Глава V

СЛЕДЫ ОПЕРАТОРОВ

В этой главе изучаются вопросы, связанные с понятием следа линейного оператора. Хорошо известно, что сумма диагональных элементов матрицы линейного преобразования в n-мерном пространстве, т. е. след матрицы, равняется сумме собственных значений преобразования с учетом их кратности.

Естественно возникает вопрос: справедлив ли этот факт и для каких классов операторов в гильбертовом пространстве? Следы операторов играют важную роль в различных разделах анализа, в вопросах приближенного вычисления собственных значений, при решении обратных задач спектрального анализа, их изучение представляет и самостоятельный интерес.

§ 1. ТЕОРЕМА О СЛЕДЕ ДЛЯ ОПЕРАТОРА В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Условимся называть сумму собственных значений линейного оператора в n-мерном пространстве *спектральным следом*, а сумму диагональных элементов матрицы преобразования — *матричным следом*.

Теорема 1. *Матричный след линейного оператора A в n-мерном линейном пространстве равен его спектральному следу.*

Пусть преобразование A в некотором базисе задается матрицей $\|a_{ik}\|_{i,\,k=1}^{n}$. Покажем, что характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ преобразования A — определитель матрицы $A-\lambda E$, где $A=\|a_{ik}\|_{i,\,k=1}^{n}$, — не зависит от выбора базиса. Действительно, известно, что в новом базисе матрица A принимает вид $C^{-1}AC$, где C — матрица перехода к новому базису. Тогда

$$\det\|C^{-1}AC-\lambda E\|=\det\|C^{-1}AC-\lambda C^{-1}EC\|=$$
$$\det\|C^{-1}(A-\lambda E)C\|=\det\|C^{-1}\|\cdot\det\|A-\lambda E\|\cdot\det\|C\|=\Delta(\lambda).$$

Вычислим теперь $\Delta(\lambda)=\det\|A-\lambda E\|$ через элементы матрицы A. Для вычисления коэффициента при $(-\lambda)^k$ мы должны взять сумму определителей, каждый из которых получается заменой k столбцов матрицы $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$ k столбцами единичной матрицы. Но каждый такой определитель есть главный минор k-го порядка матрицы $\|a_{i,j}\|_{i,j=1}^{n}$. Таким образом, характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ матрицы A имеет вид

$$\Delta(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-S_1\lambda^{n-1}+S_2\lambda^{n-2}-\ \dots\ \pm S_n),$$

где S_1 есть сумма диагональных элементов, S_2 — сумма главных миноров второго порядка и т. д., S_n — определитель матрицы A. С другой стороны, S_1 равняется сумме всех корней $\Delta(\lambda)$ (собственных значений преобразования A) с учетом их кратностей, в чем легко убедиться, вычислив $\Delta(\lambda)$ в базисе, приводящем преобразование A к жордановой форме. Таким образом, спектральный след оператора $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ равен его матричному следу $\operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, т. е. справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},$$

что и требовалось.

§ 2. ЯДЕРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ТЕОРЕМА О СЛЕДЕ

1. Теорема о следе для положительного ядерного оператора

Продолжим изучение вполне непрерывных операторов. Хорошо известно, что для оператора A в $\mathbf{R}^n$ можно получить следующее представление *):

$$Af=(f,\ g_1)f_1+(f,\ g_2)f_2+\ \dots\ +(f,\ g_n)f_n,$$

где $\{f_n\}$ — какой-нибудь базис в $\mathbf{R}^n$, а $\{g_k\}_{k=1}^n$ — некоторая конечная система векторов, которая от f не зависит.

Теорема 2. *Пусть A — произвольный вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве H, пусть H_0 — его нулевое подпространство. Можно указать две ортонормированные системы векторов $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{g_k\}_{k=1}^\infty$ и монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\{s_k\}_{k=1}^\infty$, $s_k\to 0,\ k\to\infty$ такие, что для любого вектора $f\in H$ справедливы разложения, сходящиеся по норме H:*

$$f=f_0+(f,\ f_1)f_1+(f,\ f_2)f_2+\ \dots,\quad f_0\in H_0,$$
$$Af=s_1(f,\ f_1)g_1+s_2(f,\ f_2)g_2+\ \dots\ .$$

Если оператор A симметрический и положительный, то наши утверждения являются следствием рассуждений, проведенных для

---

*) В самом деле, если $\{\varphi_j\}$ — биортогональная система к $\{f_j\}$, то из равенства $Af=\sum_{j=1}^{n}c_jf_j$ следует, что $c_j=(Af,\ \varphi_j)=(f,\ A^*\varphi_j)=(f,\ g_j)$.

вполне непрерывных операторов в предыдущей главе (§ 2, п. 10). Действительно, было показано, что для любого вектора $f \in H$ справедливо равенство $Af = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, f_i) f_i$. Обозначим $f_0 = f - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i$. Тогда $f = f_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) f_i$ и $Af_0 = Af - \sum_{i=1}^{\infty} (f, f_i) Af_i = 0$. Следовательно, в этом случае теорема верна, причем можно положить $s_i = \lambda_i$, $g_i = f_i$.

Пусть A — произвольный вполне непрерывный оператор. Построим оператор $B = A^*A$. Оператор B согласно следствию из теоремы 1 п. 2 § 2 гл. IV является вполне непрерывным и положительным. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность отличных от нуля его собственных значений ($\lambda_k \to 0$), а через $\{f_k\}$ — ортонормированную последовательность его собственных векторов, отвечающих числам λ_k. Тогда получим, что $\lambda_k = (Bf_k, f_k) = (A^*Af_k, f_k) = (Af_k, Af_k) = s_k^2 > 0$, причем $s_k > 0$, $s_1 \geqslant s_2 \geqslant \ldots$.

Числа s_i играют важную роль при изучении вполне непрерывных операторов и называются *s-числами* оператора A.

Заметим, что нулевые подпространства операторов B и A совпадают, так как для любых $f_1, f_2 \in H$

$$(Af_1, Af_2) = (A^*Af_1, f_2) = (Bf_1, f_2).$$

Поэтому, поскольку для любого вектора f имеет место разложение $f = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k) f_k$, то

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k) Af_k = \sum_{k=1}^{\infty} s_k (f, f_k) g_k,$$

где обозначено $Af_k = s_k g_k$.

Далее,

$$(Af_k, Af_i) = s_k \cdot s_i (g_k, g_i) =$$
$$= (Bf_k, f_i) = \lambda_k (f_k, f_i) = \lambda_k \delta_{ki}.$$

Поэтому $(g_k, g_i) = \delta_{ki}$, т. е. последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормирована.

Пусть теперь оператор A имеет конечную абсолютную норму $N(A)$. Тогда, дополняя, если нужно, систему $\{f_k\}$ базисом нулевого подпространства оператора A до ортонормированного базиса во всем пространстве $\{f'_k\}$, имеем

$$N^2(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \|Af'_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (Af'_k, Af'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (A^*Af'_k, f'_k) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(f_k, f_k)=\sum_{k=1}^{\infty}s_k^2,$$

здесь f_k — ортонормированная система собственных векторов оператора $A^*A=B$, отвечающая не нулевым собственным значениям.

Определение 1. Вполне непрерывный оператор A называется *оператором из класса Шмидта*, если ряд из квадратов его s-чисел сходится, т. е. если $\sum_{k=1}^{\infty} s_k^2<\infty$.

Таким образом *), вполне непрерывный оператор A является оператором из класса Шмидта тогда и только тогда, когда он имеет конечную абсолютную норму.

Определение 2. Вполне непрерывный оператор A называется *ядерным*, если сходится ряд из его s-чисел, т. е. если $\sum_{k=1}^{\infty} s_k<\infty$.

Теорема 3. *Если A — ядерный оператор, то при любом выборе ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ в H ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k)$ абсолютно сходится, имеет место неравенство $\sum_{k=1}^{\infty}|(A\varphi_k, \varphi_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}s_k$ и сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k)=\mathrm{Sp}\,A$, которую мы назовем матричным следом оператора A, не зависит от выбора базиса.*

Согласно теореме 2 для любого вектора f можно указать разложение

$$Af=s_1(f, f_1)g_1+s_2(f, f_2)g_2+\dots,$$

где $Af_k=s_kg_k$, $A^*Af_k=\lambda_kf_k$, $\lambda_k=s_k^2>0$. Поэтому

$$(A\varphi_k, \varphi_k)=\sum_{i=1}^{\infty}s_i(\varphi_k, f_i)(g_i, \varphi_k)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}|(A\varphi_k, \varphi_k)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}s_i\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi_k, f_i)|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}|(\varphi_k, g_i)|^2\Big\}^{1/2}=\sum_{i=1}^{\infty}s_i.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi_k, f_i)(g_i, \varphi_k)=(g_i, f_i),$$

*) См. гл. IV, § 2, п. 3.

следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}s_i(\varphi_k, f_i)(g_i, \varphi_k)=\sum_{i=1}^{\infty}s_i(g_i, f_i)$$

и левая часть не зависит от выбора базиса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Определение 3. *Спектральным следом* ядерного оператора A называется сумма его собственных значений λ_k, т. е. выражение $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$.

В дальнейшем будет показано, что у ядерного оператора спектральный след всегда существует и, более того, совпадает с матричным.

Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Если A — ядерный положительный оператор в H, то его матричный и спектральный следы принимают конечные значения и справедливо равенство* $\operatorname{Sp} A=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k$, *т. е. матричный след оператора совпадает с его спектральным следом.*

Заметим, что оператор A — положительный, и поэтому, как было показано в п. 7 § 2 гл. IV, является самосопряженным. Пусть $\{\lambda_k\}$ — последовательность его положительных собственных значений, а $\{f_k\}$ — ортонормированная последовательность собственных векторов. Легко проверить, что положительный квадратный корень из оператора A определяется на любом векторе $f\in H$ по формуле

$$A^{1/2}f=(A^{1/2})^*f=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{1/2}(f, f_k)f_k,\ \ \lambda_k^{1/2}>0.$$

Для этого в силу единственности положительного квадратного корня достаточно проверить, что $A^{1/2}$ — положительный оператор и $(A^{1/2})^2=A$, а оба эти утверждения очевидны.

Далее, для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}((A^{1/2})^2\varphi_k, \varphi_k)=\sum_{k=1}^{\infty}(A^{1/2}\varphi_k, A^{1/2}\varphi_k)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{1/2}\varphi_k\|^2<\infty.$$

Следовательно, оператор $A^{1/2}$ является оператором из класса Шмидта. Поэтому для любого ортонормированного базиса $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{1/2}g_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{1/2}\varphi_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\|A^{1/2}f_k\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k.$$

Заметим, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ не является базисом в H, она является базисом только в ортогональном дополнении к H_0 — нулевому подпространству оператора A. Однако, выбрав ортонормированный базис из $\{f_k'\}_{k=1}^{\infty}$ в H_0, мы имеем, что

$$\|A^{1/2} f_k'\|^2 = (A^{1/2} f_k', A^{1/2} f_k') = (Af_k', f_k') = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|A^{1/2} \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|A^{1/2} f_k\|^2.$$

Поэтому мы выше и смогли записать равенство.

Итак,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Ag_k, g_k) = \operatorname{Sp} A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k.$$

Замечание. Из доказательства теоремы, в частности, следует, что если для ограниченного неотрицательного оператора A ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (A\varphi_k, \varphi_k)$ сходится для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_k\}$, то такой оператор ядерный.

Таким образом, установлены теоремы о следе в двух случаях: в случае оператора, действующего в n-мерном пространстве, и в случае положительного ядерного оператора, действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H над полем комплексных чисел. Естественно возникает вопрос о справедливости таких теорем для произвольных, не обязательно положительных ядерных операторов. Ответ на вопрос, равняется ли матричный след произвольного ядерного оператора спектральному следу, будет дан ниже. Однако для доказательства такой теоремы требуется существенное продвижение в изучении свойств несамосопряженных вполне непрерывных операторов.

2. Свойства s-чисел вполне непрерывных операторов

Напомним, что всюду через $R(A)$ мы обозначаем область значений определенного на H оператора A: $R(A) = \{Ax : x \in H\}$, а через $Z(A)$ — подпространство его нулей: $Z(A) = \{x : Ax = 0\}$.

Лемма 1. *Пусть A — непрерывный линейный оператор в гильбертовом пространстве H. Тогда* *)

$$H = \overline{R(A^*)} \oplus Z(A), \quad H = \overline{R(A)} \oplus Z(A^*)$$

(черта наверху означает замыкание соответствующих линейных

*) См. также утверждение 6 п. 13 § 2 гл. IV.

многообразий, $Z(A)$ и $Z(A^*)$ *в силу непрерывности операторов* A *и* A^*, *очевидно, всегда замкнуты).*

Пусть $h_0 \in H \ominus \overline{R(A^*)}$, тогда $(h_0, A^*x) = 0 = (Ah_0, x)$ для любого $x \in H$. Поэтому $Ah_0 = 0$, т. е. $H \ominus \overline{R(A^*)} \subset Z(A)$. Обратно. Пусть $x_0 \in Z(A)$, тогда $Ax_0 = 0$ и $0 = (Ax_0, x) = (x_0, A^*x)$ для любого $x \in H$, т. е. $x_0 \perp R(A^*)$ и в силу непрерывности скалярного произведения $x_0 \perp \overline{R(A^*)}$. Но если вектор ортогонален $\overline{R(A^*)}$, то он принадлежит $H \ominus \overline{R(A^*)}$. Следовательно, $Z(A) \subset H \ominus \overline{R(A^*)}$ и, таким образом, $H = \overline{R(A^*)} \oplus Z(A)$. Доказательство второго равенства аналогично и было проведено в утверждении 6 п. 13 § 2 гл. IV.

Определение 4. Оператор U, отображающий гильбертово пространство H в себя, называется *частично изометрическим,* если он изометрически отображает подпространство $H \ominus Z(U)$ на $R(U)$.

Легко установить, что *область значений* $R(U)$ *частично изометрического оператора замкнута.*

В самом деле, пусть $y_n \in R(U)$ и $y_n \to y$, $y \neq 0$. Покажем, что существует такой элемент $x \in H \ominus Z(U)$, для которого $Ux = y$.

Действительно, поскольку $\{y_n\}$ — сходящаяся последовательность, то $\|y_n - y_m\| \to 0$, $n, m \to \infty$ и $y_n \neq 0$ при $n > N$. Пусть x_n и x_m — такие элементы из $H \ominus Z(U)$, что $Ux_n = y_n$, $Ux_m = y_m$, тогда $\|y_n - y_m\| = \|Ux_n - Ux_m\| = \|x_n - x_m\| \to 0$. Так как $H \ominus Z(U)$ — подпространство, то элемент $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ принадлежит $H \ominus Z(U)$. Далее,

$$\|Ux - Ux_n\| = \|x - x_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому $Ux_n = y_n \to Ux$, а так как $y_n \to y$, $n \to \infty$, то $y = Ux$. Если $y_n \to 0$, то имеем $U0 = 0$.

