подпространства называется *размерностью оператора* A и обозначается символом $\dim A$.

Замечание. Учитывая это определение, можно сказать, что одно из утверждений леммы 3 означает, что оператор P_{λ_0} является конечномерным и его размерность равна алгебраической кратности собственного значения λ_0.

Непосредственно из определения легко доказываются следующие свойства конечномерных операторов:

1) *Пусть* A *— ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве* H, *а* B *— конечномерный. Тогда операторы* AB *и* BA *конечномерны, причем их размерность не превосходит размерности оператора* B.

2) *Пусть* A *и* B *— конечномерные операторы, действующие в гильбертовом пространстве* H. *Тогда оператор* $A+B$ *также конечномерен, причем* $\dim(A+B)\leqslant\dim A+\dim B$.

Продолжим изучение свойств оператора проектирования P_{σ_1}. Покажем, как, используя резольвентный оператор, можно строить функциональное исчисление от оператора A, ограниченного на инвариантное подпространство $P_{\sigma_1}H$.

Лемма 4. *Справедливы следующие равенства*

$$A^nP_{\sigma_1}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\lambda^nR_\lambda d\lambda.$$

Воспользуемся тождеством

$$A^n-\lambda^nE=(A-\lambda E)(A^{n-1}+\lambda A^{n-2}+\ \dots\ +\lambda^{n-1}E).$$

Умножая обе части этого равенства на $-\frac{1}{2\pi i}R_\lambda$ и интегрируя по контуру Γ_1, содержащему часть спектра σ_1, получим

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}[R_\lambda(A^n-\lambda^nE)]\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}(A^{n-1}+\lambda A^{n-2}+\ldots+\lambda^{n-2}E)\,d\lambda.$$

Заметим, что в правой части полученного равенства под знаком интеграла стоит аналитическая внутри контура Γ_1 операторнозначная функция. Далее, поскольку интегрирование ведется по замкнутому контуру, мы заключаем, что выражение слева равно нулю, откуда, в силу того что операторы A и R_λ коммутируют, следует доказываемое утверждение.

Используя лемму 4 и свойство аддитивности интеграла, легко доказывается соотношение

$$p(A)\,P_{\sigma_1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} p(\lambda)\,R_\lambda d\lambda,$$

где $p(\lambda)$ — произвольный полином от λ. Далее, используя те же соображения, что и при построении функционального исчисления в доказательстве спектральных теорем, можно расширить класс функций $f(\lambda)$, для которых справедливо равенство

$$f(A)\,P_{\sigma_1} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} f(\lambda)\,R_\lambda d\lambda.$$

Используем полученные результаты для изучения аналитических свойств резольвенты вполне непрерывного оператора в окрестности собственного значения.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H, и λ_0 — его отличное от нуля собственное значение. Тогда согласно лемме 4 имеем

$$(A-\lambda_0 E)^n P_{\lambda_0} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda-\lambda_0)^n R_\lambda d\lambda.$$

Как уже отмечалось, операторнозначная функция R_λ является аналитической функцией в окрестности λ_0, а следовательно, допускает в окрестности этой точки разложение в ряд Лорана:

$$R_\lambda = A(\lambda) + \frac{B_1}{\lambda-\lambda_0} + \frac{B_2}{(\lambda-\lambda_0)^2} + \ldots + \frac{B_m}{(\lambda-\lambda_0)^m} + \ldots,$$

где $A(\lambda)$ — правильная часть ряда Лорана, а B_k — постоянные операторы. Применяя лемму 4, получаем, что

$$B_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{\lambda_0}} (\lambda-\lambda_0)^{m-1} R_\lambda d\lambda = -(A-\lambda_0 E)^{m-1} P_{\lambda_0}.$$

В частности, вычет резольвенты вполне непрерывного оператора в окрестности отличного от нуля собственного значения λ_0 равен $-P_{\lambda_0}$. Далее, поскольку оператор P_{λ_0} конечномерен, то, как следует из свойств 1) и 2) для конечномерных операторов, указанных выше, операторы B_m также являются конечномерными, причем их размерности не превосходят размерности оператора P_{λ_0}, которая равна размерности соответствующего корневого подпространства L_{λ_0}. Покажем, что начиная с некоторого номера m_0 все операторы B_m тождественно равны нулю, т. е. точка λ_0 является полюсом операторнозначной функции R_λ.

