

# Физика квантовых открытых систем

Ю.Л.Климонтович

Физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

## Аннотация

Статья посвящена основам квантовой теории открытых систем. Основное внимание уделяется следующим вопросам: 1. Представление уравнения Шредингера в качестве примера обратимого уравнения сплошной среды в квантовой теории. Структура сплошной среды и скрытые параметры (масштабы) в квантовой теории. 2. Описание, на примере атома-осциллятора в флуктуационном электромагнитном поле, процессов релаксации в квантовой сплошной среде. 3. Проблема полноты описания квантовых процессов. Статистическое представление соотношения неопределенности. 4. Является ли оправданным в квантовой теории понятие "чистый ансамбль"?

## Содержание

1	Введение	44
2	Микроскопические и макроскопические уравнения Шредингера	46
3	Приближение сплошной среды в квантовой теории	49
3.1	Пространственные масштабы	49
3.2	Временные масштабы	50
4	Установление основного состояния в атоме-осцилляторе	51
4.1	Быстрая и медленная диффузия	51
4.1.1	Масштабы Бора для открытой системы	51
4.2	Физически бесконечно малые масштабы	52
4.3	Уравнения Ланжевена для атомов в тепловом поле	54
5	Уравнение Фоккера-Планка для атомов в тепловом поле	54
5.1	Учет быстрых и медленных процессов	54
5.2	Исключение быстрой релаксации	55
6	Статистическое представление принципа неопределенности Гейзенберга	57
6.1	Две интерпретации принципа (соотношения) неопределенности Гейзенберга	57

<b>7 Два "выхода" из области квантовой теории</b>	<b>59</b>
7.1 "Выход" в сторону больших масштабов . . . . .	59
7.2 "Выход" в сторону малых масштабов. "Классический квант действия" . . .	60
<b>8 Осцилляторная форма соотношения Гейзенберга</b>	<b>61</b>
<b>9 Квантовая функция распределения при знаке "="</b>	<b>63</b>
9.1 Квантовая функция распределения Вигнера . . . . .	63
9.2 Соотношение неопределенности Гейзенберга для отличной от нуля температуры . . . . .	64
9.2.1 Осцилляторная модель . . . . .	64
9.2.2 Модель "свободной частицы" . . . . .	65
9.3 Предельные случаи . . . . .	65
<b>10 Чистый и смешанный ансамбли</b>	<b>66</b>
<b>11 "Скрытые переменные". Смешанный ансамбль</b>	<b>66</b>
<b>12 Проявление скрытых масштабов при рассеянии света на атомах</b>	<b>68</b>
<b>13 Заключение</b>	<b>70</b>

## 1 Введение

Простейшими примерами квантовых открытых систем могут служить атом водорода, квантовый атом-осциллятор или свободный электрон в флуктуационном электромагнитном поле. При этом для создания статистического ансамбля вместо одной частицы естественно рассматривать систему частиц при столь малой их концентрации, что прямое взаимодействие частиц не играет существенной роли. Определяющим является взаимодействие отдельных частиц с флуктуационным электромагнитным полем.

Основная цель статьи - выявить особенности квантовых открытых систем. На примере атома-осциллятора в флуктуационном поле рассматривается переход от микроскопических обратимых уравнений квантовой механики частиц и поля к необратимому квантовому кинетическому уравнению. Он трактуется как переход от системы частиц и осцилляторов электромагнитного поля к соответствующей сплошной среде.

В результате оказывается, что уравнение Шредингера квантовой механики для детерминированной (не операторной) волновой функции частиц описывает временную эволюцию сплошной среды, но еще без учета диссипации. В этом смысле имеется аналогия между уравнением Шредингера в квантовой механике и уравнением Эйлера в гидродинамике, а также кинетическим уравнением Больцмана для свободномолекулярного течения и уравнением Власова в кинетической теории плазмы [17], [18].

Как и в кинетической теории газов и плазмы, снова возникают вопросы: Как определить в квантовой теории наименьшие масштабы, на которых теряется обратимость уравнений квантовой механики? Что является причиной необратимости? Каковы минимальные масштабы, на которых происходит переход от операторных уравнений квантовой электродинамики к соответствующему уравнению Шредингера для детерминированной волновой функции, к примеру, для атома водорода или атома-осциллятора.

Уравнение Шредингера квантовой механики дает более грубое (более сглаженное) описание, чем соответствующие уравнения квантовой электродинамики. Оно включает в себя лишь среднее электромагнитное поле. Тем самым, в нем не учитывается влияние "атомарной" (в виде системы осцилляторов поля) структуры электромагнитного поля.

Проблема состоит, таким образом, в определении начала (по масштабам) перехода к необратимым уравнениям. В связи с этим следует отметить работы И. Пригожина [25], [26], [27]. Он в течение многих лет исследует возможность обобщения второго закона термодинамики на микроскопические процессы. Главная роль при этом отводится динамической неустойчивости движения микроскопических объектов рассматриваемой системы - атомов и осцилляторов электромагнитного поля и, как следствие, перемешивания траекторий в фазовом пространстве. Это делает возможным сглаживание по соответствующим физически бесконечно малым масштабам, в частности, сглаживание по объему "точки" сплошной среды. В квантовой теории динамическая неустойчивость проявляется в сильном изменении волновых функций при малых изменениях начальных условий [27], [10], [11].

Таким образом, переход к приближению сплошной среды через сглаживание по физически бесконечно малому объему оказывается возможным именно благодаря динамической неустойчивости движения и наличию всегда малых неконтролируемых воздействий. В результате сглаживания осуществляется переход к существенно более простым, и, вместе с тем, практически более эффективным, чем исходные микроскопические, уравнениям. Это дает основание для заключения, что динамическая неустойчивость движения микроскопических объектов играет конструктивную роль в построении уравнений статистической теории открытых систем [16], [17], [18].

Для квантовых систем теория динамической неустойчивости находится в настоящее время лишь на начальной стадии развития. Можно поэтому лишь предположить, что она также дает основание для сглаживания по физически бесконечно малому объему - по объему "точки" сплошной среды. Если это так, то динамическая неустойчивость движения будет играть конструктивную роль и в статистической теории квантовых открытых систем.

В связи с переходом от исходных обратимых уравнений квантовой электродинамики к приближенным уравнениям квантовой механики снова возникает "вечный" вопрос о полноте квантовомеханического описания. Напомним, что началом дискуссии по этому вопросу была знаменитая работа Эйнштейна [6], [7]. Позиция Эйнштейна послужила отправной точкой и в известной дискуссии Эйнштейна и Бора на Сольвеевской конферен-

ции в 1927 году. Бор отстаивал точку зрения, согласно которой квантовомеханическое описание является полным. Долгие годы представлялось, что прав был Бор. Однако, существовали и скептики, среди которых был и один из основателей квантовой (волновой) механики Л. де Бройль [3], [2]. К ним в конце жизни присоединился и другой создатель квантовой механики П. Дирак (см. подробнее гл.23 в [17] и ранее [16]).

Вопрос, поставленный Эйнштейном, возникает, естественно, и в статистической теории открытых систем. При этом неполнота квантовомеханического описания оказывается следствием неизбежного перехода от исходных обратимых микроскопических уравнений квантовой электродинамики к приближенным диссипативным уравнениям квантовой теории в приближении сплошной среды. С этой точки зрения чаша весов в споре Эйнштейна и Бора склоняется в сторону Эйнштейна.

Часть настоящей работы посвящена статистической интерпретации соотношения неопределенности Гейзенберга. В квантовой механике оно характеризует статистические свойства частиц независимо от структуры уравнения Шредингера. С точки зрения излагаемой теории соотношение Гейзенберга - статистическая характеристика открытой системы, представляемой в виде сплошной среды.

В соотношении Гейзенберга имеются два знака: " $\geq$ ". При знаке равенства частицы находятся в равновесии с окружающей средой - флуктуационным электромагнитным полем. Знак ">" отвечает неравновесным состояниям.

В связи с этим возникает вопрос об относительной степени упорядоченности состояний отвечающих в соотношении Гейзенберга двум знакам: " $\geq$ ". Он может быть решен на основе критерия "S-теорема".

Однако даже при знаке равенства, когда рассматриваются равновесные состояния при разных температурах, возникает вопрос об относительной степени упорядоченности состояний, отвечающих чистому и смешанному ансамблю систем.

Литература по принципиальным вопросам квантовой теории очень обширна, Ссылки на ряд недавних работ можно найти в работах [17], [16]. В дополнение к ним укажем, что недавно были опубликованы очень интересные книги Asher Peres "Quantum theory: Concepts and Methods" [24], В.В.Кадомтсев "Dynamics and Information" [11], а также обзоры [20], [23]. Наличие этих книг и обзоров освобождает нас от необходимости рассматривать здесь многие принципиальные вопросы квантовой теории. Ограничимся лишь теми, которые необходимы для понимания физических явлений в квантовых открытых системах.