Учитывая доказанный факт и утверждение леммы 1, мы можем заключить, что частично изометрический оператор U производит изометрическое отображение подпространств $R(U^*)$ на $R(U)$, а U^* производит обратное отображение $R(U)$ на $R(U^*)$.

Лемма 2. *Для любого частично изометрического оператора* U *справедливы равенства* $U^*U = P_{R(U^*)}$, $UU^* = P_{R(U)}$, где $P_{R(U^*)}$ *и* $P_{R(U)}$ — *операторы ортогонального проектирования на* $R(U^*)$ *и* $R(U)$ *соответственно.*

Действительно, U^*U — самосопряженный оператор на H, равный нулю на $Z(U)$. Поэтому $(U^*Ux, y) = (x, U^*Uy) = 0$ для любых $x \in H$, $y \in Z(U)$. Поэтому $U^*Ux \in H \ominus Z(U)$ для всех $x \in H$, следовательно, при $x \in H \ominus Z(U)$ также и $x - U^*Ux \in H \ominus Z(U)$. С другой стороны,

$$(x, y) = (Ux, Uy) = (U^*Ux, y), \quad (x - U^*Ux, y) = 0$$

для всех $x \in H \ominus Z(U)$, $y \in H \ominus Z(U)$. Следовательно, вектор $x - U^*Ux$ ортогонален к $H \ominus Z(U)$. Но тогда $x = U^*Ux$, т. е. $U^*U =$

$=E$ на $H\ominus Z(U)$, $U^*U=P_{H\ominus Z(U)}=P_{R(U^*)}$. Аналогично показывается, что $UU^*=P_{R(U)}$.

Хорошо известно представление комплексного числа z в виде $z=re^{i\varphi}$, $r>0$, $r=|\bar{z}z|^{1/2}$, $\varphi=\arg z$. Заметим, что $|e^{i\varphi}|=1$, $e^{i\varphi}\cdot e^{\overline{i\varphi}}=1$. Аналогичное представление справедливо для любого непрерывного оператора A.

Лемма 3. *Пусть A — линейный непрерывный оператор. Тогда существуют такие операторы C и U, что $C\geqslant 0$, C — непрерывный, а U — частично изометрический оператор и $A=UC$.*

Пусть $C=(A^*A)^{1/2}$, $C\geqslant 0$, C — непрерывен. Имеем для любого $x\in H$

$$\|Cx\|^2=(Cx,\ Cx)=(C^2x,\ x)=(A^*Ax,\ x)=(Ax,\ Ax)=\|Ax\|^2,$$

т. е. $\|Cx\|=\|Ax\|$, и поэтому $Z(A)=Z(C)$, $\overline{R(A^*)}=\overline{R(C)}$. Далее, если $y=Cx$, то полагаем $Uy=Ax$; если $y\in Z(C)$, то полагаем $Uy=0$.

Таким образом, определен оператор, который изометрично отображает $R(C)$ на $R(A)$. Доопределим данный оператор U на всем $\overline{R(C)}$ по непрерывности. Легко видеть, что

$$\overline{R(C)}=\overline{R(C^2)}=\overline{R(A^*A)}=R\overline{(A^*)}=R(U^*),$$

т. е. U — частично изометрический оператор. Заметим также, что если $y=Cx_1=Cx_2$, то $C(x_1-x_2)=0$. Но тогда и $A(x_1-x_2)=0$, т. е. $Ax_1=Ax_2$, и оператор U определен корректно — разным представлениям элемента y вида Cx отвечает один и тот же элемент Uy.

Замечание. Если оператор A вполне непрерывен, то $A=UC$, где $C\geqslant 0$, C — вполне непрерывный оператор.

В п. 9 § 2 гл. IV была доказана теорема о разложении по собственным векторам симметрического вполне непрерывного оператора A. Из этой теоремы следует, что для любого вектора $f\in H$

$$(Af,f)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i|(f,\varphi_i)|^2,$$

где φ_i — ортонормированная система собственных векторов оператора A, отвечающих ненулевым собственным значениям λ_i. Расположим теперь положительные и отрицательные собственные значения в две последовательности

$$\lambda_1^+\geqslant\lambda_2^+\geqslant\ldots,\quad \lambda_1^-\leqslant\lambda_2^-\leqslant\ldots,$$

здесь $\{\lambda_i^+\}$ — положительные собственные числа, $\{\lambda_i^-\}$ — отрицательные. Пусть $\{\varphi_i^+\}$ и $\{\varphi_i^-\}$ — соответствующие им собственные векторы. Тогда можно записать

$$(Af,f)=\sum_i\lambda_i^+|(f,\varphi_i^+)|^2+\sum_i\lambda_i^-|(f,\varphi_i^-)|^2.$$

Из теоремы 10 (п. 10 § 2 гл. IV) непосредственно вытекает теорема.

Теорема 5 (Гильберт). *Для любого линейного вполне непрерывного симметрического оператора A справедливы равенства*

$$\lambda_1^+ = \max_{\|f\|=1} (Af, f) = (A\varphi_1^+, \varphi_1^+);$$

$$\lambda_{j+1}^+ = \max_{\substack{\|f\|=1,\ (f,\varphi_i)=0,\\ i=1,2,\dots,j}} (Af, f) = (A\varphi_{j+1}^+, \varphi_{j+1}^+), \quad j=1, 2, \dots .$$

Аналогично,

$$\lambda_1^- = \min_{\|f\|=1} (Af, f) = (A\varphi_1^-, \varphi_1^-);$$

$$\lambda_{j+1}^- = \min_{\substack{\|f\|=1,\ (f,\varphi_i)=0,\\ i=1,2,\dots,j}} (Af, f) = (A\varphi_{j+1}^-, \varphi_{j+1}^-) \quad j=1, 2, \dots .$$

Докажем также следующую теорему, позволяющую определять n-е собственное значение.

Теорема 6 (Курант). *Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n$ — любые n элементов из H, пусть $L = L(h_1, h_2, \dots, h_n)$ — их линейная оболочка и*

$$M = M(h_1, h_2, \dots, h_n) = \max_{\substack{\|f\|=1,\ (f,h_i)=0,\\ i=1,2,\dots,j}} (Af, f).$$

Тогда

$$\lambda_{j+1}^+ = \min_{L \in R^j} M(h_1, h_2, \dots, h_j) = M(\varphi_1^+, \varphi_2^+, \dots, \varphi_j^+), \ j=1, 2, \dots ,$$

где R^j — всевозможные подпространства H размерности j. Аналогично,

$$\lambda_{j+1}^- = \max_{L \in R^j} m(h_1, h_2, \dots, h_j) = m(\varphi_1^-, \varphi_2^-, \dots, \varphi_j^-),$$

$$m(h_1, h_2, \dots, h_j) = \min_{\substack{\|f\|=1,\ (f,h_i)=0,\\ i=1,2,\dots,j}} (Af, f), \quad j=1, 2, \dots .$$

Докажем, утверждение, относящееся к λ_{j+1}^+. Как уже говорилось,

$$M(\varphi_1^+, \varphi_2^+, \dots, \varphi_j^+) = \lambda_{j+1}^+.$$

Покажем, что при произвольных векторах $h_1, h_2, \dots, h_j$ выполняется неравенство

$$M(h_1, h_2, \dots, h_j) \geqslant \lambda_{j+1}^+.$$

Рассмотрим систему

$$\sum_{i=1}^{j+1} f_i(\varphi_i^+, h_k) = 0, \quad k=1, 2, \dots, j.$$

Система содержит j линейных однородных уравнений с $j+1$ неизвестными. Такая система всегда имеет ненулевое решение $f_1^0, f_2^0, \ldots, f_{j+1}^0$. Пусть $\sum\limits_{i=1}^{j+1} |f_i^0|^2 = 1$. Тогда $f^0 = \sum\limits_{i=1}^{j+1} f_i^0 \varphi_i^+$ будет ортогонален всем векторам h_k, $k=1, 2, \ldots, j$, $(f^0, h_k)=0$ и $\|f^0\|=1$ в силу равенства Парсеваля. Таким образом,

$$(Af^0, f^0) \leqslant \max_{\|f\|=1,\ (f, h_i)=0} (Af, f) = M(h_1, h_2, \ldots, h_j).$$

С другой стороны,

$$(Af^0, f^0) = \sum_{i,k=1}^{j+1} f_i^0 \overline{f_k^0} (A\varphi_i^+, \varphi_k^+) = \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i^+ |f_i^0|^2 \geqslant \lambda_{j+1}^+ \sum_{i=1}^{j+1} |f_i^0|^2 = \lambda_{j+1}^+.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots \geqslant \lambda_j^+ \geqslant \lambda_{j+1}^+$.

Доказанная теорема дает возможность сравнивать между собой собственные значения различных операторов.

Следствие 1. *Если $0 \leqslant A \leqslant B$ и A, B — вполне непрерывные операторы, то $\lambda_j(A) \leqslant \lambda_j(B)$,* где *$\lambda_j(A)$ — j-е собственное значение оператора A, $\lambda_j(B)$ — j-е собственное значение оператора B, упорядоченные по убыванию с учетом их кратностей.*

Действительно, в этом случае ненулевые собственные значения операторов A и B положительны. Получаем

$$\lambda_j(B) = \max_{\substack{\|f\|=1,\ f\perp\varphi_i, \\ i=1,2,\ldots,j-1}} (Bf, f) \geqslant \max_{\substack{\|f\|=1,\ f\perp\varphi_i, \\ i=1,2,\ldots,j-1}} (Af, f) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{L\in R^{j-1}} \max_{\substack{f\in L^{\perp}, \\ \|f\|=1}} (Af, f) = \lambda_j(A),$$

где φ_i — собственные векторы оператора B:

$$B\varphi_i = \lambda_i(B)\varphi_i, \quad i=1, 2, \ldots, j-1, \quad L = L(h_1, h_2, \ldots, h_{j-1})$$

— линейная оболочка векторов $h_1, h_2, \ldots, h_{j-1}$, R^{j-1} есть $j-1$-мерное евклидово пространство, $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение к L.

Следствие 2. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, B — ограниченный линейный оператор. Пусть $s_k(BA)$ — s-числа вполне непрерывного оператора BA, а $s_k(A)$ — s-числа оператора A. предполагается, что s-числа упорядочены по убыванию с учетом их кратностей, тогда*

$$s_k(BA) \leqslant \|B\| s_k(A).$$

Действительно, по определению s-чисел

$$s_k^2(BA) = \lambda_k((BA)^*(BA)), \quad s_k^2(A) = \lambda_k(A^*A).$$

С другой стороны, легко видеть, что

$$((BA)^*BAf, f) = \|BAf\|^2 \leqslant \|B\|^2\|Af\|^2 = \\ = \|B\|^2(Af, Af) = (\|B\|^2A^*Af, f),$$

т. е.

$$0 \leqslant (BA)^*BA \leqslant \|B\|^2A^*A.$$

Применяя результат, полученный в следствии 1, приходим к требуемому.

Лемма 4. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, тогда*

$$s_k(A) = s_k(A^*).$$

Согласно ранее доказанному (см. теорему 2 этого параграфа) запишем разложение для вполне непрерывного оператора $A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)(\varphi, \varphi_k)\psi_k$, где φ_k — ортонормированные собственные векторы оператора A^*A, а ψ_k — некоторая другая ортонормированная последовательность. Найдем вид сопряженного к A оператора. Имеем

$$(A\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)(\varphi, \varphi_k)(\psi_k, \psi) = \left(\varphi, \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)(\psi, \psi_k)\varphi_k\right) = (\varphi, A^*\psi).$$

Таким образом,

$$A^*\psi = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)(\psi, \psi_k)\varphi_k,$$

Из выражений для A и A^* видно, что

$$A\varphi_k = s_k(A)\psi_k, \qquad A^*\psi_k = s_k(A)\varphi_k,$$

$$A^*A\varphi_k = s_k^2(A)\varphi_k, \qquad AA^*\psi_k = s_k^2(A)\psi_k.$$

Отсюда получаем по определению s-чисел, что

$$s_k(A) = s_k(A^*).$$

Следствие. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, B — ограниченный линейный оператор. Тогда*

$$s_k(AB) \leqslant \|B\| s_k(A).$$

Поскольку $\|B\| = \|B^*\|$, то из леммы и следствия 2 теоремы 6 следует, что

$$s_k(AB) = s_k(B^*A^*) \leqslant s_k(A^*)\|B^*\| = \|B\| s_k(A).$$

Докажем теперь формулу, которой воспользуемся ниже при изучении свойств s-чисел вполне непрерывных операторов. Эта формула в теории определителей называется *формулой Бине — Коши.*

Лемма 5. *Пусть C — квадратная матрица размера $m\times m$, B — прямоугольная матрица размера $n\times m$, $n>m$, A — матрица размера $m\times n$ и $C=AB$. Тогда*

$$\det C=\sum_{1\leqslant s_1<\ldots<s_m\leqslant n<\infty}\begin{vmatrix}a_{1s_1}\ldots a_{1s_m}\\ a_{ms_1}\ldots a_{ms_m}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{s_11}\ldots b_{s_1m}\\ b_{s_m1}\ldots b_{s_mm}\end{vmatrix}.$$

Запишем выражение для элемента c_{ij} матрицы C

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj}.$$

Тогда

$$\det C=\det\begin{Vmatrix}\sum\limits_{s_1=1}^{n}a_{1s_1}b_{s_11}\ldots & \sum\limits_{s_m=1}^{n}a_{1s_m}b_{s_mm}\\ \sum\limits_{s_1=1}^{n}a_{ms_1}b_{s_11}\ldots & \sum\limits_{s_m=1}^{n}a_{ms_m}b_{s_mm}\end{Vmatrix}.$$

Используя элементарное свойство определителей, запишем

$$\det C=\sum_{s_1,\ldots,s_m=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{1s_1}\ldots a_{1s_m}\\ a_{ms_1}\ldots a_{ms_m}\end{vmatrix}b_{s_11}b_{s_22}\ldots b_{s_mm}.$$

Числа $s_1, s_2, \ldots, s_m$ меняются независимо друг от друга. Будем считать, что они все различны, так как в противном случае

$$\begin{vmatrix}a_{1s_1}\ldots a_{1s_m}\\ a_{ms_1}\ldots a_{ms_m}\end{vmatrix}=0.$$

В сумме присутствуют члены, некоторые из которых отличаются только порядком столбцов в определителе. Объединяя их в одно слагаемое, можно записать, используя свойство подстановок и определителей, что

$$\det C=\sum_{1\leqslant s_1<s_2<\ldots<s_m\leqslant n\leqslant\infty}\begin{vmatrix}a_{1s_1}\ldots a_{1s_m}\\ a_{ms_1}\ldots a_{ms_m}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}b_{s_11}\ldots b_{s_1m}\\ b_{s_m1}\ldots b_{s_mm}\end{vmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Лемма 6. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, а $h_1, h_2, \ldots, h_m$ — произвольный набор векторов. Тогда*

$$\det\|(Ah_j, Ah_k)\|_{j,k=1}^{m}\leqslant s_1^2(A)\ldots s_m^2(A)\det\|(h_j, h_k)\|_{j,k=1}^{m}.$$