В самом деле, оператор P_{λ_0} проектирует все пространство H на корневое подпространство L_{λ_0}, инвариантное относительно оператора A. Тогда сужение оператора A на это подпространство является линейным оператором, действующим в конечномерном пространстве, причем его спектр состоит из одной-единственной точки λ_0. Тогда оператор A на L_{λ_0} может быть приведен к жордановой форме, которая в данном случае будет иметь вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c} \lambda_0 & 1 & & & & & \\ & \ddots & 1 & & 0 & & \\ & & \lambda_0 & & & & \\ \hline & & & \lambda_0 & 1 & & \\ & 0 & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & \lambda_0 & \\ \cline{4-6} & & & & & & \ddots \end{array}\right)$$

Именно из этого представления и следует утверждение относительно операторов B_m, причем в качестве m_0 можно взять длину наибольшей цепочки Жордана, отвечающей собственному значению λ_0.

Введем обозначения

$$L = \bigcup_{\lambda_k \neq 0} L_{\lambda_k}, \qquad Z = H \ominus \overline{L} = L^{\perp},$$

где L_{λ_k} — корневые многообразия, отвечающие собственным числам λ_k, Z — ортогональное дополнение к $\overline{L}$ в H, а L — линейная оболочка корневых многообразий L_{λ_k}.

Определение 13. Оператор A называется *вольтерровым*, если он вполне непрерывен и не имеет отличных от нуля собственных значений.

Лемма 5. *Пусть Q — ортогональный проектор на подпространство Z, т. е. $QH = Z$, $Q^2 = Q$, $Q = Q^*$, A — вполне непрерывный оператор. Тогда оператор QA^*Q — вольтерров.*

Пусть QA^*Q не является вольтерровым. Так как оператор QA^*Q — вполне непрерывный, то существует такой вектор $y_0 \neq 0$, $y_0 \in Z$, что $A^*y_0 = \lambda_0 y_0$, $\lambda_0 \neq 0$ *). Тогда

$$0 = (h, (A^* - \lambda_0) y_0) = (h, 0) = ((A - \overline{\lambda}_0) h, y_0)$$

для любого вектора $h \in H$. Другими словами, вектор $y_0 \perp (A - \overline{\lambda}_0 E) H$. С другой стороны, $y_0 \in Z$, т. е. $y_0 \perp L_{\overline{\lambda}_0}$. Обозначим через $\{\lambda_0\}'$ дополнение до всего спектра оператора A точки спектра $\overline{\lambda}_0$. Тогда на $L_{\{\lambda_0\}'}$ оператор $A - \overline{\lambda}_0 E$ обратим. Таким образом, $y_0 \perp L_{\{\lambda_0\}'}$. Выше было показано (см. свойство а)), что $H = L_{\overline{\lambda}_0} + L_{\{\lambda_0\}'}$. Из того, что $y_0 \perp L_{\overline{\lambda}_0}$ и $y_0 \perp L_{\{\lambda_0\}'}$, следует, что $y_0 = 0$, что противоречит допущению, и оператор QA^*Q вольтерров.

---

*) Подпространство $\overline{L}$ инвариантно относительно оператора A, следовательно, подпространство Z инвариантно относительно A^*, сужение A^* на Z совпадает с QA^*Q.

В § 2 было показано, что самосопряженный (симметрический) вполне непрерывный оператор может быть приведен к диагональному виду. Докажем теперь следующую лемму о приведении произвольного вполне непрерывного оператора к треугольному виду.

Лемма 6. (Шур). *Пусть A — вполне непрерывный оператор, а $L=\bigcup\limits_{\lambda_k\neq 0} L_{\lambda_k}$. Тогда в L существует полная ортонормированная система $\{\varphi_i\}$ такая, что при выборе ее в качестве базиса матрица оператора A приводится к треугольному виду, т. е.*

$$A\varphi_i=\alpha_{i1}\varphi_1+\alpha_{i2}\varphi_2+\ldots+\alpha_{ii}\varphi_i,$$

причем

$$(A\varphi_i,\ \varphi_j)=\alpha_{ij},\quad \alpha_{ii}=(A\varphi_i,\ \varphi_i)=\lambda_i(A),$$

следовательно, на диагонали матрицы стоят собственные значения оператора A.