## 2 Микроскопические и макроскопические уравнения Шредингера

Итак, рассматриваем квантовую систему, состоящую из невзаимодействующих атомов и флуктуационного электромагнитного поля.

Микроскопическое описание квантовых процессов в такой системе проводится на

основе квантово-механических уравнений для атомов и осцилляторов поля - микроскопических (операторных) уравнений квантовой электродинамики.

Квантовые микроскопические уравнения, как и в классической теории, могут быть представлены двумя разными способами. Во-первых, можно использовать уравнение Шредингера для волновой функции полного набора переменных атомов и поля. В классической теории таким "стартом" служит уравнение Лиувилля для функции распределения полного набора переменных частиц и осцилляторов поля [14].

При втором способе описания исходной служит замкнутая система уравнений для операторной волновой функции и соответствующих уравнений для операторов электромагнитного поля. Это так называемый *метод вторичного квантования*. В классической теории аналогом является замкнутая система уравнений для микроскопической фазовой плотности частиц в шестимерном пространстве и уравнений для микроскопических напряженностей электрического и магнитного полей [14].

При обоих способах описания исходные микроскопические уравнения дают, в принципе, возможность полного анализа квантово механических процессов в рассматриваемой системе. В квантовой теории описание процессов на основе обратимых микроскопических уравнений отвечает *чистому ансамблю*.

Примем второй способ представления квантовых микроскопических уравнений. Для упрощения будем описывать взаимодействие атомов с электромагнитным полем в дипольном приближении.

Это позволяет использовать замкнутую систему уравнений для операторной волновой функции  $\Psi(r, R, t)$  электрона в атоме водорода (или в атоме-осцилляторе) и оператора поля  $\hat{E}(R, t)$ . Вектор  $R$  характеризует положение атомов как целого.

Вместо операторной волновой функции  $\Psi(r, R, t)$  можно использовать соответствующую операторную квантовую функцию распределения (см. гл. 23 и Приложение в [17])  $\hat{f}(r, p, t)$ , которая соответствует усредненной (не операторной) квантовой функции распределения Вигнера  $f(r, p, t)$  в шестимерном фазовом пространстве.

Из-за нелинейности исходных операторных уравнений, после усреднения возникает очень сложная система зацепляющихся уравнений для моментов. В результате, как и в классической теории, возникает "проблемой замыкания" - сведения бесконечной цепочки к замкнутой системе уравнений для конечного числа моментов.

В квантовой механике уравнение для операторной волновой функции  $\Psi(r, R, t)$  заменяется уравнением Шредингера для детерминированной (не операторной) волновой функции  $\psi(r, R, t)$  электрона в атоме водорода или в квантовом атоме-осцилляторе ( $\Psi(r, R, t) \rightarrow \psi(r, R, t)$ ). В дипольном приближении оно имеет следующий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + U(r)\psi - erE(R, t)\psi; \quad \int |\psi|^2 \frac{dr dR}{V^2} = 1 \quad (1)$$

Это уравнение является приближенным и обратимым. С помощью уравнения (1) можно получить соответствующее уравнение для детерминированной квантовой функции

распределения Вигнера. Она связана с волновой функцией соотношением

$$f(r, p, R, t) = \quad (2)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \psi(r + \frac{1}{2}\hbar\tau, R, t) \psi^*(r - \frac{1}{2}\hbar\tau, R, t) \exp(-i\tau p) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} d\tau, \\ \int f(r, p, R, t) \frac{dr dp dR}{(2\pi\hbar)^3 V} = \int |\psi(r, R, t)|^2 \frac{dr dR}{v^2} = 1. \quad (3)$$

Запишем соответствующее кинетическое уравнение для этой функции распределения:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + eE(R, t) \frac{\partial f}{\partial p} + \quad (4)$$

$$\frac{i}{\hbar(2\pi\hbar)^3} \int \left[ U(r + \frac{1}{2}\hbar\tau) - U(r - \frac{1}{2}\hbar\tau) \right] \exp[i\tau(p' - p)] d\tau dp' = 0.$$

В классическом приближении оно имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + eE(R, t) \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (5)$$

Мы видим, что уравнению Шредингера (1) для детерминированной волновой функции в классическом пределе соответствует кинетическое уравнение для одноточечной функции распределения  $f(r, p, R, t)$ . Как и исходное уравнение Шредингера, это уравнение является приближенным и обратимым. Диссипация, обусловленная взаимодействием атомов с флуктуационным электромагнитным полем при таком описании во внимание не принимается.

Для облегчения перехода к необратимому кинетическому уравнению напомним некоторые моменты кинетической теории Больцмана для разреженного газа.

Кинетическое уравнение Больцмана отличается от уравнения (5) учетом диссипации за счет столкновений атомов. Диссипация входит через интеграл столкновений. Через  $\tau$  и  $l$  обозначаются соответствующие релаксационные параметры - время и длина свободного пробега. Через  $T$  и  $L$  обозначаются характерные параметры задачи.

Для кинетического уравнения Больцмана интересны два предельных случая. Один из них отвечает приближению газовой динамики, а второй - приближению свободномолекулярного течения. Газодинамическое приближение оправдано при выполнении неравенств  $\tau \ll T$ ,  $l \ll L$ . При этом уравнение Больцмана заменяется системой уравнений для более простых газодинамических функций  $\rho(R, t)$ ,  $u(R, t)$ ,  $T(R, t)$ .

В противоположном предельном случае, когда справедливы неравенства  $\tau \gg T$ ,  $l \gg L$ , интеграл столкновений может быть в нулевом приближении по малым параметрам  $T/\tau$ ;  $L/l$  опущен. Это и приводит к обратимому кинетическому уравнению вида (5).

Для газа Больцмана уравнение (5) описывает свободномолекулярные течения. Оно не содержит информации о движении отдельных частиц и, тем самым отвечает приближению сплошной среды. Это ограничивает значения характерных параметров  $T$  и  $L$  со стороны их малых значений:

$$\tau \gg T \gg \tau_{ph}, \quad l \gg L \gg l_{ph}. \quad (6)$$

Отметим еще раз, что обратимое уравнение (5) справедливо лишь в нулевом приближении по малому параметру  $L/l$ .

Какова же ситуация в квантовой теории?

### 3 Приближение сплошной среды в квантовой теории

#### 3.1 Пространственные масштабы

Для учета диссипации надо принять во внимание взаимодействие атомов с флуктуационным электромагнитным полем. В результате мы приходим к диссипативному кинетическому уравнению для квантовой функции распределения (или матрицы плотности) и среднего поля:

Соответствующий "интеграл столкновений" определяется мелкомасштабными флуктуациями с характерными масштабами, много меньшими релаксационных масштабов для кинетического уравнения. В связи с этим и возникает проблема структуры сплошной среды при выводе диссипативного квантового кинетического уравнения.

Для чистого ансамбля операторная матрица плотности (например, в представлении Вигнера) [12], [13], [1], [28], [9], [17] выражается через произведение операторных волновых функций  $\Psi(r, R, t)$ . При переходе к приближению сплошной среды, когда кинетическое уравнение становится необратимым, чистый ансамбль заменяется смешанным ансамблем. При этом уже не существует представления, в котором матрица плотности выражается через произведение волновых функций.

Казалось бы приведенная выше формула (2) противоречит этому утверждению. Действительно, в (2) квантовая функция распределения определяется произведением волновых функций, которые удовлетворяют уравнению Шредингера (1). Мы как бы снова возвращаемся к чистому ансамблю.

В действительности, однако, имеется принципиальное различие между двумя определениями чистого ансамбля. Первое отвечает точному квантовомеханическому описанию, а второе определение чистого ансамбля соответствует приближению сплошной среды. И более того при условии полного пренебрежения диссипацией. Например, для системы  $N$

частиц это приближение соответствует квантовому самосогласованному приближению Хартри в квантовой механике, приближению Власова в теории плазмы и, наконец, уравнению Эйлера в гидродинамике, когда не принимается во внимание вязкое трение и теплопроводность.

Чтобы определить структуру "сплошной среды" в квантовой теории, мы должны, прежде всего, ввести характерные масштабы рассматриваемой системы. Напомним, что характерная длина Бора и соответствующие частота и скорость для атома водорода определяются формулами:

$$r_0 = \frac{\hbar^2}{ne^2}, \quad \omega_0 = \frac{me^4}{2\hbar^3}, \quad v_0 = \frac{e^2}{\hbar}. \quad (7)$$

Радиус Бора  $r_0$  является характерной длиной для основного состояния с распределением  $|\psi(r)|^2$ , частота  $\omega_0$  связана с энергией основного состояния.

### 3.2 Временные масштабы

При переходе к диссипативному кинетическому уравнению появляются дополнительные диссипативные параметры. Разделим их на два класса.

