

## Глава VI

### ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

#### § 1. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

##### 1. Понятие обобщенной функции

В прикладных дисциплинах часто употребляется термин «сингулярная функция». Это понятие является обобщением классического понятия функции. Приведем типичный пример сингулярной функции, или, как мы ее будем в дальнейшем называть, обобщенной функции. Вычислим плотность, создаваемую точкой массы 1, находящейся в начале координат. Пусть единица массы распределена равномерно внутри шара с центром в начале координат в  $\mathbb{R}^3$  радиуса  $\varepsilon$ . Тогда средняя плотность  $f_\varepsilon(x)$  будет равна

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Пусть  $\delta(x)$  — искомая плотность, создаваемая материальной точкой массы 1. Тогда, очевидно, что для любого объема  $V$

$$\int_V \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \in V, \\ 0, & \text{если } 0 \notin V. \end{cases}$$

С другой стороны, если предположить, что

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

то, интегрируя это представление для  $\delta(x)$ , приходим к противоречию, поскольку имеем  $\int_V \delta(x) dx = 0$ . Следовательно, такой точечный предел от  $f_\varepsilon(x)$  не может быть принят за определение плотности  $\delta(x)$ . Посмотрим теперь на  $f_\varepsilon(x)$  как на функцию, задающую функционал по правилу<sup>\*)</sup>

$$\int f_\varepsilon \varphi dx,$$

$\varphi$  — любая непрерывная функция. Слабый предел последовательности  $f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ , очевидно, равен

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

<sup>\*)</sup> Если интегрирование распространяется на все пространство, мы в дальнейшем пределы интегрирования опускаем.

Действительно,

$$\left| \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \right| = \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left| \int_{|x|<\varepsilon} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \leq \\ \leq \eta \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{|x|<\varepsilon} dx = \eta,$$

где  $\eta = \max_{|x|<\varepsilon} |\varphi(x) - \varphi(0)|$ . В силу непрерывности функции  $\varphi(x)$  число  $\eta \rightarrow 0$ , если  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, слабым пределом  $f_\varepsilon(x)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$  является функционал  $\delta(x)$ , сопоставляющий каждой непрерывной функции  $\varphi(x)$  число  $\varphi(0)$ :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int f_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = (\delta, \varphi) = \varphi(0).$$

Запись функционала  $\delta(x)$  в виде  $(\delta, \varphi)$  удобна и будет употребляться в более общих случаях. Вычислим теперь полную массу. Имеем

$$(\delta, \varphi) = (\delta, 1) = 1, \quad \varphi(x) = 1.$$

Функционал  $\delta(x)$  называется  *$\delta$ -функцией Дирака*, или просто  *$\delta$ -функцией*.

Выше уже было замечено, что для задания обобщенных функций необходимо задать определенное множество основных функций  $\{\varphi\}$ , через которые обобщенные функции выражаются или на которые они действуют. Естественно при этом требовать, чтобы это множество основных функций было линейным пространством с некоторой топологией. Существует много пространств основных функций, их выбор в каждом конкретном случае зависит от цели исследования.

Пространство основных функций  $K$ .

Это пространство образуют все финитные функции  $\varphi$ , имеющие непрерывные производные всех порядков. Интервал<sup>\*)</sup>, вне которого функция  $\varphi$  равна нулю, может быть различным для различных  $\varphi \in K$ . Это пространство линейное с обычными линейными операциями. В этом пространстве также можно определить понятие сходимости.

Последовательность  $\{\varphi_n\}$  элементов из  $K$  называется *сходящейся* к функции  $\varphi \in K$ , если существует интервал, вне которого все  $\varphi_n$  равны нулю, и на этом интервале последовательность производных  $\{\varphi_n^{(k)}\}$  равномерно сходится к  $\varphi^{(k)}$  при каждом фиксированном  $k$ . Если, например,

<sup>\*)</sup> В случае, если функция  $\varphi(x)$  является функцией многих переменных, т. е.  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  — точка пространства  $R^n$ , то вместо интервала необходимо подразумевать ограниченную область в  $R^n$ .



$$\varphi(x, a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}}, & |x| < |a|, \\ 0, & |x| \geq |a|, \end{cases}$$

то  $\varphi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x, a)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  стремится к нулю в  $K$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Функции  $\Psi_n(x) = \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{x}{n}, a\right)$  не стремятся к нулю в  $K$ .

Сходимость в пространстве  $K$  порождается топологией, которую в этом пространстве задает система окрестностей нуля, каждая из которых задается конечным набором  $\psi_0(x), \dots, \psi_m(x)$  непрерывных положительных функций и состоит из тех функций из  $K$ , которые при всех  $x$  удовлетворяют неравенствам

$$|\varphi(x)| < \psi_0(x), \dots, |\varphi^{(m)}(x)| < \psi_m(x).$$

Нетрудно убедиться, что эта топология порождает введенную выше сходимость в  $K$ . Заметим, что в  $K$  существуют и другие топологии, порождающие эту сходимость.

Следующее утверждение дает многочисленные примеры основных функций.

**Утверждение 1.** Для заданной области  $G$  и любого  $\varepsilon > 0$  существует бесконечно дифференцируемая функция  $\eta(x)$  такая, что  $0 \leq \eta(x) \leq 1$ ,  $\eta(x) = 1$  при  $x \in G_\varepsilon$  и  $\eta(x) = 0$  при  $x \in \overline{G_{3\varepsilon}}$ . Область  $G_\varepsilon \supset G$  является ее  $\varepsilon$ -окрестностью.

Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} C_\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}}, & |x| \leq \varepsilon, \\ 0, & |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

Постоянная  $C_\varepsilon$  выбирается из условия  $\int f_\varepsilon(x) dx = 1$ . Если  $\chi(x)$  — характеристическая функция множества  $G_{2\varepsilon}$ , то функция

$$\eta(x) = \int \chi(y) f_\varepsilon(x-y) dy$$

удовлетворяет требуемым условиям. Действительно, функция

$\eta(x) = \int_{G_{2\varepsilon}} f_\varepsilon(x-y) dy$  — бесконечно дифференцируема. Далее,

$$0 \leq \eta(x) \leq \int f_\varepsilon(x-y) dy = \int f_\varepsilon(\xi) d\xi = 1;$$

$$\eta(x) = \int \chi(y) f_\varepsilon(x-y) dy = \begin{cases} \int f_\varepsilon(\xi) d\xi, & x \in G_\varepsilon, \\ 0, & x \in \overline{G_{3\varepsilon}}, \end{cases}$$

что и требовалось.