В каждом из подпространств L_{λ_k} выберем базис Жордана $\{\varphi_i^{(k)}\}$:

$$A\varphi_i^{(k)}=\lambda_i\varphi_i^{(k)}+\varphi_{i-1}^{(k)}$$

или

$$A\psi_i^{(k)}=\lambda_i\psi_i^{(k)},$$

если $\psi_i^{(k)}$ — собственный вектор оператора A. Пронумеровав элементы всех жордановых базисов, получим счетное число векторов, которые линейно независимы в любом конечном числе. Ортогонализуя и нормируя данную счетную систему, получаем требуемую ортонормированную систему.

4. Дифференциальные операторы

Операторы дифференцирования, как мы уже отмечали, не являются ограниченными операторами. При их изучении обычно переходят к обратным операторам, которые являются уже ограниченными и во многих случаях даже вполне непрерывными. Однако и изучение непосредственно операторов дифференцирования (без перехода к обратным) имеет ряд своих преимуществ. Мы коснемся лишь некоторых самых общих понятий, связанных с операторами дифференцирования.

Линейной дифференциальной операцией называется выражение вида

$$l(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{n-1}+\ldots+p_n(x)y,$$

где функции $p_0(x)$, p_1x, ..., $p_n(x)$ — это коэффициенты, а число n — *порядок* дифференциальной операции. Функции $[p_0(x)]^{-1}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ предполагаются непрерывными; в некоторых случаях на них накладываются дополнительные условия. Если обозначить $C^n[a,\ b]$ совокупность всех функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно, то для любой функции $y \in C^n[a, b]$ определена дифференциальная операция $l(y)$ на отрезке $[a, b]$.

Пусть

$$y(a),\ y'(a),\ \ldots,\ y^{n-1}(a),\ y(b),\ y'(b),\ \ldots,\ y^{n-1}(b)$$

— значения функции $y(x)$ и ее производных в точках a и b соответственно.

Обозначим через $U(y)$ линейную форму относительно этих переменных, $U(y)$ имеет вид

$$U(y) = \alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) + \ \ldots\ + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(a) + \\ + \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) + \ \ldots\ + \beta_{n-1} y^{(n-1)}(b).$$

Если задано несколько таких форм, то равенства $U_r(y) = 0$ называются *краевыми (граничными) условиями.* Целесообразно, вообще говоря, рассматривать только линейно независимые формы $U_r(y)$.

Однородной краевой задачей для данного дифференциального выражения $l(y)$ называется задача определения функции y из $C^n[a, b]$, удовлетворяющей равенствам:

$$l(y) = 0, \quad U_r(y) = 0, \quad r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

В дальнейшем будем изучать только случай $m = n$, где n — порядок $l(y)$.

Выясним, при каких условиях однородная краевая задача имеет нетривиальные решения $y(x)$. Пусть $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения $l(y) = 0$. Как известно, общее решение можно записать в виде

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ \ldots\ + C_n y_n.$$

Определим константы $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ так, чтобы y было решением краевой задачи, т. е. удовлетворяло и краевым условиям $U_r(y) = 0$, $r = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Легко приходим к выводу, что однородная краевая задача имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) \ldots U_1(y_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_n(y_1) \ldots U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

равен нулю.

Представляет особый интерес рассмотреть тот случай краевой задачи, когда коэффициенты дифференциальной операции и граничных форм являются аналитическими функциями некоторого числового параметра λ, регулярными в некоторой области D.

Значения параметра λ, при которых однородная краевая задача имеет нетривиальное решение, называются *собственными значениями задачи*, а им отвечающие решения — *собственными функциями (векторами).* В этом случае определитель матрицы (обозначим его $\Delta(\lambda)$) будет аналитической функцией параметра λ в области D. Действительно, линейно независимые решения $y_1(x, \lambda), y_2(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$ всегда можно выбрать решениями задачи Коши, удовлетворяющими в точке a условиям

$$y_j^{(r-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq r, \\ 1 & \text{при } j = r, \end{cases}$$

$r, j = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае решения $y_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ по теореме об аналитической зависимости решений от параметра будут аналитическими в области функциями, а тогда аналитической в той же области будет и функция $\Delta(\lambda)$ — характеристический определитель задачи.

