

Динамика в окрестности сепаратрис отображения, сохраняющего площадь

Д. Трещев

Механико-математический факультет

Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

1 Введение.

Пусть T – сохраняющий площадь диффеоморфизм двумерного многообразия M и $\hat{z} \in M$ – его гиперболическая неподвижная точка. Точка \hat{z} порождает четыре асимптотические кривые (ниже они называются сепаратрисными ветвями). Обозначим устойчивые ветви $\Gamma_{1,2}^s$, а неустойчивые $\Gamma_{1,2}^u$. Считается, что точка \hat{z} не принадлежит кривым $\Gamma_{1,2}^{s,u}$.

Пуанкаре обнаружил [17], что сепаратрисы, пересекаясь, образуют запутанную сеть. Динамика в окрестности этой сети очень неустойчивая и нерегулярная. Эту окрестность принято называть стохастическим слоем и характеризовать динамику в стохастическом слое словом “хаос”.

Структура такого хаоса плохо изучена. Известно, что в стохастическом слое существует инвариантное гиперболическое множество, на котором T изоморфно в подкове Смейла. Однако, мера этого множества равна нулю и вопрос, каково типичное поведение траекторий в стохастическом слое, остается открытым.

В этой статье мы обсуждаем глобальную структуру сепаратрисных ветвей и приводим некоторые формулы, оценивающие ширину стохастических слоев в отображениях близких к интегрируемым.

2 Замыкание асимптотических кривых.

Начнем с двух вопросов известных в математическом фольклоре и имеющих отношение к задачам, рассматриваемым в этой статье. Предположим, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы не совпадают $\Gamma_1^s \cup \Gamma_2^s \neq \Gamma_1^u \cup \Gamma_2^u$ и лежат в компактном инвариантном множестве.

- Положительна ли мера замыкания сепаратрис $\overline{\Gamma_1^s \cup \Gamma_1^u \cup \Gamma_2^s \cup \Gamma_2^u}$?

- Если ответ на первый вопрос, положителен, является ли ограничение отображения T на это множество эргодическим?

Положительные ответы на эти вопросы, дали бы множество положительной меры, несущее хаотическую динамику.

По-видимому, оба вопроса очень трудные. Основная причина состоит в том, что указанное множество не является гиперболическим. Мы приведем один простой результат, касающийся замыканий сепаратрисных ветвей.

Теорема 1. Пусть отображение T – гладкое класса C^1 и выполняются следующие условия.

- (1) Множество $\Gamma_1^s \cap \Gamma_1^u$ не пусто.
- (2) Кривые Γ_1^s и Γ_1^u лежат в инвариантной области $D \subset M$. Замыкание \bar{D} компактно.

Тогда замыкание неустойчивой ветви $\bar{\Gamma}_1^u$ содержит устойчивую Γ_1^s .

Следствие 2.1. Так как условия теоремы симметричны относительно Γ_1^s и Γ_1^u , справедливо соотношение $\Gamma_1^u \subset \bar{\Gamma}_1^s$. Следовательно, множества $\bar{\Gamma}_1^s$ и $\bar{\Gamma}_1^u$ совпадают.

Пусть p и q – гиперболические периодические точки T , а i и j соответственно – их периоды. Так как p и q – гиперболические неподвижные точки для отображений T^i и T^j , можно определить ветви $\Gamma_{1,2}^{s,u}(p)$ и $\Gamma_{1,2}^{s,u}(q)$. Положим

$$W_{1,2}^{s,u}(p) = \bigcup_{k=0}^{2i-1} T^k(\Gamma_{1,2}^{s,u}(p)), \quad W_{1,2}^{s,u}(q) = \bigcup_{k=0}^{2j-1} T^k(\Gamma_{1,2}^{s,u}(q)).$$

Теорема 2. Предположим, что выполнены следующие условия.

- (1') Множество $W_1^s(p) \cap W_1^u(q)$ не пусто.
- (2') Множество $W_1^s(q) \cap W_1^u(p)$ не пусто.
- (3') Асимптотические многообразия $W_1^s(p)$, $W_1^u(p)$, $W_1^s(q)$ и $W_1^u(q)$ лежат в инвариантной области $D \subset M$. Замыкание \bar{D} компактно.

Тогда $\bar{W}_1^u(p) \cup \bar{W}_1^s(p) = \bar{W}_1^u(q) \cup \bar{W}_1^s(q)$.

Кроме того, в случае $p = q$ выполняется равенство $\bar{W}_1^s(p) = \bar{W}_1^u(p)$.