Из доказанного утверждения непосредственно вытекает, что если область  $G$  ограничена, то существует основная функция  $\eta(x) \in K$  такая, что  $\eta(x) = 1$  при  $x \in G_\varepsilon$ .

Пространство основных функций  $S_\infty$ .

Пространство  $S_\infty$  состоит из бесконечно дифференцируемых функций  $\varphi(x)$  на прямой, убывающих вместе со своими производными быстрее, чем любая степень  $|x|^{-1}$ , т. е.  $\varphi(x) \in S_\infty$ , если для любых фиксированных  $p, q=0, 1, \dots$  существует такая постоянная  $C_{p,q}(\varphi)$ , что

$$|x^p \varphi^{(q)}(x)| < C_{p,q}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Последовательность  $\{\varphi_n\}$  называется *сходящейся* в  $S_\infty$  к  $\varphi(x)$ , если для каждого  $q=0, 1, \dots$  последовательность  $\{\varphi_n^{(q)}(x)\}$  сходится равномерно на любом конечном интервале к  $\varphi^{(q)}(x)$  и если в неравенствах

$$|x^p \varphi_n^{(q)}(x)| < C_{p,q}$$

постоянные  $C_{p,q}$  можно выбрать не зависящими от  $n$ .

В пространстве  $S_\infty$  можно ввести структуру счетно-нормированного пространства, если положить

$$\|\varphi\|_n = \sum_{p+q=n} \sup_{\substack{x \in (-\infty, \infty) \\ 0 \leq p \leq n \\ 0 \leq q \leq n}} |(1 + |x|^4) \varphi^{(k)}(x)|.$$

Можно убедиться, что сходимость в этом счетно-нормированном пространстве равносильна введенной выше сходимости в  $S_\infty$ .

Дадим теперь точное определение обобщенной функции.

**Определение 1.** *Обобщенной функцией* называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций.

Значение обобщенной функции  $f(x)$  на основной функции  $\varphi$  записывается в виде  $(f, \varphi)$ . Обобщенную функцию записывают также в виде  $f(x)$ , где  $x$  — аргумент основных функций  $\{\varphi(x)\}$ .

Таким образом, если задана обобщенная функция  $f(x)$ , то каждой основной функции  $\varphi(x)$  сопоставлено число  $(f, \varphi)$ , причем:

1) обобщенная функция  $f$  есть линейный функционал, т. е. для любых чисел  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , любых основных функций  $\varphi_1(x)$  и  $\varphi_2(x)$

$$(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \alpha_1 (f, \varphi_1) + \alpha_2 (f, \varphi_2);$$

2) обобщенная функция  $f$  есть непрерывный функционал над пространством основных функций, т. е. если  $\varphi_n \rightarrow 0$  в пространстве основных функций, то  $(f, \varphi_n) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Ниже для определенности в качестве основного пространства будем рассматривать пространство  $K$ . Пространство обобщенных функций над  $K$  будем обозначать  $K'$ .

Обобщенные функции, задаваемые формулой

$$(f, \varphi) = \int f \varphi dx,$$

где  $f(x)$  — локально-интегрируемая функция, называются *регулярными*, а все остальные — *сингулярными*. Если  $f(x)$  — локаль-



но-интегрируемая функция, то  $f(x)$  является и обобщенной функцией, так как для функционала

$$(f, \varphi) = \int f \varphi dx$$

выполнены условия 1) и 2) определения обобщенной функции. В частности, можно совершать предельный переход, так как интеграл берется по ограниченной области.

Функционал  $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$  является примером сингулярной обобщенной функции. Такой функционал не может быть представлен в виде

$$\int f(x) \varphi(x) dx$$

ни при какой локально-интегрируемой функции  $f(x)$ . Действительно, если бы это было так, то, взяв в качестве  $\varphi(x) = e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}}$ , получили бы, что

$$\int_{|x| < |a|} f(x) e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}} dx = \varphi(0) = e^{-1}.$$

Но интеграл слева стремится к нулю при  $a \rightarrow 0$ , что и приводит к противоречию.

Пространство обобщенных функций  $K'$  — линейное пространство. Пусть  $\lambda, \mu \in P$  — полю коэффициентов, тогда операция сложения для  $f$  и  $g$ , принадлежащих  $K'$ , определяется следующим образом:

$$(\lambda f + \mu g, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + \mu(g, \varphi), \quad \varphi \in K.$$

Функционал  $\lambda f + \mu g$  — линейный. Действительно,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) &= \lambda(f, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) + \mu(g, \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2) = \\ &= \alpha_1 [\lambda(f, \varphi_1) + \mu(g, \varphi_1)] + \alpha_2 [\lambda(f, \varphi_2) + \mu(g, \varphi_2)] = \\ &= \alpha_1 (\lambda f + \mu g, \varphi_1) + \alpha_2 (\lambda f + \mu g, \varphi_2). \end{aligned}$$

Аналогично проверяется непрерывность. Если  $\varphi_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  в  $K$ , то

$$(\lambda f + \mu g, \varphi_n) = \lambda(f, \varphi_n) + \mu(g, \varphi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Сходимость в пространстве  $K'$  определим как слабую сходимость, т. е. сходимость на каждой функции. Последовательность обобщенных функций  $f_1, f_2, \dots$  из  $K'$  сходится к обобщенной функции  $f \in K'$ , если для любой функции  $\varphi \in K$

$$(f_n, \varphi) \rightarrow (f, \varphi), \quad n \rightarrow \infty.$$

Введение такой сходимости последовательности  $\{f_n\}$  к обобщенной функции  $f(f_n \rightarrow f)$  естественно, поскольку пространство  $K'$  есть со-

пряженное пространство для  $K$ : пространство линейных непрерывных функционалов, в котором и определяется слабая сходимость.

Заметим, что с помощью аксиомы выбора можно показать, что над  $K$  существуют линейные, не обязательно непрерывные функционалы.

Можно показать, что пространство  $K'$  — полное пространство. А именно, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2. Пусть последовательность  $f_1, f_2, \dots$  обобщенных функций сходится в  $K'$ . Тогда предельная функция  $f$ :

$$(f, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi), \quad \varphi \in K$$

принадлежит  $K'$ .

Если локально-интегрируемые функции  $f_n(x)$ ,  $n=1, 2, \dots$  в каждой ограниченной области равномерно сходятся к локально-интегрируемой функции  $f(x)$ , то отвечающие им обобщенные функции  $f_n$  сходятся к регулярному функционалу  $f$ . В самом деле,

$$(f_n, \varphi) = \int f_n(x) \varphi(x) dx.$$

В силу того что область интегрирования ограничена, сходимость  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  равномерна, можно перейти к пределу под знаком интеграла Лебега. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n, \varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) \varphi(x) dx = \int f(x) \varphi(x) dx = (f, \varphi).$$

Применяя другие теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега, можно сформулировать и другие условия, налагаемые на локально-интегрируемые функции  $f_n(x)$ , обеспечивающие сходимость соответствующих обобщенных функций  $f_n$  к предельной функции.