Пусть $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора C, $C=(A^*A)^{1/2}$. Тогда

$$\lambda_n(A^*A)=s_n^2(A), \quad (Ah_j, Ah_k)=(A^*Ah_j, h_k).$$

Пусть

$$h_j=\sum_{n=1}^{\infty}(h_j,\varphi_n)\varphi_n, \quad h_k=\sum_{p=1}^{\infty}(h_k,\varphi_p)\varphi_p.$$

Запишем

$$(A^*Ah_j, h_k)=\Big(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)(h_j,\varphi_n)\varphi_n, \sum_{p=1}^{\infty}(h_k,\varphi_p)\varphi_p\Big)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(A)(h_j,\varphi_n)(\varphi_n,h_k).$$

Введем матрицу $B=\|b_{ij}\|$, $b_{ij}=s_j\cdot(h_i, \varphi_j)$, тогда $B^*=\|b_{ij}^*\|$, $b_{ij}^*=s_i(\varphi_i,h_j)$, так как $\overline{(h_i,\varphi_j)}=(\varphi_j,h_i)$. Обозначим через $K=\|(Ah_j, Ah_k)\|_{j,k=1}^m$, тогда $K=BB^*$. Применим формулу, полученную в предыдущей лемме, к определителю матрицы K. Имеем

$$\det K=\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant\infty}\begin{vmatrix} s_{k_1}\cdot(h_1,\varphi_{k_1}) & \ldots & s_{k_m}\cdot(h_1,\varphi_{k_m}) \\ s_{k_1}\cdot(h_m,\varphi_{k_1}) & \ldots & s_{k_m}\cdot(h_m,\varphi_{k_m})\end{vmatrix}\times$$

$$\times\begin{vmatrix} s_{k_1}\cdot(\varphi_{k_1},h_1) & \ldots & s_{k_1}\cdot(\varphi_{k_1},h_m) \\ s_{k_m}\cdot(\varphi_{k_m},h_1) & \ldots & s_{k_m}\cdot(\varphi_{k_m},h_m)\end{vmatrix}=$$

$$=\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_m\leqslant\infty} s_{k_1}^2\ldots s_{k_m}^2\det\|(h_i,\varphi_k)\|\cdot\det\|\overline{(h_j,\varphi_k)}\|,$$

через $\det\|(h_i,\varphi_k)\|$ и $\det\|\overline{(h_j,\varphi_k)}\|$ обозначены фигурирующие выше определители, из которых вынесены числа s_{k_j}.

Все числа k_j различны и расположены в порядке возрастания, тогда числа s_{k_j} будут расположены в порядке убывания и

$$s_1\geqslant s_{k_1},\ldots, s_m\geqslant s_{k_m}.$$

Поэтому, если снова воспользоваться формулой Бине — Коши, то получим

$$\det K\leqslant s_1^2\ldots s_m^2\cdot\sum_{1\leqslant k_1<\ldots<k_m}\det\|(h_i,\varphi_k)\|\cdot\det\|\overline{(h_j,\varphi_k)}\|=$$

$$=s_1^2\ldots s_m^2\det\|(h_i,h_j)\|_{i,j=1}^m,$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty}(h_i, \varphi_k)\overline{(h_j, \varphi_k)}=(h_i, h_j)$, что и требовалось доказать.

3. Оценки собственных значений вполне непрерывного оператора

Следующее утверждение позволяет оценивать произведение собственных значений вполне непрерывного оператора через произведение s-чисел этого же оператора и имеет важное значение.

Теорема 7 (Г. Вейль). *Пусть A — вполне непрерывный оператор и $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, ..., $\lambda_k(A)$ — его собственные значения, $k \leqslant \nu(A)$, $\nu(A)=\sum_{\lambda_i \neq 0} \dim L_{\lambda_i}, L_{\lambda_i}$ — корневые подпространства оператора A, отвечающие λ_i. Тогда*

$$|\lambda_1(A)\lambda_2(A)\ldots\lambda_k(A)| \leqslant s_1(A)s_2(A)\ldots s_k(A).$$

Пусть $L=\bigcup_{\lambda_i \neq 0} L_{\lambda_i}$. Выберем в L базис Шура $\{\varphi_j\}$ (см. п. 3 § 3 гл. IV), тогда

$$A\varphi_j=\alpha_{j1}\varphi_1+\ldots+\alpha_{jj}\varphi_j, \quad \alpha_{ij}=(A\varphi_i, \varphi_j),$$
$$\alpha_{ii}=\lambda_i=(A\varphi_i, \varphi_i).$$

Имеем, что

$$\det\|(A\varphi_i, A\varphi_j)\|_{i,j=1}^k \leqslant s_1^2(A)\, s_2^2(A)\ldots s_k^2(A) \det\|(\varphi_i, \varphi_j)\|_{i,j=1}^k.$$

Но

$$(A\varphi_i, A\varphi_j)=\sum_{p=1}^{\min(i,j)}(A\varphi_i, \varphi_p)\overline{(A\varphi_j, \varphi_p)}.$$

Тогда

$$\det\|(A\varphi_i, A\varphi_j)\|=\det\|(A\varphi_i, \varphi_j)\|\cdot\det\|\overline{(A\varphi_i, \varphi_j)}\|=$$
$$=\det\|(A\varphi_i, \varphi_j)\|\cdot\overline{\det\|(A\varphi_i, \varphi_j)\|}=|\det\|(A\varphi_i, \varphi_j)\||^2.$$

Учитывая, что

$$\det\|A\varphi_i, \varphi_j\|_{i,j=1}^k=\lambda_1(A)\,\lambda_2(A)\ldots\lambda_k(A),$$

получаем, что

$$\det\|(A\varphi_i, A\varphi_j)\|=|\lambda_1(A)|^2|\lambda_2(A)|^2\ldots|\lambda_k(A)|^2.$$

Запишем окончательно:

$$\det\|(A\varphi_i, A\varphi_j)\|_{i,j=1}^k=|\lambda_1(A)\cdot\lambda_2(A)\ldots\lambda_k(A)|^2 \leqslant s_1^2(A)\,s_2^2(A)\ldots s_k^2(A),$$

так как $\det\|(\varphi_i, \varphi_j)\|_{i,j=1}^k=1$, что и требовалось.

Лемма 7. *Пусть* $\Phi(x)$ $(-\infty \leqslant x < \infty)$ — *выпуклая функция такая, что* $\Phi(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} \Phi(x) = 0$, *а* $\{a_j\}$, $\{b_j\}$ — *невозрастающие последовательности действительных чисел таких, что*

$$\sum_{j=1}^{k} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{k} b_j, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим сначала функцию $\Phi(t) = e^t$. Для произвольной функции затем произведем необходимые изменения. Обозначим через

$$y_+ = \max(y, 0).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t-s)_+ e^s ds = \int_{-\infty}^{t} (t-s) e^s ds = \int_{-\infty}^{t} te^s ds -$$

$$- \int_{-\infty}^{t} se^s ds = te^s |_{-\infty}^{t} - se^s |_{-\infty}^{t} + e^s |_{-\infty}^{t} = e^t.$$

Таким образом,

$$e^t = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-s)_+ d(e^s)'.$$

Для произвольной функции $\Phi(t)$, удовлетворяющей условиям леммы, справедливо такое же представление

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-s)_+ d\Phi'(s).$$

Действительно,

$$\int_{-N}^{\infty} (t-s)_+ d\Phi'(s) = \int_{-N}^{t} (t-s) d\Phi'(s) =$$

$$= \int_{-N}^{t} \Phi'(s) ds - (t+N) \Phi'(-N), \quad N > 0.$$

Левая часть написанного равенства положительна, поэтому

$$(t+N) \Phi'(-N) \leqslant \int_{-N}^{t} \Phi'(s) ds = \Phi(t) - \Phi(-N) \leqslant \Phi(t), \quad t > -N.$$

Следовательно,

$$\lim_{N\to\infty} \Phi'(-N)=0, \quad \overline{\lim_{N\to\infty}}\, N\Phi'(-N)<\infty.$$

Поскольку $\Phi(t)\to 0$ при $t\to-\infty$, то

$$\lim_{N\to\infty} (t+N)\,\Phi'(-N)=\lim_{N\to\infty} N\Phi'(-N)=0.$$

Наконец, в равенстве

$$\int_{-N}^{\infty} (t-s)_+ d\Phi'(s)=\int_{-N}^{t} \Phi'(s)\,ds-(t+N)\,\Phi'(-N)$$

нужно перейти к пределу при $N\to\infty$, и требуемое представление для $\Phi(t)$ получено.

Из этого представления следует

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(a_j)=\int_{-\infty}^{+\infty} A_k(s)\,d\Phi'(s),$$

где

$$A_k(s)=\sum_{j=1}^{k} (a_j-s)_+.$$

Аналогично,

$$\sum_{j=1}^{k} \Phi(b_j)=\int_{-\infty}^{+\infty} B_k(s)\,d\Phi'(s)$$

(заметим, что через $\Phi'(s)$ мы обозначили левую производную выпуклой функции $\Phi(s)$, которая, как известно, всюду существует, неотрицательна и не убывает), где

$$B_k(s)=\sum_{j=1}^{k} (b_j-s)_+.$$

Докажем, что функции $A_k(s)$ и $B_k(s)$ связаны между собой соотношением

$$A_k(s)\leqslant B_k(s), \quad k=1,\,2,\,\ldots\,.$$

Рассмотрим несколько случаев.

А. Пусть $s\geqslant b_1$, тогда

$$A_k(s)=B_k(s)\equiv 0,$$

и неравенство тривиально выполняется.

Б. Пусть $s\leqslant \min(a_k,\,b_k)$, тогда

$$A_k(s)=\sum_{j=1}^{k} a_j-ks,$$

$$B_k(s)=\sum_{j=1}^{k} b_j-ks,$$

т. е.

$$A_k(s)\leqslant B_k(s).$$

В. Рассмотрим последний случай

$$a_{q+1}\leqslant s<a_q,\quad b_{p+1}\leqslant s<b_p\quad (p,\ q\leqslant k).$$

Тогда при $p\geqslant q$

$$A_k(s)=\sum_{j=1}^{q} a_j-qs\leqslant\sum_{j=1}^{q} b_j-qs+(b_{q+1}-s)+\ldots+(b_p-s)=B_k(s),$$

так как

$$\sum_{j=1}^{q} a_j\leqslant\sum_{j=1}^{q} b_j,\quad b_{q+1}\geqslant s,\ \ldots,\ b_p\geqslant s.$$

При $p<q$

$$A_k(s)=\sum_{j=1}^{q} a_j-qs\leqslant\sum_{j=1}^{q} b_j-qs=\sum_{j=1}^{p} b_j-ps+$$

$$+(b_{p+1}-s)+\ldots+(b_q-s)\leqslant\sum_{j=1}^{p} b_j-ps=B_k(s),$$

так как

$$b_{p+1}\leqslant s,\ \ldots,\ b_q\leqslant s.$$

Лемма, таким образом, доказана.

В качестве следствия этой леммы получим новые неравенства для собственных значений и s-чисел вполне непрерывного оператора.

Теорема 8 (мажорантная теорема Г. Вейля). *Пусть функция $f(x)$ определена на $[0,\infty)$, $f(0)=0$ и становится выпуклой, если вместо x подставить e^t. Тогда для любого вполне непрерывного оператора A и для любого $k\leqslant\nu(A)=\sum_{\lambda_i\neq 0}\dim L_{\lambda_i}$ справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_i(A)|)\leqslant\sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)),\quad \lambda_j\neq 0,\quad s_j\neq 0.$$

Рассмотрим функцию $\Phi=f(e^t)$ и последовательности $a_j=\ln|\lambda_j(A)|$, $b_j=\ln(s_j(A))$. Применяя теорему 7 и лемму 7, получим неравенства

$$\sum_{j=1}^{k} f(|\lambda_j(A)|)\leqslant\sum_{j=1}^{k} f(s_j(A)).$$

Следствие 1. *Для любого вполне непрерывного оператора* A *при* $k \leqslant \nu(A)$ *справедливы неравенства*

$$\sum_{j=1}^{k} |\lambda_j(A)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} s_j(A).$$

Действительно, функция $f(x) = x$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы.

Следствие 2. *Пусть* A *— вполне непрерывный оператор,* $\lambda > 0$, *тогда*

$$\prod_{j=1}^{k} (1 + \lambda |\lambda_j(A)|) \leqslant \prod_{j=1}^{k} (1 + \lambda s_j(A)), \quad k \leqslant \nu(A).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $f(x) = \ln(1 + \lambda x)$.

Замечание. В предыдущих леммах и теоремах встречались последовательности $\{\lambda_j(A)\}$ и $\{s_j(A)\}$ — соответственно собственные числа и s-числа вполне непрерывного оператора A. В случае вполне непрерывного оператора s-числа, вообще говоря, составляют бесконечную последовательность. Собственные числа λ_i нумеруются по убыванию модулей с учетом их алгебраических кратностей, так что каждое число λ_j фигурирует в суммах столько раз, какова его кратность. Используемые выше суммы и произведения могли содержать и бесконечное число слагаемых и сомножителей, причем они могли быть и расходящимися.

Продолжим дальнейшее изучение свойств s-чисел вполне непрерывных операторов.