Заметим, что многообразие M в теоремах 1–2 может быть некомпактным и (или) неориентируемым. Оно даже может иметь край.

Замечание 2.1. В случае $p = q$ условия (1') и (2') совпадают.

Напомним, что точки множеств

$$(W_1^s(p) \cup W_2^s(p)) \cap (W_1^u(q) \cup W_2^u(q)), \quad (W_1^s(q) \cup W_2^s(q)) \cap (W_1^u(p) \cup W_2^u(p))$$

называются гомоклиническими если p и q лежат в той же периодической траектории, и гетероклиническими в противном случае.

Такенсом доказанно [18], что если M компактно, то для любой гиперболической периодической точки p C^1 -общего сохраняющего площадь отображения $T : M \rightarrow M$ множество гомоклинических точек плотно на $W_{1,2}^{s,u}(p)$. Термин “общий” понимается в смысле категорий Бэра. Отметим, что методы работы [18] ограничены случаем C^1 -топологии.

Следующая гипотеза сформулирована (в более слабой форме) Пуанкаре.

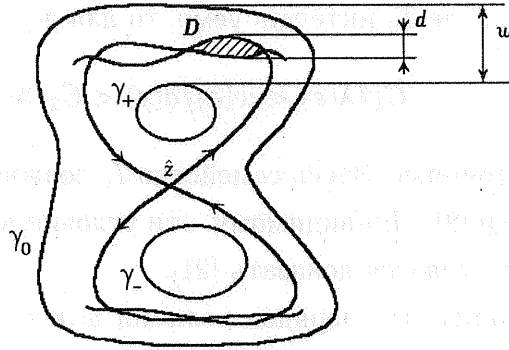


Рис. 1: Сепаратрисы гиперболической неподвижной точки \hat{z} и стохастический слой.

Гипотеза 1. Если $p = q$ и условия теоремы 2 выполняются, то множество гомоклинических точек плотно на $W_1^s(p)$ и $W_1^u(p)$.

Мезер [13] доказал, что если M компактно, то для C^r -общего ($r \geq 4$) отображения, сохраняющего площадь, любые две ветви гиперболической периодической точки имеют одинаковое замыкание.

Оливейра [15], получил следующие результаты имеющие отношение к рассматриваемой задаче. Пусть T – C^1 -гладкий сохраняющий площадь диффеоморфизм компактной ориентируемой поверхности. Пусть L и K – ветви гиперболической неподвижной точки, причем $L = K$ или $L \cap K = \emptyset$. Если $K \cap \omega(L) \neq \emptyset$, то $K \subset \omega(L)$. (Здесь как обычно, $\omega(L)$ ω -предельное множество для L .)

Из этого результата вытекает, [15] следующее утверждение. Пусть M компактная ориентируемая поверхность и $1 \leq r \leq \infty$. Тогда $L \subset \omega(L)$ для любой ветви L C^r -общего отображения, сохраняющего площадь.

3 Ширина стохастического слоя

Теперь предположим, что T близко к интегрируемому отображению. Будем также считать, что сепаратрисные ветви гиперболической неподвижной точки \hat{z} выглядят, как показано на рис. 1. Три инвариантные кривые γ_{\pm} и γ_0 ближайшие к сепаратрисам, образуют границу стохастического слоя. Ширина w стохастического слоя – одна из важных величин, характеризующих хаотические свойства T около сепаратрис.

Оказывается, при некоторых естественных предположениях выполняется следующее соотношение:

$$w/d \sim 1/\lambda. \quad (3.1)$$

Здесь d – ширина области D , ограниченной отрезками сепаратрис (см. рис. 1), а $\lambda > 0$ – логарифм большего мультипликатора в гиперболической неподвижной точке \hat{z} . Сим-

вол \sim означает, что если имеется гладкое семейство T_ε , аналитических отображений, сохраняющих площадь, где T_0 интегрируемо, то для достаточно малого ε

$$C_1/\lambda(\varepsilon) < w(\varepsilon)/d(\varepsilon) < C_2/\lambda(\varepsilon),$$

где $0 < C_1 < C_2$ – постоянные. Здесь семейство T_ε должно удовлетворять определенным условиям регулярности [21]. По-видимому, эти условия выполнены в общей ситуации. В некоторых случаях это удастся доказать [21].