## 2. Основные свойства обобщенных функций

а) Обобщенные функции допускают линейную замену аргумента. А именно, если  $f \in K'$ , а  $A$  — неособое линейное преобразование ( $\det \|A\| \neq 0$ ), то для  $f(Ay+b)$ ,  $b$  — вектор, полагаем по определению, что

$$(f(Ay+b), \varphi) = \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{\det \|A\|} \right), \quad \varphi \in K.$$

Заметим, что если  $f$  — локально-интегрируема, то, очевидно,

$$\begin{aligned} (f(Ay+b), \varphi) &= \int f(Ay+b) \varphi(y) dy = \frac{1}{\det \|A\|} \int f(x) \varphi[A^{-1}(x-b)] dx = \\ &= \left( f, \frac{\varphi[A^{-1}(x-b)]}{\det \|A\|} \right), \end{aligned}$$

т. е. справедливо равенство, принятое нами за определение.



б) Просто определяется произведение обобщенной функции  $f(x)$  на бесконечно дифференцируемую функцию  $a(x)$ , а именно:

$$(af, \varphi) = (f, a\varphi), \quad \varphi \in K, \quad a\varphi \in K.$$

Если  $f$  — локально-интегрируемая функция, то

$$(af, \varphi) = \int a(x) f(x) \varphi(x) dx = (f, a\varphi),$$

т. е. справедливо то же равенство, что подтверждает корректность данного определения. Легко убедиться, что операция умножения на бесконечно дифференцируемую функцию  $a(x)$  линейна и непрерывна из  $K'$  в  $K'$ :

$$a(\lambda f + \mu g) = \lambda(af) + \mu(ag), \quad f, g \in K',$$

$$af_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ в } K', \text{ если } f_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ в } K'.$$

Определить произведение любых двух обобщенных функций трудно. Уже даже произведение двух локально-интегрируемых функций не обязано быть локально-интегрируемой функцией. Аналогичная картина возникает и для обобщенных функций. Произведение любых двух обобщенных функций не обязано быть обобщенной функцией. Тем не менее, если функции подобраны специальным образом, так что «нерегулярность» одной из них компенсируется «регулярностью» другой, их произведение есть обобщенная функция.

в) Для обобщенных функций, как и для классических, важную роль играет понятие производной. Для простоты рассмотрим случай, когда  $x \in \mathbb{R}^1$ .

**Определение 2.** Производной обобщенной функции  $f \in K'$  называется функция  $g \in K'$ , определенная по правилу

$$(g, \varphi) = (f, -\varphi'), \quad \varphi \in K.$$

Заметим, что  $\varphi'$  также принадлежит  $K$ , и данная запись имеет смысл. В дальнейшем функционал  $g$  обозначается через

$$f' : g = f' = df/dx.$$

Если  $f$  — функция, обладающая классической непрерывной производной, то

$$(f', \varphi) = \int f' \varphi dx = - \int f \varphi' dx = (f, -\varphi'),$$

поэтому и для обобщенных функций сохраняют запись для производной в виде

$$(f', \varphi) = - \int f \varphi' dx.$$

Легко показывается, что  $f'$  — линейный непрерывный функционал из  $K'$ . Действительно, он определен на всем  $K$  и линеен, так

как  $-\varphi'$  — основная функция. Далее, если  $\varphi_n(x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  в  $K$ , то  $-\varphi_n(x) \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  в  $K$ , поэтому из непрерывности  $f$  следует, что

$$(f', \varphi_n) = (f, -\varphi_n') \rightarrow 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что каждая обобщенная функция имеет производную.

Примеры.

1. Если  $f_n \rightarrow f$ ,  $f_n \in K'$ ,  $f \in K'$ , то  $f'_n \rightarrow f'$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Действительно,

$$(f'_n, \varphi) = (f_n, -\varphi') = -(f_n, \varphi') \rightarrow -(f, \varphi') = (f', \varphi), \quad n \rightarrow \infty.$$

Ясно, что при этом выполняется также соотношение  $f_n^{(k)} \rightarrow f^{(k)}$ ,  $n \rightarrow \infty$  для любого  $k=1, 2, \dots$ .

2. Пусть  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . Тогда  $f_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  равномерно относительно  $x$ ,  $f'_n(x) = \cos nx$  не стремится ни к какому пределу в классическом смысле. Однако функционалы  $f_n \in K'$  обладают тем свойством, что все их производные  $f_n^{(k)}$ ,  $k=0, 1, \dots$  стремятся к нулю в  $K'$ . Действительно, при  $k=0$  получаем исходную последовательность, она, очевидно, стремится к нулю и в  $K'$ . Пусть  $k=1$ . Тогда

$$(f'_n, \varphi) = -(f_n, \varphi') = -\frac{1}{n} \int \sin nx \varphi'(x) dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

и т. д.

3. Пусть  $a(x)$  — бесконечно дифференцируемая функция,  $f \in K'$ . Тогда

$$(af)' = a'f + af'.$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} ((af)', \varphi) &= (af, -\varphi') = -(f, a\varphi') = -(f, (a\varphi)' - a'\varphi) = \\ &= -(f, (a\varphi)') + (f, a'\varphi) = (f', a\varphi) + (a'f, \varphi) = \\ &= (af', \varphi) + (a'f, \varphi) = (af' + a'f, \varphi). \end{aligned}$$

4. Пусть

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Вычислим производную функционала  $\theta(x)$ . Имеем

$$\begin{aligned} (\theta'(x), \varphi(x)) &= (\theta(x), -\varphi'(x)) = \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(0), \quad \text{т. е. } \theta'(x) = \delta(x). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\theta'(x-h) = \delta(x-h).$$



5. Пусть

$$x_+^\lambda = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^\lambda, & x > 0, \end{cases} \quad -1 < \lambda < 0.$$

Найдем производную функционала  $x_+^\lambda$ . Имеем

$$\begin{aligned} ((x_+^\lambda)', \varphi) &= -(x_+^\lambda, \varphi') = -\int_0^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty x^\lambda \varphi'(x) dx = \\ &= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ x^\lambda [\varphi(x) + c] \Big|_\varepsilon^\infty - \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) + c] dx \right\}. \end{aligned}$$

Пусть  $c = -\varphi(0)$ . Тогда

$$((x_+^\lambda)', \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^\infty \lambda x^{\lambda-1} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx.$$

Определенная этим равенством функция обозначается  $\lambda x_+^{\lambda-1}$ ,  $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ . Функционал  $\lambda x_+^{\lambda-1}$  не является регулярным, но при  $x \neq 0$  он совпадает с регулярным функционалом.

