

Глава 6

Обработка и анализ информации, полученной при обследовании тактильным механорецептором

Для эффективного проведения обследований с использованием тактильного механорецептора был разработан и реализован специальный программный компонент медицинского тактильного эндоскопического комплекса, который может использоваться на всех стадиях: от снятия данных с датчиков до диагностики. Описание функциональных возможностей программного комплекса приведено в разделе 6.1.

При создании программного комплекса потребовалось существенно адаптировать известные методы обработки и анализа сигналов, а в ряде случаев даже разработать принципиально новые методы [1]. Были созданы специальные методы воспроизведения тактильной информации, сравнения сигналов, восстановления функций (сигналов) по набору их среднеинтегральных значений и др. В этой главе приводится описание разработанных методов, кото-

рые представляются наиболее важными и интересными: в разделе 6.2 описан метод контроля качества и калибровки механорецептора; в разделе 6.3 — метод решения задачи классификации, использованный для автоматизации диагностики; в разделе 6.4 — принципиально новый математический аппарат для разложения и анализа функций (сигналов), предоставляющий широкие возможности как в одномерном, так и в многомерном случаях.

6.1. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ТАКТИЛЬНОГО ДИАГНОСТИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА

Программный компонент медицинского тактильного эндоскопического комплекса представляет собой программу с набором библиотек, позволяющую:

- получать, обрабатывать и анализировать информацию, передаваемую тактильными механорецепторами;
- управлять тактильным дисплеем и стационарным прибором тактильной диагностики удаленных тканей, а также получать от этого оборудования данные;
- записывать полученные данные в локальную и стационарную базы данных (ЛБД и СБД), извлекать данные из ЛБД и СБД и перемещать между ними.

Программный компонент медицинского тактильного эндоскопического комплекса решает следующие задачи:

- получение, обработка и визуализация в реальном времени данных, получаемых от тактильного механорецептора;
- автоматизация тактильной диагностики;
- визуализация полученных от тактильного механорецептора данных после завершения операции;
- управление тактильным дисплеем, воспроизведение на нем информации как в реальном времени, так и по завершении операции;
- управление стационарным прибором диагностики удаленных тканей;
- автоматическая идентификация и соединение с механорецептором, тактильным дисплеем, стационарным прибором диагностики удаленных тканей;
- создание и поддержка баз данных операций, пациентов, хирургов;
- автоматическое внесение полной информации об операции в базу данных;

- проведение измерений, необходимых для верификации корректности работы тактильного механорецептора, формирования паспорта тактильного механорецептора, включающего, в частности, данные о калибровочных коэффициентах.

Программный компонент медицинского тактильного эндоскопического комплекса включает в себя:

- модуль получения данных от тактильного механорецептора;
- модуль обработки и анализа данных от тактильного механорецептора;
- модуль визуализации тактильных данных;
- модуль автоматизации диагностики;
- модуль управления тактильным дисплеем;
- модуль управления стационарным прибором тактильной диагностики удаленных тканей;
- базу данных о параметрах используемых устройств;
- базу данных результатов проведенных тактильных исследований;
- базы данных хирургов и пациентов;
- управляющее и синхронизирующее ядро.

В силу того что программный компонент обеспечивает возможность идентификации тактильного механорецептора, автоматического соединения с тактильным механорецептором, адаптивного масштабирования получаемых от него данных и сохранения результатов исследования в базе данных, тактильные исследования могут осуществляться без привлечения специального оператора, обслуживающего комплекс, и без отвлечения на ввод каких бы то ни было данных с помощью клавиатуры, мыши или других манипуляторов.

Программный компонент предоставляет возможность синхронного отображения тактильной информации на дисплее и ее визуализации на мониторе. Информация может воспроизводиться как в реальном времени, так и в произвольный момент после завершения исследования, в том числе удаленно. При воспроизведении на тактильном мониторе предусмотрена возможность выбора параметров, позволяющая, в частности, повысить контрастность тактильного образа.

Программный компонент реализован с использованием среды Microsoft Visual Studio, языки программирования — C / C++.

Большинство программных компонентов строится на основе событий: работа программы сводится к реакции на события, которые либо производятся операционной системой (в том числе по запросу оператора), либо инициируются самой программой.

Программный компонент содержит семь нитей, работающих практически независимо друг от друга:

- основная нить программы, в которой запускаются все диалоги, кроме окна вывода рабочих сообщений;
- две нити для обслуживания окна вывода рабочих сообщений, поступающих от всех остальных нитей;
- нить обслуживания тактильного механорецептора;
- нить обслуживания тактильного дисплея;
- нить обслуживания стационарного прибора диагностики удаленных тканей;
- нить автоматизации диагностики.

Взаимодействие и синхронизация между нитями осуществляются с помощью стандартных средств (семафоров, взаимоисключений и сообщений).

Общая структура интерфейса программного компонента базируется на ряде основных диалогов.

Вид главного диалога, запускающегося при старте программного компонента, приведен на рис. 6.1: слева — в случае стандартного запуска, справа — в случае запуска в расширенном режиме, предоставляющем дополнительные возможности.

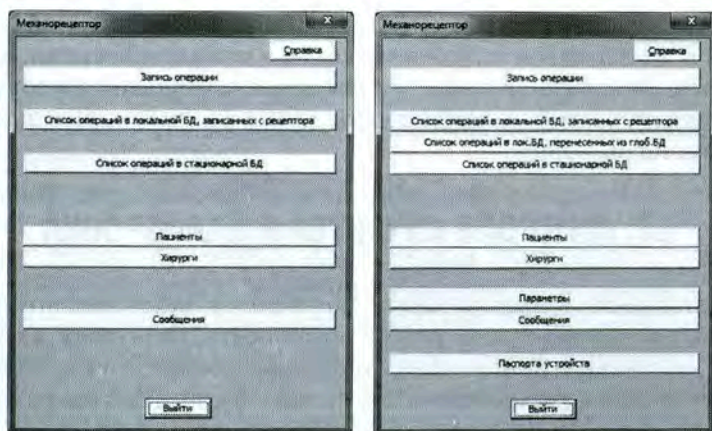


Рис. 6.1. Вид главного диалога программного компонента при стандартном запуске (слева) и при запуске в расширенном режиме (справа)

С помощью соответствующих кнопок главного диалога можно вызвать следующие диалоги, обеспечивающие работу с основными блоками программного компонента:

- диалог записи операции (перед его открытием возникает диалог задания основных параметров операции);

- диалог работы со списком операций, сохраненных в локальной базе данных;
- диалог работы со списком операций, сохраненных в глобальной базе данных;
- диалог работы со списком пациентов;
- диалог работы со списком хирургов;
- диалог задания общих параметров программы (только в расширенном режиме);
- диалог работы с паспортами механорецепторов (только в расширенном режиме);
- окно вывода рабочих сообщений программного компонента.

Вид диалога записи операций приведен на рис. 6.2 (см. вклейку).

Программный компонент является одной из ключевых составляющих медицинского тактильного эндохирургического комплекса и играет важную роль в решении всех основных задач, связанных с МТЭК: получении тактильной информации при эндоскопических операциях, визуализация и воспроизведение этих данных, объективизация тактильных данных, автоматизация диагностики и др. В частности, программный компонент медицинского тактильного эндоскопического комплекса предоставляет возможность передачи тактильной информации по локальным и глобальным сетям в реальном времени, а также удаленных визуализации и воспроизведения тактильной информации, обеспечивая тем самым возможность дистанционного консультирования во время операций.

6.2. КОНТРОЛЬ КАЧЕСТВА И КАЛИБРОВКА

Перед вводом в эксплуатацию тактильного механорецептора осуществляется проверка его работоспособности (контроль качества), а также калибровка, приводящая измеряемые показатели к единой шкале и тем самым позволяющая количественно сопоставлять результаты измерений, полученные разными механорецепторами.

Контроль качества датчика давления. Контроль качества механорецептора осуществляется на специальном стенде с использованием соответствующего программного обеспечения.

Прежде всего проводится проверка датчика давления, входящего в качестве составной части в мобильные зонды и чувствительную головку стационарного прибора. Для этого используется установка, позволяющая в ручном и автоматическом режимах подавать давление независимо на три группы каналов датчика. Установка включает:

- модуль для фиксации датчика с системой объединения каналов в три независимые группы;
- электрические пневмоклапаны;
- портативный компрессор;
- манометр.

Испытываемый датчик подключается к порту компьютера, осуществляющего протоколирование и обработку информации. Установка позволяет выявить все встречавшиеся на практике дефекты датчиков: неработоспособность или низкую чувствительность отдельных каналов, негерметичность и наличие внутренних межканальных перетечек, нестабильность показаний и др. Для работоспособных экземпляров датчиков формируется протокол (рис. 6.3, см. вклейку), отражающий параметры датчика в целом и его отдельных каналов.