В первый включаем параметры, характеризующие процесс релаксации к равновесному состоянию. Это время определяется коэффициентом Эйнштейна для спонтанных переходов:

$$\tau_{nm} = \frac{1}{A_m^n}, \quad A_m^n = \frac{4|d_{nm}|^2\omega_{nm}^3}{3mc^3} \sim \gamma(\omega_{nm}) = \frac{2e^2\omega_{nm}^2}{3mc^3}. \quad (8)$$

Коэффициент Эйнштейна пропорционален коэффициенту радиационного трения при квантовых переходах. При этом справедливы следующие оценки:

$$A_m^n \sim \mu^3\omega_{nm} \ll \omega_{nm}, \quad \text{где } \mu = \frac{e^2}{\hbar c} \quad (9)$$

Здесь использовано обозначение для постоянной тонкой структуры  $\mu$ .

При нулевой температуре атомы находятся в основном состоянии, в котором плотность распределения положений электрона изотропна. Наиболее вероятное значение этого распределения определяется радиусом Бора  $r_0$ . В квантовой механике нет параметров длины, меньших радиуса Бора. Это означает, что уравнение Шредингера не содержит информации ни о структуре основного состояния, ни о времени его установления.

Рассмотрим теперь параметры другого класса и попытаемся ответить, в частности, на следующий вопрос: За какое время устанавливается изотропное распределение в основном состоянии?

В классической и квантовой электродинамике имеются два масштаба, которые значительно меньше радиуса Бора  $r_0$ :



$$r_e = \frac{e^2}{mc^2} \sim \mu \lambda_C; \quad \lambda_C = \frac{\hbar}{mc} \sim \mu r_0 \ll r_0, \quad \text{где} \quad \mu = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (10)$$

Первый из них есть "классический радиус электрона". Им определяется эффективное сечение рассеяния фотонов на свободных электронах. Величина сечения была определена впервые Томсоном. Она пропорциональна  $r_e^2$ .

Второй параметр есть "длина Комптона". Она определяет сдвиг длины волны рентгеновского излучения при рассеянии его на свободных электронах.

Какой из этих масштабов характеризует начало необратимости и, таким образом, определяет и тонкую структуру "сплошной среды" и размер "точки" в квантовой механике, в частности, для основного состояния атома водорода?

Временной параметр  $\tau_e = r_e/c$  проявляется, например, при расчете флуктуаций при взаимодействии частиц с флуктуационным электромагнитным полем. Примером может служить расчет флуктуаций скорости свободного электрона при движении его в флуктуационном поле [17],[16].

Решение этой проблемы дает возможность определить наименьшее время релаксации, которое характеризует установление необратимости. Оно определяется временем пролета фотоном расстояния порядка классического радиуса электрона (линейного размера эффективного сечения при томсоновском рассеянии)  $r_e$ :

$$\tau_{rel} \sim \tau_e = \frac{r_e}{c} \equiv \frac{1}{\Gamma}; \quad \Gamma \approx \frac{3mc^3}{2e^2} \sim \frac{c}{r_e}. \quad (11)$$

Покажем, что время  $\tau_e$  определяет и установление основного состояния.

## 4 Установление основного состояния в атоме-осцилляторе

### 4.1 Быстрая и медленная диффузия

#### 4.1.1 Масштабы Бора для открытой системы

Рассмотрим газ из не взаимодействующих атомов в равновесном электромагнитном поле. Следуя Томсону, используем модель "атома-осциллятора". В этой модели атом представляется в виде сферы некоторого радиуса  $r_0$ . Мы увидим, что величина  $r_0$  совпадает с радиусом Бора для атома водорода. По сфере равномерно распределен положительный заряд. Суммарный заряд равен величине заряда электрона. Электрон совершает колебания относительно центра сферы. Частоту колебаний электрона находим из условия равенства упругой силы силе притяжения к центру сферы

$$e\mathbf{E} = -\frac{e^2}{r^3}\mathbf{r} = -m\omega_0^2\mathbf{r}; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{mr^3}}. \quad (12)$$

По соображениям простоты рассматриваем лишь одномерные колебания атома-осциллятора.

Атом рассматриваем как открытую систему, которая находится в равновесии с электромагнитным полем. При отличной от нуля температуре условие равновесия атома-осциллятора с полем определяется равенствами::

$$m \langle v^2 \rangle = m \omega_0^2 \langle x^2 \rangle = k_B T_{\omega_0} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \coth \frac{\hbar \omega_0}{2 k_B T}. \quad (13)$$

При комнатных температурах  $\coth \hbar \omega_0 / 2 k_B T$  близок к единице и равновесные значения скорости и амплитуды  $v_0, x_0$  определяются энергией нулевых колебаний электромагнитного поля  $\hbar \omega_0 / 2$ . С учетом этого получаем следующие выражения для частоты и амплитуды колебаний атома-осциллятора при его равновесии с полем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{m x_0^3}}; \quad m v_0^2 = m \omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2} \hbar \omega_0. \quad (14)$$

Отсюда следуют выражения для амплитуды, частоты и скорости [16], [17], [18]

$$x_0 = \frac{\hbar^2}{m e^2}, \quad \omega_0 = \frac{m e^4}{\hbar^3}, \quad v_0 = \frac{e^2}{\hbar}, \quad (15)$$

которые совпадают с известными в квантовой механики параметрами Бора. Здесь, однако, эти параметры получены не на основе обратимого уравнения Шредингера, а из условия равновесия атома-осциллятора с равновесным электромагнитным излучением. По этой причине, в противоположность определению их в квантовой механике, они являются характеристиками открытой системы.

## 4.2 Физически бесконечно малые масштабы

Чтобы установить вид уравнений Ланжевена и уравнения Фоккера-Планка, введем физически бесконечно малые масштабы для рассматриваемой системы атомов-осцилляторов в тепловом электромагнитном поле. Для этого прежде напомним определение соответствующих масштабов для кулоновской плазмы и рассматриваемой системы.

Для плазмы физически бесконечно малый масштаб длины определялся радиусом Дебая. Радиусу Дебая  $r_D$  сопоставим здесь радиус Бора  $r_0$  ( $x_0$ ), так как они оба являются минимальными масштабами, кинетической теории. Действительно, именно эти масштабы определяют минимальные объемы, структура которых не описывается соответствующими кинетическими уравнениями.

Объему, приходящемуся на одну частицу плазмы  $v_0 = 1/n$ , сопоставим объем  $\lambda_C^3$  с длиной Комптона  $\lambda_C$ . Это оправдано тем, что длина Комптона - минимальный квантовый масштаб. Соответственно этому числу частиц в сфере Дебая  $N_D = n r_D^3 \approx r_D^3 / v_0$  сопоставляем число минимальных квантовых объемов в сфере с радиусом Бора

$$N_h = \frac{r_0^3}{\lambda_C^3} \approx \frac{1}{\mu^3}; \quad \mu = \frac{e^2}{\hbar c}. \quad (16)$$

Таким образом, число "частиц" - число минимальных квантовых объемов в сфере с радиусом Бора обратно пропорционально кубу постоянной тонкой структуры  $\mu^3$ . Таким образом, величина  $\mu^3$  соответствует плазменному параметру.

Напомним, наконец, что в плазме физически бесконечно малый временной интервал определяется временем пространственной диффузии электронов по объему с радиусом Дебая. По аналогии определим физически бесконечно малый интервал для рассматриваемой системы выражением  $\tau_{ph} = r_0^2/D_{(x)}$ . Здесь  $D_{(x)}$  - неопределенный пока коэффициент диффузии по координате  $x$ . Осталось придать физический смысл величине  $\tau_{ph}$  (или  $D_{(x)}$ ).

Естественно определить  $\tau_{ph}$  через минимальное время релаксации для системы атомы-поле  $\tau_e$ . Этот временной интервал можно определить и как отношение периода, отвечающего частоте Бора  $\omega_0$  к числу минимальных квантовых объемов в сфере с радиусом Бора  $N_h$ .

В результате приходим для рассматриваемой квантовой системы к следующему определению физически бесконечно малых масштабов и коэффициента диффузии по переменной  $x$

$$\tau_{ph} \approx \tau_e \approx \frac{r_e}{c} \approx \frac{1}{\Gamma}; \quad l_{ph} \approx x_0; \quad D_{(x)} \approx \frac{\omega_0^2 x_0^2}{\gamma(\omega_0)} \approx \Gamma x_0^2. \quad (17)$$

Напомним, что  $\gamma(\omega_0)$  - коэффициент радиационного трения на частоте Бора

$$\gamma \equiv \frac{\omega_0^2}{\Gamma} \approx \frac{2e^2\omega_0^2}{3mc^3}. \quad (18)$$

Из формулы для коэффициента диффузии  $D_{(x)} \approx \omega_0^2 x_0^2 / \gamma(\omega_0)$  следует соответствующее выражение коэффициента диффузии по скорости

$$D_{(v)} = \gamma(\omega_0) v_0^2 = \gamma(\omega_0) \frac{k_B T_{\omega_0}}{m}. \quad (19)$$

Таким образом, пространственная диффузия является наиболее быстрым релаксационным процессом. Напротив, диффузия по скоростям - самый медленный процесс. Соответствующее характерное время

$$\tau_{D(v)} \sim \gamma^{-1} \gg \Gamma^{-1}. \quad (20)$$

Для определения уравнения Фоккера-Планка для функции распределения в пространстве  $(x, v)$  запишем сначала соответствующие уравнения Ланжевена.