6. Пусть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x) = s_n(x)$$

( $b_k(x)$  — локально-интегрируемые функции) сходится равномерно в каждой ограниченной области. Тогда этот ряд, формально продифференцированный любое число раз, будет сходиться в  $K'$ .

Действительно, последовательность  $s_n(x)$  частичных сумм этого ряда равномерно сходится в каждой ограниченной области. Из доказательства утверждения 2 следует, что последовательность  $\{s_n\}$  сходится к  $s$  в  $K'$ , что и требовалось.

В качестве следствия получаем, что если коэффициенты тригонометрического ряда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

растут не быстрее некоторой степени  $m$ , т. е.

$$|c_k| \leq c |k|^m, \quad |k| \rightarrow \infty,$$

то такой ряд будет сходящимся в  $K'$ . Действительно, ряд

$$\frac{c_0 x^{m+2}}{(m+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_k}{(ik)^{m+2}} e^{ikx}$$

сходится равномерно в любой ограниченной области числовой

оси. Тогда продифференцированный  $m+2$  раз ряд будет сходиться в  $K'$ . Производная порядка  $m+2$  последнего ряда совпадает с рядом

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}.$$

7. Получим формулы регуляризации расходящихся интегралов от локально-интегрируемых функций. Пусть  $f(x)$  — локально-интегрируемая функция всюду, кроме точки 0, а в нуле имеет неинтегрируемую особенность такую, что функция  $f(x)|x^m|$  уже локально-интегрируема при некотором целом  $m$ . Тогда интеграл

$$(f, \varphi) = \int f \varphi dx,$$

вообще говоря, расходящийся, допускает регуляризацию, например, вида

$$(f, \varphi) = \int f \left\{ \varphi(x) - \left[ \varphi(0) + \frac{D\varphi(0)}{1!} x + \dots \right. \right. \\ \left. \left. \dots + \frac{D^m \varphi(0)}{m!} x^m \right] \theta(1 - |x|) \right\} dx,$$

$$\theta(1 - |x|) = 1, |x| < 1 \text{ и } \theta(1 - |x|) = 0, |x| \geq 1,$$

где  $D$  — оператор дифференцирования.

8. Дельта-образные последовательности. Легко убедиться, что предел при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в  $K'$  следующих последовательностей:

$$\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \frac{1}{\pi x} \sin \frac{x}{\varepsilon}, \quad \frac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \frac{x}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}$$

есть  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Можно дать и общий критерий того, чтобы данная последовательность  $f_\varepsilon(x)$  сходилась к  $\delta(x)$ . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы для любого  $N > 0$  величины

$$\left| \int_a^b f_\varepsilon(x) dx \right|$$

были ограничены постоянной, не зависящей от  $a, b, \varepsilon$ ,  $|a| \leq N$ ,  $|b| \leq N$ , а также, чтобы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^b f_\varepsilon(x) dx = \begin{cases} 0, & a < b < 0 \text{ и } 0 < a < b, \\ 1, & a < 0 < b. \end{cases}$$

В этом случае  $F_\varepsilon(x) = \int_{-1}^x f_\varepsilon(t) dt$  стремится к функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



Поэтому

$$f_{\varepsilon}(x) = F'_{\varepsilon}(x) \rightarrow \theta'(x) = \delta(x), \quad \varepsilon \rightarrow +0.$$

### 3. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями

Для обобщенных функций можно формально строить дифференциальные уравнения вида

$$a_0(x)y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x)y(x) = f(x),$$

$a_i(x)$  — бесконечно дифференцируемые функции,  $i=0, 1, \dots, n$ ,  $y, f \in K'$ . Возникает вопрос о решении таких уравнений в обобщенных функциях. Для простейшего уравнения

$$y' = 0$$

в классическом случае нет других решений, кроме постоянной функции. Оказывается, что и в классе  $K'$  это уравнение имеет своим общим решением

$$y = C = \text{const.}$$

Действительно, обобщенную функцию  $f$  мы считаем равной нулю, если для любой основной функции  $\varphi$

$$(f, \varphi) = 0.$$

Поэтому наше дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$(y', \varphi) = -(y, \varphi') = 0.$$

Таким образом, обобщенная функция  $y$  задана последним равенством на подмножестве основных функций, совпадающем с первыми производными основных функций. Естественно, что функционал надо продолжить с сохранением его линейности и непрерывности на все пространство  $K$ . При этом надлежит выяснить степень произвола такого продолжения.

Основная функция  $\varphi_0(x)$  может быть представлена как производная от основной функции тогда и только тогда, когда  $\int \varphi_0 dx = 0$ . Действительно, положим,  $\varphi_0(x) = \varphi_1'(x)$ . Тогда в силу финитности  $\varphi_1(x) \in K$

$$\int \varphi_0(x) dx = \int \varphi_1'(x) dx = 0.$$

Обратно, пусть  $\int \varphi_0(x) dx = 0$ . Тогда  $\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(x) dx$  — основная функция, причем  $\varphi_1'(x) = \varphi_0(x)$ , что и требовалось.

Займемся теперь распространением функционала  $y$  на все  $K$ . Для любой основной функции  $\varphi(x)$  справедливо равенство

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int \varphi(x) dx + \varphi_0(x),$$

где  $\varphi_1(x)$  — основная функция такая, что

$$\int \varphi_1(x) dx = 1:$$

В самом деле, пусть  $\varphi(x)$  — произвольная основная функция. Тогда

$$\varphi_0(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx$$

есть также основная функция, как разность двух основных. Кроме того,  $\int \varphi_0(x) dx = 0$ .

Учитывая, что

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x) \int \varphi(x) dx,$$

а на  $\varphi_0(x)$  функционал  $y$  определен, заключаем, что для продолжения  $y$  осталось его определить на функции  $\varphi_1(x)$ . Положим  $(y, \varphi_1) = C = \text{const}$ . Тогда

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_0) + (y, \varphi_1) \int \varphi(x) dx = \int C \varphi(x) dx.$$

Таким образом,

$$(y - C, \varphi) = 0, \quad \varphi \in K,$$

т. е.

$$y = C = \text{const}.$$

Функционал  $y$  определен теперь на любой основной функции однозначно:

$$(y, \varphi) = (y, \varphi_1) \int \varphi(x) dx.$$

Он, очевидно, линеен и непрерывен. Поэтому уравнение  $y' = 0$  не имеет других решений, кроме классических, т. е. кроме констант.