Лемма 8 (Фань Цзюй). *Пусть* A *— вполне непрерывный оператор и* $\{\varphi_i\}$ *— ортонормированная система в* H, *пусть* U *— унитарный оператор, тогда*

$$\sup_{U\{\varphi_i\}} \left| \sum_{i=1}^{n} (UA\varphi_i, \varphi_i) \right| = \sum_{i=1}^{n} s_i(A), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Пусть P_n — ортопроектор на подпространство L с базисом $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Тогда

$$(UAP_n\varphi_i, P_n\varphi_i) = (UA\varphi_i, \varphi_i) = (P_nUAP_n\varphi_i, \varphi_i).$$

Обозначим

$$\widetilde{A} = P_nUAP_n.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (\widetilde{A}\varphi_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\widetilde{A}),$$

где $\lambda_i(\tilde{A})$ — собственные числа матрицы $\tilde{A}$, которую задает оператор $\tilde{A}$ в L. Используя теорему 1 и следствие 1 теоремы 8, можно записать

$$\operatorname{Sp}\tilde{A}=\sum_{i=1}^{n}(\tilde{A}\varphi_i,\varphi_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\tilde{A}),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(\tilde{A}\varphi_i,\varphi_i)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i(\tilde{A})|\leqslant\sum_{i=1}^{n}s_i(\tilde{A})\leqslant s_i(A),$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(UA\varphi_i,\varphi_i)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}s_i(A),$$

поскольку

$$s_i(\tilde{A})=s_i(P_nUAP_n)\leqslant s_i(P_nUA)\|P_n\|\leqslant\|P_n\|s_i(UA)\leqslant s_i(A)\|U\|=s_i(A).$$

Докажем, что в неравенстве достигается знак равенства. Пусть

$$A=UC$$

— разложение оператора A (см. лемму 3 выше), $\varphi_i{}^0$ — собственные ортонормированные векторы оператора C:

$$C\varphi_i^0=s_i\varphi_i^0.$$

Выберем унитарный оператор U_0, который на φ_i^0, $i=1,2,\ldots,n$ действует так:

$$U_0UC\varphi_i^0=s_i\varphi_i^0,\ \|U_0UC\varphi_i^0\|=s_i.$$

Так как

$$\|UC\varphi_i^0\|=s_i\|U\varphi_i^0\|=s_i\|\varphi_i^0\|=s_i,$$

то

$$\|U_0UC\varphi_i^0\|=\|UC\varphi_i^0\|.$$

Доопределим U_0 на всем H так, чтобы он оставался унитарным оператором. Для этого оператора будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}(U_0UC\varphi_i^0,\varphi_i^0)=\sum_{i=1}^{n}(U_0A\varphi_i^0,\varphi_i^0)=\sum_{i=1}^{n}s_i(A).$$

Следствие. *Пусть A — вполне непрерывный оператор, тогда для любой ортонормированной системы векторов $\{\varphi_i\}$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}|(A\varphi_i,\varphi_i)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}s_i(A),\quad n=1,2,\ldots.$$

Действительно,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(UA\varphi_i, \varphi_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|(UA\varphi_i, \varphi_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} s_i(A).$$

U выберем так, что если

$$(A\varphi_k, \varphi_k) = |(A\varphi_k, \varphi_k)| e^{i\Theta_k}, \quad \theta_k = \arg(A\varphi_k, \varphi_k),$$

то

$$U^*\varphi_k = e^{i\Theta_k}\varphi_k.$$

Тогда

$$(UA\varphi_k, \varphi_k) = (A\varphi_k, U^*\varphi_k) = e^{-i\Theta_k}(A\varphi_k, \varphi_k) = |(A\varphi_k, \varphi_k)|,$$

таким образом,

$$\sum_{i=1}^{n}|(A\varphi_i, \varphi_i)| \leqslant \sum_{i=1}^{n} s_i(A).$$

4. Оценки s-чисел произведений и сумм линейных вполне непрерывных операторов

Выше были получены различные оценки для собственных чисел и s-чисел вполне непрерывного оператора и для некоторых функций от собственных чисел и s-чисел вполне непрерывного оператора. Развитая техника оценок позволяет получать аналогичные результаты для собственных чисел и s-чисел произведения двух (или более) вполне непрерывных операторов и их сумм. Напомним, что всюду мы по-прежнему рассматриваем только линейные операторы.

Лемма 9. *Для любых двух вполне непрерывных операторов A и B выполняются соотношения*

$$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j(A) \prod_{j=1}^{n} s_j(B), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(A+B) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A) + \sum_{j=1}^{n} s_j(B), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Согласно лемме 6 для произвольной полной ортонормированной системы вокторов $\{\varphi_j\}$ выполнено неравенство

$$\det\|(AB\varphi_i, AB\varphi_j)\|_{i,j=1}^{n} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \det\|(B\varphi_i, B\varphi_j)\|_{i,j=1}^{n} \leqslant \prod_{j=1}^{n} s_j^2(A) \prod_{j=1}^{n} s_j^2(B).$$

Выберем в качестве $\{\varphi_j\}$ систему нормированных единицей собственных векторов самосопряженного оператора B^*A^*AB. Тогда справедливо равенство

$$\det\|(AB\varphi_i, AB\varphi_j)\|_{i,j=1}^{n} = \prod_{j=1}^{n} s_j^2(AB),$$

и первое неравенство доказано.

Согласно лемме 8 существуют ортонормированная система векторов $\{\varphi_i\}$ и унитарный оператор U такие, что

$$\left|\sum_{j=1}^{n} (U(A+B)\varphi_j, \varphi_j)\right| = \sum_{j=1}^{n} s_j(A+B).$$

Снова применяя эту же лемму, запишем

$$\sum_{j=1}^{n} s_i(A+B) \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} (UA\varphi_j, \varphi_j)\right| + \left|\sum_{j=1}^{n} UB\varphi_j, \varphi_j\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{n} s_i(A) + \sum_{j=1}^{n} s_i(B),$$

что и требовалось.

Теорема 9 (Фань Цюй). *Пусть A и B — вполне непрерывные операторы, а функция $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty)$ — неубывающая и выпуклая, $f(0)=0$. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A+B)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A)+s_j(B)).$$

Действительно, применяя лемму 9 и лемму 7, в которой надо положить $a_j = s_j(A+B)$, $b_j = s_j(A)+s_j(B)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x < \infty, \\ 0, & -\infty \leqslant x < 0, \end{cases}$$

получаем, переходя к пределу по верхнему индексу n в суммах, требуемое неравенство.

Теорема 10 (А. Хорн). *Пусть функция $f(x)$ $(0 \leqslant x < \infty$, $f(0)=0)$ после подстановки $x=e^t$ $(-\infty \leqslant t < \infty)$ становится выпуклой. Пусть A и B — два произвольных вполне непрерывных оператора. Тогда*

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(AB)) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} f(s_j(A) \cdot s_j(B)).$$

Точно так же, как и при доказательстве теоремы 9, достаточно применить леммы 7 и 9, причем надо положить

$$a_j = s_j(AB), \quad b_j = s_j(A)s_j(B),$$

что и требовалось.

С л е д с т в и е. *Для любых двух вполне непрерывных операторов A и B имеют место соотношения*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(AB) \leqslant \sum_{j=1}^{n} s_j(A)\cdot s_j(B),\ n=1, 2 \ldots .$$

Действительно, в теореме 10 надо положить $f(x)=x$ и применить доказанную теорему.

5. Теорема о следе для ядерного оператора

Перейдем снова к изучению ядерных операторов. В начале этого параграфа было показано, что если A — ядерный оператор, то при любом выборе ортонормированного базиса $\{\varphi_i\}$ в H ряд $\sum_{i=1}^{\infty}(A\varphi_i, \varphi_i)$ сходится абсолютно и не зависит от выбора базиса.

Справедливо следующее обращение этого утверждения.

Т е о р е м а 11. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, определенный всюду в H, и пусть для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_i\}$ ряд $\operatorname{Sp} A=\sum_{i=1}^{\infty}(A\varphi_i, \varphi_i)$ абсолютно сходится, тогда A — ядерный оператор.*

Пусть сначала A — самосопряженный ограниченный оператор, $E(\lambda)$ — его спектральная функция. Из спектральной теоремы следует, что подпространство $E(0)H=H_-$ и $(E-E(0))H=H_+$ являются инвариантными относительно оператора A, причем оба оператора $A_-=-AE(0)$ и $A_+=A(E-E(0))$ неотрицательны. Пусть $\{f_j\}$ и $\{\psi_j\}$ — ортонормированные базисы соответственно в H_+ и H_-. Из условия теоремы следует, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}(A_+f_j, f_j)<\infty,\ \sum_{j=1}^{\infty}(A_-\psi_j, \psi_j)<\infty.$$

В силу теоремы 4 *) следует, что A_+ и A_- — ядерные операторы. Поскольку A есть разность ядерных операторов, он сам является ядерным. Действительно, из леммы 9 следует, что ряд из s-чисел оператора, являющегося суммой (или разностью) двух операторов, ряды из s-чисел которых сходятся, является сходящимся.

Рассмотрим теперь общий случай несамосопряженного оператора A с конечным матричным следом. Сопряженный оператор A^*, очевидно, также имеет конечный матричный след. Поэтому операторы

$$A_R=\frac{1}{2}(A+A^*),\ A_I=\frac{1}{2i}(A-A^*)$$

---

*) См. замечание после теоремы 4.

имеют конечные матричные следы. Эти операторы, очевидно, самосопряженные. По доказанному они являются ядерными. Точно так же, как и выше, заключаем, что оператор

$$A = A_R + iA_I$$

является ядерным.

Рассмотрение ядерных операторов завершим теоремой о совпадении матричного следа ядерного оператора со спектральным следом.

Теорема 12 (Лидский). *Если оператор A — ядерный, то его матричный след совпадает с его спектральным следом:*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (A\varphi_j, \varphi_j) = \sum_i \lambda_i (A),$$

где $\{\varphi_j\}$ — произвольный ортонормированный базис в H, $\lambda_i(A)$ — собственные значения оператора A.

Докажем сначала теорему в случае, когда оператор A вольтерров. В этом случае собственных значений, отличных от нуля, нет. Поэтому должно выполняться

$$\operatorname{Sp} A = 0.$$

Пусть P_n — конечномерные ортопроекторы, $n=1, 2, \ldots$, выбранные следующим специальным образом: если $A = \sum\limits_k s_k (\cdot, \varphi_k) \psi_k$, где $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ — две ортонормированные системы, $A = UC$, $C\varphi_k = s_k\varphi_k$, то

$$P_n H = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} = L(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n),$$

L — линейная оболочка векторов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Очевидно, что

$$AP_n f = \sum_k s_k (P_n f, \varphi_k) \psi_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (f, \varphi_k) \psi_k.$$

Тогда

$$\|(A - AP_n) f\|^2 = \Big\| \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k (f, \varphi_k) \psi_k \Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k^2 |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant s_{n+1}^2 \|f\|^2.$$

Следовательно,

$$\|A - AP_n\| \leqslant s_{n+1} \to 0.$$

Если оператор A вольтерров, то очевидно, что $\lambda_k(AP_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, оператор AP_n — конечномерный и $AP_n - A = B_n$ обладает тем свойством, что $\|B_n\| \to 0$, $n \to \infty$. Оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ существует, если $\lambda \neq 0$. Тогда легко видеть, что

$$(AP_n - \lambda E)^{-1}$$

существует вне круга O_n, радиус которого зависит от n и стремится к нулю, когда $n \to \infty$:

$$(AP_n-\lambda E)^{-1}=(AP_n-A+A-\lambda E)^{-1}=$$
$$=(A-\lambda E)^{-1}(E+B_n(A-\lambda E)^{-1})^{-1}.$$

Пусть $\lambda_j^{(n)}=\lambda_j(AP_n)$ — собственные значения оператора AP_n, $j=1, 2, \ldots, n$, занумерованные с учетом их кратностей,

$$|\lambda_1^{(n)}|\geqslant|\lambda_2^{(n)}|\geqslant\ldots.$$

Рассмотрим функции

$$\Delta_n(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(1-\lambda\lambda_j^{(n)}).$$

Тогда

$$\frac{\Delta_n'(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j^{(n)}}{1-\lambda\lambda_j^{(n)}}.$$

Пусть $|\lambda\lambda_1^{(n)}|<1$. Разлагая в ряд геометрическую прогрессию, получим

$$\frac{\Delta_n'(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_j^{(n)}[\lambda_j^{(n)}]^k\lambda^k=-\sum_{k=1}^{\infty}M_k^{(n)}\lambda^{k-1},$$

$$M_k^{(n)}=\mathrm{Sp}\,[(AP_n)]^k=\sum_{m=1}^{n}[\lambda_m^{(n)}]^k.$$

Далее,

$$\sum_{m=1}^{n}[\lambda_m^{(n)}]^k\leqslant\sum_{m=1}^{n}|\lambda_m^{(n)}|^k\leqslant|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}\sum_{m=1}^{n}|\lambda_m^{(n)}|.$$

Согласно мажорантной теореме Вейля

$$|\lambda_m^{(n)}|\leqslant s_m^{(n)}=s_m(AP_n).$$

Нормы операторов P_n равны единице, поэтому

$$s_m(AP_n)\leqslant s_m(A).$$

Учитывая, что оператор A — ядерный, заключаем:

$$\sum_{m=1}^{n}[\lambda_m^{(n)}]^k\leqslant|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}\sum_{m=1}^{n}|\lambda_m^{(n)}|\leqslant|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}\sum_{m=1}^{n}s_m(A)\leqslant$$

$$\leqslant|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}\sum_{k=1}^{\infty}s_k(A)=|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}C_0,\ \text{где}\ C_0=\sum_{k=1}^{\infty}s_k(A)<\infty.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{\Delta_n'(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}+\operatorname{Sp} A\right| \leqslant |M_1^{(n)}-\operatorname{Sp} A|+\left|\sum_{k=2}^{\infty} M_k^{(n)}\lambda^{k-1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |M_1^{(n)}-\operatorname{Sp} A|+\sum_{k=2}^{\infty}|M_k^{(n)}\lambda^{k-1}| \leqslant |M_1^{(n)}-\operatorname{Sp} A|+\sum_{k=2}^{\infty}|\lambda_1^{(n)}|^{k-1}|\lambda|^{k-1}C_0 \leqslant$$

$$\leqslant |M_1^{(n)}-\operatorname{Sp} A|+\frac{|\lambda_1^{(n)}|\cdot|\lambda|C}{1-|\lambda_1^{(n)}|\cdot|\lambda|}.$$

Зафиксируем λ, а n устремим к бесконечности. Тогда, как мы показали,

$$|\lambda_1^{(n)}| \to 0.$$

Когда $n\to\infty$, $M_1^{(n)}=\sum_{m=1}^{n}\lambda_m^{(n)}=\operatorname{Sp} AP_n$ стремится к $\operatorname{Sp} A$. Действительно, для ортонормированного базиса $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$, $A=UC$, $C\varphi_k=$ $=s_k(A)\varphi_k$ можно записать

$$\operatorname{Sp} AP_n=\sum_{k=1}^{\infty}(AP_n\varphi_k, \varphi_k)=\sum_{k=1}^{n}(A\varphi_k, \varphi_k).$$

С другой стороны, $\operatorname{Sp} A=\sum_{k=1}^{\infty}(A\varphi_k, \varphi_k)$, следовательно, $\operatorname{Sp} AP_n\to$ $\to\operatorname{Sp} A$ при $n\to\infty$. Учитывая все это, заключаем, что

$$\frac{\Delta_n'(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}\to -\operatorname{Sp} A.$$

Допустим, что $\operatorname{Sp} A=\alpha\neq 0$. Произведение $\Delta_n(\lambda)$ равномерно сходится в силу доказанной оценки

$$\prod_{j=1}^{n}(1-\lambda\,|\lambda_j(A)|) \leqslant \prod_{j=1}^{n}(1-\lambda s_j(A)), \quad \lambda<0.$$

Поэтому, проинтегрировав предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta_n'(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)}=-\operatorname{Sp} A,$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(\lambda)=e^{-\alpha\lambda}.$$

Оценим теперь функцию $\Delta_n(\lambda)$ и ее предел, используя другое представление для $\Delta_n(\lambda)$. Поскольку

$$\Delta_n(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}(1-\lambda\lambda_j^{(n)}),$$

то

$$|\Delta_n(\lambda)|\leqslant\prod_{j=1}^{n}(1+|\lambda|\,|\lambda_j^{(n)}|)\leqslant\prod_{j=1}^{n}(1+|\lambda|s_j(AP_n))\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{j=1}^{n}(1+|\lambda|s_j(A))\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda|s_j(A)).$$

Поскольку оператор A — ядерный, то $\sum\limits_{j=1}^{\infty}s_j(A)<\infty$. Поэтому

$$|\Delta_n(\lambda)|\leqslant\prod_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda|s_j(A))=\prod_{j=1}^{N}(1+|\lambda|s_j(A))\prod_{j=N+1}^{\infty}(1+|\lambda|s_j(A)).$$

Воспользуемся элементарным неравенством

$$1+|\lambda|s_j(A)\leqslant e^{|\lambda|s_j(A)}.$$

Тогда

$$|\Delta_n(\lambda)|\leqslant\prod_{j=1}^{N}(1+|\lambda|s_j(A))\,e^{|\lambda|\sum\limits_{j=N+1}^{\infty}s_j(A)}.$$

Поскольку последняя оценка от n не зависит, она должна быть выполнена для предельной от $\Delta_n(\lambda)$ функции. Следовательно,

$$|e^{-\alpha\lambda}|\leqslant P_N(\lambda)\,e^{\varepsilon|\lambda|},$$

где $P_N(\lambda)=\prod\limits_{j=1}^{N}(1+|\lambda|s_j(A))$ — многочлен степени N от $|\lambda|$, а $\varepsilon=\sum\limits_{j=N+1}^{\infty}s_j(A)$. Выбирая N достаточно большим, число ε можно сделать сколь угодно малым. Очевидно, что неравенство

$$|e^{-\alpha\lambda}|\leqslant P_N(\lambda)\,e^{\varepsilon|\lambda|}$$

не может выполняться для любого $\varepsilon>0$. Поэтому $\alpha=0$, т. е. $\operatorname{Sp}A=0$ для вольтеррова оператора A.