### 4.3 Уравнения Ланжевена для атомов в тепловом поле

Приведенные выражения для коэффициентов диффузии определяют интенсивности соответствующих источников Ланжевена. С учетом этого имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} + \Gamma x = y_{(x)}; \quad \langle y_{(x)} \rangle = 0; \quad \langle y_{(x)}(t) y_{(x)}(t') \rangle = 2D_{(x)} \delta(t - t'); \quad (21)$$

$$\frac{dv}{dt} + \gamma v + \omega_e^2 x = y_{(v)}(t) \quad (22)$$

$$\langle y_{(v)} \rangle = 0; \quad \langle y_{(v)}(t) y_{(v)}(t') \rangle = 2D_{(v)} \delta(t - t').$$

Предполагается, что ширина  $\delta$ -функции, т.е. время корреляции  $\tau_{cor}$  случайного источника  $y_{(x)}$ , в уравнении для координаты меньше времени быстрой релаксации  $\tau_{cor} \ll \tau_e \sim r_e/c$ . Возможность такого неравенства заложена уже в самом названии для  $\tau_e$ : "физически бесконечно малый интервал". Нет необходимости конкретизировать его величину, так как быстрые флуктуации с характерными временами будут исключены из окончательных кинетических уравнений. Их роль будет сведена лишь к демонстрации того, что пространственная диффузия по объему с радиусом Бора, т.е. установление основного состояния происходит на малых временах  $\tau_e \sim r_e/c$ .

Ширина же  $\delta$ -функции в источнике  $y_{(v)}$  определяется большим временем корреляции  $\tau_{cor} \sim \tau_e \sim 1/\Gamma$ .

Рассмотрим соответствующее уравнение Фоккера-Планка.

## 5 Уравнение Фоккера-Планка для атомов в тепловом поле

### 5.1 Учет быстрых и медленных процессов

Переход от уравнений Ланжевена к уравнению Фоккера-Планка осуществляем по стандартной схеме. В результате приходим к уравнению для функции  $f(x, v, t)$ , которое совпадает с уравнением (17.3.13), (17.4.5) в [17], [18]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[ D_{(v)} \frac{\partial f}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v f] + \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[ D_{(x)} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\omega_0^2 x}{\gamma} f \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, второй диссипативный член в уравнении Фоккера-Планка определяется пространственной диффузией. Напомним, что за физически бесконечно малый принято

время диффузии по объему с радиусом Бора. Радиус Бора, подобно радиусу Дебая в плазме, играет здесь роль физически бесконечно малой длины.

Полученное уравнение описывает релаксационные процессы на существенно различных временных масштабах. В результате полной релаксации устанавливается равновесное состояние с распределением Гаусса как по координатам, так и по скоростям:

$$f(x, v) = C \exp \left( -\frac{mv^2/2 + m\omega_0^2 x^2/2}{k_B T_{\omega_0}} \right), \quad k_B T_{\omega_0} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \coth \frac{\hbar \omega_0}{2k_B T} \quad (24)$$

Рассмотрим теперь возможные упрощения полученного уравнения Фоккера-Планка.

## 5.2 Исключение быстрой релаксации

Воспользуемся тем, что время пространственной диффузии много меньше не только времени медленной релаксации по скоростям, но и периода колебаний, т.е., имеет место двойное неравенство

$$\tau_{(v)} = \frac{v_0^2}{D_{(v)}} = \frac{1}{\gamma} \gg \frac{1}{d\omega_0} \gg \tau_{(x)} = \frac{x_0^2}{D_{(x)}} = \frac{1}{\Gamma}. \quad (25)$$

"Сила неравенств"  $\ll$  выражается через "постоянную тонкой структуры"  $\mu = e^2/\hbar c$  :

Можно, таким образом, выделить "быструю" и "медленную" стадии эволюции к состоянию полного равновесия с функцией распределения (24). Это дает основание перейти от уравнения (23) к более простому уравнению. Исключение быстрого движения можно произвести как в уравнениях Ланжевена, так и в самом уравнении Фоккера-Планка.

Пойдем по первому пути. Представим функцию  $x(t)$  в виде:

$$x = x(t, \varepsilon t); \quad v = v(\varepsilon t). \quad (26)$$

Здесь в функции  $x(t)$  выделен быстрый процесс на временах  $\tau_{(e)} \sim 1/\Gamma$ ,  $\varepsilon t$  — медленное время.

Проинтегрируем первое уравнение Ланжевена по временному интервалу  $\Delta t$  такому, что

$$\frac{1}{\omega_0} \gg \Delta t \gg \tau_{(x)} = \frac{x_0^2}{D_{(x)}} = \frac{1}{\Gamma} \quad (27)$$

и введем обозначение для сглаженной функции

$$\tilde{x} = \int_0^{\Delta t} x(t - t') \exp(-\Gamma t') \frac{dt}{\Delta t}; \quad \tilde{v}(t) = v(t). \quad (28)$$

Проведем соответствующее сглаживание производной  $dx/dt$ . Оставляем лишь основной член. Тогда

$$\int_0^{\Delta t} \frac{d}{dt} x(t-t') \exp(-\Gamma t') \frac{dt}{\Delta t} \approx -\Gamma \tilde{x}. \quad (29)$$

Проведем операцию сглаживания и для источников Ланжевена. В соответствии с приведенным определением времен корреляции, имеем:

$$\tilde{y}_{(x)}(t) = 0; \quad \tilde{y}_{(v)}(t) = \int_0^{\Delta t} x(t-t') \exp(-\Gamma t') \frac{dt}{\Delta t} = y_{(c)}(t). \quad (30)$$

В результате получаем следующую более простую систему уравнений Ланжевена

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = v; \quad \frac{dv}{dt} + \gamma v + \omega_e^2 \tilde{x} = y_{(v)}(t) \quad (31)$$

Моменты случайного источника  $y_{(v)}(t)$  определяются прежними выражениями. Соответствующее уравнение Фоккера-Планка для более гладкой функции принимает вид (знак "∼" над  $\tilde{x}$  опускаем):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \omega_0^2 x \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \left[ D_{(v)} \frac{\partial f}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} [\gamma v f]. \quad (32)$$

Коэффициенты диффузии и трения определяются приведенными выше формулами. Заметим, что это уравнение не содержит масштабы, принятые за физически бесконечно малые.

Обратим особое внимание, что в этом уравнении динамические члены остаются классическими. Квантовый характер системы проявляется лишь в выражении для коэффициента диффузии. Такое описание, хотя оно и встречается в литературе (см., например, [5], [28]), является, конечно, весьма упрощенным. Надо, разумеется, учесть квантовые эффекты и в динамике. Для этого следует принять во внимание, что квантовая функция распределения удовлетворяет двум уравнением [17].

Из неравенств (25) следует, в частности, неравенство  $\tau_{(v)} \gg 1/\omega_0$ , которое позволяет провести дальнейшее упрощение уравнения (32) путем усреднения по периоду колебаний. В результате получаем еще более простое и более симметричное по  $x, v$  уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ D_{(v)} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial v} (\gamma v f) + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma x f) \right] \quad (33)$$

Из него исключены осцилляторные члены и оно описывает лишь процесс медленной временной релаксации с характерным временем  $1/\gamma \gg 1/\omega_0$ .

Таким образом, описание броуновского движения атомов-осцилляторов на основе уравнения Фоккера-Планка можно проводить с разной степенью детальности. Наиболее детальная информация содержится в уравнении (23). Для него скрытые (потерянные)

пространственно-временные масштабы лежат в пределах  $\tau_e, r_0$ . При переходе к уравнению (32) теряется информация на пространственно-временных масштабах, меньших периода колебаний осцилляторов. Наконец, при переходе к уравнению (23) теряется информация и на периоде колебаний

Итак, сферически симметричная область с радиусом Бора - основное состояние, формируется в результате быстрого диффузионного процесса в открытой системе атомов-осцилляторов в флуктуационном электромагнитном поле. Мы покажем теперь, что при обосновании соотношения неопределенности Гейзенберга представление о системе атомов, как об открытой системе, позволяет лучше понять физическое содержание этого фундаментального результата квантовой теории.

## 6 Статистическое представление принципа неопределенности Гейзенберга

### 6.1 Две интерпретации принципа (соотношения) неопределенности Гейзенберга

Обратимся к одному из самых популярных курсов квантовой механики ([21]). Символично, что первым в нем является параграф "Принцип неопределенности". На стр. 14 этого курса читаем:

"Таким образом, механика, которой подчиняются атомные явления, - так называемая *квантовая* или *волновая механика*, должна быть основана на представлениях о движении, принципиально отличных от представлений классической механики. В квантовой теории не существует понятия траектории частицы. Это обстоятельство составляет содержание так называемого *принципа неопределенности* - одного из основных принципов квантовой механики, открытого Гейзенбергом в 1927 году.