Обобщенная функция  $g$ , являющаяся решением уравнения

$$g' = f$$

в классе  $K'$ , называется *первообразной* от обобщенной функции  $f$ . Любая обобщенная функция имеет единственную, с точностью до аддитивной постоянной, первообразную. Перепишем уравнение для первообразной в эквивалентном виде

$$(g, -\varphi') = (f, \varphi).$$

Как и прежде, видим, что функционал  $g$  задан на подмножестве



основных функций, совпадающем с первыми производными основных функций. Продолжим функционал  $g$  на все пространство  $K$ . Воспользуемся, как и выше, равенством для любой основной функции  $\varphi$ :

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \int \varphi(x) dx + \varphi_0(x),$$

где  $\varphi_1(x)$  — основная функция, для которой  $\int \varphi_1(x) dx = 1$ , а  $\int \varphi_0(x) dx = 0$ . Тогда

$$(g, \varphi) = (g, \varphi_1) \int \varphi(x) dx + (g, \varphi_0).$$

Положим  $(g, \varphi_1) = 0$ . Тем самым функционал  $g$  определен на любой основной функции  $\varphi$ , причем

$$(g, \varphi) = (g, \varphi_0) = -\left(f, \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt\right).$$

Действительно, на функциях  $\{\widehat{\varphi}\}$ , которые можно представить как производные от других функций, функционал  $g$  определен и

$$(g, \widehat{\varphi}') = -(f, \widehat{\varphi}).$$

Поэтому, если  $\varphi_0 = \widehat{\varphi}'$ , то  $\widehat{\varphi} = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt$  и

$$(g, \varphi) = -(f, \widehat{\varphi}) = -\left(f, \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt\right).$$

Далее, для этого функционала  $g$

$$(g', \varphi) = (g, -\varphi') = -(g, \varphi') = \left(f, \int_{-\infty}^x \varphi'(t) dt\right) = (f, \varphi),$$

поскольку можно считать, что  $\varphi_0 = \varphi'$ . Таким образом, функционал  $g$  удовлетворяет исходному уравнению. Он, очевидно, линеен и непрерывен. Эта первообразная, т. е. частное решение уравнения  $g' = f$ , определяется с точностью до постоянного слагаемого — общего решения однородного уравнения  $g' = 0$ . Тем самым показано, что у любой обобщенной функции существует первообразная.

Полученные результаты легко переносятся на системы  $n$  линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с  $n$  неизвестными функциями.

#### 4. Прямое произведение и свертка обобщенных функций

Определим еще две важные операции для обобщенных функций — прямое произведение и свертку.

Если  $f(x)$  и  $g(y)$  — локально-интегрируемые функции (скажем, в  $\mathbf{R}^n$  и  $\mathbf{R}^m$  соответственно), то функция  $f(x)g(y)$  также локально-интегрируема (в  $\mathbf{R}^{n+m}$ ). Она определяет регулярную обобщенную функцию, действующую на основные функции  $\varphi(x, y)$  по формулам

$$\begin{aligned} (f(x)g(y), \varphi(x, y)) &= \int f(x)g(y)\varphi(x, y)dx dy = \\ &= \int f(x) \int g(y)\varphi(x, y)dy dx = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \\ (g(y)f(x), \varphi(x, y)) &= \int g(y)f(x)\varphi(x, y)dxdy = \\ &= \int g(y) \int f(x)\varphi(x, y)dx dy = (g(y), (f(x), \varphi(x, y))). \end{aligned}$$

Указанные равенства составляют утверждение теоремы Фубини.

Первое из этих равенств и принимается за определение *прямого произведения*  $f(x) \cdot g(y)$  обобщенных функций  $f(x) \in K'(\mathbf{R}^n)$  и  $g(y) \in K'(\mathbf{R}^m)$ . По определению полагают

$$(f(x) \cdot g(y), \varphi(x, y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x, y))), \quad \varphi \in K(\mathbf{R}^{n+m}).$$

Можно убедиться, что правая часть последнего равенства определяет линейный и непрерывный функционал на  $K(\mathbf{R}^{n+m})$ .

Операция прямого произведения коммутативна, т. е.

$$f(x) \cdot g(y) = g(y) \cdot f(x),$$

где  $g(y) \cdot f(x)$  определяется аналогичным образом. Операция прямого произведения  $f(x) \cdot g(y)$  линейна и непрерывна относительно  $f$  из  $K'(\mathbf{R}^n)$  в  $K'(\mathbf{R}^{n+m})$  и относительно  $g$  из  $K'(\mathbf{R}^m)$  в  $K'(\mathbf{R}^{n+m})$ . Эта операция ассоциативна, т. е.

$$f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)] = [f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z).$$

Прямое произведение можно дифференцировать по правилу:

$$D_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = D^\alpha f(x) \cdot g(y),$$

а также умножать на функцию  $a(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$

$$a(x)[f(x) \cdot g(y)] = (a(x)f(x)) \cdot g(y).$$

Для прямого произведения определяется и сдвиг:

$$(f \cdot g)(x+h, y) = f(x+h) \cdot g(y).$$

Определим теперь свертку обобщенных функций. Пусть  $f(x)$  и  $g(x)$  — локально-интегрируемые функции в  $\mathbf{R}^n$ , причем функция  $h(x) = \int |g(y)f(x-y)|dy$  также локально-интегрируема. Тогда сверткой  $f * g$  этих функций называется функция

$$(f * g)(x) = \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x).$$

Свертки  $f * g$  и  $|f| * |g| = h$  существуют одновременно и удовлетворяют неравенству  $|(f * g)(x)| \leq h(x)$  для почти всех  $x$ , так что



свертка  $f * g$  оказывается локально-интегрируемой функцией в  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому она определяет регулярную обобщенную функцию, действующую на основные функции  $\varphi \in K(\mathbb{R}^n)$  по правилу

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \int (f * g)(t) \varphi(t) dt = \int \left[ \int g(y) f(t-y) dy \right] \varphi(t) dt = \\ &= \int g(y) \left[ \int f(t-y) \varphi(t) dt \right] dy = \int g(y) \left[ \int f(x) \varphi(x+y) dx \right] dy.\end{aligned}$$

Выше мы воспользовались теоремой Фубини. Таким образом, в этом случае

$$(f * g, \varphi) = \iint f(x) g(y) \varphi(x+y) dx dy, \quad \varphi \in K(\mathbb{R}^n).$$

Отметим, что функция  $h(x)$  будет локально-интегрируемой, и поэтому свертка существует и определяется формулой выше, если, например, функции  $f$  и  $g$  интегрируемы на  $\mathbb{R}^n$  или если одна из функций  $f$  или  $g$  финитна.