Рассмотрим общий случай. Пусть A — произвольный вполне непрерывный оператор. Пусть $\overline{L}=\overline{\bigcup\limits_{\lambda_k\neq0}L_{\lambda_k}}$ — замкнутая линейная оболочка всех корневых векторов оператора A, отвечающих ненулевым собственным числам. Пусть $\{\varphi_j\}$ — ортонормированная система, для которой $(A\varphi_j, \varphi_j)=\lambda_j(A)$ (*система Шура*). Пусть A_0 — оператор, являющийся сужением оператора A на L. Тогда

$$\operatorname{Sp} A_0=\sum_j (A\varphi_j, \varphi_j)=\sum_j \lambda_j(A).$$

Подпространство $\bar{L}$ инвариантно относительно оператора A. Пусть P — проектор на $\bar{L}$, т. е. $PH=\bar{L}$, а Q — проектор на $\bar{L}^{\perp}=H\ominus\bar{L}$. Тогда $P+Q=E$, $PQ=QP=0$ и

$$A=(P+Q)(P+Q)A=(P+Q)A(P+Q)=$$
$$=PAP+QAP+PAQ+QAQ.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} PAP+\operatorname{Sp} QAP+\operatorname{Sp} PAQ+\operatorname{Sp} QAQ=$$
$$=\operatorname{Sp} PAP+\operatorname{Sp} QPA+\operatorname{Sp} APQ+\operatorname{Sp} QAQ,$$

так как $\operatorname{Sp} TH=\operatorname{Sp} HT$, если T — вполне непрерывный оператор, а H — ограниченный. Докажем последнее утверждение. Пусть

$$T=\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)(\cdot, \varphi_j)\psi_j,$$

тогда

$$HT=\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)(\cdot, \varphi_j)H\psi_j,$$

$$\operatorname{Sp}(HT)=\sum_{j=1}^{\infty}(HT\varphi_j, \varphi_j)=\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)(H\psi_j, \varphi_j).$$

С другой стороны,

$$TH=\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)(\cdot, H^*\varphi_j)\psi_j,$$

$$\operatorname{Sp} TH=\sum_{j=1}^{\infty}(TH\psi_j, \psi_j)=\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)(H\psi_j, \varphi_j),$$

т. е.

$$\operatorname{Sp}(HT)=\operatorname{Sp}(TH).$$

Учитывая, что $QP=0$, $PQ=0$, а QAQ — вольтерров оператор (см. лемму 5 § 3 гл. IV), получаем

$$\operatorname{Sp} A=\operatorname{Sp} PAP+\operatorname{Sp} QAQ=\operatorname{Sp} PAP.$$

Но $\operatorname{Sp} PAP=\operatorname{Sp} A_0=\sum_j \lambda_j(A)$. Действительно, пусть $H=L+Z$,

$\{\varphi_j\}$ — базис Шура в L, $\{\varphi_k'\}$— какой-нибудь ортонормированный базис в Z. Тогда

$$\operatorname{Sp} PAP = \sum_j (PAP\varphi_j,\ \varphi_j) + \sum_k (PAP\varphi_k',\ \varphi_k') = \sum_j (A\varphi_j,\ \varphi_j),$$

так как $P\varphi_k' = 0$ для любого k, а $(PAP\varphi_j,\ \varphi_j) = (A\varphi_j,\ \varphi_j)$ для любого j. Окончательно имеем

$$\operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} PAP = \operatorname{Sp} A_0 = \sum_j \lambda_j(A).$$

Итак, доказаны теоремы о совпадении матричных и спектральных следов в случае конечномерных операторов и в случае ядерных операторов. Возникает вопрос об аналоге этих теорем для неограниченных операторов. В этом случае спектральный и матричный следы оператора не существуют. Поэтому возникает понятие так называемых «регуляризованных следов». Мы получим регуляризованные следы для широкого класса операторов.

Примеры.

1. Ограниченный линейный оператор A называется *диссипативным,* если его мнимая компонента $A_I = \dfrac{A - A^*}{2i}$ является неотрицательным оператором. Заметим, что $A_R = \dfrac{A + A^*}{2}$ называется действительной компонентой. Справедливо равенство $A = A_R + iA_I$.

Рассмотрим оператор в $L^2(0,\ 1)$

$$Af = 2i \int_0^x f(t)\, dt.$$

Очевидно, что $A^*f = -2i \int_x^1 f(t)\, dt$, $A_I f = \int_x^1 f(t)\, dt$, $A_R f = i \int_0^x f(t)\, dt - {}$ $- i \int_x^1 f(t)\, dt$. Квадратичная форма $(Af,\ f) = \int_0^1 \int_0^1 f(t)\, dt\, \overline{f(s)}\, ds = \int_0^1 |f(t)|^2 \times$ $\times dt \geqslant 0$, и оператор A—диссипативный.

2. Линейный оператор A называется *простым,* если он ограничен и не имеет с A^* общего инвариантного подпространства, на котором бы он совпадал с A^*. Интегральный оператор предыдущего примера является простым оператором.

3. Если диссапативный оператор A является ядерным, то его корневые векторы образуют полную систему в гильбертовом пространстве H.

Действительно, согласно теореме о следе для ядерных операторов

$$\sum_j \lambda_j(A) = \operatorname{Sp} A = \operatorname{Sp} A_R + i \operatorname{Sp} A_I.$$

Следовательно, сравнивая мнимые части равенства, имеем

$$\sum_j \operatorname{Im} \lambda_j(A) = \operatorname{Sp} A_I.$$

Пусть $L_0 = \overline{\bigcup_{\operatorname{Im}\lambda_j \neq 0} L_{\lambda_j}}$, A_0 — сужение оператора A на L_0. Пусть $\{\varphi_j\}$ — ортонормированная система Шура, L_0 — замкнутая линейная оболочка этой системы. Допустим, что $L_0 \neq H$ и, следовательно, $H = L_0 + L_0^{\perp}$. Выберем в $L_0^{\perp}$ ортонормированный базис $\{\varphi_j'\}$. Тогда системы $\{\varphi_j\}$ и $\{\varphi_j'\}$ — базис, причем ортонормированный, в H. Поскольку оператор A_I — ядерный, то

$$\operatorname{Sp} A_I = \sum_j (A_I\varphi_j,\ \varphi_j) + \sum_j (A_I\varphi_j',\ \varphi_j').$$

Отсюда получаем, что $\sum_j (A_I\varphi_j',\ \varphi_j') = 0$. Оператор A — диссипативный, A_I — неотрицательный оператор, поэтому каждое слагаемое $(A_I\varphi_j',\ \varphi_j') = 0$. Поскольку, кроме того, оператор A_I — самосопряженный (он симметрический), то существует корень квадратный из оператора A_I. Тогда $(A_I\varphi_j', \varphi_j') = 0 = (A_I^{1/2}A_I^{1/2}\varphi_j', \varphi_j') = (A_I^{1/2}\varphi_j', A_I^{1/2}\varphi_j')$, т. е. $A_I^{1/2}\varphi_j' = 0$, $A_I\varphi_j' = 0$ для любого j. Мы получили, что $L_0^{\perp} \subset Z(A_I)$ — ядру оператора A_I. На подпространстве $L_0^{\perp}$, таким образом, оператор $A = A^* = A_R$, т. е. оператор A — самосопряжен. Если $L_0^{\perp}$ состоит только из нуля, все доказано; система корневых векторов, отвечающих невещественным собственным числам, полна. В противном случае к этой системе надо добавить базис $L_0^{\perp}$ из собственных векторов оператора A.

§ 3. РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЕ СУММЫ КОРНЕЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ. СЛЕДЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Функции класса K

Рассмотрим целую функцию $f(z)$, которая при каждом целом $h \geqslant 0$ допускает представление вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{\alpha_k z} P_{k,h}(z),$$

где α_k — комплексные постоянные, а

$$P_{k,h}(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu} + o(z^{n_k - h})$$

при $z \to 0$. В формуле выше n_k — некоторое целое число, а $\beta_0^{(k)} \neq 0$.

Предполагается, что плоскость z можно покрыть конечным числом открытых секторов, содержащих начало координат, в каждом из которых функции $P_{k,h}(z)$ являются аналитическими при $|z|>R$.

В дальнейшем мы будем опускать индекс h у $P_{k,h}(z)$ и писать

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu}, \quad z \to \infty.$$

Мы будем также предполагать, что представление для $P_k(z)$ допускает почленное дифференцирование.

Функции с описанными выше свойствами условимся называть *функциями класса K*. Числа α_k и $\beta_\nu^{(k)}$ будем называть *параметрами асимптотики* функции $f(z)$.

Функции класса K возникают при решении дифференциальных уравнений, содержащих параметр z. Рассмотрим, например, на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ краевую задачу для дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x, z) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x, z)\, y = 0,$$

коэффициенты которого имеют вид

$$a_q(x, z) = z^q \sum_{j=0}^{q} z^{-j} a_{qj}(x), \quad q = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть граничные условия также полиномиально зависят от z:

$$U_i(y) = \sum_{\nu=0}^{m_i} z^\nu U_i^\nu(y) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $U_i^\nu(y)$ — линейные формы относительно решения $y(x)$:

$$U_i^\nu(y) = \sum_{k=1}^{n} \{a_{ik}^\nu y^{(k-1)}(0) + b_{ik}^\nu y^{(k-1)}(1)\} + \int_0^1 \alpha_i^\nu(x)\, y(x)\, dx.$$

Пусть коэффициенты уравнения и функции $\alpha_i^\nu(x)$ бесконечно дифференцируемы по x. Если, кроме того, предположить, что $a_{q0}(x) = a_{q0} r(x)$ $(q = 1, 2, \ldots, n)$, где $r(x) > 0$ и многочлен $\pi(\lambda) = \lambda^n + a_{10}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n0}$ не имеет кратных корней, то уравнение для определения собственных значений задачи имеет вид

$$f(z) = 0,$$

где $f(z) \in K$. Существенно, что при этом параметры асимптотики $f(z)$ явно выражаются через коэффициенты уравнения и коэффициенты граничных условий.

Нашей целью является получение явных выражений через параметры асимптотики $f(z)$ для регуляризованных сумм корней функции $f(z)$, т. е. сумм вида

$$\sum_{(l)} \{z_l^m - A_m(l)\} = s_m, \qquad (*)$$

здесь z_l — корни функции $f(z)$, $A_m(l)$ — некоторые вполне определенные числа, обеспечивающие сходимость рядов, а m — любое натуральное число.

Формулы $(*)$ могут быть использованы для написания алгебраической системы уравнений

$$\sum_{l=1}^{p} z_l^m = s_m^*, \quad m = 1, 2, \ldots, p,$$

связывающей первые корни $f(z)$. Это обстоятельство особенно существенно при отыскании первых собственных значений краевых задач.

Приводимые ниже теоремы не связаны с дифференциальными операторами и носят теоретико-функциональный характер. Однако они позволяют единым методом получать значения регуляризованных сумм собственных значений общих краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений любых порядков.

В связи с этим заметим, что если коэффициенты уравнения лишь h раз дифференцируемы по x, то функция $f(z)$ при $z \to \infty$ также допускает представление

$$P_k(z) \sim z^{n_k} \sum_{\nu=0}^{h+n_k} \beta_\nu^{(k)} z^{-\nu}, \quad h + n_k \geqslant 0.$$

Для простоты изложения введем все рассмотрения для класса K функций $f(z)$.

2. Дзета-функция

Построим дзета-функцию, ассоциированную с $f(z)$. Пусть $f(z)$ — целая функция класса K. Отметим на комплексной плоскости точки

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{N-1},$$

и их выпуклую оболочку обозначим через R. В общем случае R есть r-угольник ($r \leqslant N$). Направления внешних нормалей к R назовем *критическими*. Не нарушая общности, можно считать, что в вершины r-угольника R попадают первые r показателей экспонент

$$\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{r-1}.$$

Удалим из z-плоскости r секторов сколь угодно малого раствора ($s=0, 1, \ldots, r-1$) с биссектрисами, параллельными критическим направлениям. Оставшуюся область обозначим через Ω; она в свою очередь распадается на r открытых секторов Ω_s ($s=0, 1, \ldots, r-1$).

Легко устанавливается следующая

Лемма 1. *При достаточно большом M в пересечении областей $|z|>M$ и Ω отсутствуют нули $f(z)$.*

В самом деле, легко проверить, что $\operatorname{Re} \alpha z = (\bar{\alpha}, z)$, где справа стоит скалярное произведение векторов $\bar{\alpha}$ и z. Пусть теперь z для определенности принадлежит области Ω_0. Тогда геометрически ясно, что при $z \in \bar{R}$ с некоторым $\delta>0$ будет выполняться неравенство $\operatorname{Re} \alpha_0 z - \operatorname{Re} \alpha_k z > \delta |z|$ ($k=0$). Вследствие этого сразу получаем $f(z) = cz^{n_0} e^{\alpha_0 z}(1+o(1))$. Аналогичные оценки справедливы и в других секторах Ω_s.