Отвергая обычные представления классической механики, принцип неопределенности обладает, можно сказать, отрицательным содержанием. Естественно, что сам по себе он совершенно недостаточен для построения на его основе новой механики частиц. В основе такой теории должны лежать, конечно, какие-то положительные утверждения, которые будут рассмотрены ниже".

К вопросу обоснования принципа неопределенности Гейзенберга можно подойти с другой позиции. Она основана на представлении уравнения Шредингера, как одного из уравнений механики сплошной среды. В этом отношении, как уже указывалось выше, оно аналогично уравнению Эйлера в гидродинамике, уравнению Власова в теории плазмы

и кинетическому уравнению свободномолекулярного течения Больцмана. Как и любые уравнения механики сплошной среды, уравнение Шредингера является приближенным, поскольку в нем потеряна информация о движениях на масштабах внутри точек сплошной среды. Все уравнения сплошной среды с неизбежностью являются диссипативными.

Однако, как и в перечисленных выше примерах уравнений сплошной среды, диссипация в уравнении Шредингера во внимание не принимается. Это может быть оправдано лишь в некоторых частных случаях. Однако, без учета диссипации невозможно описать, например, излучение и поглощение атомами, эволюцию к равновесному состоянию. Для этого надо использовать, как это и делается уже в течение многих лет, квантовые диссипативные кинетические уравнения для матрицы плотности или соответствующих функций распределения. Известны попытки (см., например [10], [11], [23]), использовать уравнения Ланжевена непосредственно для волновой функции.

При использовании тех или иных уравнений сплошной среды, например уравнений Фоккера-Планка или Эйнштейна-Смолуховского, понятие частицы и ее траектории теряет смысл: в сплошной среде нет частиц!

Вернемся к соотношению неопределенности Гейзенберга.

Как мы уже видели выше, в теории газов и плазмы и в теории броуновского движения уравнения сплошной среды являются диссипативными кинетическими уравнениями. На их основе могут быть вычислены дисперсии координат и импульсов, которые входят в соотношение неопределенности Гейзенберга. В чем же тогда квантовая специфика соотношения неопределенности? На каких предпосылках основан вывод этого фундаментального соотношения?

Здесь существенны два момента.

Квантовая теория обязана своим существованием открытию Планком кванта действия  $\hbar$ . Кванту действия пропорциональна длина волны де Бройля  $\lambda_B = \hbar/mv$ . При условиях, когда длина волны де Бройля порядка или больше характерного масштаба ( $\lambda_B \geq L$ ), возникает необходимость замены числового представления физических величин соответствующими операторами.

Представление физических величин в виде операторов и наличие волновой функции, с помощью которой вычисляются средние значения физических величин, соответствующих тем или иным операторам, достаточно, как мы увидим, для установления соотношения неопределенности Гейзенберга. При этом вид уравнения для волновой функции, т.е. вид уравнения Шредингера, не является существенным. Важно лишь само существование волновой функции.

Расчеты дисперсии координаты и импульса могут быть проведены, на основе кинетического уравнения и при отличной от нуля температуры  $T$ . В чем же отличие от соотношения Гейзенберга?

Дело в том, что произведение дисперсий при  $T \neq 0$  зависит не только от постоянной Планка - кванта действия, но и от частоты осциллятора и температуры. В квантовой же теории это произведение остается конечным и в пределе нулевой температуры. Оно



определяется при  $T = 0$  лишь квантом действия и не зависит от параметра системы - собственной частоты осциллятора.

Именно в этом и состоит общность соотношения неопределенности Гейзенберга. Оно ограничивает произведение дисперсий не только координаты и импульса, но и любой пары некоммутирующих величин.

Таким образом, при  $T = 0$  соотношение неопределенности Гейзенберга не зависит от характерных параметров системы и, тем самым, является общим принципом квантовой теории открытых систем. Оно отражает условие равновесия системы атомы-поле в приближении сплошной среды при нулевой температуре.

Отметим, что состояние системы атом-поле при  $T = 0$  характеризуется отличным от нуля значением энтропии. Оно определяет константой, к которой стремится энтропия в пределе  $T \rightarrow 0$ . Этот результат служит иллюстрацией теоремы Нернста. В формулировке Планка она гласит:

*при  $T \rightarrow 0$  энтропия стремится к постоянному значению. При этом все процессы, происходящие при нулевой температуре, идут без изменения энтропии.*

Прежде, чем переходить к установлению соотношения неопределенности Гейзенберга, рассмотрим кратко вопрос об области масштабов, в которой необходимо квантовое описание. Мы увидим, что она ограничена как со стороны больших, так и со стороны малых масштабов.

## 7 Два "выхода" из области квантовой теории

### 7.1 "Выход" в сторону больших масштабов

Известно, что описание перехода от квантовых уравнений к соответствующим классическим уравнениям связан с определенными математическими трудностями и, в общем случае, не является простой задачей. Это следует, в частности из того, что процессы в сложных системах характеризуются несколькими длинами волн де Бройля. Например, для системы атомов водорода имеются, по меньшей мере две длины, соответственно, для электронов и атомов, как целого. Они существенно различны. Возможен поэтому "частичный" переход от квантового описания к классическому, когда, например, классическим является движение атомов как целого, а движение электронов в атомах - квантовым.

Таким образом, для перехода к классическому описанию необходимо, чтобы характерная длина задачи была бы много больше соответствующей длины де Бройля. Это условие ограничивает "поле действия" квантовой теории со стороны больших масштабов.

Естественно, что и в классической области можно производить расчеты на основе квантовой теории, а в окончательных результатах производить предельный переход

$\hbar \rightarrow 0$ . Это означает, что квантовая теория является более общей или, иными словами, классическая теория является предельным случаем квантовой при  $\hbar \rightarrow 0$ .

## 7.2 "Выход" в сторону малых масштабов. "Классический квант действия"

Возникает вопрос: Имеются ли ограничения на применимость квантовой теории со стороны малых масштабов? На этот вопрос едва ли можно в настоящее время дать полный ответ. Можно сделать, все же, некоторые полезные замечания [16], [18].

Основываясь на масштабах Бора  $x_0$  и  $1/\omega_0$ , через постоянную тонкой структуры  $\mu = e^2/\hbar c$  вводим меньшие масштабы длины и времени:

$$r_e \approx \mu \lambda_C \approx \mu^2 x_0; \quad \tau_e \approx \mu \frac{\lambda_C}{c} \approx \mu^2 \frac{1}{\omega_0}. \quad (34)$$

Мы видим, что от параметров Бора можно сделать "два шага" в сторону меньших масштабов длины. От соответствующей скорости  $v_0$  в сторону больших скоростей можно, из-за конечности скорости света, сделать лишь один шаг:

$$\frac{v_0}{\mu} = \frac{e^2}{\mu \hbar} = c. \quad (35)$$

Таким образом, для параметров длины и времени на первом шаге приходим к масштабам Комтона. Это позволяет, с учетом определения масштабов на "первом шаге", сделать на основании соотношения Гейзенберга две оценки:

$$x_0 m v_0 \sim \lambda_C m c \sim \hbar. \quad (36)$$

На следующем шаге уже невозможно удовлетворить соотношению Гейзенберга, так как при этом масштаб длины уменьшается, а скорость уже на первом шаге равна скорости света и, следовательно, дальше расти не может. В результате приходим к противоположному неравенству - произведение разброса координаты и импульса много меньше постоянной Планка:

$$r_e m c \sim \frac{e^2}{c} \sim \mu \hbar \ll \hbar. \quad (37)$$

При этом возникает классическая комбинация универсальных постоянных размерности действия - "постоянная Томсона", которая много меньше постоянной Планка.

Таким образом, имеется выход в область "классической теории" в сторону малых масштабов. Слова классическая теория поставлены в скобки, поскольку действие также "квантуется", однако, величина "кванта действия Томсона"  $e^2/c$  много меньше постоянной Планка.

## 8 Осцилляторная форма соотношения Гейзенберга

Из курсов квантовой механики известно, что соотношение неопределенности Гейзенберга следует из очевидного неравенства

$$\int \left| \frac{x}{L} \psi + L \frac{d\psi}{dx} \right|^2 \frac{dx}{L} \geq 0; \quad \int |\psi|^2 \frac{dx}{L} = 1. \quad (38)$$

Здесь  $L$  произвольный параметр длины и  $\psi(x, t)$  некоторая волновая функция. Не будем предполагать, что функция  $\psi(x, t)$  удовлетворяет уравнению Шредингера. Зависимость от времени введена лишь для общности. Существенно лишь, что с помощью функции  $\psi(x, t)$  можно по правилам квантовой механики находить средние значения любых физических величин. В их число входят и дисперсии координаты и импульса.

Выражение (38) представляет квадратичное неравенство (см. ниже), коэффициенты которого определяются дисперсиями координаты и импульса. Из него и следует соотношение неопределенности Гейзенберга (см. ниже).

Для наших целей удобно преобразовать исходное неравенство.