Перейдем теперь к определению свертки для обобщенных функций.

Определим *сходимость к 1* в  $\mathbb{R}^n$  последовательности  $\varphi_k(x) \in K(\mathbb{R}^n)$  следующим образом. Для любого замкнутого ограниченного множества  $F$  существует такой номер  $N$ , что  $\varphi_k(x) \equiv 1$  при  $x \in F$ ,  $k \geq N$ ; функции  $\varphi_k(x)$  равномерно ограничены в  $\mathbb{R}^n$  вместе со всеми своими производными константой, не зависящей от  $k$ .

Равенство, определяющее свертку, теперь можно записать в виде

$$(f * g, \varphi) = \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) g(y), \varphi_k(x, y) \varphi(x+y)),$$

где  $\varphi_k(x, y)$  — любая последовательность, сходящаяся к 1 в  $\mathbb{R}^{2n}$ . Пусть теперь  $f$  и  $g$  — две обобщенные функции такие, что существует предел для любой последовательности  $\varphi_k(x) \rightarrow 1$  в  $\mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{aligned}(f * g, \varphi) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(y), \varphi_k(x, y) \varphi(x+y)) = \\ &= (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)), \quad \varphi \in K(\mathbb{R}^n),\end{aligned}$$

не зависящий от выбора последовательности. Тогда функционал  $f * g$ , определенный этим соотношением, называется *сверткой* обобщенных функций  $f$  и  $g$ . Заметим, что  $\varphi(x+y)$  не принадлежит, вообще говоря,  $K(\mathbb{R}^{2n})$ . Так как она не финитна в  $\mathbb{R}^{2n}$ , поэтому свертка обобщенных функций существует не всегда.

Можно показать, что  $f * g \in K'(\mathbb{R}^n)$  и что  $f * \delta = \delta * f = f$  для любой  $f \in K'$ . Свертка  $f * g$  — линейная операция из  $K'$  в  $K'$  относительно  $f$  и  $g$  в отдельности; операция свертки коммутативна. Следующие соотношения:

$$\begin{aligned}D^n f * g &= D^n (f * g) = f * D^n g, \quad n = 1, 2, \dots, \\ f(x+h) * g(x) &= (f * g)(x+h), \quad h \in \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

## § 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

### 1. Преобразование Фурье функций из пространства $L^1$

Пусть сначала функция  $f(x)$  интегрируема на числовой оси. Тогда можно сопоставить этой функции функцию  $F(f) = g(\sigma) = \int f(\xi) e^{-i\sigma\xi} d\xi$ , которая является ограниченной и непрерывной функцией  $\sigma$ ,  $\lim_{|\sigma| \rightarrow \infty} g(\sigma) = 0$ . Действительно, ограниченность  $g(\sigma)$  вытекает из оценки

$$|g(\sigma)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi.$$

Непрерывность  $g(\sigma)$  и ее стремление к нулю при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  вытекает из следующих рассуждений: пусть  $f(x)$  — характеристическая функция интервала  $(\alpha, \beta)$ , тогда

$$F(f) = g(\sigma) = \int_{\alpha}^{\beta} e^{-i\sigma x} dx = \frac{e^{i\sigma\alpha} - e^{-i\sigma\beta}}{i\sigma}$$

и в этом случае все доказано; для линейных комбинаций характеристических функций утверждение тоже очевидно. Наконец, любая функция  $f$  из  $L^1$  есть предел (по норме  $L^1$ ) линейных комбинаций характеристических функций. Неравенство выше показывает, что соответствующая функция  $g(\sigma)$  есть предел уже в смысле равномерной сходимости непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности. Тогда и функция  $g(\sigma)$  непрерывна и стремится к нулю на бесконечности.

Функция  $F(f) = g(\sigma)$  называется *преобразованием Фурье интегрируемой функции  $f(x)$* .

Докажем утверждение о существовании обратного соответствия  $F^{-1}(g) = f(x)$  — так называемой «формулы обращения», задаваемой по правилу

$$F^{-1}(g) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma.$$

Предположим, что функция  $f(x)$  удовлетворяет условию Дини, т. е. существует  $\delta > 0$  такое, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \infty.$$

Тогда

$$f_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N g(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-N}^N \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\sigma(x-\xi)} d\xi \right\} d\sigma =$$



$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-N}^N e^{i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right\} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\sin N(x-\xi)}{x-\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t} dt.$$

Выше мы поменяли порядки интегрирования, пользуясь тем, что внутренний интеграл сходится равномерно по параметру  $\sigma$ . Далее,

$$f_N(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin Nt}{t} dt,$$

поскольку  $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = 1$ . В соотношении для  $f_N(x) - f(x)$  путь интегрирования разобьем на два:  $|t| \leq M$  и  $|t| > M$ . Тогда слагаемое, отвечающее второму пути, можно записать в виде

$$\int_{|t|>M} f(x+t) \frac{\sin Nt}{t} dt - f(x) \int_{|t|>M} \frac{\sin Nt}{t} dt.$$

Оба интеграла сходятся, и при фиксированном  $x$  эта величина, при  $M$  достаточно большом, становится сколь угодно малой, независимо от  $N > 1$ .

Слагаемое, отвечающее первому пути интегрирования, выглядит так:

$$\int_{-M}^M \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \sin Nt dt.$$

По условию Дини функция  $\frac{f(x+t) - f(x)}{t}$  суммируема; разбивая  $\sin Nt$  на две экспоненты, согласно вышесказанному, заключаем, что и эта величина стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$  (см. поведение преобразования Фурье при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ ). Таким образом, если функция  $f(x)$  интегрируема и удовлетворяет условию Дини, то, во-первых, определен оператор  $F(f) = g(\sigma)$  и, во-вторых, существует обратный оператор  $F^{-1}(g) = f$ , что и требовалось показать.

Следующие свойства преобразования Фурье легко устанавливаются исходя из определения оператора  $F$ .

