

Нелокальные первые интегралы полиномиальных векторных полей на плоскости.*

Р.И. Богданов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Излагается понятие нелокального первого интеграла для полиномиальных векторных полей на плоскости. Здесь слово "нелокальный" означает, что интеграл зависит от конечного числа различных точек на фазовой плоскости. Таким образом, обобщается понятие классического первого интеграла векторных полей, в определении которого фигурирует одна точка в фазовом пространстве.

Обсуждается приложение ко II-й части 16-й проблемы Гильберта.

1 Введение

1. Понятие нелокального (первого) ¹ интеграла для векторных полей на плоскости заключено в следующей формуле

$$F = \sum_{j=1}^N f_j(\mathbf{x}_j), \quad (1)$$

где N - целое положительное число, f_j - подходящие функции на фазовой плоскости, а $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^2$ - произвольные, не совпадающие между собой, точки фазовой плоскости. Через каждую точку \mathbf{x}_j проходит фазовая кривая векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ на фазовой плоскости:

$$\dot{\mathbf{x}}_j(t_j) = \mathbf{V}(\mathbf{x}_j(t_j)), \quad \mathbf{x}_j(t_0) = \mathbf{x}_j. \quad (2)$$

Если можно так согласовать движения точек по фазовым кривым $\mathbf{x}_j(t_j)$:

$$t_j = g_j(t), \quad g_j(0) = t_0, \quad (3)$$

что величина

$$F(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, t) = \sum_{j=1}^N f_j(\mathbf{x}_j(g_j(t))) \quad (4)$$

*Работа выполнена частично при поддержке фонда РФФИ грант N98-01-00053 а.

¹Для сокращения текста слова в скобках будут опускаться, если не возникает разночтений.

не зависит от t , то F называется нелокальным первым интегралом векторного поля V . Точки $x_j(g_j(t))$, естественно, назвать носителем нелокального интеграла векторного поля $V(x)$.

2. Понятие классического первого интеграла отвечает случаю $N = 1$ в (1) (см. [1], [5], [6], [24]). К сожалению, первые интегралы для векторных полей общего положения не всегда существуют, а если существуют, то обладают рядом патологий.

Например, в окрестности (не)устойчивого асимптотически состояния равновесия все непрерывные первые интегралы являются тождественными постоянными. В окрестности стационаров гиперболического типа существуют гладкие первые интегралы, но они являются плоскими функциями на сепаратрисах седла (см. [15]).

Таким образом, вопрос о значениях N в (1), для которых существуют подходящие образующие $f_j(x)$ и $g_j(t)$ в (3), определяющие нелокальный первый интеграл является интересным и трудоемким. Мы даем частичный ответ на этот вопрос в предположении полиномиальности векторного поля на фазовой плоскости.

Если через n обозначить степень полиномиального векторного поля на плоскости, то мы строим нелокальные первые интегралы для значений N удовлетворяющих неравенству $(n + 1) \leq N \leq O(n^2)$ или $2(n + 1) \leq N \leq O(n^2)$ в зависимости от выбора образующих f_j (в частности, см. п.7 ниже).

Ниже излагается решение задачи, сформулированной в пункте 1. при ряде ограничений (впрочем, они все снимаются, но полезно их использовать для упрощения первоначального изложения).

3. Мы рассматриваем касательное расслоение к фиксированной фазовой кривой векторного поля $v(x)$ ($v(x) \neq 0$), которую мы в дальнейшем именуем базой (расслоения). Более того, на каждой касательной мы рассматриваем лишь неотрицательную полупрямую, где ориентация на касательной определяется направлением векторного поля $v(x)$ в соответствующей точке базы. Далее, мы вкладываем неотрицательную полупрямую в фазовую плоскость, пользуясь аффинной структурой на плоскости (касательная к кривой есть прямая на фазовой плоскости). Таким образом, мы получаем накрытие части фазовой плоскости, лежащей по выпуклую сторону от фазовой кривой. Вышеописанное накрытие мы называем полуаффинным. Вышеуказанная конструкция допускает локализацию в окрестности точки базы, в которой мы предполагаем выпуклость фазовой кривой. Это первое ограничение.

Начальные условия в $(1) \div (4)$, т.е. точки x_j , мы предполагаем лежащими на одном слое вышеописанного полуаффинного накрытия. Это второе ограничение.

4. Векторная структура на полуаффинном накрытии возникает естественным образом. Действительно, на каждой касательной к базе определено начало координат на соответствующей прямой на фазовой плоскости: точка касания с базой. Далее, вектор $V(x)$, лежащий на касательной определяет единицу длины на слое: масштаб дается величиной $\|V(x)\|$. Таким образом, полуаффинное накрытие характеризуется парой координат:

t - время на базе; τ - координата на слое, определенная выше.