Используя определение (2) для квантовой функции распределения Вигнера  $f(x, p, t)$ , представим это неравенство в иной эквивалентной форме :

$$\int \left( \frac{x^2}{L^2} + \frac{L^2 p^2}{\hbar^2} \right) f(x, p, t) \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \geq 1. \quad (39)$$

Его левую часть можно трактовать как среднее значение энергии гармонического осциллятора, собственная частота которого определяется выражением

$$\omega_0 = \frac{\hbar}{mL^2}; \quad \frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \quad (40)$$

Таким образом,

$$\int \left( \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} + \frac{p^2}{2m} \right) f(x, p, t) \frac{dx dp}{2\pi\hbar} \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \quad (41)$$

Это неравенство означает, что средняя энергия произвольного гармонического осциллятора не может быть меньше энергии нулевых колебаний на собственной частоте  $\omega_0$

$$\langle E \rangle \equiv \frac{m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle}{2} + \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \quad (42)$$

Приведенные неравенства, в зависимости от обозначения произвольного параметра сводятся к одному из двух квадратичных неравенств

$$L^4 - \frac{\hbar^2}{\langle p^2 \rangle} L^2 + \hbar^2 \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle p^2 \rangle} \geq 0; \quad (43)$$

или

$$\omega_0^2 - \frac{\hbar}{m \langle x^2 \rangle} \omega_0 + \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2 \langle x^2 \rangle} \geq 0. \quad (44)$$

Чтобы получить соотношение неопределенности, представим неравенство (43) в виде

$$\left(L^2 - \frac{\hbar^2}{2\langle p^2 \rangle}\right)^2 \geq \left(\frac{\hbar^2}{2\langle p^2 \rangle}\right)^2 - \hbar^2 \frac{\langle x^2 \rangle}{\langle p^2 \rangle}. \quad (45)$$

Поскольку левая часть здесь положительна, то для выполнения неравенства при произвольных значениях параметра  $L^2$  (или при произвольных значениях частоты  $\omega_0$ ) правая часть не может быть отрицательной. Из этого условия и следует соотношение неопределенности в стандартной его форме

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (46)$$

Заметим, что в общем случае параметры  $L$  и  $\omega_0$  имеют произвольные значения. Однако, при знаке "=" они связаны с дисперсией координаты или импульса соотношениями

$$L^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0} = 2\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2\langle p^2 \rangle} \quad (47)$$

или в иной форме

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{m} = m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2mL^2} = \frac{1}{2}\hbar\omega_0. \quad (48)$$

Из приведенных формул следует, что, по-отдельности, дисперсии координаты и импульса зависят от произвольного параметра  $\omega_0$  (или  $L$ ). Эта зависимость выпадает только из произведения дисперсий. Благодаря этому при нулевой температуре соотношение Гейзенберга и является универсальным.

Отметим еще раз, что для вывода соотношения неопределенности необходимо лишь наличие квантовых распределений - функций Вигнера, по которым определяются дисперсии координаты и импульса. Мы использовали для определения дисперсий функцию Вигнера  $f(x, p, t)$ . Она связана с волновой функцией  $\psi(x, t)$  соотношением, которое следует из (2)

$$f(x, p, t) = \frac{1}{(2\pi)} \int \psi\left(x + \frac{1}{2}\hbar\tau, t\right) \psi^*\left(x - \frac{1}{2}\hbar\tau, t\right) \exp(-i\tau p) \frac{(2\pi\hbar)}{L} d\tau \quad (49)$$

$$\int f(x, p, t) \frac{dx dp}{2\pi\hbar} = \int |\psi(x, t)|^2 \frac{dx}{L} = 1. \quad (50)$$

Через функцию Вигнера выражаются функции распределения значений координаты и импульса

$$f(x, t) \equiv |\psi(x, t)|^2 = \int f(x, p, t) \frac{L dp}{2\pi\hbar}, \quad (51)$$

$$f(p, t) \equiv |c(p, t)|^2 = \int f(x, p, t) \frac{dx}{L}. \quad (52)$$

Итак, для доказательства соотношения неопределенности, как уже было отмечено, нет необходимости знать уравнения Шредингера для волновых функций  $\psi(x, t)$ ,  $c(p, t)$  или соответствующее уравнение для квантовой функции распределения Вигнера. Важно лишь, что такие распределения существуют.

В чем же тогда физическое содержание этого соотношения?

Согласно неравенству (41) оно состоит в утверждении, что средняя энергия осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$  в любом состоянии, которое характеризуется функцией распределения Вигнера  $f(x, p, t)$ , не может быть меньше нулевой энергии  $(1/2) \hbar \omega_0$ :

$$\langle E \rangle \equiv \int \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} f(x, t) \frac{dx}{L} + \int \frac{p^2}{2m} f(p, t) \frac{L dp}{2\pi \hbar} \geq \frac{1}{2} \hbar \omega_0. \quad (53)$$

Оба неравенства (41) и (53) эквивалентны, естественно неравенству (42).

Возникает естественный вопрос: Если физическое содержание неравенства Гейзенберга является столь простым, то почему оно является столь общим в квантовой теории?

Для ответа на него надо иметь в виду следующее.

В исходном неравенстве (38)  $L$  является произвольным параметром размерности длины. По этой причине речь идет, в общем случае, о некотором обобщенном осцилляторе, собственная частота которого связана с произвольным параметром длины  $L$  соотношением (40). С учетом этого неравенство (42) можно переписать в виде

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2} \frac{\langle x^2 \rangle}{L^2} + \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2mL^2}. \quad (54)$$

При этом открывается возможность трактовать его как утверждение, что квантовая комбинация дисперсий координаты и импульса не может быть меньше энергии основного состояния для квантового движения свободной частицы в бесконечно глубокой одномерной яме ширины  $L$ .

Такая широкая возможность интерпретации исходных неравенств и делает соотношение неопределенности Гейзенберга одним из самых общих соотношений квантовой теории. Общность соотношения неопределенности (46) проявляется и в том, что оно не содержит параметра  $L$  и, следовательно, и  $\omega_0$ .

Осцилляторная трактовка соотношения неопределенности привлекает своей наглядностью и, вместе с тем, удобна для обобщения приведенных результатов на случай не нулевой температуры.

## 9 Квантовая функция распределения при знаке "="

### 9.1 Квантовая функция распределения Вигнера

При знаке "=" исходное неравенство превращается в уравнение, решение которого приводит к распределению Гаусса

$$|\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle x^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle}\right). \quad (55)$$

Соответствующее решение уравнения из (39) представляется в виде распределения Гаусса по переменным  $x$  и  $p$ . Оно представляет пример функции Вигнера для гармонического осциллятора с собственной частотой  $\omega_0$

$$f(x, p) = \frac{\hbar}{\sqrt{\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\langle x^2 \rangle} - \frac{p^2}{2\langle p^2 \rangle}\right). \quad (56)$$

Дисперсии  $\langle x^2 \rangle, \langle p^2 \rangle$  определяются формулами (48).

Это решение можно использовать и при отличной от нуля температуры. При этом в формулах (48) надо произвести замену

$$\frac{1}{2}\hbar\omega_0 \rightarrow \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \equiv k_B T_{\omega_0}. \quad (57)$$

Обобщим приведенные выше неравенства на случай отличной от нуля температуры.

## 9.2 Соотношение неопределенности Гейзенберга для отличной от нуля температуры

### 9.2.1 Осцилляторная модель

При отличной от нуля температуры неравенство (42) принимает вид

$$\frac{m\omega_0^2 \langle x^2 \rangle}{2} + \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \geq \frac{1}{2}\hbar\omega_0 \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \equiv k_B T_{\omega_0}. \quad (58)$$

Перепишем его в виде, аналогичном неравенству (44)

$$\omega_0^2 - \frac{\hbar}{m\langle x^2 \rangle} \omega_0 \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} + \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2 \langle x^2 \rangle^2} \geq 0. \quad (59)$$

Его, в свою очередь, можно представить в виде

$$\left(\omega_0 - \frac{\hbar}{2m\langle x^2 \rangle} \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)^2 \geq \left(\frac{\hbar}{2m\langle x^2 \rangle} \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T}\right)^2 - \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2 \langle x^2 \rangle^2}. \quad (60)$$

Отсюда и следует обобщенное на произвольные значения температуры соотношение неопределенности Гейзенберга

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \left( \coth \frac{\hbar\omega_0}{2k_B T} \right)^2. \quad (61)$$

Правая часть зависит теперь не только от  $\hbar$ , но и от двух параметров: собственной частоты осциллятора и температуры. При  $T = 0$  оно переходит в соотношение неопределенности Гейзенберга (46).