Экспериментальные данные по отдельным датчикам записываются следующим образом. Сначала выбирается некоторый набор уровней давления, например 180, 160, 140, 120, 100, 80, 60, 50, 40, 30, 20 мм рт.ст. Затем для каждого из них записываются данные с датчика:

- при закрытых клапанах (соответствует нулевому давлению на все группы каналов);
- при открытом клапане для каждой из трех групп каналов;
- при всех открытых клапанах.

Дальнейшая обработка данных проводится после вычитания из показаний нулевого уровня, определяемого как медиана показаний стартового нулевого сегмента.

Первый тест заключается в проверке линейности зависимости показаний каналов от величины давления. Для каждого канала тестирование проводится независимо. Сначала определяются сегменты, соответствующие подаче известных давлений на тестируемый канал. Сегменты нулевых давлений при этом также добавляются в набор извлекаемых сегментов. Затем полученные данные нормируются в отрезок $[0, 1]$ как по значениям давления, так и по показаниям. Далее для полученных данных восстанавливается устойчивая регрессия наименьших модулей (определяются наклон и сдвиг; рис. 6.4, см. вклейку). Применение здесь устойчивой регрессии обусловлено возможным наличием отдельных выбросов, связанных с погрешностями при сборе данных. Предварительная нормировка данных в отрезок $[0, 1]$ позволяет добиться высокой численной устойчивости восстановления линейной зависимости, а также оценивать качество полученной линейной зависимости в единых терминах, не зависящих от уровней давления, задействованных в эксперименте, типа исследуемого датчика и т.д.

Для восстановленной линейной зависимости находится стандартное отклонение σ_{linear} как медиана абсолютных отклонений показаний от линейной зависимости. Тест признается пройденным, если величина σ_{linear} оказалась больше определенного порога C_{linear} хотя бы по одному из каналов. Порог задается в параметрах тестирования и по умолчанию равен 0,01.

Следующий тест заключается в исследовании стабильности нулевого уровня показаний датчика. Для каждого канала тестирование проводится независимо. Из экспериментальных данных извлекаются все сегменты, соответствующие нулевому давлению для тестируемого канала (рис. 6.5, см. вклейку). Затем для каждого сегмента оцениваются медиана показаний и стандартное отклонение как медиана абсолютных отклонений показаний от медианы. Тест признается пройденным, если:

- максимальный уровень шума (стандартное отклонение от медианы) оказался выше порога $C_{\text{null}, s}$ хотя бы для одного канала
- или максимальное абсолютное значение медианы сегмента оказалось выше порога $C_{\text{null}, m}$ хотя бы для одного канала;

Пороги $C_{\text{null}, m}$, $C_{\text{null}, s}$ задаются в параметрах тестирования и равны по умолчанию соответственно 100 и 30.

Третий тест заключается в проверке уровней шумов для разных уровней давления. Он проводится независимо для каждого канала. Сначала для каждого уровня давления, представленного в эксперименте, из данных извлекаются все сегменты, соответствующие подаче данного давления на тестируемый канал. Затем для каждого сегмента находятся медиана показаний и медиана абсолютных отклонений от медианы. Тест признается пройденным, если максимальный уровень шума по всем каналам и всем значениям давления оказался выше порога, в качестве которого в текущей версии выступает $C_{\text{null}, s}$.

Последний тест при контроле качества — определение независимости показаний каналов. Для каждого канала тестирование проводится независимо. Из экспериментальных данных извлекаются все тройки последовательных сегментов следующего вида: первый соответствует нулевым показаниям для всех каналов, второй — подаче некоторого давления на канал, отличный от тестируемого, третий — нулевым показаниям для всех каналов (рис. 6.6, см. вклейку). Для каждого из трех сегментов оценивается медиана показаний. Тест признается пройденным, если хотя бы для одной тройки модуль разности медианы первого и второго сегментов или второго и третьего сегментов оказался выше порога $C_{\text{independence}}$ хотя бы для одного канала. Порог $C_{\text{independence}}$ задается в параметрах тестирования и по умолчанию равен 30.

Калибровка механорецепторов. Испытание собранных тактильных механорецепторов производится с помощью стенда, обеспечивающего подачу контролируемого внешнего давления на чувствительные оконечности через насадки соответствующего диаметра. При этом также осуществляется калибровка прибора: для каждого канала вычисляются корректирующие коэффициенты, обеспечивающие близость показаний при заданном давлении как между каналами одного прибора (рис. 6.7, см. вклейку), так и между разными приборами. Корректирующие коэффициенты запоминаются в файлах — «паспортах» — для каждого устройства. Использование паспортов тактильных механорецепторов при первичной обработке полученных от них данных позволяет минимизировать зависимость от характеристик конкретного прибора.

Контроль качества тактильного дисплея. Для проверки корректности работы тактильного дисплея используется переходное устройство, которое передает давление, создаваемое приводами дисплея, на многоканальный датчик. В качестве командного сигнала на тактильный дисплей при контроле подаются соответствующим образом масштабированные сигналы датчика тактильного механорецептора. Таким образом появляется возможность сравнивать сигналы с уже прошедших контроль качества и калибровку датчиков давления, установленных в разных устройствах: тактильном дисплее и тактильном механорецепторе. Контроль качества работы тактильного дисплея заключается в качественном и количественном сопоставлении этих данных.

6.3. МЕТОД АВТОМАТИЗАЦИИ ДИАГНОСТИКИ

Неформальная постановка задачи. Неформально задача автоматизации диагностики может быть сформулирована следующим образом. Известно, какая именно ткань обследуется тактильным механорецептором и какие диагнозы возможны, причем вариантов сравнительно немного (единицы, максимум десятки). Например, результаты других обследований уже показали наличие определенного заболевания, но не позволяют достоверно определить стадию заболевания: в этом случае множеством возможных диагнозов является множество стадий данного заболевания. Требуется из множества возможных диагнозов выбрать наиболее вероятный (или наиболее вероятные); желательно сопроводить выбор показателем достоверности, т.е. показать, является ли выбранный диагноз бесспорным или же просто он один из наиболее вероятных, но уверенности в его справедливости нет.

При этом можно считать, что для каждого возможного диагноза имеется, во-первых, экспертное (не всегда четко формализованное) описание тактильных характеристик ткани, свойственных этому заболеванию (например, средний размер жестких вкраплений, их характерная форма и жесткость), во-вторых, набор образцов тканей с данным диагнозом. Однако для каких-то заболеваний набор образцов тканей можно считать большим, в то время как для других он может состоять лишь из небольшого числа образцов.

Описанная задача может быть формализована следующим образом. Имеется банк данных с информацией о тактильных свойствах тканей. Конкретнее, имеется совокупность диагнозов, и для каждого варианта есть экспертное описание свойств тканей, а также совокупность образцов с таким диагнозом. При этом для каждого образца имеются результаты одного или нескольких обследований тактильным механорецептором. Также есть результат тактильного исследования диагностируемой ткани. Для каждого диагноза, информация о котором включена в банк данных, требуется указать одно или несколько чисел, характеризующих его достоверность (или недостоверность) применительно к исследуемой ткани. В результате диагностики упорядочиваются по убыванию достоверности и можно увидеть, является ли какой-либо из них бесспорным, есть ли среди диагнозов возможные или же ни один не применим к исследуемой ткани.

Желательно наличие дополнительных характеристик достоверности диагноза, которые допускают естественную трактовку и интерпретацию: это позволит врачу получить дополнительную информацию и использовать ее при окончательном определении диагноза. Например, если характеристики достоверности диагноза — это числа из отрезка $[0, 1]$, то результат диагностики с использованием тактильного механорецептора «диагноз X, достоверность 0,8», естественно, намного менее содержателен, чем результат «диагноз X, достоверность 0,8 (подтверждают форма и размер уплотнений, слабо противоречит диагнозу жесткость уплотнений)».

Следует отметить, что при исследовании тактильным механорецептором отдельных похожих образцов ткани и даже при повторных исследованиях одного и того же образца результаты (наборы показаний датчиков) могут существенно различаться даже с учетом нормировки. Это связано главным образом не с технологическими погрешностями и неустойчивостью измерений, а с такими факторами, как положение ткани на столе стационарной версии механорецептора или угол, под которым мобильная версия прибора подносится к обследуемой ткани.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда ткань однородна с одним жестким вкраплением, размер которого незначительно меньше размера одного датчика рабочей головки тактильного механорецептора. В этом случае, если при обследовании на вкрапление будет накладываться один канал (датчик), только в нем нормированное показание будет большим по сравнению с «фоновым», во всех других показания будут значительно меньше. Если же вкрапление попадет на стык нескольких каналов (в текущей реализации прибора вероятен случай стыка сразу трех каналов), то во всех этих каналах показания будут большими по сравнению с «фоновым» давлением.

Таким образом, при незначительном изменении положения обследуемой ткани в рассмотренном случае существенно изменяются и количество каналов со сравнительно большим давлением в момент контакта, и сами показатели давления.

Приведенные соображения показывают, почему задача диагностики не проста даже в случае, когда множество возможных диагнозов мало: не только для схожих тканей, но даже для фиксированного образца результаты обследований тактильным механорецептором могут быть очень разными.