Если $\lambda \sim 1$, мы видим что порядок величин w и d одинаковый. Тем не менее, если стохастический слой появляется, при разрушении резонансной инвариантной кривой интегрируемого отображения, то λ близко к нулю. Следовательно, в этом случае w значительно больше, чем d . Эта ситуация типична для экспоненциально малого расщепления сепаратрис. Если $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\varepsilon) = 0$ и T удовлетворяет некоторому условию симметрии, мы ожидаем, что выполнена оценка

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{w(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)}{d(\varepsilon)} = \frac{4\pi}{k_0}, \quad (3.2)$$

где

$$k_0 = \inf\{k' : \text{для любого } k > k' \text{ стандартное отображение} \\ \begin{pmatrix} I \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} J \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\varphi) \\ \varphi + J \end{pmatrix} \\ \text{не имеет инвариантной кривой гомотопной окружности } I = 0\}.$$

Более точно, положим

$$k_1 = \inf\{k' : \text{существует } k < k' \text{ такое, что стандартное отображение} \\ \text{не имеет инвариантной кривой гомотопной окружности } I = 0\}.$$

Согласно известной гипотезе, $k_0 = k_1$. Формула (3.2) доказана в предположении, что эта гипотеза верна. Постоянная $k_0 = 0.971635 \dots$ оценивалась численно в [8, 12, 16].

Заметим, что, для придания ясного смысла соотношению (3.2), необходимо корректно определить величины w и d . Это может быть сделано, например, в терминах нормальных координат (детали см. в [21]).

Приведем инвариантную версию соотношения (3.1). Пусть \mathcal{A} – площадь стохастического слоя и \mathcal{A}_D площадь области D . Тогда имеем:

$$\mathcal{A} \sim \frac{\mathcal{A}_D \log \mathcal{A}_D^{-1}}{\lambda^2}. \quad (3.3)$$

Соответствующий аналог формулы (3.2) (при тех же предположениях) выглядит следующим образом:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A} \lambda^2}{\mathcal{A}_D \log \mathcal{A}_D^{-1}} = \frac{8\pi^2}{k_0}. \quad (3.4)$$

В общем (несимметричном) случае дроби

$$\frac{w(\varepsilon)\lambda(\varepsilon)}{d(\varepsilon)}, \quad \frac{\mathcal{A}\lambda^2}{\mathcal{A}_D \log \mathcal{A}_D^{-1}}$$

не имеют предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ и осциллируют между двумя положительными постоянными.

Формулы (3.1)–(3.4) можно считать соотношениями между w , \mathcal{A} и величинами $\lambda, d, \mathcal{A}_D$. В рамках теории возмущений последние вычисляются стандартными методами: чтобы получить функции $d(\varepsilon)$ и $\mathcal{A}_D(\varepsilon)$ можно использовать теорию Пуанкаре-Мельникова или ее обобщения на случай экспоненциально малого расщепления [9, 10, 3, 7, 19, 20]; $\lambda(\varepsilon)$ в главном приближении обычно оценивается легко.

Частные случаи соотношения (3.1) были найдены в [2, 6, 23], но в этих работах отсутствуют строгие доказательства. В указанных статьях введен весьма полезный инструмент – сепаратрисное отображение. Анализируя это отображение, Довбыш [4], доказал оценку $w/d \leq \text{const}$ при условии $\lambda \sim 1$. В статье [1] для этого случая установлена оценка $w/d \geq \text{const}$. Лазуткин [11] получил оценку (3.1) для сепаратрис стандартного отображения.

Рассмотрим в качестве примера маятник с вертикально периодически колеблющейся точкой подвеса. Гамильтониан системы – следующий:

$$H(q, p, t, \varepsilon) = p^2/2 + \Omega^2 \cos q + \varepsilon \theta(\omega t) \cos q. \quad (3.5)$$

Здесь $q = q \bmod 2\pi$ – угол между маятником и вертикалью, p соответствующий импульс, $\Omega > 0$ – “внутренняя частота” системы (Ω^2 равно ускорению свободного падения деленному на длину маятника), ω – частота колебаний точки подвеса, а параметр ε пропорционален амплитуде колебаний умноженной на ω^2 . Форма колебаний определяется 2π -периодической функцией θ . Сначала, предположим, что ε мало, а другие параметры в системе имеют порядок 1.

Отображение Пуанкаре в этой системе, имеет гиперболическую неподвижную точку $q = p = 0$. Легко вычислить:

$$\lambda(\varepsilon) = 2\pi\Omega/\omega + O(\varepsilon).$$

Ширина стохастического слоя вокруг “восьмерки” сепаратрис гиперболической точки $q = p = 0$ имеет порядок ε , если $\theta, \Omega, \omega \sim 1$ и θ непостоянна. При тех же предположениях площадь \mathcal{A} стохастического слоя имеет порядок $\varepsilon \log \varepsilon^{-1}$.