По-отдельности дисперсии координаты и импульса при произвольной температуре можно определить с помощью квантовой функции распределения

$$f(x, p) = \frac{\hbar\omega_0}{k_B T_{\omega_0}} \exp\left(-\frac{m\omega_0^2 x^2}{2k_B T_{\omega_0}} - \frac{p^2}{2mk_B T_{\omega_0}}\right). \quad (62)$$

### 9.2.2 Модель "свободной частицы"

Для "модели свободной частицы" собственная частота заменяется на частоту ударов частицы о стенку:

$$\omega_0 \rightarrow \frac{\hbar}{mL^2}. \quad (63)$$

При отличной от нуля температуры надо произвести замену нулевой энергии свободного движения:

$$\frac{\hbar^2}{2mL^2} \rightarrow \frac{\hbar^2}{2mL^2} \coth \frac{\hbar^2}{2mL^2 k_B T} \equiv k_B T_L. \quad (64)$$

В результате обобщенное на произвольные температуры соотношение неопределенности Гейзенберга принимает вид:

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \left( \coth \frac{\hbar^2}{2mL^2 k_B T} \right)^2 \quad (65)$$

## 9.3 Предельные случаи

Приведенные соотношения неопределенности зависят при фиксированном значении  $\hbar$  от двух параметров:  $\omega_0, T$  для осцилляторной модели и  $L, T$  для модели "свободной частицы". В связи с этим возможны различные предельные случаи:

1.  $T = 0$  при произвольных значениях  $\omega_0, L$ .

Обобщенные соотношения неопределенности совпадают с неравенством Гейзенберга (46).

2. Классический осциллятор:  $\omega_0 = \text{const}, T \rightarrow \infty$  ( $\hbar\omega_0/2k_B T \ll 1$ ).

В этом случае  $k_B T_{\omega_0} \rightarrow k_B T$  и соотношение неопределенности для осциллятора принимает классический вид:

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{\hbar^2}{4} \left( \frac{2k_B T}{\hbar\omega_0} \right)^2 = \frac{(k_B T)^2}{\omega_0^2}. \quad (66)$$

3. "Свободная частица" в яме:  $L = \text{const}, T \rightarrow \infty$  ( $\hbar^2/2mL^2 k_B T \ll 1$ ).

В этом случае  $k_B T_L \rightarrow k_B T$  и соотношение неопределенности принимает вид:

$$\langle x^2 \rangle \langle p^2 \rangle \geq \frac{(k_B T)^2}{\omega_0^2} \text{ при } \omega_0 = \frac{\hbar}{mL^2}. \quad (67)$$

Оно остается квантовым, так как частота достижения границ в яме ширины  $L$  пропорциональна постоянной Планка.

Функцию Вигнера (55), (56) можно использовать для расчета квантовой двухточечной корреляционной функции в равновесном состоянии при произвольных температурах [8], [19].

## 10 Чистый и смешанный ансамбли

Вопрос о "чистом ансамбле" обсуждался уже в начале этой статьи. Было отмечено, что трактовка этого понятия не является однозначной. Введение чистого ансамбля полностью оправдано лишь при полном описании на основе уравнения Шредингера для многомерной волновой функции набора всех переменных атомов и поля или уравнений для соответствующих операторов. Квадрат модуля такой волновой функции трактуется как многомерное распределение по всем переменным рассматриваемой системы.

Такая вероятностная трактовка предполагает наличие квантового статистического ансамбля, который и называется "чистый ансамбль". Таким образом, введение чистого ансамбля предполагает, с одной стороны, возможность, хотя бы в принципе, полного описания квантовомеханической системы. Во-вторых, предполагается статистическая интерпретация результатов такого полного расчета.

Первая предпосылка является, очевидно, идеализацией, которая не может быть реализована. Второе предположение является гипотезой, которую в силу невозможности решения уравнения Шредингера для многочастичной волновой функции, невозможно подтвердить экспериментом.

Представление о полном описании в квантовой теории, как и о соответствующем описании в классической теории, может служить лишь "отправной точкой" для построения более реалистического статистического описания неравновесных процессов в системах с большим числом степеней свободы.

## 11 "Скрытые переменные". Смешанный ансамбль

В понятие "чистый ансамбль" в квантовой механике вкладывают, фактически, иной смысл.

Действительно, "достаточной системой" для описания атомов с учетом испускания, поглощения и рассеяния излучения (и многих других явлений) служит не система атомов, а расширенная система атомов и флуктуационного поля. Однако, традиционно в квантовой механике основой является уравнение Шредингера для волновой функции только атомов, т.е. для функции неполного числа переменных всей "достаточной системы". "Потерянные" переменные являются скрытыми переменными или, в зависимости от задачи, "скрытыми параметрами" или "скрытыми масштабами". Возможность введения большого числа скрытых переменных обусловлена сложностью движения



в системе, которая проявляется, в частности, в наличии динамической неустойчивости движения отдельных "атомов" и, как следствие, перемешивания их траекторий. Это и оправдывает, как уже отмечалось, замену системы "частиц" сплошной средой.

Известны два вида уравнений сплошной среды.

В-первых, недиссипативные уравнения сплошной среды. К их числу, наряду с другими, и относится уравнение Шредингера в том виде, как оно обычно используется в квантовой механике. На основе его решения производится статистическое описание рассматриваемой подсистемы, например атомов в системе атомы-поле. Тем самым используется понятие квантового ансамбля. Он и называется "чистый ансамбль". Это отвечает лишь весьма приближенному описанию статистических свойств открытой системы. Ниже мы приведем пример чистого состояния для системы осцилляторов в флуктуационном электромагнитном поле при нулевой температуре. Но в отличие от чистого состояния (чистого ансамбля) здесь оно имеет место лишь в нулевом приближении по некоторому малому параметру.

При решении некоторых задач пренебрежение диссипацией может быть, разумеется, оправдано. Оно, однако, недостаточно для объяснения основных физических явлений, лишь некоторые из которых были отмечены выше.

Ко второму виду относятся квантовые диссипативные уравнения сплошной среды. Примером может служить приведенное выше уравнение Фоккера-Планка, а также и многочисленные диссипативные уравнения для матрицы плотности, в частности, для квантовой функции распределения Вигнера. Соответствующий статистический ансамбль называется *смешанным*.

Заметим, в связи с этим, что использование уравнения Фоккера-Планка позволяет описать установление равновесного состояния при всех температурах, в частности, и при нулевой температуре. Тем самым и чистое состояние включается в число равновесных состояний. Оно, тем самым, является не свойством квантовой механики, а лишь следствие установления равновесия в диссипативной системе атомы-поле.

Остается открытым фундаментальный вопрос: можно ли представить статистическое описание на основе волновой функции полного набора переменных "достаточной системы" как сглаженное описание по малым масштабам, которые не принимаются во внимание в квантовой электродинамике? Напомним, что наименьшим масштабом длины в квантовой электродинамике является классический радиус электрона  $r_e$  и соответствующее время пролета  $\tau_e = r_e/c$ . Напомним также, что временной интервал  $\tau_e$  играл в рассматриваемой теории роль физически бесконечно малого.

Современная теория поля включает и более мелкие масштабы что дает основание для положительного ответа на поставленный вопрос. Это означает, что на всех уровнях теории квантовомеханическое описание не является полным. Приведенная аргументация склоняет чашу весов в споре Эйнштейна и Бора в сторону Эйнштейна (гл.23 [17]). В заключение отметим следующее.

Для чистого ансамбля функция Вигнера связана с волновой функцией, удовлетворя-

ющей обратимому (недиссипативному) уравнению Шредингера, выражением (2). Благодаря этому, уравнение для функции Вигнера может быть установлено с помощью уравнения Шредингера.

Однако, матрица плотности (или соответствующая функция Вигнера) с учетом диссипации не определяется произведением волновых функций, удовлетворяющих квантовому кинетическому уравнению. По этой причине квантовые диссипативные кинетические уравнения не сводятся к уравнению Шредингера. И, наоборот, квантовые диссипативные уравнения, не могут быть получены на основе соответствующего уравнения Шредингера. При выводе диссипативных уравнений проявляется роль "скрытых переменных" которые не принимаются во внимание в уравнении Шредингера.

Для смешанного ансамбля квантовая функция Вигнера связана не с произведением волновых функций, а с матрицей плотности:

$$f(r, p, R, t) = \quad (68)$$

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \rho(r + \frac{1}{2}\hbar\tau, R, r - \frac{1}{2}\hbar\tau, R, t) \exp(-i\tau p) \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} d\tau$$

$$\int f(r, p, R, t) \frac{dr dp dR}{(2\pi\hbar)^3 V} = \int \rho(r, r, R, t) \frac{dr dR}{v^2} = 1. \quad (69)$$

Таким образом, для диссипативной системы и, следовательно, для смешанного ансамбля задача не может быть сведена к решению уравнения Шредингера. Диссипативное уравнение для матрицы плотности требует независимого вывода. Определение функции Вигнера соотношением (68) означает лишь связь двух матриц плотности, соответственно, в смешанном и координатном представлениях.

## 12 Проявление скрытых масштабов при рассеянии света на атомах

В квантовой механике пространственное распределение положений электрона в основном состоянии является изотропным и сосредоточено в области, которая определяется радиусом Бора. На основании изложенного считаем, что такое представление основного состояния отвечает приближению сплошной среды.