Возможные подходы к автоматизации диагностики. Перед обсуждением возможных подходов к решению поставленной задачи приведем ряд естественных ограничений, которые должны быть учтены при окончательном выборе метода.

Результаты диагностики должны быть обоснованы, желательно сопровождение характеристиками достоверности.

Метод должен иметь низкую вычислительную сложность, позволяющую применять его в реальном времени.

Метод должен быть устойчив к изменениям входных данных, вызванным технологическими погрешностями.

Желательна возможность сочетания экспертных знаний и экспериментальных данных (т.е. результатов обследования образцов с известным диагнозом). Это связано, с одной стороны, со сложностью формализации экспертных знаний, с другой — с недостатком доступных образцов для некоторых диагнозов.

Сформулированная задача диагностики является примером задач классификации. В настоящее время разработано несколько подходов к решению задач этого типа. Не претендуя на полноту, перечислим некоторые из них и обсудим сложности, возникающие при попытке использовать их в рассматриваемом случае.

Экспертные системы. На основе экспертных знаний формируется четкий набор формальных правил; результатом их применения

При этом можно считать, что для каждого возможного диагноза имеется, во-первых, экспертное (не всегда четко формализованное) описание тактильных характеристик ткани, свойственных этому заболеванию (например, средний размер жестких вкраплений, их характерная форма и жесткость), во-вторых, набор образцов тканей с данным диагнозом. Однако для каких-то заболеваний набор образцов тканей можно считать большим, в то время как для других он может состоять лишь из небольшого числа образцов.

Описанная задача может быть формализована следующим образом. Имеется банк данных с информацией о тактильных свойствах тканей. Конкретнее, имеется совокупность диагнозов, и для каждого варианта есть экспертное описание свойств тканей, а также совокупность образцов с таким диагнозом. При этом для каждого образца имеются результаты одного или нескольких обследований тактильным механорецептором. Также есть результат тактильного исследования диагностируемой ткани. Для каждого диагноза, информация о котором включена в банк данных, требуется указать одно или несколько чисел, характеризующих его достоверность (или недостоверность) применительно к исследуемой ткани. В результате диагностики упорядочиваются по убыванию достоверности и можно увидеть, является ли какой-либо из них бесспорным, есть ли среди диагнозов возможные или же ни один не применим к исследуемой ткани.

Желательно наличие дополнительных характеристик достоверности диагноза, которые допускают естественную трактовку и интерпретацию: это позволит врачу получить дополнительную информацию и использовать ее при окончательном определении диагноза. Например, если характеристики достоверности диагноза — это числа из отрезка $[0, 1]$, то результат диагностики с использованием тактильного механорецептора «диагноз X, достоверность 0,8», естественно, намного менее содержателен, чем результат «диагноз X, достоверность 0,8 (подтверждают форма и размер уплотнений, слабо противоречит диагнозу жесткость уплотнений)».

Следует отметить, что при исследовании тактильным механорецептором отдельных похожих образцов ткани и даже при повторных исследованиях одного и того же образца результаты (наборы показаний датчиков) могут существенно различаться даже с учетом нормировки. Это связано главным образом не с технологическими погрешностями и неустойчивостью измерений, а с такими факторами, как положение ткани на столе стационарной версии механорецептора или угол, под которым мобильная версия прибора подносится к обследуемой ткани.

В качестве иллюстрации рассмотрим случай, когда ткань однородна с одним жестким вкраплением, размер которого незначительно меньше размера одного датчика рабочей головки тактильного механорецептора. В этом случае, если при обследовании на вкрапление будет накладываться один канал (датчик), только в нем нормированное показание будет большим по сравнению с «фоновым», во всех других показания будут значительно меньше. Если же вкрапление попадет на стык нескольких каналов (в текущей реализации прибора вероятен случай стыка сразу трех каналов), то во всех этих каналах показания будут большими по сравнению с «фоновым» давлением.

Таким образом, при незначительном изменении положения обследуемой ткани в рассмотренном случае существенно изменяются и количество каналов со сравнительно большим давлением в момент контакта, и сами показатели давления.

Приведенные соображения показывают, почему задача диагностики не проста даже в случае, когда множество возможных диагнозов мало: не только для схожих тканей, но даже для фиксированного образца результаты обследований тактильным механорецептором могут быть очень разными.

Возможные подходы к автоматизации диагностики. Перед обсуждением возможных подходов к решению поставленной задачи приведем ряд естественных ограничений, которые должны быть учтены при окончательном выборе метода.

Результаты диагностики должны быть обоснованы, желательно сопровождение характеристиками достоверности.

Метод должен иметь низкую вычислительную сложность, позволяющую применять его в реальном времени.

Метод должен быть устойчив к изменениям входных данных, вызванным технологическими погрешностями.

Желательна возможность сочетания экспертных знаний и экспериментальных данных (т.е. результатов обследования образцов с известным диагнозом). Это связано, с одной стороны, со сложностью формализации экспертных знаний, с другой — с недостатком доступных образцов для некоторых диагнозов.

Сформулированная задача диагностики является примером задач классификации. В настоящее время разработано несколько подходов к решению задач этого типа. Не претендуя на полноту, перечислим некоторые из них и обсудим сложности, возникающие при попытке использовать их в рассматриваемом случае.

Экспертные системы. На основе экспертных знаний формируется четкий набор формальных правил; результатом их применения

к изучаемому объекту является его отнесение к определенному классу. (Подробнее об экспертных системах см., например, [2, 3].) Существенные недостатки этого подхода, препятствующие его применению в рассматриваемой ситуации, — сложность формализации экспертных знаний и составления набора правил, а также необходимость создания новых, а иногда и изменения уже имеющихся при необходимости учитывать новые диагнозы. При этом крайне затруднительно самообучение: как дообучение (автоматизированное изменение правил при появлении новых знаний или добавлении диагнозов), так и начальное самообучение (автоматическое формирование набора правил на основании результатов обследования образцов ткани с известным диагнозом).

Нейронные сети. Искусственная нейронная сеть представляет собой систему взаимодействующих искусственных нейронов. Возникновение понятия нейронной сети тесно связано с изучением процессов, протекающих в мозге. Эту сеть можно даже считать грубой моделью мозга. Одно из главных достоинств нейронных сетей — возможность обучения, в частности самообучения (подробнее о нейронных сетях см., например, [4, 5]). К их недостаткам в рассматриваемой ситуации можно отнести, в частности, сложность интерпретации результатов (нет обоснования, почему выбрано то или другое решение), сложность топологии (сети с простой топологией не могут быть непосредственно использованы в рассматриваемой ситуации хотя бы из-за большого числа входов и нефиксированного числа и положения «содержательных входов», вытекающих из различного количества «содержательных кадров» в результатах отдельного измерения). Кроме того, принципиальным недостатком является сложность обучения (получения сети, настроенной на распознавание определенного диагноза), обусловленная недостатком доступного материала для определенных диагнозов (тканей с данным диагнозом): в силу сложности топологии обучающий материал должен быть очень объемным. Например, тривиальным является соображение, что число обучающих примеров не должно быть меньше числа настраиваемых весов, что в рассматриваемой ситуации уже приводит к объемам, измеряемым по меньшей мере сотнями образцов. Также следует отметить фактическую невозможность учитывать знания экспертов-медиков при конструировании и обучении сетей в случаях, когда нет или недостаточно материала, отвечающего заданному диагнозу, т.е. как раз тогда, когда эти знания наиболее критичны. Наконец, негарантированность корректной работы нейронной сети в каждом конкретном случае ограничивает использование этого метода в «критичных» задачах (см., например, [5]).

Классификация на основе тестов. Входные данные кодируются в двоичной (или другой конечной) системе счисления, строится набор тестов (в случае двоичной кодировки — набор булевых функций). Тесты применяются к входным данным, показывая принадлежность или непринадлежность объекта к тому или иному классу, и на основе этого определяется класс (классы), к которым может принадлежать объект. (Подробнее о классификации на основе тестов см., например, [6].) В рассматриваемой ситуации недостатком такого подхода является необходимая неестественность кодировки входных данных, вытекающая, с одной стороны, из наличия технологических погрешностей при измерениях, с другой, из отсутствия отличной от константы непрерывной на отрезке функции, принимающей лишь конечное число значений (из этого следует неустойчивость кодировки к входным погрешностям). Также к недостаткам можно причислить невозможность естественной трактовки результатов и естественного учета знаний экспертов в случае автоматического создания набора тестов, а в случае неавтоматического — необходимость привлечения экспертов при добавлении в базу каждого нового диагноза.

В рассматриваемой ситуации оптимальным подходом к решению задачи диагностики оказалась методика, сочетающая в себе идеи сразу нескольких классических подходов, в первую очередь *классификации*, основанной на *кластерном анализе* (см., например, [7, 8]), а также теории вероятностей и математической статистики (*вероятностные модели*).

Описание метода автоматизированной диагностики. Решение задачи диагностики предлагается разделить на несколько этапов.