Выберем теперь в одном из секторов Ω (для определенности Ω_0) луч l и построим контур Γ_0, состоящий из дважды проходимого луча l и окружности γ с центром в нуле. Не нарушая общности, можно считать, что $f(0) \neq 0$ (в противном случае $f(z)$ можно было бы разделить на целую степень z). Очевидно, при этом луч l и окружность γ можно выбрать так, чтобы все нули $f(z)$ оказались во внешности контура Γ_0.

Замечая далее, что при $z \in \Gamma_0$, $z \to \infty$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha_0 + \frac{P_0'(z)}{P_0(z)} + O(e^{-\delta|z|}) \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\omega_\nu^{(0)}}{z^\nu},$$

введем в рассмотрение интеграл

$$Z_0(\sigma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} z^{-\sigma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

который сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} \sigma > 1$. В формуле для $Z_0(\sigma)$ положено

$$z^{-\sigma} = e^{-\sigma \operatorname{Ln} z},$$

где $\operatorname{Ln} z$ — фиксированная регулярная ветвь логарифма во внешности Γ_0. Функцию $Z_0(\sigma)$ назовем *дзета-функцией, ассоциированной с функцией* $f(z)$.

Лемма 2. *При* $\operatorname{Re} \sigma > 1$

$$Z_0(\sigma) = \sum_{(l)} z_l^{-\sigma},$$

где z_l — нули $f(z)$.

Поскольку $f(z)$ — целая функция первого порядка, для $f'(z)/f(z)$ справедливо равномерно сходящееся в каждом конечном круге разложение

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{(l)}\left\{\frac{1}{z-z_l}+\frac{1}{z_l}\right\}+a.$$

Используя тот факт, что при $|z_l|>R$ нули $f(z)$ лежат в секторах, нетрудно получить оценку $|z-z_l|>\delta|z_l|$ $(\delta>0)$ для всех l и $z\in\Gamma_0$.

Разобьем сумму в правой части на две:

$$\sum_{(l)}=\sum_{(l')}+\sum_{(l'')},$$

отнеся ко второй слагаемые, для которых $|z_l|>R$. Легко видеть, что

$$\left|\sum_{(l'')}\right|\leqslant\sum_{(l'')}\frac{|z|}{|z-z_l|\cdot|z_l|}<\frac{|z|}{\delta}\sum_{(l'')}\frac{1}{|z_l|^2}<\varepsilon|z|$$

при достаточно большом R. Умножив $f'(z)/f(z)$ на $z^{-\sigma}$ $(\operatorname{Re}\sigma>2)$ возьмем интегралы от обеих частей по контуру Γ_0. Оценка для суммы позволяет переставить местами интегрирование и суммирование. Так как далее

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}z^{-\sigma}\left\{\frac{1}{z-z_l}+\frac{1}{z_l}\right\}dz=z_l^{-\sigma},$$

то при $\operatorname{Re}\sigma>2$ все доказано. Замечая, что обе части доказываемого равенства определены и регулярны в полуплоскости $\operatorname{Re}\sigma>1$, мы делаем вывод о справедливости равенства при $\operatorname{Re}\sigma>1$.

Лемма 3. *Дзета-функция $Z_0(\sigma)$ аналитически продолжается во всю σ-плоскость как целая функция.*

Для доказательства разобьем интеграл для $Z_0(\sigma)$ на четыре интеграла:

$$Z_0(\sigma)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}z^{-\sigma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0'}z^{-\sigma}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}-\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(0)}}{z^\nu}\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}z^{-\sigma}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(0)}}{z^\nu}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}z^{-\sigma}\sum_{\nu=0}^{\nu_0}\frac{\omega_\nu^{(0)}}{z^\nu}dz=$$

$$=I_1(\sigma)+I_2(\sigma)+I_3(\sigma)+I_4(\sigma).$$

Легко видеть, что $I_1(\sigma)$ и $I_4(\sigma)$ — целые функции σ; $I_2(\sigma)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}\sigma>-\nu_0$. Наконец, $I_3(\sigma)$ при $\operatorname{Re}\sigma>1$ равно нулю, и следовательно, аналитически продолжается нулем на всю плоскость. Поскольку ν_0 любое, лемма 3 доказана.

Полученное представление позволяет найти значение $Z_0(\sigma)$ в целых точках.

Лемма 4. *При* $m=2, 3, \ldots$

$$Z_0(m)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,\frac{1}{z^m}\,dz.$$

При $m=0, 1, 2, \ldots$

$$Z_0(-m)=\omega^{(0)}_{m+1},$$

где $\omega^{(0)}_{\nu}$ — *коэффициенты в разложении* $f'(z)/f(z)$.

Ограничимся доказательством последних равенств, которые в дальнейшем будут иметь основное значение. Обратимся к формуле для $Z_0(\sigma)$. При σ целом и неположительном имеем $I_1(\sigma)=0$, поскольку под знаком интеграла оказывается регулярная внутри γ функция z; далее, $I_2(\sigma)=0$ при целом σ вследствие того, что однозначная функция z интегрируется вдоль луча l в двух противоположных направлениях. Учитывая далее, что $I_3(\sigma)\equiv 0$, мы сведем вопрос к вычислению интеграла $I_4(\sigma)$. Это, очевидно, приведет нас к формуле для $Z_0(-m)$.

Аналогично устанавливаются равенства для $Z_0(m)$. Подчеркнем, что значения $Z_0(\sigma)$ в целых положительных точках определяются поведением $f(z)$ в окрестности нуля, в то время как значения в целых отрицательных точках выражаются через параметры асимптотики при $z\to\infty$.

3. Регуляризованные суммы корней функции класса K

Изучим асимптотику корней $f(z)$. В общем случае можно утверждать, что для больших по модулю корней $f(z)$ справедлива асимптотическая формула

$$z_{n,s}=a_s n\,(1+o(1)),\quad a_s=\frac{2\pi i}{\alpha_{s+1}-\alpha_s}.$$

Здесь $s=1, 2, \ldots, r-1$ — номер сектора T_s, в котором располагается серия корней; α_s и α_{s+1} — вершины соответствующей стороны многоугольника R, причем при $s=r-1$ под α_r следует понимать α_0.

Для получения значений регуляризованных сумм формула для $z_{n,s}$ оказывается недостаточной. Однако при некоторых предположениях относительно показателей экспонент она допускает уточнение.

Предположим сначала, что на границе многоугольника лежат лишь числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}$, все остальные $N-r$ показателей попадают, следовательно, внутрь многоугольника. В этом случае формуле для $z_{n,s}$ можно придать следующий вид:

$$z_{n,s}\sim a_s n\left\{1+b_s\frac{\ln n}{n}+\frac{c_s}{n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}}\right\},$$

где $R_k{}^s(\ln n)$ — полиномы степени k относительно $\ln n$. Все коэффициенты выражаются через параметры асимптотики $f(z)$. В частности

$$a_s=\frac{2\pi i}{\alpha_{s+1}-\alpha_s},\quad b_s=\frac{n_s-n_{s+1}}{2\pi i},$$

$$c_s=\frac{1}{2\pi i}\{(n_s-n_{s+1})\,\mathrm{Ln}\,a_s-\mathrm{Ln}\,\beta_0^{s+1}+\mathrm{Ln}\,\beta_0^s+\pi i\}.$$

Здесь числа n_s суть показатели при главных членах в формуле для $P_k(z)$.

Асимптотическая формула для $z_{n,s}$ устанавливается методом итераций, и мы не будем останавливаться на ее выводе.

Аналогичная формула для корней $f(z)$ может быть получена и в том случае, когда на стороне многоугольника R оказываются не два, а три и более показателей экспонент (однако в предположении, что сторона делится соответствующими точками на соизмеримые части).

Соответствующие асимптотические разложения аналогичны полученным, однако содержат дробные степени n.*)

Получим теперь регулированные суммы корней функции $f(z)$. Для простоты будем предполагать, что корни $z_{n,s}$ функции $f(z)$ допускают асимптотическое представление по целым степеням, хотя и в случае асимптотики по дробным степеням n все проводимые ниже рассмотрения в принципе сохраняются.

Возведя обе части для $z_{n,\sigma}$ в степень $-\sigma$, получаем

$$z_{n,s}^{-\sigma}\sim a_s^{-\sigma}n^{-\sigma}\left\{1+b_s\frac{\ln n}{n}+c_s\frac{1}{n}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k^{(s)}(\ln n)}{n^{k+1}}\right\}^{-\sigma}.$$

Поскольку известная формула Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$ справедлива и при комплексных x и α, мы можем представить третий множитель в правой части асимптотическим рядом и в результате получить формулу

$$z_{n,s}^{-\sigma}\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{Q_k^{(s)}(\sigma,\ \ln n)}{n^{k+\sigma}},$$

где

$$Q_k^{(s)}(\sigma,\ \ln n)=\sum_{\nu=0}^{k}d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma)\ln^\nu n,$$

а $d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma)$ — полиномы относительно σ. В частности,

$$d_{0,0}^{(s)}(\sigma)=1,$$

*) В случае, если стороны многоугольника разбиваются показателями экспонент на несоизмеримые части, все рассуждения в основном сохраняются, однако асимптотические формулы для $z_{n,s}$ имеют гораздо более сложный вид.

$$d_{1,0}^{(s)}(\sigma) = -\sigma c_s, \quad d_{1,1}^{(s)}(\sigma) = -\sigma b_s.$$

Фиксируем некоторое целое достаточно большое τ. Из формулы для $z_{n,s}^{-\sigma}$ следует, что функция

$$\Psi_\tau^{(0)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{r-1} \left[z_{n,s}^{-\sigma} - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right]$$

допускает аналитическое продолжение в полуплоскость

$$\operatorname{Re}\sigma > -\tau,$$

так как общий член ряда есть $O(\ln^{\tau+1} n / n^{-(\tau+1+\sigma)})$. Наша цель — отыскание чисел

$$\Psi_\tau^{(0)}(-m) \quad (m < \tau),$$

которые мы назовем *регуляризованными m-суммами корней* $f(z)$.

Заметим, что первый индекс корня $z_{n,s}$ определяется значением целочисленного параметра в асимптотической формуле; конечное число корней $f(z)$ при таком способе нумерации может оказаться непронумерованным или же, наоборот, может оказаться избыток целочисленных индексов в конечном числе. Штрих над знаком суммы означает, что в первом случае непронумерованные корни включаются в сумму, а во втором — что первые слагаемые в квадратной скобке, снабженные избыточными индексами, считаются нулями.

Учитывая это замечание, найдем значения регуляризованных сумм. Введем в рассмотрение функцию

$$\Phi_\tau^{(0)}(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(\sigma, \ln n)}{n^{k+\sigma}} \right),$$

регулярную при $\operatorname{Re}\sigma > 1$. Имеем $\Psi_\tau^{(0)}(\sigma) = Z_0(\sigma) - \Phi_\tau^{(0)}(\sigma)$. Так как $Z_0(\sigma)$ — целая функция, то вместе с $\Psi_\tau^{(0)}(\sigma)$ функция $\Phi_\tau^{(0)}(\sigma)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re}\sigma > -\tau$. Заметим, что $\Phi_\tau^{(0)}(\sigma)$ выражается через ζ-функцию Римана и ее производные. В самом деле,

$$\Phi_\tau^{(0)}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} \left(\sum_{s=0}^{r-1} a_s^{-\sigma} d_{k,\nu}^{(s)}(\sigma) \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^\nu n}{n^{k+\sigma}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\tau} \sum_{\nu=0}^{k} D_{k,\nu}^{(0)}(\sigma) (-1)^\nu \zeta^{(\nu)}(k+\sigma).$$

Поскольку значения ζ-функции Римана и ее производных в целых отрицательных точках известны, можно найти значения

$\Phi_\tau^{(0)}(-m)$ при $m<\tau$. Учитывая формулы для $Z_0(-m)$, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *При любом целом $m<\tau$ справедливы равенства*

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sum_{s=0}^{r-1} \left[z_{n,s}^m - \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} \right] = \omega_{m+1}^{(0)} - \Phi_\tau^{(0)}(-m),$$

где $\omega_{m+1}^{(0)}$ — коэффициенты разложения $f'(z)/f(z)$, а числа $\Phi_\tau^{(0)}(-m)$ определяются формулой выше.

Оба слагаемых в правой части зависят от выбора контура Γ_0, введенного при определении функции $Z_0(\sigma)$, в то время как их разность не зависит от Γ_0, поскольку этим свойством обладает левая часть. Используя эту инвариантность, а также серию линейных соотношений, возникающих в результате приравнивания нулю коэффициентов при полюсах ζ-функции и ее производных, можно получить линейную рекуррентную систему для определения коэффициентов асимптотического ряда $z_{n,s}$.

Получим систему для первых корней $f(z)$. Пусть q_0 — некоторое натуральное число. Поскольку общий член ряда для Ψ_τ^0 есть $O(n^{-\tau-1-\sigma}\ln^{\tau+1}n)$, легко получаем для всех $m\leqslant\tau<1$

$$\sum_{n=1}^{q}{}' \sum_{s=0}^{r-1} z_{n,s}^m = \sum_{n=1}^{q} \sum_{s=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{\tau} \frac{Q_k^{(s)}(-m, \ln n)}{n^{k-m}} + \omega_{m+1}^{(0)} - \\ - \Phi_\tau^{(0)}(-m) + O(q^{m-\tau} \ln^{\tau+1} q).$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений относительно первых корней функции $f(z)$. Недостатком этой системы является имеющаяся неопределенность в отношении числа неизвестных в левых частях формулы. Мы сейчас устраним эту неопределенность. Заметим, что

$$Q_k^{(s)}(0, \ln n) = 0, \quad k \geqslant 1 \text{ и } Q_0^{(s)}(0, \ln n) = 1.$$

Поэтому, если положить в формуле $m=0$, в левой части мы получим целое число, равное избытку или недостатку корней при заданном способе нумерации. Это целое число мы будем называть *дефектом регуляризации* и обозначать через $\varkappa$. При этом следует, что

$$\varkappa = \omega_1^{(0)} + \frac{r}{2} - \sum_{s=0}^{r-1} b_s \operatorname{Ln} a_s + \sum_{s=0}^{r-1} c_s,$$

где под $\operatorname{Ln} a_s$ понимаются значения регулярной ветви логарифма, фиксированной нами. Таким образом, число неизвестных в левой части формулы равно $p=qr+\varkappa$.

Полагая $\tau > p$, мы перепишем систему для корней $f(z)$ в виде

$$\sum_{l=1}^{p} z_l^m = s_m^*(q), \quad m = 1, 2, \ldots, p.$$

Через $s_m^*(q)$ обозначены правые части. Из наших рассуждений следует, что они определены с точностью до $O(q^{-\tau+m} \ln^{\tau+1} q)$.