а) Пусть  $P\left(\frac{d}{dx}\right)$  — многочлен с постоянными коэффициентами от оператора дифференцирования  $\frac{d}{dx}$ ,  $P\left(\frac{d}{dx}\right) = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k \frac{d^k}{dx^k}$ ,  $a_k \in P$  — поле коэффициентов. Тогда с помощью интегрирования по частям заключаем, что если у функции  $\varphi(x)$  все

производные до порядка  $n$  интегрируемы, то

$$F\left(P\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi\right) = P(i\sigma)F(\varphi).$$

б) В силу теоремы Фубини заключаем, что если  $f_1$  и  $f_2$  — две интегрируемые функции,  $f_1 * f_2$  — их свертка, то

$$F(f_1 * f_2) = g_1(\sigma)g_2(\sigma), \quad g_1(\sigma) = F(f_1), \quad g_2(\sigma) = F(f_2).$$

в) Пусть функции  $f(x)$ ,  $xf(x)$ ,  $\dots$ ,  $x^n f(x)$  являются интегрируемыми на всей оси. Тогда формулу  $F(f) = g(\sigma)$  можно дифференцировать  $n$  раз по  $\sigma$ , в силу равномерной и абсолютной сходимости интегралов справедлива формула

$$i^k F^{(k)}(f) = g^{(k)}(\sigma) = F(x^k f), \quad k=0, 1, \dots, n.$$

Функции  $g^{(k)}(\sigma)$  непрерывны и стремятся к нулю при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ . Для произвольного многочлена  $P(x)$  степени не больше  $n$  и с постоянными коэффициентами имеем, что

$$P\left(i \frac{d}{d\sigma}\right) F(\varphi) = F(P(x)\varphi).$$

Таким образом, чем более сильные условия на убывание на бесконечности накладываются на функцию  $f(x)$ , тем большей гладкостью обладает функция  $g(\sigma)$ .

Если рассмотреть класс  $S_\infty$  (см. п. 1 § 1, пример 2), то при преобразовании Фурье он отображается на весь класс  $S_\infty$  (от аргумента  $\sigma$ ). Действительно, с одной стороны, мы легко заключаем, что функции  $x^k f^{(q)}(x)$  ограничены и интегрируемы на всей оси при любых  $k, q=0, 1, \dots$

$$\left(|x^{k+2} f^{(q)}(x)| < C_{k+2, q}, \quad |x^k f^{(q)}(x)| < \frac{C_{k+2, q}}{x^2}\right).$$

Тогда функция  $g(\sigma)$  бесконечно дифференцируема, причем

$$i^q g^{(q)}(\sigma) = F(x^q f(x)).$$

Далее, функция  $x^q f(x)$  бесконечно дифференцируема вместе с  $f(x)$  и все ее производные интегрируемы, так как по формуле Лейбница они выражаются через интегрируемые функции  $x^l f^{(q-l)}(x)$ . Поэтому функции

$$(i\sigma)^k g^{(q)}(\sigma) = (-i)^q F[(x^q \cdot f(x))^{(k)}],$$

как преобразования Фурье интегрируемых функций, ограничены при всех  $k$  и  $q$ , т. е.  $g(\sigma) \in S_\infty$ .

Таким образом, если  $f(x) \in S_\infty$ , то  $g(\sigma) \in S_\infty$ , т. е.  $F(S_\infty) \subset S_\infty$  (от аргумента  $\sigma$ ).



С другой стороны, каждой функции  $g(\sigma) \in S_\infty$  отвечает функция  $f(x) = F^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) e^{i\sigma x} d\sigma$ . Функция  $2\pi f(-x)$  есть преобразование Фурье функции  $g(\sigma)$  и поэтому принадлежит  $S_\infty$ . Но тогда, очевидно, и функция  $f(x) \in S_\infty$ , причем функция  $g(\sigma)$  есть преобразование Фурье функции  $f(x)$ . Таким образом,

$$F(S_\infty) \subset S_\infty \text{ (от аргумента } x\text{)}.$$

Нами доказано, что  $F(S_\infty) = S_\infty$ ; оператор  $F$  осуществляет взаимно-однозначное соответствие между этими классами. Этим фактом мы воспользуемся при определении преобразования Фурье обобщенных функций.

Случай интегрируемой функции  $f(x)$  нами полностью разобран.

## 2. Преобразование Фурье функций из пространства $L^2$

Рассмотрим теперь случай функции  $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ . Заметим, что функция  $f \in L^2(-\infty, \infty)$  не обязана принадлежать  $L^1(-\infty, \infty)$  (например,  $(1+x^2)^{-1/2}$ ), и поэтому требуется расширить понятие преобразования Фурье на этот класс функций.

Пусть  $f \in L^2(-\infty, \infty)$  и

$$g_N(\sigma) = \int_{-N}^N f(x) e^{i\sigma x} dx,$$

тогда можно показать, что  $g_N(\sigma) \in L^2(-\infty, \infty)$  при любом  $N$  и оказывается, что существует такой элемент  $g \in L^2(-\infty, \infty)$ , для которого

$$\|g - g_N\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Элемент  $g \in L^2(-\infty, \infty)$  и называется *преобразованием Фурье функции  $f \in L^2(-\infty, \infty)$* :

$$g(\sigma) = F(f).$$

Основное утверждение для преобразования Фурье функций из класса  $L^2(-\infty, \infty)$  состоит в том, что

$$\|g(\sigma)\|_{L^2}^2 = 2\pi \|f\|_{L^2}^2,$$

т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(\sigma)|^2 d\sigma = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Доказывается эта теорема по следующему плану. Если  $f$  принадлежит классу  $S_\infty$ , то утверждение очевидно. В силу плотности функций из  $S_\infty$  в  $L^2(-\infty, \infty)$  равенство распространяется по непрерывности на все  $L^2(-\infty, \infty)$ . Действительно, если  $f$  финитна

и принадлежит  $L^2$ , то  $f \in L^1(-a, a)$ , где  $(-a, a)$  — интервал финитности  $f(x)$ . Поэтому существует

$$g(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx.$$

Пусть  $\{f_n\}$  — последовательность функций из  $S_\infty$ , обращающихся в нуль вне  $(-a, a)$  и  $\|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Последовательность  $g_n = F(f_n)$  сходится равномерно к  $g$  и фундаментальна в  $L^2(-\infty, \infty)$ , так как в силу уже сказанного

$$\|g_n - g_m\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f_n - f_m\|_{L^2}.$$

В силу полноты  $L^2$ ,  $\{g_n\}$  сходится в  $L^2$ , причем к тому же пределу, к которому  $g_n$  сходится равномерно. Поэтому в равенстве

$$\|g_n\|^2 = 2\pi \|f_n\|^2$$

можно перейти к пределу, и в случае финитной  $f(x) \in L^2$  все доказано.

Если  $f$  — произвольная функция из  $L^2(-\infty, \infty)$ , то функция

$$f_N(x) = \begin{cases} f(x), & |x| \leq N, \\ 0, & |x| > N, \end{cases}$$

принадлежит  $L^1(-\infty, \infty)$ ,  $g_N(\sigma) = F(f_N)$  существует и по доказанному

$$\|g_N - g_M\|_{L^2} = 2\pi \|f_N - f_M\|_{L^2}.$$

Следовательно, и функции  $g_N$  сходятся в  $L^2$  к некоторому пределу  $g$ .