Понижение размерности. Результаты обследования ткани с использованием тактильного механорецептора, даже если рассматривать только «содержательные измерения» (проведенные в моменты контакта рабочей головки тактильного механорецептора с исследуемой тканью), представляют собой набор из достаточно большого числа (как минимум, десятков тысяч) значений. В дальнейшем возможен существенный рост числа каналов (датчиков) в рабочей головке тактильного механорецептора. Это приведет к существенному увеличению количества показаний, которые необходимо обрабатывать. Кроме того, из рассмотренных выше примеров следует, что значения показаний отдельных датчиков без учета показаний соседних часто не показательны, так как во многом зависят от таких неконтролируемых факторов, как незначительный сдвиг или поворот обследуемого образца ткани в случае стационарной версии тактильного механорецептора либо незначительное смещение зоны или угла контакта рабочей головки прибора и обследуемой ткани в случае мобильной версии.

Таким образом, входные данные в задаче о диагностике имеют очень высокую размерность, и при этом каждое отдельное значение давления не является показательным. В таких ситуациях эффективным оказывается понижение размерности входа, т.е. переход от показателей давления $p_j(t_i)$ [плюс, в стационарной версии тактильного механорецептора, величин $h(t_i)$, задающих смещение рабочей головки прибора] к некоторому набору «характеристик» F_k ($1 \leq k \leq K$, где K — общее число характеристик), отражающих результаты обследования. Поскольку речь идет о понижении размерности, общее число характеристик K должно быть существенно меньше размерности входа. Каждая из них представляет собой действительнозначную функцию от входных данных:

$$F_k = F_k(h(t_1), \dots, h(t_n); p_1(t_1), \dots, p_N(t_1), p_1(t_2), \dots, p_N(t_2), \dots, p_1(t_n), \dots, p_N(t_n)).$$

Вполне естественно будет наложить на используемые характеристики некоторые ограничения.

Характеристики должны корректно вычисляться по входным данным. В первую очередь это означает, что малым изменениям их значений (которые неизбежно возникают при обследованиях даже одного и того же образца ткани в силу технологических погрешностей) должны соответствовать малые изменения значений характеристик. В терминах классического анализа это означает, что функции F_k должны быть непрерывны как функции многих переменных. Из наложенного требования, в частности, вытекает, что не рассматриваются булевы характеристики и вообще характеристики, принимающие дискретное множество значений. Требование корректности представляется очень важным и естественным, так как при обследовании ткани тактильным механорецептором, как и во многих других прикладных задачах, малые изменения результатов измерения давления, часто связанные исключительно с технологическими погрешностями, не должны существенно влиять на анализ результатов.

Характеристики должны допускать естественную трактовку, иметь понятный для медиков или других специалистов смысл. Например, речь может идти об отношении жесткости ткани и вкраплений, суммарной площади вкраплений в зоне контакта рабочей поверхности прибора и обследуемой ткани и т.д. Это позволит естественным образом мотивировать выбор того или иного диагноза и показать, какие характеристики результатов согласуются с тем или иным диагнозом, а какие ему противоречат.

Именно второе требование делает предлагаемый способ понижения размерности в рассматриваемой ситуации более привлекательным

по сравнению с широко используемым методом главных компонент (см., например, [8]): в случае медицинской диагностики возможность четкой и понятной мотивации представляется важным требованием.

Предобработка банка данных. Для ускорения работы метода, предназначенного для решения задач диагностики, естественное решение — предобработка банка данных возможных диагнозов, т.е. перевод имеющихся данных во внутренний формат и дополнение их некоторой информацией, получаемой по имеющимся в банке данным и позволяющей ускорить диагностику. По сути предобработка банка данных представляет первый или, лучше сказать, нулевой этап диагностики, который для фиксированного банка выполняется один раз, использует только банковские данные и еще не использует результатов тактильного исследования образца ткани, для которого необходимо определить диагноз.

При предобработке для каждого из имеющихся результатов тактильного исследования банковских образцов тканей с известным диагнозом вычисляются все рассматриваемые характеристики F_k ($1 \leq k \leq K$). После этого каждому результату обследования ставится в соответствие точка в пространстве R^K с координатами (F_1, \dots, F_K) . В результате после обработки всего банка данных возникает множество M_0 точек в R^K , каждой из которых приписан атрибут — диагноз, который соответствует банковскому образцу ткани, породившему эту точку.

Далее множество M_0 дополняется до множества M точками, полученными не из результатов обследований с использованием тактильного механорецептора, а на основе имеющихся в банке экспертных данных (если таковые есть): согласно требованиям, все используемые характеристики имеют естественную трактовку, и на основе экспертных данных могут быть указаны точки, отвечающие ожидаемым данным исследования образцов тканей с таким диагнозом.

В случае реальных банков данных оказывается, что точки множества M , имеющие одинаковый атрибут (соответствующие одному диагнозу), как правило, группируются в пространстве R^K , образуя сравнительно небольшое «облако» («кластер»). При этом облака, отвечающие разным диагнозам, обычно существенно различаются: в большинстве случаев они удалены на существенное расстояние. Однако в отдельных случаях облака, отвечающие различным диагнозам, могут перекрываться (в частности, в случае близких или не противоречащих друг другу диагнозов).

Далее под кластером будет пониматься подмножество точек множества M , отвечающих фиксированному диагнозу. Во избежание путаницы

следует отметить, что такое использование термина «кластер» не совсем традиционно. Стандартно кластеры — результат применения соответствующих статистических методов (методы кластерного анализа, см., например, [7, 8]). При этом, в частности, результат зависит от используемой метрики. В рассматриваемой же ситуации разбиение множества M на кластеры фиксировано изначально.

1. Для каждого облака (кластера) с помощью стандартных для кластерного анализа методов (см., например, [7, 8]) вычисляется центр C . Например, точкам каждого кластера можно сопоставить «массу»: масса точки множества M_0 обратно пропорциональна количеству присутствующих в банке данных результатов обследований ткани, породившей ее; для точек, добавленных на основе экспертных данных, масса определяется также исходя из экспертных соображений; нормировка выбирается таким образом, чтобы суммарная масса всех кластеров была одинакова. После этого центром кластера можно объявить его центр масс.

Сопоставление точкам множества M массы естественно использовать и в дальнейшем, чтобы избежать смещений оценок, вызванных разным количеством исследований для различных банковских образцов тканей, а также различным числом точек в множестве M , отвечающих разным диагнозам.

2. Характеристики F_k рассматриваются как случайные величины, и для каждого диагноза оценивается гистограмма распределения. На основе гистограмм выявляются некоторые параметры распределений, в первую очередь средние значения (математические ожидания) и среднеквадратичные отклонения (корни из дисперсии). При отсутствии экспертных знаний оценка осуществляется стандартными статистическими методами (см., например, [9, 10]) исключительно на основе значений характеристики на всех банковских образцах, соответствующих диагнозу (при этом имеет смысл учитывать, что некоторым образцам соответствует несколько результатов). При наличии соответствующих экспертных данных оценка корректируется на их основании (здесь вновь используется возможность естественной трактовки характеристик).

3. Для каждого диагноза также строится своя метрика в R^k , отражающая его особенности. Мотивация здесь заключается в том, что для разных диагнозов определяющими являются различные характеристики, которые указывают на наличие или отсутствие соответствующего заболевания; другие же не несут существенной информации. Здесь в качестве метрик можно использовать стандартные взвешенные $l^1(R^k)$ или $l^2(R^k)$, где вес k -й координаты обратно пропорционален среднеквадратичному

отклонению (т.е. корню из дисперсии) σ_k случайной величины, соответствующей характеристике F_k и данному диагнозу. В рассматриваемой ситуации естественно также использование аналогов метрик l^1 и l^2 , в которых модуль разности координат заменяется значением подходящей ограниченной функции от этого модуля, например арктангенса.

При наличии соответствующей экспертной информации метрика может быть откорректирована.

Предсказание диагноза для данных результатов тактильного исследования. После получения результатов исследования образца ткани тактильным механорецептором вычисляются значения всех используемых характеристик F_k ($1 \leq k \leq K$), и результатам обследования, по аналогии с банковскими, сопоставляется точка A в пространстве R^K . Далее перебираются все имеющиеся в банке данных диагнозы, и предсказание достоверности того, что тот или иной диагноз применим к исследуемому образцу ткани, осуществляется на основе анализа взаимного положения точки A , кластера (облака точек) Θ множества M , соответствующего рассматриваемому диагнозу, и всех точек множества M , не удовлетворяющих ему.

Сначала вычисляются вспомогательные величины — расстояние d_c от точки A до центра C_Θ кластера Θ , а также расстояние d_0 от точки A до ближайшей к ней точки A_Θ кластера Θ . Под расстоянием здесь понимается значение метрики, соответствующей рассматриваемому диагнозу.