Теперь рассмотрим систему с гамильтонианом (3.5) при следующих предположениях:

$$\Omega = 1, \quad \omega = 1/\varepsilon, \quad \theta(s) = 2\varepsilon^{-1}B \cos s.$$

Указанные равенства означают, что частота колебаний точки подвеса велика ($\sim 1/\varepsilon$), а амплитуда – порядка ε^2 .

Площадь соответствующего стохастического слоя может быть оценена следующим образом:

$$\frac{4\pi^2}{\varepsilon^4 k_0} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2} Bf(B^2)(1+o(1)) \leq \mathcal{A} \leq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^4 k_1} e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2} Bf(B^2)(1+o(1)),$$

где $f(z) = \sum_0^\infty f_n z^n$ – целая вещественно-аналитическая функция [20, 19]. Вот значения нескольких коэффициентов f_n : $f_0 = 2$,

$$\begin{aligned} f_1 &= 0.65856738\dots, & f_2 &= 6.651741\dots \cdot 10^{-2}, \\ f_3 &= 3.21010\dots \cdot 10^{-3}, & f_4 &= 9.03367\dots \cdot 10^{-5}, \\ f_5 &= 1.6620\dots \cdot 10^{-6}, & f_6 &= 2.1534\dots \cdot 10^{-8}, \\ f_7 &= 2.070\dots \cdot 10^{-10}, & f_8 &= 1.53\dots \cdot 10^{-12}. \end{aligned}$$

Напомним, что, по-видимому, $k_0 = k_1$.

4 Сепаратрисы и теорема Пуанкаре о возвращении

В этом параграфе мы докажем теорему 1 в топологически простой ситуации, когда M – плоскость, цилиндр, или сфера. Случай других поверхностей и теорема 2 рассмотрены в [22].

Ниже мы можем предположить что отображение T сохраняет каждую ветвь $\Gamma_{1,2}^{s,u}$. В самом деле, если T не удовлетворяет этому условию, мы просто заменим T на T^2 .

Пусть $U \subset D$ – любое открытое множество такое, что $U \cap \Gamma_1^s \neq \emptyset$. Предположим, что

$$U \cap \Gamma_1^u = \emptyset. \quad (4.1)$$

Тогда Теорема 1 будет доказана, как только мы получим противоречие с ее условиями. Рассматривая, если необходимо вместо U меньшую область (которая будет обозначаться U для краткости), мы можем считать, что $U = U^+ \cup U^0 \cup U^-$, где U^\pm открытые, связные, и $U^0 \subset \Gamma_1^s$ – интервал (см. рис. 2). Пусть \hat{I} – минимальный связный кусок Γ_1^s такой, что \hat{z} – его крайняя точка и $U^0 \subset \hat{I}$. Мы можем считать, что

$$U \cap T(\hat{I}) = \emptyset, \quad (4.2)$$

$$U \cap T^{-1}(\hat{I}) = U^0. \quad (4.3)$$

Эти равенства означают, что U^0 и U^\pm достаточно малы.

Лемма 4.1. *Существует натуральное $l > 1$ такое, что*

$$U^+ \cap T^l(U^+) \neq \emptyset, \quad U^- \cap T^l(U^-) \neq \emptyset.$$

Доказательство леммы 4.1. Рассмотрим отображение

$$T \times T : M \times M \rightarrow M \times M, \quad T \times T(z_1, z_2) = (T(z_1), T(z_2)).$$

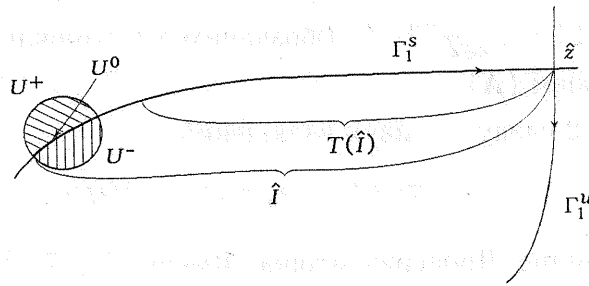


Рис. 2:

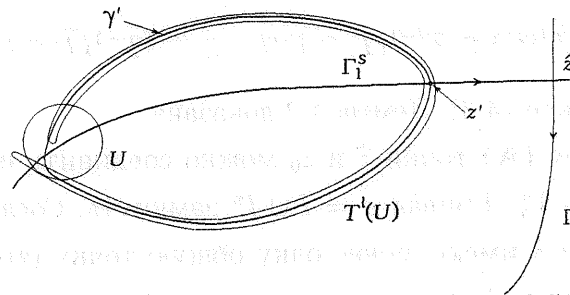


Рис. 3:

Оно сохраняет меру $\sigma \times \sigma$, где σ – площадь на M . Множество $U^+ \times U^-$ лежит в компактном инвариантном множестве $\overline{D} \times \overline{D}$. Следовательно, согласно теореме Пуанкаре о возвращении, для бесконечно большого количества натуральных l

$$(T \times T)^l(U^+ \times U^-) \cap (U^+ \times U^-) \neq \emptyset.$$

Лемма доказана.

Существует гладкая замкнутая кривая γ , удовлетворяющая следующим свойствам.

(а) $\gamma \subset U'$, $U' = U \cup T^l(U)$.

(б) множество $\gamma \cap T^l(U^0)$ состоит из единственной точки z' , причем кривые γ и $T^l(U^0)$ пересекаются в z' трансверсально.

Кривая γ идет вдоль множества $T^l(U^+)$ от точки z' до множества U^+ . Затем γ проходит через интервал U^0 в U^- , идет в $T^l(U^-)$ и возвращается в z' (см. рис. 3).

Согласно свойству (а) и равенству (4.1) имеем:

$$\gamma \cap \Gamma_1^u = \emptyset. \quad (4.4)$$

Лемма 4.2. Существует интервал $I \subset \Gamma_1^s$ удовлетворяющий следующим двум свойствам.

(А) Крайними точками I являются \hat{z} и z_0 , где z_0 гомоклиническая.

(В) $I \cap U' = T^l(U^0)$.

Доказательство леммы 4.2. Интервал $I' = T^{l-1}(\hat{I}) \setminus T^l(\hat{I})$ содержит гомоклиническую точку. Действительно, в противном случае имеем противоречие с предположением (1) из-за соотношения $\Gamma_1^s = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(I')$. Обозначим эту гомоклиническую точку z_0 . Тогда I определяется условием (A).

Теперь лемма 4.2 следует с двух включений:

$$T^l(U^0) \subset (I \cap U') \subset T^l(U^0).$$

Первое из них очевидно. Проверим второе. Имеем: $I \subset T^{l-1}(\hat{I})$. Из этого соотношения и неравенства $l > 1$ следует, что

$$I \cap U \subset T^{l-1}(\hat{I}) \cap U \subset T(\hat{I}) \cap U = \emptyset$$

согласно (4.2). Аналогично,

$$I \cap T^l(U) \subset T^{l-1}(\hat{I}) \cap T^l(U) \subset T^l(T^{-1}(\hat{I}) \cap U) = T^l(U^0).$$

Здесь мы использовали (4.3). Лемма 4.2 доказана.

Согласно свойству (A) точки \hat{z} и z_0 можно соединить интервалом I^u неустойчивой сепаратрисной ветви Γ_1^u . Кривая $\sigma = I \cup I^u$ замкнута. Согласно определению γ и свойству (B) кривые I и γ имеют ровно одну общую точку (точку z') и пересекаются в z' трансверсально. Кривые I^u и γ не пересекаются из-за (4.4). Следовательно, кривые σ и γ трансверсальны друг к другу и имеют ровно одну общую точку. Здесь мы получаем противоречие поскольку в топологически простом случае (т.е. на плоскости, на цилиндре, или на сфере) любые две кривые трансверсальные друг к другу имеют четное число точек пересечения.

5 Сепаратрисное отображение

Оценки (3.1)–(3.4) доказаны в [21]. Основным инструментом, применяемым в доказательствах, является сепаратрисное отображение. В этом параграфе описывается наша конструкция сепаратрисного отображения. Эта конструкция несколько отличается от первоначальной [23, 6]. По-видимому, наши методы более удобны, когда необходимо оценивать ошибку главного приближения.

Ниже мы считаем, что отображение T вещественно-аналитично в \hat{z} .

В окрестности точки \hat{z} отображение T является гиперболическим поворотом. Точнее, верна следующая

Лемма 5.1. *В окрестности точки \hat{z} в M можно выбрать вещественно-аналитические симплектические координаты (x, y) так, что выполняются следующие утверждения.*

(1) Координаты точки \hat{z} равны нулю.