Переходя в равенстве

$$\|g_N\|^2 = 2\pi \|f_N\|^2$$

к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , снова получаем требуемое утверждение.

Заметим, что если  $f \in L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$ , то

$$g(\sigma) = F(f)$$

существует в обычном смысле. Функции  $f_N$  сходятся к  $f$  в  $L^1$ , а  $g_N(\sigma) \rightarrow g(\sigma)$  равномерно. Кроме того,  $g_N \rightarrow g$  и в  $L^2(-\infty, \infty)$ , где  $g$  — некоторый элемент  $L^2$ . Отсюда следует совпадение  $g(\sigma)$  и этого предела  $g$  из  $L^2$ .

### 3. Преобразование Фурье обобщенных функций

Перейдем теперь к определению преобразования Фурье обобщенных функций.

Выберем в качестве пространства основных функций пространство  $S_\infty$ . Пусть  $S'_\infty$  — соответствующее пространство обобщен-



ных функций. Тогда преобразованием Фурье функции  $f \in S'_\infty$  называется линейный непрерывный функционал  $\psi \in S'_\infty$ , определяемый по формуле

$$(\psi, g) = 2\pi(f, \varphi), \quad g = F(\varphi).$$

Таким образом,

$$(F(f), g) = 2\pi(f, \varphi) = 2\pi(f, F^{-1}(g)),$$

т. е.  $F(f)$ ,  $f \in S_\infty$  есть функционал, который на элементе  $g \in S_\infty$  принимает значение, равное значению исходного функционала, умноженному на  $2\pi$ , на элементе  $\varphi = F^{-1}g \in S_\infty$ . Элементы  $g = F(\varphi)$  пробегает все пространство  $S_\infty$ , когда  $\varphi$  пробегает все пространство  $S_\infty$ , т. е. функционал  $F(f)$  определен на всем  $S_\infty$ , и он, очевидно, линеен и непрерывен.

Если функции  $f \in S_\infty$ ,  $\varphi \in S_\infty$ , то, как мы уже показывали,

$$2\pi(f, \varphi) = (\psi, g),$$

причем при заданной  $f$  существует лишь одна (с точностью до множества меры нуль) функция  $\psi$  при всех  $\varphi \in S_\infty$ . С помощью предельного перехода убеждаемся, что данное равенство справедливо и для  $f \in L^1(-\infty, \infty)$ , т. е. данное нами определение преобразования Фурье для функционалов является расширением этого понятия для интегрируемых функций.

Если в качестве основного пространства взять, например, пространство  $K$ , то в определении преобразование Фурье уже будут фигурировать четыре пространства:

$$K, K', F(K), F(K)'.$$

Примеры.

1. Если функция  $f(x)$  обладает тем свойством, что  $f(x)e^{b|x|} \in L^1$ ,  $b > 0$ , например,  $f(x)$  — финитна, то ее преобразование Фурье  $F(f) = g(\sigma)$  является аналитической функцией в открытой полосе:  $|\tau| < b$ ,  $\sigma = s + i\tau$ . Действительно,

$$g(\sigma) = g(s + i\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-isx} e^{-\tau x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\sigma x} dx.$$

Интеграл для  $g(\sigma)$  сходится при  $|\tau| < b$ . Формальное дифференцирование дает

$$g'(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\sigma x} (-ix) dx,$$

причем полученный интеграл равномерно сходится в некоторой достаточно малой окрестности точки  $\sigma$ , лежащей внутри полосы  $|\tau| < b$  на  $\sigma$ -плоскости. Таким образом, функция  $g(\sigma)$  обладает производной в каждой точке открытой полосы  $|\tau| < b$ , т. е. является аналитической в указанной области.

2. Оператор Фурье в пространстве  $L^2(-\infty, \infty)$  является ограниченным линейным оператором  $F: L^2 \rightarrow L^2$ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции  $\varphi_n = \omega_n e^{-x^2/2}$ , где

$$\omega_n(x) + a_n \left( x^n - \frac{n(n-1)}{4} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \cdot 8} x^{n-4} - \dots \right)$$

являются собственными для оператора  $F$ , при этом те коэффициенты, четность индекса которых отлична от четности числа  $n$ , равны нулю. Коэффициенты, четность индекса которых совпадает с  $n$ , находятся по формуле

$$a_{k-2} = \frac{k(k-1)}{2k-2n-4} a_k.$$

Функции  $\varphi_n$  попарно ортогональны и  $F\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ ,  $\lambda_n^4 = 4\pi^2$ . Функции  $\varphi_n$  с точностью до числовых множителей совпадают с функциями Эрмита, которые получаются с помощью процесса ортогонализации в  $L^2(-\infty, \infty)$  функций  $e^{-x^2/2}$ ,  $xe^{-x^2/2}$ , ...

3. Найдем преобразование Фурье от некоторых элементарных функций. Пусть  $f(x) = e^{-x^2/2}$ . Выбирая в качестве пути интегрирования любую прямую, параллельную вещественной оси, и применяя теорему Коши о вычетах, имеем  $F(f) = \sqrt{2\pi} f(\sigma) = \sqrt{2\pi} e^{-\sigma^2/2}$ . Если  $f(x) = 1$ , то  $F(1) = g(\sigma)$  определяется равенством

$$\begin{aligned} (F(1), F(\varphi)) &= 2\pi(1, \varphi) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{ix^0} dx = \\ &= 2\pi g(0) = 2\pi(\delta, g), \end{aligned}$$

т. е.  $F(1) = \delta$ . Наконец, пусть  $f(x) = \delta(x)$ , тогда

$$(F(\delta), F(\varphi)) = 2\pi(\delta, \varphi) = 2\pi\varphi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) d\sigma = (1, g),$$

т. е.  $F(\sigma) = \frac{1}{2\pi}$ .

4. Обозначим через  $P(\xi)$  многочлен относительно переменных  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Пусть  $P(D)$  — линейный дифференциальный оператор, который получается при замене  $\xi_j$  операторами  $D_j = \frac{1}{i} \frac{d}{dx_j}$ .

Оператор  $P(D)$  представляется, таким образом, в виде

$$P(D) = \sum_{m \geq |\alpha| \geq 0} a_\alpha D^\alpha, \quad D_\alpha = \prod_{j=1}^n D_j^{\alpha_j}, \quad D^0 = E, \quad D_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}.$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , причем  $1 \leq \alpha_j \leq m$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ .

Фундаментальным решением, соответствующим  $P(D)$ , называется обобщенная функция  $\mathcal{E}$  в  $\mathbb{R}^n$  такая, что  $P(D)\mathcal{E} = \delta(x)$ .