Далее решение о применимости диагноза к изучаемому образцу ткани принимается на основе значений параметров d_c и d_0 . При этом независимо вычисляются две пары характеризующих достоверность величин: пара (P_c^+, P_c^-) на основе близости наблюдаемой картины к наиболее типичной для рассматриваемого диагноза, пара (P_0^+, P_0^-) на основе близости наблюдаемой картины к наиболее похожему известному (банковскому) образцу диагноза. Все величины P_c^+ , P_c^- , P_0^+ , P_0^- принимают значения из отрезка $[0, 1]$. Величины P_c^+ и P_0^+ отражают достоверность положительного заключения, т.е. заключения о наличии диагноза. Они равны разности между 1 и оценкой вероятности ошибки первого рода. P_c^- и P_0^- отражают достоверность отрицательного заключения, т.е. заключения об отсутствии диагноза. Они равны разности между 1 и оценкой вероятности ошибки второго рода.

Неформально если расстояния d_c и d_0 велики, т.е. исследуемый образец ткани далек по характеристикам от диагноза, то значения достоверностей P_c^+ и P_0^+ оказываются малы, а значения достоверностей P_c^- , P_0^- велики, и наоборот.

Здесь учитывается тот факт, что метрики специфичны для каждого диагноза: именно благодаря этому в случаях, когда значения некоторых характеристик не являются для диагноза определяющими и могут изменяться в значительных пределах, разница в их значении не будет приводить к существенному росту расстояний d_c и d_0 .

В качестве основной величины, характеризующей наличие диагноза, естественно рассматривать P_c^+ , но другие величины также несут важную информацию, которая может быть легко понята врачом и принята в расчет при окончательном определении диагноза.

Формально процесс получения значения P_c^+ по расстоянию d_c может быть описан следующим образом. В метрике, отвечающей рассматриваемому диагнозу, берется шар B_c с центром в точке C_Θ и радиусом d_c . Если суммарная масса точек множества M в шаре B_c ниже порога (например, $1/10$ суммарной массы одного кластера в множестве M), то радиус увеличивается до тех пор, пока в шар не попадет достаточное число точек множества M . Величина P_c^+ полагается равной отношению суммарной массы точек кластера Θ , попавших в шар, к суммарной массе попавших в шар точек множества M . Неформально эту оценку можно пояснить так. Рассматриваются все точки множества M , расстояние от которых до центра кластера не превосходит расстояния от точки A , соответствующей анализируемым данным, до этого центра; если выборка оказывается нерепрезентативной, она естественным образом увеличивается. Затем на основе банковских данных оценивается вероятность «ложной тревоги» в случае принятия диагноза, т.е. события, при котором диагноз принят, в то время как на самом деле он другой: каждая «банковская ложная тревога» представляет собой точку множества M , отвечающую другому диагнозу, но все-таки лежащую достаточно близко к центру кластера Θ , т.е. имеющую близость к рассматриваемому диагнозу не меньшую, чем у изучаемых данных. В качестве аналога можно привести процедуру голосования. Отметим, что оно используется и в других методах автоматической диагностики, например в теории тестового распознавания (см., например, [6]).

Минимальный подходящий радиус рассматриваемого шара зависит только от самого множества M и не зависит от изучаемых данных, поэтому для ускорения работы этот радиус (как и значение P_c^+ для достаточно мелкой сетки расстояний d_c до центра кластера) может быть найден для каждого кластера один раз, на стадии предобработки. Порог на минимальную массу точек должен быть адаптивным, зависеть от того, какой именно диагноз (кластер) рассматривается.

Также следует подчеркнуть, что описанная оценка величины P_c^+ может использоваться только в случаях, когда известно, что диагноз, соответствующий изучаемому образцу ткани, присутствует в банке данных. В противном случае точка D может находиться на значительном расстоянии от кластера Θ (в кластере, соответствующем не вошедшему в банк диагнозу), но пересечение шара B_c и множества M будет все равно состоять только из точек, соответствующих рассматриваемому диагнозу. Таким образом, если нет информации о том, что правильный диагноз есть в банке данных, следует дополнительно откорректировать оценку P_c^+ , уменьшая ее, если расстояние между точками A и C_Θ существенно превосходит характерный размер кластера Θ .

Информация о том, что некоторые диагнозы не противоречат друг другу, а наоборот могут дополнять друг друга, естественным образом должна быть учтена при оценке величины P_c^+ : с одной стороны, точки множества M , которые соответствуют диагнозам, не противоречащим рассматриваемому, не должны учитываться, с другой — должна осуществляться коррекция величины P_c^+ на основе сопоставления расстояния между точками A и C_Θ и характерного размера кластера Θ .

Для оценки P_0^- по расстоянию d_c также рассматривается шар радиуса d_c с центром в точке C_Θ . Величина P_0^- полагается равной отношению суммарной массы точек кластера Θ , попавших в этот шар, и суммарной массы всего кластера Θ . Идейно такой подход может быть объяснен следующим образом. Пропуск цели представляет собой решение о неприменимости рассматриваемого диагноза в случае, когда он верен. Для оценки вероятности пропуска цели на основе банковских данных как раз и выявляется частота появления «банковских пропусков цели»: случаев, когда точка, отвечающая рассматриваемому диагнозу, дальше от типичной для диагноза картины (центра кластера), чем точка A , соответствующая результатам обследования.

Вычисление P_0^+ и P_0^- аналогично вычислению P_c^+ и P_c^- , разница заключается лишь в том, что рассматриваются шары не с центрами в точке C_Θ и радиусом d_c , а с центрами в точке A_Θ и радиусом d_Θ .

При анализе результатов исследования образца ткани тактильным механорецептором, помимо основных показателей достоверности того, что рассматриваемый диагноз применим или не применим к ткани, для каждой из используемых характеристик F_k вычисляется показатель согласованности с типичной для этого диагноза картиной. Совокупность таких показателей также дает полезную для врача информацию, определяя, какие характеристики подтверждают диагноз, а какие опровергают.

Оценка согласованности характеристики F_k с рассматриваемым диагнозом осуществляется на основе полученных на стадии предобработки оценок гистограмм распределения. В качестве согласованности берется немедленно получающаяся на основе этих данных оценка вероятности того, что абсолютная величина отклонения случайной величины F_k от среднего значения не меньше, чем модуль разности этого среднего значения и значения характеристики для изучаемых данных исследования. При такой оценке значения согласованности принадлежат отрезку $[0, 1]$: 1 соответствует максимальной согласованности, 0 — полной несогласованности.

Выбор используемых характеристик. Одним из важнейших факторов, определяющих эффективность описанного метода, является правильный выбор используемых характеристик.

В текущей реализации модуля автоматизации диагностики, входящего в состав программного обеспечения тактильного диагностического комплекса, все используемые характеристики могут быть условно разбиты на два класса: статические и динамические.

Под статическими понимаются характеристики, зависящие только от нормированных показаний датчиков в фиксированный момент времени, т.е. величин $p_j(t_i)$, $1 \leq j \leq N$ при фиксированном i . Основными статическими характеристиками послужили:

- сумма показаний всех датчиков, отражающая общую величину деформации контактирующей мембраны — эта величина связана со средней жесткостью изучаемого образца, а также с формой контактирующей поверхности;
- среднеквадратичное отклонение этих показаний от среднего, а также разница между минимальным и максимальным показаниями в каналах (эти величины характеризуют общую неоднородность распределения показаний в каналах рабочей головки прибора, вызванную неоднородностью ткани или начальной формой контактирующей поверхности);
- показатели, аналогичные предыдущим (среднеквадратичное отклонение и разница между максимумом и минимумом), где рассматриваются не показания отдельных датчиков, а суммарные показания совокупностей смежных датчиков (это позволяет уменьшить влияние эффекта существенной зависимости результатов исследования от взаимного расположения неоднородностей и границ каналов);
- сглаженные счетчики количества каналов и упомянутых выше совокупностей датчиков, в которых показания (для совокупностей

датчиков — суммарные) превосходят фиксированную долю (треть, половину) максимального. В случае достаточно высоких значений среднеквадратичного отклонения эти показатели также характеризуют неоднородность и/или исходную форму контактирующей поверхности обследуемой ткани, давая понять, идет ли речь о небольших по размерам вкраплениях с большой жесткостью/выступам или же совокупная площадь жестких вкраплений/выступов достаточно велика.

Динамические характеристики учитывают показатели датчиков в разные моменты времени (т.е. показатели давления из разных кадров). Основными динамическими характеристиками стали:

- средняя жесткость изучаемого образца, т.е. отношение разницы суммарных показаний в кадрах l и m к приращению смещения рабочей головки прибора ($h(t_m) - h(t_l)$);
- отношение жесткости, оцененной по показаниям в кадрах l и m , в канале с максимальной жесткостью к средней жесткости изучаемого образца, оцененной по давлениям в тех же кадрах (этот показатель характеризует неоднородность изучаемого образца ткани);
- показатель, аналогичный предыдущему, но вычисленный не для отдельных каналов (датчиков), а для совокупностей смежных каналов (тех же, что и для статических характеристик; это также сделано с целью уменьшения влияния эффекта существенной зависимости результатов обследования от взаимного расположения неоднородностей и границ каналов).