(2) Отображение T имеет вид

$$(x, y) \rightarrow L(x, y) = (xM, y/M), \quad M = M(xy). \quad (5.1)$$

где функция M вещественно-аналитична и $M(0) = \mu > 1$.

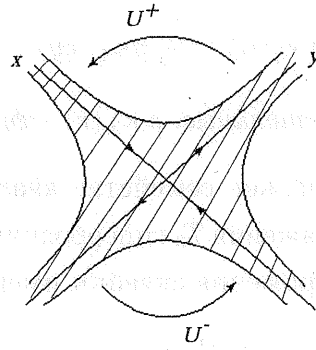


Рис. 4: Продолженные нормальные координаты и отображения склейки

На формальном уровне существование таких координат установлено Биркгофом. Они называются нормальными. Сходимость процедуры, с помощью которой вводятся нормальные координаты, установлена в [14]. Отображение (5.1) имеет первый интеграл xy .

Замечание 5.1. Нормальные координаты (x, y) определены неоднозначно. Для вещественно-аналитической в нуле функции $r(z)$ ($r(0) \neq 0$) координаты $x' = x/r(xy)$, $y' = yr(xy)$ также являются нормальными.

Замечание 5.2. Если отображение T гладко зависит от параметра (например, ε), нормальные координаты также могут быть выбраны гладко зависящими от ε пока точка $\hat{z} = \hat{z}(\varepsilon)$ остается гиперболической.

Ниже мы предполагаем, что внутри верхней петли “восьмерки” (см. рис. 1) выполняются неравенства $x > 0$, $y > 0$.

Нормальные координаты (x, y) продолжаются в окрестность сепаратрис с помощью следующей индуктивной процедуры. Предположим, что точка z имеет координаты (x, y) . Тогда координаты точек $T(z)$ и $T^{-1}(z)$ определяются как $L(x, y)$ и $L^{-1}(x, y)$ соответственно. Вдали от точки \hat{z} имеем, по крайней мере, два различных продолжения координат (с помощью T^k и T^{-k}). Их отождествление производится с помощью следующих отображений склейки, см. рис. 4):

$$\begin{aligned} U^+ : \{(x, y) : y \text{ мало}, x > 0, x \sim 1\} &\rightarrow \{(x, y) : y > 0, y \sim 1, x \text{ мало}\}, \\ U^- : \{(x, y) : y \text{ мало}, x < 0, x \sim 1\} &\rightarrow \{(x, y) : y < 0, y \sim 1, x \text{ мало}\}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отображение U^+ соответствует верхней петле “восьмерки”, а U^- – нижней. Отображения L и U^\pm , очевидно, коммутируют:

$$U^\pm \circ L = L \circ U^\pm. \quad (5.3)$$

Утверждение 5.1. Предположим, что отображение T имеет аналитический интеграл F (т.е. $F = F \circ T$). Тогда в нормальных координатах $F = F(xy)$. Более того, если критическая точка $x = y = 0$ функции F невырождена, то отображения склейки сохраняют

произведение xu , и

$$U^\pm(x, y) = (xy(\alpha_\pm^2/x + y\kappa_\pm(xy))^{-1}, \alpha_\pm^2/x + y\kappa_\pm(xy))$$

Здесь α_\pm – положительные постоянные, а $\kappa_\pm(r)$ – функции аналитические в точке $r = 0$.

Предположим, что T_ε – гладкое семейство аналитических отображений такое, что неподвижная точка $\hat{z}(0)$ отображения T_0 гиперболична, T_0 – интегрируемо, а сепаратрисы T_0 образуют восьмерку. Отображения склейки имеют вид

$$U_\varepsilon^\pm = (xy(\alpha_\pm^2/x + y\kappa_\pm(xy))^{-1}, \alpha_\pm^2/x + y\kappa_\pm(xy)) + (\hat{f}(x, y, \varepsilon), \hat{g}(x, y, \varepsilon)). \quad (5.4)$$

В силу соотношения (5.3),

$$\hat{f}_\pm(xM, y/M, \varepsilon) = M\hat{f}(x, y, \varepsilon), \quad \hat{g}_\pm(xM, y/M, \varepsilon) = M^{-1}\hat{g}(x, y, \varepsilon). \quad (5.5)$$

Утверждение 5.2. Если отображения U^\pm аналитичны по x и y в областях

$$\{x_0 < \pm x < X_0, \quad |y| < Y_0\}, \quad (5.6)$$

для некоторых положительных x_0, X_0 и Y_0 , то выполнены следующие соотношения:

$$\hat{f}_\pm(x, y, \varepsilon) = x f_\pm(x, y, \varepsilon), \quad \hat{g}_\pm(x, y, \varepsilon) = y g_\pm(x, y, \varepsilon).$$