ЗАДАЧИ

1. Пусть задан дифференциальный оператор L, порождаемый краевой задачей: $l(y) = -y'' + p(x)y = \lambda y, y(0) = y(\pi) = 0$. Пусть λ_n — его собственные значения. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{2} c_0 - \frac{p(0) + p(\pi)}{4},$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} p(x)\, dx.$$

2. Пусть L — дифференциальный оператор:

$$l(y) = y^{(4)} + p(x) y = \lambda y, \quad y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0.$$

Пусть λ_n — его собственные значения. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - n^4) = -\frac{p(0) + p(\pi)}{4},$$

если

$$\int_0^{\pi} p(x)\, dx = 0.$$

3. Рассмотреть краевую задачу

$$(D^2 - \alpha^2)^2 y = i\alpha R\{(p(x) - \lambda)(D^2 - \alpha^2) y - p''(x) y\},$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0,$$

$D = d/dx$, λ — спектральный параметр, α и R — вещественные константы, $p(x)$ — вещественная функция. Вычислить первую регуляризованную сумму.

Данная задача возникает в теории гидродинамической устойчивости и носит название задачи Орра—Зоммерфельда.

4. Пусть $f(z)$ — целая функция класса K. Рассмотрим функцию $\zeta_s(\sigma) = \sum_{(n)} z_{n,s}^{-\sigma}$, где $z_{n,s}$ — серия корней, расположенная в одном из секторов T_s. Доказать, что

$$\zeta_s(\sigma) = \frac{Z_{s+1}(\sigma) - Z_s(\sigma)}{e^{2\pi i\sigma} - 1}.$$

Поэтому $\zeta_s(\sigma)$ — мероморфная функция.

5. Пусть L — оператор $l(y)=-y''+p(x)y=\lambda y$, $y(0)=y(\pi)=0$. Пусть $\lambda_n>0$. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\lambda_n}-n-\frac{c_1}{n}+\frac{2}{\pi}\sqrt{\lambda_n}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}-\frac{2}{\pi}\right)=$$

$$=\frac{B_2}{2}-c_1\gamma+\int_1^{\infty}\sqrt{\xi}\left[R(\xi)-\frac{l_0}{\sqrt{\xi}}-\frac{l_1}{\xi}-\frac{l_2}{\xi\sqrt{\xi}}\right]d\xi,$$

где

$$l_0=\frac{\pi}{2},\quad l_1=-\frac{1}{2},\quad l_2=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}p(x)\,dx,\quad c_1=-\frac{2}{\pi}\,l_2,$$

B_2 — число Бернулли, γ — постоянная Эйлера,

$$R(\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n+\xi}.$$

§ 4. СЛЕДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Как уже было сказано выше, доказанная в предыдущем параграфе теорема 1 позволяет получать формулы регуляризованных следов для широкого класса задач, порожденных обыкновенными дифференциальными выражениями на конечном отрезке со сложным вхождением спектрального параметра. Представляет значительный интерес вопрос о получении формул регуляризованных следов дифференциальных операторов с частными производными. В данном параграфе мы изложим решение этой задачи, основанное на теории возмущений абстрактных дискретных операторов.

Дадим следующее определение.

Определение 1. Оператор T, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, называется *дискретным*, если существует некоторое комплексное число λ_0 такое, что $R_{\lambda_0}=(T-\lambda_0E)^{-1}$ является вполне непрерывным оператором в H.

Таким образом, оператор T является дискретным, если при некотором числе λ_0 его резольвента является вполне непрерывным оператором.

Согласно свойству спектра вполне непрерывных операторов (см. лемму 3 п. 3 § 3 г. IV) спектр оператора R_{λ_0} состоит из не более чем счетного набора нормальных собственных значений, имеющих единственную предельную точку нуль.

Так как $S(R_{\lambda_0})$ — спектр оператора R_{λ_0} — это образ множества $S(T)$ — спектра оператора T (включая бесконечно удаленную точку) при отображении $\lambda\to(\lambda-\lambda_0)^{-1}$, то спектр оператора T состоит из изолированных точек, не имеющих предельных, кроме бесконечности.

Согласно рассмотрениям § 3 гл. IV проектор, соответствующий точке $\lambda \in S(T)$, совпадает с проектором оператора R_{λ_0} соответствующим собственному значению $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$. (Это можно показать с помощью замены переменной в интегральном представлении проектора.)

Таким образом, размерности собственных подпространств у дискретного оператора T конечны, т. е. каждое собственное значение оператора T имеет конечную кратность. Из тождества Гильберта для резольвент имеем для любого λ из резольвентного множества:

$$R_\lambda = R_{\lambda_0}(E+(\lambda-\lambda_0)R_\lambda).$$

Следовательно, если R_{λ_0} — вполне непрерывен, то оператор R_λ вполне непрерывен для любого λ.

Предварительно докажем некоторые вспомогательные утверждения, представляющие и самостоятельный интерес.

В сепарабельном гильбертовом пространстве H рассматривается замкнутый оператор T. Пусть спрямляемый контур Γ, ограничивающий область D комплексной плоскости, обладает следующими свойствами:

а) все точки этого контура являются регулярными значениями оператора T;

б) весь спектр оператора T внутри D состоит из конечного числа нормальных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Пусть P — ограниченный оператор в H — удовлетворяет условию $\max\limits_{\lambda\in\Gamma}\|PR_\lambda(T)\| = q < 1$, где $R_\lambda(T) = (T-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора T. Покажем, что в этом случае все точки контура Γ являются регулярными значениями оператора $T+P$, причем для резольвенты оператора $T+P$ справедливо соотношение

$$R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_\lambda(T)[PR_\lambda(T)]^k,$$

где операторный ряд в правой части сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q.

В самом деле, очевидно, справедливо равенство

$$(T+P-\lambda E) = (T+P-\lambda E)(T-\lambda E)R_\lambda(T) = [E+PR_\lambda(T)](T-\lambda E).$$

Поскольку при $\lambda\in\Gamma$ $\|PR_\lambda(T)\| \leqslant q < 1$, то оператор $E+PR_\lambda(T)$ обратим, причем справедливо соотношение

$$[E+PR_\lambda(T)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[PR_\lambda(T)]^k.$$

Далее, поскольку при $\lambda\in\Gamma$ обратим также и оператор $T-\lambda E$, то, используя равенство $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, получим соотношение для $R_\lambda(T+P)$.

Проинтегрировав по контуру Γ это равенство, умноженное на $\frac{i}{2\pi}$, получим соотношение

$$P_\Gamma(T+P) = P_\Gamma(T) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k,$$

где

$$P_\Gamma(T+P) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma R_\lambda(T+P)\, d\lambda,$$

$$P_\Gamma(T) = \frac{i}{2\pi} \int_\Gamma R_\lambda(T)\, d\lambda,$$

$$C_k = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_\Gamma R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k d\lambda, \quad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Пусть $C = \sum_{k=1}^{\infty} C_k$.

Отметим, что в силу результатов п. 3 § 3 гл. 4 операторы $P_\Gamma(T+P)$ и $P_\Gamma(T)$ являются операторами проектирования, причем, в силу свойств контура Γ, $P_\Gamma(T)$ конечномерен и осуществляет проекцию на подпространство $L_\Gamma = \bigcup_{k=1}^{n} L_{\lambda_k}$, где L_{λ_k} — корневое подпространство, соответствующее нормальному собственному значению $\lambda_k \in D$.

Установим теперь, что операторы C_k и оператор C являются конечномерными, причем след каждого из них равен нулю.

Теорема 1. *При любом* $k=1,\ 2,\ \ldots$ *операторы* C_k *являются конечномерными, причем* $\mathrm{Sp}\, C_k = 0$.

По теореме Коши о вычетах имеем

$$C_k = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}_{\lambda_j} \{R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k\}.$$

В окрестности точки λ_j оператор-функция $R_\lambda(T)$ имеет следующее разложение в ряд Лорана (см. п. 3 § 3 гл. 4):

$$R_\lambda(T) = \frac{P_{-l}}{(\lambda-\lambda_j)^l} + \ldots + \frac{P_{-1}}{(\lambda-\lambda_j)} + P_0 + P_1(\lambda-\lambda_j) + \ldots,$$

где операторы P_{-m}, $m=1,\ 2,\ \ldots$, являются конечномерными, причем размерность каждого из них не превосходит $M_j = \dim L_{\lambda_j}$. Используя это разложение, получим

$$\mathrm{Res}_{\lambda_j} \{R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k\} = \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{k+1}=-1,\\ -l\leqslant i_m}} P_{i_1} P P_{i_2} \cdot \ldots \cdot P P_{i_{k+1}}.$$

Поскольку суммирование ведется по индексам i_m, удовлетворяющим условию $i_1+\ldots+i_{k+1}=-1$, то в каждом слагаемом правой части написанного выше равенства встречается хотя бы один оператор P_m с отрицательным индексом, т. е. каждое слагаемое является конечномерным оператором. Так как число слагаемых конечно и число точек спектра оператора T внутри D также конечно, получаем, что операторы C_k конечномерны. Далее, используя очевидные свойства коммутативности и аддитивности следа конечномерных операторов и симметрию вхождения индексов i_m, имеем

$$\operatorname{Sp} C_k = \operatorname{Sp} \operatorname{Res}_{\lambda_j} \{R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k\} =$$

$$= \sum_{\substack{i_1+\ldots+i_{k+1}=-1,\\ -l\leq i_m}} \operatorname{Sp} P_{i_2} P \ldots P_{i_k} P P_{i_{k+1}} P_{i_1} P =$$

$$= \operatorname{Sp} \operatorname{Res}_{\lambda_j} \{[R_\lambda(T)\,P]^{k-1} R_\lambda^2(T)\,P\}.$$

Откуда, применяя теорему Коши о вычетах, получим

$$\operatorname{Sp} C_k = \frac{i}{2\pi} \operatorname{Sp} \int\limits_\Gamma [R_\lambda(T)\,P]^{k-1} R_\lambda^2(T)\,P d\lambda.$$

Поскольку контур Γ замкнут и на этом контуре $R_\lambda(T)$ является дифференцируемой оператор-функцией и $\frac{d}{d\lambda} R_\lambda = R_\lambda^2$ (см. п. 1 § 3 гл. IV), окончательно имеем

$$\operatorname{Sp} C_k = \frac{i}{2\pi k} \operatorname{Sp} \int\limits_\Gamma d\,[R_\lambda P]^k = 0.$$

Следствие. *Спектр оператора $T+P$ внутри D состоит из конечного числа нормальных собственных значений.*

В самом деле, оператор $P_\Gamma\ (T+P)$ является конечномерным, поскольку он вполне непрерывен, как предел по норме вполне непрерывных (даже конечномерных) операторов, и является оператором проектирования.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Оператор C является конечномерным, причем* $\operatorname{Sp} C=0$.

Заметим, что конечномерность оператора C следует из конечномерности операторов $P_\Gamma\ (T+P)$ и $P_\Gamma\ (T)$. Утверждение о равенстве нулю следа оператора C нельзя непосредственно заключить из теоремы 1. Для того чтобы доказать равенство следа оператора C нулю, докажем предварительно несколько лемм.

Лемма 1. *Размерности операторов C_k не превосходят* $\mathrm{const}\cdot k$, *где константа не зависит от* k.

Введем для произвольного целочисленного набора $(i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_{k+1})$ функцию $\xi(t)=\sum_{m=1}^{t} i_m,\ t=1, 2, \ldots, k+1$. Положим $\xi(0)=0$. Поскольку в правой части формулы для $\mathrm{Res}_{\lambda_j}\{R_\lambda(T)\times$ $\times[PR_\lambda(T)]^k\}$ суммирование ведется по наборам индексов, удовлетворяющих условию $\xi(k+1)=-1$, то для любого такого набора найдется номер t_0 такой, что $\xi(t)\geqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$, $\xi(t_0+1)<0$, причем $\xi(t_0)<-i_{t_0+1}$. Тогда каждое слагаемое в правой части указанной формулы представимо в виде

$$(P_{i_1}PP_{i_2}\ldots P_{i_{t_0}}P)\,P_{-m}\,(PP_{i_{t_0+2}}\ldots PP_{i_{k+1}}),$$

где m — одно из чисел $1, 2, \ldots, l$, $\xi(t)\geqslant 0$ при $0\leqslant t\leqslant t_0$,

$$\xi(t_0+1)<0,\ \xi(t_0)<m,\ i_{t_0+2}+\ldots+i_{k+1}=m-1-\xi(t_0).$$

Обратно, каждый оператор такого вида является слагаемым правой части формулы для $\mathrm{Res}_{\lambda_j}\{R_\lambda(T)[PR_\lambda(T)]^k\}$. Получаем, что

$$\mathrm{Res}_{\lambda_j}\{R_\lambda(T)[PR_\lambda(T)]^k\}=\Big(\sum_{t_0=0}^{k}\sum_{m=1}^{l}\sum_{t_1=0}^{m-1}\sum_{i_1+\ldots+i_{t_0}=t_1}P_{i_1}P\ldots P_{i_{t_0}}P\Big)\times$$
$$\times P_{-m}\Big(\sum_{i_{t_0+2}+\ldots+i_{k+1}=m-1-t_1}PP_{i_{t_0+2}}\ldots PP_{i_{k+1}}\Big)$$

Заметим, что в правой части этой формулы $(k+1)\dfrac{l(l+1)}{2}$ слагаемых, каждое из которых есть конечномерный оператор, размерность которого не превосходит $M_j=\dim L_{\lambda_j}$, откуда и заключаем о справедливости леммы 1.

Лемма 2. *Пусть последовательность конечномерных операторов D_n сходится по норме к конечномерному оператору D, причем $\|D_n-D\|\dim D_n\to 0$ при $n\to\infty$. Тогда $\mathrm{Sp}\,D_n\to\mathrm{Sp}\,D$ при $n\to\infty$.*

Имеем разложение $H=R(D-D_n)\oplus Z(D^*-D_n{}^*)$, где $R(D-D_n)$ — область значений оператора $D-D_n$, $Z(D^*-D_n{}^*)$ — нулевое подпространство оператора, сопряженного к $D-D_n$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu_n}$ — ортонормированный базис в пространстве $R(D-D_n.)$ Дополним его до ортонормированного базиса во всем H элементами φ_j, $j=\nu_n+1, \ldots$ из $Z(D^*-D_n{}^*)$. Тогда, по теореме о следе для ядерного оператора, имеем

$$\mathrm{Sp}\,(D-D_n)+\sum_{j=1}^{\nu_n}((D-D_n)\varphi_j,\varphi_j)+\sum_{j=\nu_n+1}^{\infty}((D-D_n)\varphi_j,\varphi_j)=$$
$$=\sum_{j=1}^{\nu_n}((D-D_n)\varphi_j,\varphi_j)+\sum_{j=\nu_n+1}^{\infty}(\varphi_j,(D^*-D_n^*)\varphi_j)=\sum_{j=1}^{\nu_n}((D-D_n)\varphi_j,\varphi_j).$$

Отсюда заключаем, что

$$|\operatorname{Sp} D_n - \operatorname{Sp} D| \leqslant \|D - D_n\| \dim (D - D_n) \leqslant$$
$$\leqslant \|D - D_n\| (\dim D_n + \dim D) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Замечание. В ходе доказательства леммы 2 нами попутно установлено утверждение о том, что след конечномерного оператора не превосходит нормы этого оператора, умноженной на его размерность.