Первая из описанных динамических характеристик не может быть вычислена для текущих реализаций мобильных тактильных механорецепторов, так как в этом случае неизвестны значения смещения рабочей головки прибора $h(t_l)$. В двух других динамических характеристиках приращения смещения рабочей головки сокращаются, так что эти показатели могут быть вычислены и для мобильных версий прибора.

Преимущества предлагаемой методики. Перечислим некоторые сильные стороны описанного метода, обосновывающие выбор именно его для автоматизации тактильной диагностики.

Возможность при настройке системы эффективно сочетать экспертные знания и экспериментальные данные. Это позволяет, с одной стороны, добавлять в банк данных и обрабатывать новые диагнозы в полностью автоматическом режиме, с другой — добавлять в банк информацию о диагнозах, по которым нет достаточного материала для обучения и настройки.

Возможность естественной интерпретации результатов диагностики, обоснованность принятия решения. Для каждого диагноза вычисля-

ются не только основной показатель применимости к обследуемому образцу ткани, но и некоторые дополнительные показатели, которые могут оказаться полезными в спорных ситуациях. Также определяется согласованность отдельных характеристик с типичной для каждого диагноза картиной, что дает врачам существенную дополнительную информацию для принятия окончательного решения.

Возможность корректно обрабатывать ситуации, когда к изучаемому образцу ткани неприменим ни один из диагнозов банка данных, а также ситуации, когда к изучаемому образцу применимы сразу несколько диагнозов.

Низкая вычислительная сложность, позволяющая применять метод диагностики в реальном времени.

Устойчивость результатов диагностики к изменениям входных данных, вызванным технологическими погрешностями.

Учет специфики диагнозов. Метод естественным образом учитывает, что разным диагнозам соответствуют разные определяющие характеристики.

Возможность учета дополнительных параметров. Метод позволяет при определении диагноза естественным образом учитывать наряду с данными, характеризующими тактильные свойства ткани, дополнительные характеристики (например, температуру).

На эвристическом уровне можно также отметить, что предлагаемая методика диагностики в каком-то смысле близка к тому, что на самом деле делает врач: с одной стороны, учитывается «формальная сторона» (согласованность тех или иных параметров с общей картиной, характерной для определенного диагноза), с другой, используются часто интуитивные, приходящие с опытом и не всегда формализуемые идеи близости картины к чему-то типичному (сопоставление входных данных и центров кластеров) или просто встречавшемуся в практике (сопоставление входных данных и наиболее похожих на них с известным ответом).

Локализация неоднородностей. При проведении эндоскопических операций важна задача автоматического обнаружения и локализации неоднородностей (прежде всего жестких вкраплений). Эта задача, возникающая в первую очередь при тактильном исследовании («автоматизированной пальпации») достаточно большой поверхности, в ряде случаев для хирурга даже более важна, чем задача автоматизации диагностики.

Обнаружение неоднородностей при автоматизированном тактильном исследовании с использованием тактильного механорецептора оказывается сравнительно не сложной задачей. Так, один из эффективных методов ее решения заключается в следующем.

В каждый момент времени t_j для каждого канала (датчика) вычисляется величина:

$$k_n(t_j) = C_1 \left[\tilde{p}_n(t_j) - \tilde{p}_n(t_{j-1}) \right]_{0,255} \sqrt{\frac{\tilde{p}_n(t_j) + C_2}{C_3}}.$$

Здесь $\tilde{p}_n(t_j)$ — показания датчика в момент времени t_j , приведенные к шкале $[0, 255]$, $\tilde{p}_n(t_{j-1})$ — показания этого же датчика в предыдущий момент времени t_{j-1} , $[\cdot]_{0,255}$ — непрерывная срезка по уровням 0 и 255, C_1 , C_2 и C_3 — параметры, значения которых зависят от структуры исследуемой ткани и особенностей техники исследования, присущих хирургу (во многих случаях эффективным оказывается набор значений $C_1 = 10$, $C_2 = 100$, $C_3 = 355$).

Далее вычисляются $k_{\max}(t_j) = \max_n k_n(t_j)$ и $k_{\min}(t_j) = \min_n k_n(t_j)$, а затем — итоговая характеристика $\chi(t_j) = \frac{k_{\max}(t_j) + C_4}{k_{\max}(t_j) + C_4}$. Значение регуляризующе-

го параметра C_4 по умолчанию полагается равным значению C_2 . Далее для определения наличия неоднородности проводится сравнение $\chi(t_j)$ с пороговым значением χ_0 , которое по умолчанию полагается равным 2: решение о наличии неоднородности принимается, если $\chi(t_j)$ оказывается больше, чем χ_0 . В случае принятия решения о наличии неоднородности при визуализации дополнительно отмечаются каналы, соответствующие жестким вкраплениям: это каналы, для которых значение $k_n(t_j)$ оказалось больше, чем $(1 - \alpha)k_{\min}(t_j) + \alpha k_{\max}(t_j)$ (значение α по умолчанию считается равным 1/2).

6.4. РЕКУРСИВНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЦЕПОЧКЕ СИСТЕМ¹

Обработка сигналов и изображений — активно развивающаяся область современной теоретической и прикладной математики. При этом новые методы анализа функций практически вытеснили классический анализ, связанный с использованием рядов и преобразования Фурье. Широкое распространение получил анализ с использованием всплесков (вейвлетов, см., например, [11] и указанную там литературу). Так, одна из важнейших глав монографии Р. Гонсалеса и Р. Вудса «Цифровая обработка изображений» [12] называется «Вейвлеты и кратномасштабная обработка». В настоящее время разработана глубокая математиче-

¹ Результаты раздела «Рекурсивные разложения по цепочке систем» были получены Т.П. Лукашенко.

ская теория всплесков для анализа одномерных функций (сигналов). При этом разработки по анализу многомерных функций в основном связаны с различными методами переноса одномерного анализа на многомерный случай. В случае анализа информации, поступающей от тактильного механорецептора, это приводит к очевидным сложностям, так как датчики тактильного механорецептора образуют сетку (решетку), не являющуюся произведением одномерных сеток.

Ниже рассматривается новый метод разложения и анализа функций (сигналов), представляющий широкие возможности как в одномерном, так и в многомерном вариантах. Он, в частности, допускает большую свободу выбора разлагающих систем. Разработка нового метода разложения и анализа функций позволила адаптировать многие известные методы обработки изображений для использования в тактильной диагностике (см., в частности, [1, разд. 1.2]). Их непосредственное применение было невозможно, так как в их основе лежит разложение по системам, допускающим декомпозицию на одномерные составляющие, а также используются специфические свойства прямоугольных сеток.

Рекурсивные разложения по цепочке подпространств. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство над полем действительных или комплексных чисел, $\{H_n\}_{n=1}^N$ — не более чем счетная система подпространств H , занумерованных натуральными числами, N — натуральное число или $+\infty$. Пусть $\{\varphi_k^n\}_k$ — такая конечная или счетная система в H_n , что для любого $f \in H_n$ выполняется равенство $f = \sum_k (f, \varphi_k^n) \varphi_k^n$.

Система $\{\varphi_k^n\}_k$, удовлетворяющая этому требованию, называется *ортотподобной системой* или *фреймом Парсеваля* в H_n ([13, 14] и указанная в этих работах литература). Частным случаем такой системы является ортонормированная полная в H_n система. Из определения ортотподобной системы [13] следует, что для любого $f \in H_n$ справедливо соотношение:

$$\|f\|^2 = (f, f) = \sum_k (f, \varphi_k^n) \overline{(f, \varphi_k^n)} = \sum_k |(f, \varphi_k^n)|^2,$$

где черта обозначает комплексное сопряжение.

Определение 1. Рекурсивное разложение элемента $f \in H$ по цепочке систем $\{\varphi_k^n\}_k$ определяется следующим образом:

1) полагаем $r_0 = f$, $\hat{f}_k^1 = (r_0, \varphi_k^1)$ для всех допустимых k , $r_1 = r_0 - \sum_k \hat{f}_k^1 \varphi_k^1$;

2) если натуральное число n не превосходит N и уже определены r_m и \hat{f}_k^m для всех натуральных m , меньших n , и всех допустимых k , то полагаем $\hat{f}_k^n = (r_{n-1}, \varphi_k^n)$ для всех допустимых k и $r_n = r_{n-1} - \sum_k \hat{f}_k^n \varphi_k^n$ (рис. 6.8.).

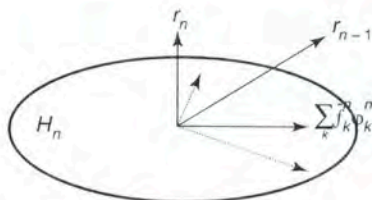


Рис. 6.8. Иллюстрация шага орторекурсивного разложения

Назовем \hat{f}_k^n *рекурсивными коэффициентами Фурье* элемента f по цепочке систем $\{\varphi_k^n\}_k$. Ряд $r_n = r_{n-1} - \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m$ назовем *рекурсивным рядом Фурье* элемента f по цепочке систем $\{\varphi_k^n\}_k$. Чтобы подчеркнуть зависимость остатка r_n от разлагаемого элемента f , будем писать $r_n(f)$.