Как уже говорилось, собственные значения однородной краевой задачи обязаны быть нулями определителя матрицы U, т. е. нулями функции $\Delta(\lambda)$. Поскольку $\Delta(\lambda)$ — аналитическая функция параметра λ в области D, то могут представиться две возможности:

1. $\Delta(\lambda) \equiv 0$ в области D; тогда каждое число $\lambda \in D$ есть собственное значение задачи.

2. $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$; тогда в области D существуют не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек внутри D. Если, в частности, коэффициенты дифференциальной операции $l(y)$ и граничных форм $U_r(y)$ — целые функции λ, то и $\Delta(\lambda)$ — целая функция; следовательно, в этом случае по теореме единственности для аналитических функций собственные значения не могут иметь конечной предельной точки (если только $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$).

Таким образом, вопрос о нахождении собственных значений краевой задачи свелся к вопросу нахождения корней функции $\Delta(\lambda)$, т. е. к решению уравнения $\Delta(\lambda) = 0$. В общем случае получить точную информацию о расположении этих корней нельзя. Однако чаще всего рассматривают частные случаи зависимости коэффициентов $l(y)$ и $U_r(y)$ от параметра λ. Наиболее простой и хорошо изученной является следующая задача: $l(y) = \lambda y$, $U_r(y) = 0$, где коэффициенты выражения $l(y)$ и форм $U_r(y)$ от параметра λ не зависят. Часто рассматривают полиномиальную зависимость коэффициентов задачи от параметра λ. Если же мы рассматриваем сложную зависимость коэффициентов и граничных форм от параметра λ и если мы хотим получить точную информацию о собственных значениях λ_n или собственных функциях $y_n(x)$, то нам придется наложить дополнительные условия на коэффициенты краевой задачи. Чаще всего эти условия таковы, что, например, функция $\Delta(\lambda)$ при каждом целом $h \geqslant 0$ допускает представление

$$\Delta(\lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k \lambda} P_{k,h}(\lambda),$$

где α_k — комплексные постоянные, а

$$P_{k,h}(\lambda) = \lambda^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h} \beta_\nu^{(k)} \lambda^{-\nu} + O(\lambda^{n_k - h})$$

при $\lambda \to \infty$. Здесь n_k — целые числа, функции $P_{k,h}(\lambda)$ являются аналитическими при достаточно больших значениях $|\lambda|$ в некоторых секторах, содержащих начало координат и покрывающих всю λ-плоскость.

Найти асимптотику нулей функции $\Delta(\lambda)$ указанного вида уже возможно. Асимптотические формулы для корней таких функций $\Delta(\lambda)$ находятся, например, методом последовательных приближений. Соответствующие формулы будут приведены в следующей главе.

Примеры.

1. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи:

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \\ U_1(y) = y(0) = 0, \\ U_2(y) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\lambda = s^2$, тогда общее решение данного уравнения записывается в виде $y = C_1 \sin sx + C_2 \cos sx$. Далее,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin s\pi & \cos s\pi \end{vmatrix} = -\sin s\pi.$$

Поэтому $\lambda_n = s_n^2 = n^2$, $y_n(x) = C \sin nx$, $n = 1, \ 2, \ \ldots$, где C — константа, выбираемая обычно из условия нормировки собственных функций.

2. Рассмотрим задачу

$$-y'' = \lambda y, \quad U_1(y) = y(0) - y(1) = 0,$$
$$U_2(y) = y'(0) + y'(1) = 0.$$

Пусть $\lambda = s^2$ и $y_1 = \sin sx$, $y_2 = \cos sx$. Тогда

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sin s & 1 - \cos s \\ s(1 + \cos s) & -s \sin s \end{vmatrix} = s(\sin^2 s + \cos^2 s - 1) \equiv 0,$$

т. е. каждое значение λ является собственным. Собственные функции в этом случае записываются в виде $C \cos s\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Заметим, что в этих примерах мы выбирали фундаментальную систему решений $y_1 = \sin sx$, $y_2 = \cos sx$. Можно было бы выбрать фундаментальную систему из целых по λ функций (при каждом фиксированном x):

$$z_1 = \frac{1}{s} \sin s x, \quad z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = 1;$$

$$z_2 = \cos s x, \quad z_2(0) = 1, \quad z_2'(0) = 0.$$

3. Рассмотрим краевую задачу:

$$-y^{IV}=\lambda y'', \quad y''(0)=y'''(0)=y(1)=y'(1)=0.$$

При $\lambda=0$ уравнение $y^{IV}=0$ имеет общее решение $y=C_0+C_1x+$ $+C_2x^2+C_3x^3$; при заданных краевых условиях получаем, что $y\equiv 0$, и поэтому $\lambda=0$ не является собственным значением. Если $\lambda\neq 0$, то общее решение уравнения есть $y=C_1+C_2x+C_3\sin xs+C_4\cos sx$. Из условия $y''(0)=0$ имеем $C_4=0$, а условия $y'''(0)=0$, $y'(1)=0$, $y(1)=0$ требуют равенства нулю C_3, C_2, C_1 соответственно, т. е. у данной задачи нет ни собственных значений, ни собственных функций.