Применяя леммы 1 и 2 и используя, что операторный ряд для C сходится со скоростью геометрической прогрессии, получаем доказательство теоремы 2.

В качестве непосредственного следствия доказанных теорем 1, 2 получаем известную теорему об устойчивости корневой кратности в формулировке, аналогичной формулировке теоремы Руше об устойчивости числа нулей аналитической функции.

Пусть $\nu_\Gamma(T) = \sum_{j=1}^{n} \dim L_{\lambda_j}$, а $\nu_\Gamma(T+P)$ — аналогичная величина для оператора $(T+P)$.

Следствие (теорема об устойчивости корневой кратности) *Справедливо равенство*: $\nu_\Gamma(T) = \nu_\Gamma(T+P)$.

Действительно, для доказательства этого равенства достаточно взять след от обеих частей равенства

$$P_\Gamma(T+P) = P_\Gamma(T) + \sum_{k=1}^{\infty} C_k$$

и воспользоваться соотношениями

$$\nu_\Gamma(T+P) = \operatorname{Sp} P_\Gamma(T+P), \quad \nu_\Gamma(T) = \operatorname{Sp} P_\Gamma(T).$$

Эти последние соотношения получаются, если вычислить следы соответствующих операторов в базисах, первые векторы которых составляют ортонормированные базисы в пространствах, на которые операторы $P_\Gamma(T)$ и $P_\Gamma(T+P)$ осуществляют проекции.

Перейдем к изложению основного результата данного параграфа.

Рассмотрим в сепарабельном гильбертовом пространстве H дискретный самосопряженный оператор T. Потребуем дополнительно, чтобы существовало такое действительное число c, что

$$(Tf, f) \geqslant c(f, f)$$

для всех $f \in D_T$ — области определения оператора T. Операторы, для которых выполнено указанное неравенство с квадратичной формой, называются *полуограниченными снизу*. (Если выполнено противоположное неравенство, то оператор *полуограничен сверху*.)

Если, в частности,

$$(Tf, f) \geqslant 0$$

для всех $f \in D_T$, то оператор называется *положительным*, точно так же, как и в случае ограниченного оператора. Всякий полуограниченный оператор может быть выражен через некоторый положительный оператор посредством одной из формул

$$T = S + cE, \quad T = -S + cE.$$

Поэтому достаточно рассматривать только положительные операторы.

Поскольку оператор T — дискретный, то у него имеются лишь собственные значения с единственной предельной точкой на бесконечности. Поскольку $(Tf, f) \geqslant 0$, то для собственных векторов φ_n будут выполнены неравенства

$$0 \leqslant (T\varphi_n, \varphi_n) = \lambda_n (\varphi_n, \varphi_n),$$

т. е. собственные значения положительного дискретного оператора неотрицательны и могут накапливаться лишь к $+\infty$. Расположим их по возрастанию с учетом возможной (конечной) кратности:

$$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots .$$

Обозначим через $N(\lambda)$ следующую функцию: $N(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_n \leqslant \lambda} 1$. Предположим, что $N(\lambda) = 0(\lambda^p)$, $0 < p < 1$ при $\lambda \to \infty$. Пусть γ — некоторое фиксированное число, удовлетворяющее условию $\gamma > \frac{1}{1-p}$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Существует последовательность действительных чисел $\{a_n\}$, $a_n \to \infty$, $n^\gamma \leqslant a_n \leqslant (n+1)^\gamma$ такая, что $d_n = d(a_n, S(T)) \geqslant$ $\geqslant \mathrm{const} \cdot n^{\gamma(1-p)-1}$, где константа не зависит от n, а $d(\lambda, S(T))$ означает расстояние от точки λ до спектра оператора T.*

Рассмотрим отрезок $\Delta_n = [n^\gamma, (n+1)^\gamma]$, $n = 1, 2, \dots$. Длина отрезка Δ_n при $n \to \infty$ есть величина порядка $n^{\gamma-1}$. Из условий на $N(\lambda)$ следует, что при $n \to \infty$ число точек спектра оператора T, находящихся на отрезке Δ_n, есть величина порядка не больше, чем $n^{\gamma p}$. Отсюда следует, что при больших номерах n на отрезке Δ_n существует точка a_n, отстоящая от спектра оператора на величину порядка не меньшего, чем $n^{\gamma-1-p\gamma}$. Лемма доказана.

Обозначим $l_k = \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = a_k\}$, и пусть λ_{n_k} и $\lambda_{n_{k+1}}$ — ближайшие к прямой l_k собственные числа оператора T, расположенные соответственно слева и справа. Согласно лемме 3

$$|\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}| \geqslant \mathrm{const} \cdot k^{\gamma(1-p)-1}.$$

Пусть P — некоторый ограниченный оператор, определенный всюду в H. Обозначим Γ_k прямоугольный контур на λ-плоскости с вершинами в точках $(-a_k, a_k)$, (a_k, a_k), $(a_k, -a_k)$, $(-a_k, -a_k)$.

Докажем лемму.

Лемма 4. *Оператор $T+P$ является дискретным оператором. При достаточно больших k все точки контура Γ_k являются точка-*

ми регулярности оператора $T+P$. Все собственные числа оператора $T+P$, лежащие в полосе $-a_k \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant a_k$, попадают внутрь прямоугольника Γ_k число собственных чисел (с учетом алгебраической кратности) операторов T и $T+P$ внутри контура Γ_k совпадает. На контуре Γ_k справедливо разложение

$$R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k + B_N,$$

где

$$B_N = R_\lambda(T+P)\,[PR_\lambda(T)]^{N+1}.$$

Необходимо показать, что при достаточно больших k для любого $g \in H$ однозначно разрешимо уравнение

$$(T+P-\lambda E)f = g, \quad \lambda \in \Gamma_k.$$

Поскольку T — самосопряженный оператор, то (см. п. 1 § 3 гл. IV) $\|R_\lambda(T)\| = 1/d(\lambda, S(T))$, где $d(\lambda, S(T))$ — расстояние от точки λ до спектра $S(T)$ оператора T. Согласно выбору контура Γ_k имеем

$$\max_{\lambda \in \Gamma_k} \|R_\lambda(T)\| = O\left(\frac{1}{d_k}\right) \text{ при } k \to \infty.$$

Так как $(1-p)\gamma > 1$, то $O\left(\frac{1}{d_k}\right) = o(1)$ при $k \to \infty$. Действуя на равенство $(T+P-\lambda E)f = g$ оператором $R_\lambda(T)$ справа, получим $(E+PR_\lambda(T))f = R_\lambda(T)g$. Так как P — ограниченный оператор, то при достаточно больших k $\|PR_\lambda(T)\| < 1$ при $\lambda \in \Gamma_k$. Отсюда следует, что оператор $E+PR_\lambda(T)$ обратим, причем на контуре Γ_k справедливо следующее важное для дальнейшего соотношение для резольвент

$$R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k.$$

Из этого соотношения следует, что $R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T)B_\lambda$, где B_λ — некоторый ограниченный оператор. Поскольку T — дискретный оператор, то $R_\lambda(T)$ является вполне непрерывным оператором при $\lambda \in \Gamma_k$, а следовательно, $R_\lambda(T+P)$ есть также вполне непрерывный оператор при $\lambda \in \Gamma_k$, т. е. оператор $T+P$ является дискретным.

Утверждение, что все собственные числа оператора $T+P$, лежащие в полосе $-a_k \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant a_k$, попадают при достаточно больших k внутрь прямоугольника Γ_k, а также утверждение, что число собственных чисел операторов $T+P$ и T внутри контура Γ_k совпадает, легко следуют из доказанной нами выше теоремы об устойчивости корневой кратности.

И наконец, в справедливости разложения для $R_\lambda(T+P)$ убеждаемся непосредственно, подставив в формулу для B_N вместо

$R_\lambda(T+P)$ правую часть равенства

$$R_\lambda(T+P)=R_\lambda(T)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k.$$

Лемма доказана.

Умножим соотношение

$$R_\lambda(T+P)=R_\lambda(T)+\sum_{k=1}^{N}(-1)^k R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^k+B_N$$

на $\dfrac{\lambda^{m_i}}{2\pi}$ и проинтегрируем по контуру Γ_k (m — натуральное число). Имеем

$$P_{\Gamma_k}(m,\ T+P)=P_{\Gamma_k}(m,\ T)+\sum_{\nu=1}^{N}(-1)^\nu C_{\Gamma_k}^{\nu}(m)+D_{\Gamma_k}^{(N)}(m),$$

где

$$P_{\Gamma_k}(m,\ T+P)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T+P)\,d\lambda,$$

$$P_{\Gamma_k}(m,\ T)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T)\,d\lambda,$$

$$C_{\Gamma_k}^{\nu}(m)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T)\,[PR_\lambda(T)]^\nu d\lambda,\ \ \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$

$$D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)=\frac{i}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_k}\lambda^m R_\lambda(T+P)\,[PR_\lambda(T)]^{N+1}d\lambda.$$

Аналогично тому как была доказана лемма 1 этого параграфа, получаем доказательство следующей леммы.

Лемма 5. *Операторы* $P_{\Gamma_k}(m,\ T+P)$, $P_{\Gamma_k}(m,\ T)$, $C_{\Gamma_k}^{(\nu)}(m)$, $\nu=1,2,\ldots,N$, $D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)$ *являются конечномерными, причем*

$$\dim D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)=O(k^{4\nu p})\ \ \textit{при}\ \ k\to\infty$$

(символ dim *означает размерность оператора).*

Справедлива лемма.

Лемма 6. *Норма оператора* $D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)$ *есть величина порядка*

$$O(k^{-(N+2)[\gamma(1-p)-1]+(m+1)\gamma}\ \text{при}\ k\to\infty.$$

Действительно, имеем оценку

$$\|D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)\| = \left\| \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} \lambda^m R_\lambda(T+P)\,[PR_\lambda(T)]^{N+1} d\lambda \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \cdot \max_{\lambda \in \Gamma_k} (|\lambda^m| \cdot \|R_\lambda(T+P)\| \cdot \|R_\lambda(T)\|^{N+1}) \cdot \text{дл. } \Gamma_k.$$

Заметим, что из соотношения $R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k R_\lambda(T) \times [PR_\lambda(T)]^k$ следует, что на контуре Γ_k норма $R_\lambda(T+P)$ имеет при $k \to \infty$ тот же порядок убывания по k, что и норма $R_\lambda(T)$, которая в свою очередь оценивается через расстояние от λ до спектра оператора $S(T)$. Используя лемму 3 и свойства, которыми обладает контур Γ_k, непосредственным подсчетом убеждаемся в справедливости леммы 6.

Согласно лемме 4 внутри контура Γ_k при достаточно больших k находится одинаковое число собственных чисел операторов $T+P$ и T. Следовательно, собственные числа μ_i оператора $T+P$ можно занумеровать в порядке возрастания вещественных частей, используя индексы от 1 до n_k.

Докажем, наконец, следующую лемму.

Лемма 7. *Имеют место соотношения*

$$\text{Sp}\, P_{\Gamma_k}(m,\ T+P) = \sum_{i=1}^{n_k} \mu_i^m,$$

$$\text{Sp}\, P_{\Gamma_k}(m,\ T) = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i^m,$$

$$\text{Sp}\, C_{\Gamma_k}^{(\nu)}(m) = -\frac{m}{\nu}\, \text{Sp}\, \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_k} \lambda^{m-1} [R_\lambda(T)\, P]^\nu\, d\lambda.$$

Доказательство первых двух равенств легко следует из результатов п. 3 § 3 гл. 4, так как эти соотношения составляют содержание теоремы о следе операторов, действующих в конечномерном пространстве. Для доказательства последнего соотношения необходимо повторить рассуждения, проводимые при доказательстве теоремы 1, и применить формулу интегрирования по частям.

Взяв след от обеих частей равенства

$$R_\lambda(T+P) = R_\lambda(T) + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k R_\lambda(T)\,]PR_\lambda(T)]^k + B_N$$

и применяя лемму 7 и теорему Коши о вычетах, получим

$$\sum_{i=1}^{n_k}\Big(\mu_i^m-\lambda_i^m+m\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Res}_{\lambda_i}\{\lambda^{m-1}[R_\lambda(T)\,P]\}+\ldots+$$

$$+\frac{m}{N}\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Res}_{\lambda_i}\{\lambda^{m-1}[R_\lambda(T)\;\;P]^N\Big)=\mathrm{Sp}\,D_{\Gamma_k}^{(N)}(m).$$

Используя леммы 4, 5 и замечание после леммы 2, заключаем, что $\mathrm{Sp}\,D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)$ при $k\to\infty$ есть величина порядка

$$O\left[\frac{1}{k^{(N+2)[\gamma(1-p)-1]-(m+1)\gamma-4\gamma p}}\right].$$

Отсюда следует, что при $N>\dfrac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1}-2$

$$\mathrm{Sp}\,D_{\Gamma_k}^{(N)}(m)\to 0 \text{ при } k\to\infty.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме о следах для полуограниченных дискретных самосопряженных операторов.

Теорема 3. *Пусть T — самосопряженный полуограниченный снизу дискретный оператор, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H, такой, что $N(\lambda)=0(\lambda^p)$, $0<p<1$. Пусть γ — некоторое число, удовлетворяющее условию $\gamma>1/(1-p)$. Пусть P — ограниченный оператор в H.*

Тогда оператор $T+P$ является дискретным оператором, причем для собственных чисел μ_i оператора $T+P$ и собственных чисел λ_i оператора T (взятых с учетом алгебраической кратности), занумерованных в порядке возрастания вещественных частей, существует подпоследовательность натуральных чисел n_k такая, что

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{n_k}\Big\{\mu_i^m-\lambda_i^m+m\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Res}_{\lambda_i}[\lambda^{m-1}(R_\lambda(T)\,P)]+\ldots+$$

$$+\frac{m}{N}\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Res}_{\lambda_i}[\lambda^{m-1}(R_\lambda(T)\,P)^N]\;\Big\}=0$$

$$\text{при } N>\frac{\gamma(m+1+4p)}{\gamma(1-p)-1}-2.$$

Замечание. Теорема 3 остается справедливой и в несколько более общей формулировке. Так, например, можно отказаться от условия полуограниченности оператора T. Условие ограниченности оператора P можно заменить на более слабое условие «подчинения» оператора P оператору T.

Заметим также, что многие классы операторов, задаваемые краевыми задачами для уравнений с частными производными, удовлетворяют условиям теоремы 3.