В рекурсивных разложениях имеются две существенно различающиеся схемы разложений. Можно после получения остатка r_{n-1} выбирать следующую систему в зависимости от достигнутого результата (частный случай — жадные алгоритмы, см., например, [15, 16]). Другой вариант — считать, что системы и их порядок заранее фиксированы и не меняются в процессе разложения (см. [17–19], где изучаются такие разложения по системам элементов, но не цепочке подпространств). В первой схеме имеется возможность оптимизации (в различных смыслах) процесса разложения, но нет линейности. Вторая схема привлекательна линейностью и отсутствием усложняющего разложение алгоритма выбора следующей системы. Следующие далее утверждения верны в обоих случаях.

Для натуральных $n \leq N$ введем частичные суммы разложения:

$$S_n(f) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1}(f) - r_m(f)) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m.$$

Теорема 1 (тождество Бесселя). Для любого элемента $f \in H$ справедливо равенство $f - S_n(f) = r_n(f)$, а также выполняется тождество Бесселя:

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \|r_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n \|r_{m-1}(f) - r_m(f)\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{m=1}^n \sum_k |\hat{f}_k^m|^2.$$

Из тождества Бесселя вытекают следующие утверждения.

Теорема 2 (неравенство Бесселя). Для любого элемента $f \in H$ и его рекурсивных коэффициентов Фурье выполняется неравенство Бесселя:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{m=1}^n \sum_k |\hat{f}_k^m|^2.$$

Будем сумму рекурсивного ряда Фурье, если она существует, обозначать как $S_N(f)$.

Теорема 3 (равенство Парсеваля). Сумма $S_N(f)$ рекурсивного ряда Фурье элемента $f \in H$ существует и равна f тогда и только тогда, когда выполняется равенство Парсеваля:

$$\|f\|^2 \geq \sum_{m=1}^n \sum_k |\hat{f}_k^m|^2.$$

Рекурсивные разложения по цепочке вложенных подпространств. Рассмотрим частный случай рекурсивного разложения по цепочке систем, когда $H_n \subset H_{n+1}$ для всех натуральных n , $1 \leq n < N$ и $\bigcup_{n=1}^N H_n$ всюду плотно в H .

В рассматриваемом случае в силу включения $H_n \subset H_{n+1}$ для всех n , имеет место включение $S_n(f) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \varphi_k^m$, а поскольку остаток r_n ортогонален H_n , то:

$$S_n(f) = P_n(f) = \sum_k (f, \varphi_k^n) \varphi_k^n,$$

где P_n — оператор ортогонального проектирования на подпространство H_n , $\sum_k \hat{f}_k^n \varphi_k^n = S_n(f) - S_{n-1}(f) = P_n(f) - P_{n-1}(f)$ — ортогональная проекция f на ортогональное дополнение H_{n-1} в H_n . Поскольку объединение H_n всюду плотно в H , $S_N(f) = P_N(f) = f$ при конечном N , а при бесконечном N частичные суммы $S_n(f) = P_n(f)$ стремятся к f при $n \rightarrow \infty$, т.е. $f = S_N(f)$ и

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^n \sum_k |\hat{f}_k^m|^2.$$

Поскольку $\varphi_k^{n-1} \in H_n$, $\varphi_k^{n-1} = \sum_j c_j^k \varphi_j^n$, причем коэффициенты разложения s_j^k могут быть выбраны разными способами, а не только как коэф-

коэффициенты Фурье. Такое представление позволяет сводить вычисление коэффициентов Фурье по системе $\{\varphi_k^{n-1}\}_k$ к вычислению коэффициентов Фурье по системе $\{\varphi_k^n\}_k$.

Пример, связанный с системой Хаара. Пусть $\varphi_k^n(x)$ — характеристическая функция полуотрезка $\left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right)$, умноженная на $\sqrt{2^n}$, т.е. $\varphi_k^n(x)$ равна $\sqrt{2^n}$ на этом полуотрезке и 0 вне его, $k = 1, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Система функций $\{\varphi_k^n\}_{k=1}^{2^n}$ ортонормирована и является базисом в пространстве H_n функций, постоянных на полуотрезках $\left[\frac{k-1}{2^n}; \frac{k}{2^n}\right)$ из полуотрезка $[0, 1)$. При этом $H_n \subset H_{n+1}$ для всех n , $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\bigcup_{n=0}^{\infty} H_n$ всюду плотно в пространстве $H = L^2[0, 1)$.

Имеет место очевидное равенство:

$$\varphi_k^{n-1}(x) = \frac{\varphi_{2k-1}^n(x) + \varphi_{2k}^n(x)}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$(f, \varphi_k^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(f, \varphi_{2k-1}^n) + \frac{1}{\sqrt{2}}(f, \varphi_{2k}^n),$$

$$S_{n-1}(f) = \sum_k (f, \varphi_k^{n-1}) \varphi_k^{n-1} = \frac{1}{2}((f, \varphi_{2k-1}^n) + (f, \varphi_{2k}^n))(\varphi_{2k-1}^n + \varphi_{2k}^n),$$

$$\hat{f}_{2k-1}^n = \frac{1}{2}(f, \varphi_{2k-1}^n) - \frac{1}{2}(f, \varphi_{2k}^n), \quad \hat{f}_{2k}^n = \frac{1}{2}(f, \varphi_{2k}^n) - \frac{1}{2}(f, \varphi_{2k-1}^n).$$

Построенные функции связаны с вейвлетами (всплесками) Хаара. Вейвлет Хаара $\chi(t)$ задается равенством (рис. 6.9):

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{при } \frac{1}{2} \leq t < 1, \\ 0 & \text{вне } [0; 1). \end{cases}$$

Также он может быть легко выражен через функции φ_k^n :

$$\chi(t) = \frac{\varphi_1^1(t) - \varphi_2^1(t)}{\sqrt{2}}.$$

Легко видеть, что $\chi(t)$ — функция из ортогонального дополнения H_0 относительно H_1 .

Вейвлеты Хаара $\chi_k^n(t) = \sqrt{2^{n-1}} \chi(2^{n-1}t - k) = \frac{\varphi_{2k-1}^n(t) - \varphi_{2k}^n(t)}{\sqrt{2}}$, $k = 1, \dots$,

2^{n-1} , $n \in N$ принадлежат ортогональному дополнению пространства H_{n-1} относительно H_n (рис. 6.10) и при фиксированном n образуют в этом дополнении ортогональный базис. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{2^n} \hat{f}_k^n \varphi_k^n = S_n(f) - S_{n-1}(f) = \sum_{k=1}^{2^{n-1}} (f, \chi_k^n) \chi_k^n,$$

$$\text{где } (f, \chi_k^n) = \sqrt{2} \hat{f}_{k-1}^n = -\sqrt{2} \hat{f}_k^n = \frac{(f, \varphi_{2k-1}^n) - (f, \varphi_{2k}^n)}{\sqrt{2}}.$$

Вейвлеты Хаара $\chi_1^0(t) = \varphi_1^0(t)$ и $\chi_k^n(t) = \frac{\varphi_{2k-1}^n(t) - \varphi_{2k}^n(t)}{\sqrt{2}}$, $k = 1, \dots, 2^{n-1}$,

$n \leq m$ являются ортонормированным базисом в H_m . Разложения по этим вейвлетам и орторекурсивное разложение по функциям $\varphi_k^n(x)$, $k = 1, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots, m$, дают одинаковый результат.

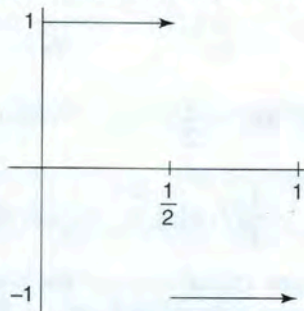


Рис. 6.9. График порождающей функции вейвлета Хаара

Следует отметить, что при этом в общем случае орторекурсивное разложение не требует построения ортонормированного базиса и предоставляет более широкие возможности в выборе функций разложения. Это особенно существенно для изображений (сигналов) на плоскости и пространственных изображений, так как многомерная теория всплесков сложнее одномерной и разработана намного меньше.