Функции f_\pm, g_\pm аналитичны в областях (5.6) и

$$f_\pm(xM, y/M, \varepsilon) = f_\pm(x, y, \varepsilon), \quad g_\pm(xM, y/M, \varepsilon) = g_\pm(x, y, \varepsilon). \quad (5.7)$$

Положим

$$f_\pm(x, y, \varepsilon) = \nu_\pm(\log |x|/\log M(0, 0)) + O(y) + O(\varepsilon). \quad (5.8)$$

Функции $\nu_\pm(\varphi)$, очевидно, периодичны по φ с периодом 1.

В окрестности сепаратрис T_ε порождают так называемые сепаратрисные отображения S_ε .¹

Чтобы определить отображения S_ε , мы отождествляем любые две точки z_1 и z_2 , нормальные координаты которых (x_1, y_1) и (x_2, y_2) удовлетворяют равенствам

$$x_2 = M^n(x_1 y_1, \varepsilon) x_1, \quad y_2 = M^{-n}(x_1 y_1, \varepsilon) y_1, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (5.9)$$

(Параметр ε предполагается фиксированным.) После этого отождествления S_ε определяются отображениями склейки. Ниже мы предположим, что аргумент y в отображениях склейки мал, а x порядка единицы. Используя (5.4)–(5.8), получаем:

$$U_\varepsilon^\pm(x, y) = \left(\alpha_\pm^{-2} x (xy + \varepsilon \nu_\pm(\log |x|/\log M(0, 0))), \alpha_\pm^2/x \right) + (O(|y| + \varepsilon)^2, O(|y| + \varepsilon)). \quad (5.10)$$

¹Отметим, что сепаратрисное отображение можно определить также в случае когда $\hat{z}(\varepsilon)$ – гиперболична лишь при $\varepsilon > 0$. Этот случай типичен для экспоненциально малого расщепления сепаратрис. Детали см. в [21].

Сепаратрисное отображение удобно писать в переменных действие-угол:

$$I = \mathcal{M}\varepsilon^{-1}xy, \quad \varphi = \mathcal{M}^{-1} \log |x|. \quad (5.11)$$

Легко проверить, что $dI \wedge d\varphi = \varepsilon^{-1}(1 + O(xy))dy \wedge dx$. В переменных (I, φ) отождествление (6.1) принимает вид $\varphi = \varphi \bmod 1$.

Информация о знаке переменной x , потерянная в (5.11), восстанавливается путем добавления знака $+$ или $-$ к переменным (I, φ) в соответствии со значением $\text{sign}(x)$. В переменных (I, φ, σ) , $\sigma \in \{+, -\}$ отображения S_ε имеют вид

$$\begin{aligned} S_\varepsilon(I, \varphi, \sigma) &= (J, \psi, \rho), \\ J &= I + \lambda \cdot \nu_\sigma(\varphi) + \varepsilon \lambda \cdot O(1 + |I|/\lambda)^2, \\ \psi &= \varphi + \frac{1}{\lambda} \left[\log \frac{\varepsilon}{\alpha_\sigma^2 \lambda} + \log |J| + \varepsilon \cdot O(1 + |I|/\lambda)^2 \right], \\ \rho &= \sigma \text{sign}(J). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Здесь мы использовали равенства (5.10)–(5.11) и оценку $O(y) = O(\varepsilon I/\lambda)$. Отметим, что аналогичные формулы содержатся в [5].

В главном приближении зависимость сепаратрисного отображения от $\log \varepsilon$ периодична. Действительно, для целого n замена $\varepsilon \rightarrow e^{n\lambda} \varepsilon$ сохраняет отображение

$$\begin{aligned} J &= I + \lambda \cdot \nu_\sigma(\varphi), \\ \psi &= \varphi + \frac{1}{\lambda} \left[\log \frac{\varepsilon}{\alpha_\sigma^2 \lambda} + \log |J| \right], \\ \rho &= \sigma \text{sign}(J). \end{aligned}$$

Ранее это свойство отмечено в [24].

Отметим, что для больших значений переменной действие сепаратрисное отображение близко к интегрируемому. Действительно, положим $I = I_0(1 + \lambda u)$ и $J = I_0(1 + \lambda v)$, где $|I_0|$ велико. Сепаратрисное отображение оказывается близким к следующему:

$$v = u, \quad \psi = \varphi + \frac{1}{\lambda} \left[\log \left| \frac{I_0 \varepsilon}{\alpha_\sigma^2 \lambda} \right| + \log(1 + \lambda v) \right], \quad \rho = \sigma \text{sign}(I_0).$$

Благодаря этому обстоятельству случай больших I можно исследовать методами теории возмущений.