4. Пусть

$$l(y)\equiv y''+2a\lambda y'+b\lambda^2 y=0,$$

$$U_1(y)=y(0)=0, \quad U_2(y)=y(\pi)=0,$$

где a и b — некоторые числа, причем $a^2-b=c<0$. Легко получаем, что в этом случае собственные значения $\lambda_n=\gamma^{-1}n$, $\gamma=\sqrt{|c|}$, а собственные функции $y_n=e^{-anx}\sin\gamma nx$, $n=\pm 1, \pm 2, \dots$.

5. Рассмотрим для примера подробнее дифференциальное выражение

$$l(y)\equiv -y''+p(x)y$$

на отрезке $[0, \pi]$, функцию $p(x)$ предположим непрерывной на $[0, \pi]$. Дифференциальное выражение $l(y)$ порождает различные операторы в различных пространствах.

Если рассмотреть пространство $C[0, \pi]$, то оператор L, соответствующий дифференциальному выражению $l(y)$, можно определить на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций, полагая на этом множестве D_L, что $L(y)=l(y)$, $y\in D_L$. Можно сузить D_L, рассмотрев различные граничные условия: $y(0)=y(\pi)=0$ (нулевые граничные условия), $y'(0)=y'(\pi)$ (условия упругой границы).

Оператор L на области D_L — максимальный в $C[0, \pi]$, остальные операторы — уже его сужения.

Операторы L на D_L необратимы, так как $Ly=0$ имеет два линейно независимых решения, принадлежащих $C[0, \pi]$. Оператор L_1:

$$l(y)\equiv -y''+p(x)y,$$

$$y(0)=y(\pi)=0$$

обратим, возможно, при некоторых дополнительных условиях. Оператор L_2:

$$l(y)\equiv -y''+p(x)y,$$

$$y(0)=y'(0)=0$$

всегда обратим, поскольку задача Коши имеет единственное решение. Обратный оператор к оператору L_1

$$Ly \equiv -y'' + p(x)y,$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

является интегральным оператором

$$L^{-1} f = \int_0^{\pi} G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi,$$

где $G(x, \xi)$ — функция Грина для нулевых граничных условий:

$$G(x, \xi) = \frac{1}{W} \begin{cases} y_1(x)\, y_2(\xi), & x \leqslant \xi, \\ y_2(x)\, y_1(\xi), & x \geqslant \xi, \end{cases}$$

здесь y_1, y_2 — ненулевые решения уравнения $Ly=0$ такие, что $y_1(0)=0$, $y_2(\pi)=0$, а W — их вронскиан. (Если $y_1(\pi) \neq 0$, то $W \neq 0$ и функция Грина определена.)

6. Рассмотрим снова (см. п. 13 § 2) «простейший» оператор:

$$l(y) \equiv -y'',$$
$$y(0) = y(\pi) = 0$$

и исследуем его резольвенту. Очевидно, что собственные значения оператора $\lambda_n = n^2$, а собственные функции $\sin nx$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Резольвента R_λ является интегральным оператором, ядро которого совпадает с функцией Грина уравнения $-y'' = \lambda y = s^2 y$ для нулевых граничных условий.

Нетрудно подсчитать, что

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\sin sx \cdot \sin s(\pi - \xi)}{s \cdot \sin \pi s}, \quad x \leqslant \xi, \quad s^2 = \lambda,$$

а при $x \geqslant \xi$ нужно поменять местами x и ξ в правой части выражения для G.

Из формулы для функции Грина, в частности, получаем, что ее полюса — точки $s_n = n$, т. е. $\lambda_n = n^2$ — собственные значения этого оператора.

Детальное исследование поведения функции Грина обычно проводят при исследовании полноты, базисности собственных функций оператора.