Модель сплошной среды отвечает выбору "точки", размер которой мал по сравнению с характерной длиной (здесь радиусом Бора), и которая содержит много структурных элементов. Здесь пространственным структурным элементами служат области, определяемые длиной Комптона - наименьшим квантовым масштабом в системе атомы-флуктуационное электромагнитное поле.

Физически бесконечно малым пространственным масштабом квантовой сплошной среды служит длина Томсона, а соответствующим временным масштабом - время диффузии электрона по объему с радиусом Бора.

В связи с этим полезно выявить явления, при которых, наряду с радиусом Бора, проявляются меньшие масштабы, характеризующие пространственную структуру основного состояния. Примером может служить рассеяние света на атомах.

Ограничимся простейшим примером. Именно, будем рассматривать рассеяние достаточно слабого монохроматического излучения на атомах-осцилляторах с собственной частотой  $\omega_0$ . Соответствующее эффективное сечение  $\sigma$  определяется выражением [22], [17]

$$\sigma = \sigma_T \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma^2}. \quad (70)$$

Здесь использовано обозначение для сечения Томсона при рассеянии электромагнитной волны на свободных электронах. Его линейный размер определяется длиной Томсона:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (71)$$

Проследим за уменьшением сечения  $\sigma$  по мере уменьшения частоты излучения от значения  $\omega_0$ . При условии точного резонанса

$$\sigma = \sigma_T \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} = \frac{8\pi}{3} \lambda_0^2 \sim \frac{\sigma_T}{\mu^6} \gg \sigma_T, \quad \lambda_0 = c\omega_0. \quad (72)$$

Здесь введено обозначение для длины волны, отвечающей частоте Бора.

Таким образом, при точном резонансе эффективное сечение определяется длиной волны и, следовательно, много больше сечения основного состояния, которое определяется радиусом Бора.

Проследим за уменьшением сечения по мере уменьшения частоты. При этом мы попадаем в область прозрачности, когда можно пренебречь затуханием за счет радиационного трения. Выражение для сечения принимает тогда вид:

$$\sigma = \sigma_T \frac{\omega^2 \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sim \sigma_T \frac{1}{4} \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 - \omega)^2}. \quad (73)$$

Рассмотрим три характерных значения расстройки.

$$1. \quad \omega_0 - \omega = \frac{\gamma}{\mu}. \quad (74)$$

При этом условии выражение для сечения принимает вид:

$$\sigma = \sigma_T \frac{1}{\mu^4} \sim x_0^2. \quad (75)$$

Сечение в этом случае определяется уже меньшим по сравнению с длиной волны - масштабом Бора.

$$2. \quad \omega_0 - \omega = \frac{\gamma}{\mu^2}. \quad (76)$$

Сечение в этом случае определяется минимальным квантовым масштабом - длиной Комптона

$$\sigma = \sigma_T \frac{1}{\mu^2} \sim \lambda_C^2. \quad (77)$$

Наконец, еще один случай

$$2. \quad \omega_0 - \omega = \frac{\gamma}{\mu^3} \sim \omega_0. \quad (78)$$

В этом случае

$$\sigma \sim \sigma_T \sim \frac{8\pi}{3} r_e^2. \quad (79)$$

Таким образом, сечение определяется теперь минимальным характерным масштабом рассматриваемой системы атом-электромагнитное поле. Напомним, что этот масштаб определяет и физически бесконечный масштаб сплошной среды.

При дальнейшем уменьшении частоты сечение (70), становится меньше сечения Томсона. Однако, при этом мы выходим за рамки рассматриваемой теории и, по-видимому, за рамки экспериментальных возможностей для системы атомы-электромагнитное поле.

## 13 Заключение

Изложенное в настоящей статье представляет лишь краткое введение в физику квантовых открытых систем. Естественно, что многие важные вопросы остались при этом "за бортом". Это, например, вопрос о возможности введения источников Ланжевена непосредственно в уравнение Шредингера [10], [11]. С этим тесно связан вопрос о непрерывных измерениях в квантовой теории [23]. Он, в свою очередь, возвращает нас к общей проблеме включения необратимости в квантовую теорию.

Выше были рассмотрены, разумеется, далеко не все основные понятия физики квантовых открытых систем. Не обсуждался, в частности, вопрос о редукции волновой функции в процессе измерения. В связи с этим, наряду с указанной выше литературой, надо отметить один из последних обзоров, посвященных анализу широкого круга основных понятий квантовой теории [20].

Отметим, что в первом томе книги [17] имеется специальная глава с названием "Мост от классической статистической теории открытых систем к квантовой теории" Это, однако, был лишь первый "мост" .

Одного "моста" оказалось явно недостаточно. По этой причине в подготовленном к печати втором томе этой книги [18] имеется глава с названием "Второй мост к квантовой теории открытых систем". Материал этой главы также отражен в настоящей статье.

Оказалось, однако, что для рассмотрения всех наиболее важных понятий и явлений квантовой теории открытых систем недостаточно и двух "мостов".

В связи с этим в настоящее время готовится третий том книги "Статистическая теория открытых систем", который будет целиком посвящен физике квантовых открытых систем [19].

## Список литературы

- [1] Brittin W.E., Chapell W.R. *The Wigner Distribution Function and Second Quantization in Phase Space*. *Rev of Mod. Physics* **34** 620, 1961.
- [2] Bohm D. *On the possible Interpretation of Quantum Mechanics on the Basis of Concept of "Hidden Parameters"*, 1952
- [3] De Broglie L. *La Physique Quantique Resterat-Elle Indeterministe?* Paris, 1953.
- [4] Dirac P.A.M. *Directions in Physics*. John Wiley and Sons New York, 1978.
- [5] Dodonov V.V., Man'ko V.V., *Phys.Rev. A* **20** 550, 1979.
- [6] Einstein A. *Strahlung Emission und Absorption nach der Quantentheorie*. *Verhandl.Dtsch.Phys.Ges.***18**,318, 1916.
- [7] Einstein A.,Podolski B.,Rosen N. *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* *Phys.Rev.***47**,777, 1935.
- [8] *Статистическая механика "Мир", Москва, 1974.*
- [9] Hillery M., O'Connell R.F., Scilly M.O., Wigner E.P. *Distribution functions in physics: Fundamentals*. *Physics Reports* **106** 122-167, 1984.
- [10] Кадомцев Б.Б. *Динамика и информация*. УФН **164**,449, 1984.
- [11] Кадомцев Б.Б. *Динамика и информация*. Москва: Редакция журнала "Успехи физических наук, 1997 (in Russian).
- [12] Klimontovich Yu.L. 1958. *On the Method of "Second Quantization" in Phase Space*. *Soviet Physics JETP* **6 (33)** 752.
- [13] Климонтович Ю.Л., Силин В.П. *Спектры систем взаимодействующих частиц и коллективные потери при прохождении частиц через вещество*. УФН **70** 247; Klimontovich Yu.L. and Silin V.P. 1960 (1962). *On the Spectra of Systems of Interacting Particles and the Collective Losses on Passage of Particles Through Matter*. *Fortschr.Physik*, **10** 389.

- [14] Климонтович Ю.Л. *Кинетическая теория электромагнитных процессов*. Москва: "Наука", 1980; Klimontovich Yu.L. 1980 *The Kinetic Theory of Electromagnetic Processes*. Springer Berlin, Heidelberg, New York, 1983.
- [15] Климонтович Ю.Л. *Статистическая физика*. "Наука", Москва, 1982; Harwood Academic Publishers New York, 1986.
- [16] Климонтович Ю.Л. *Статистическое обоснование уравнения Шредингера*. ТМФ **97**,3.
- [17] Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем, Т. I*. Москва: "Янус", 1995; Klimontovich Yu.L.: *Statistical Theory of Open Systems, Vol. I*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.
- [18] Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем, Т. II*. "Янус", Москва, 1999.
- [19] Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем, Т. III*. Москва: "Янус", 2001 (готовится к печати).
- [20] Клышко Д.Н. *Основные понятия квантовой физики с операционной точки зрения*. УФН **168** (1998) 973.
- [21] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика*. "Наука", Москва, 1974.
- [22] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля*. "Наука", Москва, 1988.
- [23] Менский М.Б. *Явление декогеренции и теория непрерывных квантовых измерений*. УФН **168** (1998) 1017.
- [24] Peres A. *Quantum theory: Concepts and Methods* Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [25] Prigogine I. *From Being to Becoming*. Freeman, San Francisco, 1980; Пригожин И.Р. *От существующего к возникающему*. Москва: "Наука", 1985.
- [26] Prigogine I., Stengers I. *Order out of Chaos*. Heinemann, London, 1984; Пригожин И.Р., Стенгерс И. *Порядок из хаоса*. Москва: "Мир", 1996.
- [27] Prigogine I. *Why Irreversibility? The formulation of classical and quantum Mechanics for nonintegrable Systems*. International Journal Of Bifurcation and Chaos **5** 3 (1995).
- [28] Татарский В.И. *Вигнеровское представление квантовой механики*. УФН **139**, 587 (1983).