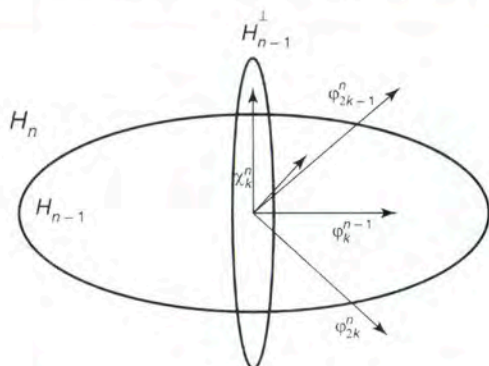


Рис. 6.10. Взаимное расположение функций вейвлета Хаара и пространств H_n

Рекурсивные разложения по системам характеристических функций. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, где Ω — множество, Σ — σ -алгебра его подмножеств, а μ — σ -аддитивная (неотрицательная) мера на Σ ; $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ где $1 \leq p < \infty$, — пространство Лебега всех классов эквивалентности μ -измеримых действительныхзначных или комплекснозначных функций f , определенных почти всюду на Ω и таких, что $|f|^p$ интегрируема по Лебегу на Ω . В дальнейшем для краткости будем писать просто $L^p(\Omega)$ и нормой элемента f этого пространства будем называть величину:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $H = L^p(\Omega)$ — гильбертово пространство, χ_k^m — нормированные характеристические функции измеримых множеств $E_k^m \| \chi_k^m \|$ и, значит, $\chi_k^m(t) = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^m)}}$ при $t \in E_k^m$ и $\chi_k^m(t) = 0$ при $t \notin E_k^m$, множества E_k^m и

E_l^n при $k \neq l$ не пересекаются, а если $E_k^m \cap E_l^n \neq \emptyset$ и $m < n$, то $E_k^m \supset E_l^n$.

Пусть H_m — замыкание линейной оболочки системы $\{\chi_k^m\}_k$ в H . В соответствии с определением можно рассматривать рекурсивные разложения функций из H по цепочке систем $\{\chi_k^n\}_k$. Но для приведенной системы возможны и более общие рекурсивные разложения.

Если функция f интегрируема по Лебегу на любых измеримых множествах конечной меры, то определим ее рекурсивное разложение аналогично тому, как это сделано в определении, приведенном выше:

1) положим $r_0 = f$, $\hat{f}_k^1 = \int_{\Omega} r_0 \chi_k^1 d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^1)}} \int_{E_k^1} r_0 d\mu$ для всех допустимых

k ; положим $r_1 = r_0 - \sum_k \hat{f}_k^1 \chi_k^1$;

2) если уже определены r_m и \hat{f}_k^m для $m < n \leq N$ и всех допустимых k ,

то положим $\hat{f}_k^n = \int_{\Omega} r_{n-1} \chi_k^n d\mu = \frac{1}{\sqrt{\mu(E_k^n)}} \int_{E_k^n} r_{n-1} d\mu$ для всех допустимых k ;

$$r_n = r_{n-1} - \sum_k \hat{f}_k^n \chi_k^n.$$

Коэффициенты \hat{f}_k^n будем называть рекурсивными коэффициентами

Фурье функции f по цепочке систем $\{\chi_k^n\}_k$.

Верна следующая теорема.

Теорема 4. Для любой функции f , интегрируемой по Лебегу на любых измеримых множествах конечной меры, частичная сумма рекурсивного

ряда Фурье $S_n(f) = \sum_{m=1}^n (r_{m-1}(f) - r_m(f)) = \sum_{m=1}^n \sum_k \hat{f}_k^m \chi_k^m$ по цепочке систем

$\{\chi_k^n\}_k$ имеет следующий вид:

$S_n(x) = 0$, если не существует E_k^m , содержащего x , с $m \leq n$;

$S_n(x) = \frac{1}{\mu(E_k^m)} \int f dx$, если E_k^m — последнее из множеств E_k^i , содер-

жащих x , с $i \leq n$.

Определение 2. Если для всех допустимых натуральных m любое множество E_k^m является объединением множеств $E_k^{m+1} \subset E_k^m$, то будем говорить, что система множеств $\{E_k^m\}$ удовлетворяет свойству дробления.

Это свойство влечет вложение $H_n \subset H_{n+1}$, и тогда в последней формуле для частичной суммы $S_n(x)$ всегда m совпадает с n .

Определение 3. Последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$, где m — натуральное, обладает свойством аппроксимации, если для любого измеримого множества D конечной меры и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие попарно неперекрывающиеся множества $\{E_k^m\}_{k_q}$, $q = 1, \dots, Q$, из одной системы, что:

$$\mu\left(D\Delta\prod_{q=1}^Q E_{k_q}^m\right) < \varepsilon,$$

где Δ обозначает симметрическую разность множеств.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$ обладает свойствами дробления и аппроксимации, то для любой функции $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, частичные суммы ее рекурсивного ряда Фурье по цепочке систем $\{\chi_k^n\}_k$ стремятся к f по метрике пространства $L^p(\Omega)$.

Теорема 6. Если последовательность систем множеств $\{E_k^m\}_k$ обладает свойствам дробления, а система функций Λ такова, что любая функция из Λ равномерно приближается линейными комбинациями функций из объединения систем $\{\chi_k^n\}_k$, то для любой функции $f \in \Lambda$ частичные суммы ее рекурсивного ряда Фурье по цепочке систем $\{\chi_k^n\}_k$ равномерно стремятся к f .

Приведенный в предыдущем пункте пример — рекурсивное разложение по нормированным характеристическим функциям полуотрезков, которые обладают свойствами дробления и аппроксимации (для обычной меры Лебега на $[0, 1]$). Непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции равномерно приближаются на полуотрезке $[0, 1]$ линейными комбинациями этих характеристических функций полуотрезков, поэтому рекурсивный ряд Фурье по ним любой непрерывной на $[0, 1]$ функции f сходится равномерно на $[0, 1]$ к f .

На плоскости выбор систем множеств, удовлетворяющих свойствам дробления и аппроксимации, достаточно широк; можно рассматривать рекурсивные разложения по их нормированным характеристическим функциям. При этом можно достичь и того, чтобы финитные (равные 0 вне некоторого ограниченного множества) непрерывные функции равномерно приближались линейными комбинациями характеристических функций рассматриваемых систем множеств.

Укажем некоторые такие системы.

Покроем плоскость (или прямоугольник) системой равных прямоугольников и будем получать следующие системы их двоичным дроблением последовательно по сторонам (одной или сразу обоим). Не касаясь детально распределения граничных точек [как это делать, для пространств $L^p(\Omega)$ несущественно], заметим, что легко достичь того, чтобы получающаяся система множеств удовлетворяла свойствам дробления и аппроксимации.

Другую систему множеств можно получить из покрытия плоскости равными треугольниками (не обязательно равносторонними), которые затем дробятся по своим средним линиям. Такое двоичное дробление приводит к системе вдвое меньших (по линейным размерам) подобных треугольников, которые дробятся далее аналогично. В этом случае получающаяся система множеств также будет удовлетворять свойствам дробления и аппроксимации.

Можно рассматривать и другие системы множеств.

В настоящее время продолжается активное теоретическое изучение орторекурсивных разложений по цепочкам систем и цепочкам подпространств. Этой теме посвящены, в частности, работы [20, 21].

Литература

1. *Садовничий В.А., Буданов В.М., Соколов М.Э. и др.* Математические задачи и методы в тактильной диагностике. — М.: МАКС Пресс, 2008.
2. *Джексон П.* Введение в экспертные системы. 3-е изд. — М.: Вильямс, 2001.
3. *Джарратано Дж., Райли Г.* Экспертные системы: принципы разработки и программирование. — М.: Вильямс, 2007.
4. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика. — М.: Мир, 1992.
5. *Псиола В.В.* Обзор основных нейросетевых моделей // Интеллектуальные системы. — 1999. — Т. 4, вып. 3–4.
6. *Кудрявцев В.Б., Андреев А.Е., Гасанов Э.Э.* Теория тестового распознавания. — М.: Физматлит, 2007.
7. *Мандель И.Д.* Кластерный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1988.
8. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. — М.: Финансы и статистика, 1989.
9. *Крамер Г.* Математические методы статистики. 2-е изд. — М.: Мир, 1975.
10. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. 3-е изд. — М.: Наука, 1969.
11. *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. — М.: Мир, 2001.
12. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. — М.: Техносфера, 2005.
13. *Лукашенко Т.П.* Системы разложения, подобные ортогональным // Фундамент. и прикл. матем. — 1997. — №3 (2). — С. 487–517.
14. *Christensen O.* An introduction to frames and riesz bases. — Boston: Birkhäuser, 2002.
15. *Temlyakov V.N.* Weak greedy algorithms // Adv. Comput. Math. — 2000. — Vol. 12 (2, 3). — P. 213–227.
16. *Галащенко В.В., Лившиц Е.Д.* Обобщенные приближенные слабые жадные алгоритмы // Матем. заметки. — 2005. — №78 (2). — С. 186–201.
17. *Лукашенко Т.П.* О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам // Вестник Моск. ун-та. Сер. I. Матем. механ. — 2001. — №1. — С. 6–10.

18. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками в вычислении коэффициентов // Мат. сборник. — 2004. — №195 (7). — С. 21–36.
19. *Галатенко В.В.* Об орторекурсивном разложении с ошибками в вычислении функций // Известия РАН. Сер. матем. — 2005. — №69 (1). — С. 3–16.
20. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* О рекурсивных разложениях по цепочке систем // ДАН. — 2009. — №425 (6). — С. 741–746.
21. *Лукашенко Т.П., Садовничий В.А.* Орторекурсивные разложения по подпространствам // ДАН. — 2012. — №445 (2). — С. 135–138.