Список литературы

- [1] Ahn T., Kim G., Kim S. (1996): Analysis of the separatrix map in Hamiltonian systems, *Physica* **89D**, p. 315–328
- [2] Chirikov B. V. (1979): A universal instability of many-dimensional oscillation systems, *Phys. Rep.*, v. 52, no. 5, p. 263–379

- [3] Delshams A., Seara T. M. (1992): An asymptotic Expressions for the Splitting of Separatrices of the Rapidly Forced Pendulum, *Comm. Math. Phys.*, v. 150, p. 433–463
- [4] Довбыш С. А. (1989): Структура колмогоровского множества возле сепаратрис плоского отображения, *Матем. Заметки*, т. 46, N. 4, стр. 112–114.
- [5] Довбыш С. А. (1987): Пересечение асимптотических поверхностей в возмущенной задаче Эйлера-Пуансо, *Прикл. Мат. Мех.*, т. 51, N. 3, стр. 363–370.
- [6] Filonenko N. N., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M. (1967): Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities, *Nuclear Fusion*, v. 7, p. 253–266
- [7] Gelfreich V. G. (1997): Reference systems for splitting of separatrices, *Nonlinearity*, V. 10, P. 175–193.
- [8] Greene J. M. (1979): A method for determining a stochastic transition, *J. Math. Phys.*, v. 20, p. 1183–1201
- [9] Лазуткин В. Ф. (1984): Расщепление сепаратрис в стандартном отображении Чирикова, деп. ВИНТИ N. 6372-84, 24 Сент.
- [10] Lazutkin V. F., Schachmannski I. G., Tabanov M. B. (1989): Splitting of separatrices for standard and semistandard mappings, *Physica D*, v. 40, p. 235–248.
- [11] Лазуткин В. Ф. (1990): О ширине зоны устойчивости возле сепаратрис стандартного отображения, *Докл. Акад. Наук СССР*, т. 313, N. 2, стр. 268–272.
- [12] MacKay R. S. (1983): A renormalization approach to invariant circles in area-preserving maps *Physica* **7D**, p. 283–300
- [13] Mather J. N., Invariant subsets for area-preserving homeomorphisms of surfaces, *Mathematical Analysis and Applications, Part B. Advances in Mathematics. Supplementary Studies, Vol. 7B*, Leopoldo Nachbin, ed.
- [14] Moser J. (1956): The analytic invariants of an area preserving mapping near hyperbolic fixed point, *Commun. Pure Appl. Math.*, v. 9, p. 673–692
- [15] Oliveira F. (1987): On the generic existence of homoclinic points, *Ergodic Th. Dynam. Sys.*, V. 7, P. 567–595.
- [16] Olvera A., Simó C. (1987): An obstruction method for the destruction of invariant curves *Physica* **26D**, p. 181–192
- [17] Poincaré H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste*, V. 1–3: Gauthier-Villars, Paris, 1892, 1893, 1899.

- [18] Takens F. (1972): Homoclinic points of conservative systems, *Inv. Math.* V. 18, P. 267–292.
- [19] Treschev D. (1997): Separatrix Splitting for a Pendulum with Rapidly Oscillating Suspension Point, *Russian J. of Math. Phys.*, V. 5, No. 1, P. 63–98.
- [20] Treschev D. (1996): An averaging method for Hamiltonian systems, exponentially close to integrable ones, *Chaos* v. 6, no. 1, p. 6–14
- [21] Treschev D. (1998) Width of stochastic layers in near-integrable two-dimensional symplectic maps. *Phys. D* 116 (1998), no. 1-2, 21–43.
- [22] Treschev D., Closures of asymptotic curves in two-dimensional symplectic maps. *J. Dynam. Control Systems* 4 (1998), no. 3, 305–314.
- [23] Zaslavsky G. M., Filonenko N. N. (1968): Stochastic instability of trapped particles and the conditions of applicability of the quasilinear approximation, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, v. 54, p. 1590–1602, (in Russian)
- [24] Zaslavsky G. M., Abdullaev S. S. (1995): Scaling properties and anomalous transport of particles inside the stochastic layer. *Phys. Review E*, V. 51, No. 5, P. 3901–3910.