5. Образующие f_j мы определяем на полуаффинном накрытии. Для этого каждой точке x_j в (1) и фазовой кривой $x_j(t)$, векторного поля $V(x)$, проходящей через эту точку, мы сопоставляем координату на слое $\tau(x_j)$ и, соответственно, график $\tau_j(t)$. Таким образом, мы редуцируем задачу к одномерной неавтономной. Если через $\tau(t)$ обозначить текущую фазовую кривую, то образующая примет вид $f_j = \ln |\tau/\tau_j - 1|$. Безусловно, образующие f_j можно выбирать и в другом виде. Указанный вид образующих является одним из простейших (см., например, п.7 ниже).

6. Дифференциальная форма нелокальных интегралов лежит в основе нашего построения.

Рассмотрим n фазовых кривых векторного поля V , отличных от базы и между собой. Более того, предположим, что эти фазовые кривые трансверсально пересекают слой полуаффинного накрытия, описанного в п. 3 и 4. В п. 5 объяснено, что таким образом возникают n функций на базе τ_1, \dots, τ_n . Заметим далее, что на каждой фазовой кривой есть свое собственное время движения вдоль векторного поля $V(x)$. Обозначим собственное время движения на кривой τ_j через t_j .

Величинам τ_1, \dots, τ_n отвечает определитель Ван-дер-Монда. Соответствующая определителю Ван-дер-Монда матрица в j -м столбце содержит по строкам величины $1, \tau_j, \dots, \tau_j^{n-1}$. Заменим последний элемент в столбце τ_j^{n-1} на величину df_j/dt_j .

Оказывается, модифицированный вышеописанным образом определитель, получившейся матрицы, тождественно по t обращается в нуль. Назовем этот определитель модификацией определителя Ван-дер-Монда.

Раскладывая модифицированный вышеописанным образом определитель Ван-дер-Монда по последней строке мы получаем дифференциальную 1-форму вида:

$$w_1 = \sum \mu_j(x) \cdot df_j,$$

такую, что

$$w_1(v) \equiv 0.$$

7. Интегрирование дифференциальной формы, указанной в п. 5.

Выкладки, приведенные нами в §1., показывают, что форма w_1 имеет кручение на базе. Поэтому интегрирование формы V вдоль фазовой кривой векторного поля приходится выполнять вперед и назад по времени от некоторой точки, чтобы "убить" кручение на базе. Безусловно, форма df_j имеет кручение на кривой $\tau = \tau_j$, но оно "убивается" естественным образом при интегрировании в одну сторону по времени.

Другая возможность заключается в замене образующих f_j . Проще всего определить новые образующие формулой

$$dF_j = (\tau/\tau_j)^k df_j.$$

Новые образующие F_j не имеют кручения на базе при $k \geq 1$, поэтому их можно интегрировать в одну сторону по времени вдоль фазовой кривой векторного поля \mathbf{V} . Таким образом, мы получаем нелокальный первый интеграл с подходящим числом точек в носителе нелокального первого интеграла.

8. Понятие нелокального интеграла является новым в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. С момента возникновения дифференциального исчисления (естественно, и интегрального) в работах И. Ньютона до сих пор идут дискуссии, как понимать те или иные идеи в приложениях к конкретным проблемам. Существует большое количество "парадоксов" в приложениях (на сегодня они особенно актуальны в гидродинамике), которые частично поняты в специальных случаях. Вместе с этим не разобранные "парадоксы" служат развитию науки.

Один из таких "парадоксов" на сегодня связан с попыткой применить понятие нелокального интеграла ко II-й части 16-й проблемы Гильберта (см. [26]) (полный текст см. в [21], см. также [20],[22],[23]). Суть "парадокса" заключается в эффективных оценках числа изолированных предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости. Из излагаемых результатов иногда следует линейная оценка ² числа гомологичных изолированных предельных циклов (типа $n + 2$, где n - степень полиномов, задающих векторное поле на плоскости). Если специальные условия не выполнены, оценки превращаются в $n(n + 1)/2$ (или даже $(n + 4)(n + 5)/2$). На сегодня бытует мнение о том, что такая оценка должна быть квадратичной по n ³.

Нижеследующий текст позволяет говорить о нелокальных интегралах полиномиальных векторных полей. В частности, в математической физике это позволяет по-новому взглянуть, по крайней мере, на четыре проблемы:

- a) понятие кластера в теории частиц приобретает один из вариантов математического обоснования;
- b) появление собственных времен на различных фазовых кривых представляет основу для развития теории относительности;
- c) затухание корреляций (дальний порядок и т.п.) в статистической физике становится всего лишь одной из возможностей динамики, а не абсолютной истиной;
- d) проблема синхронизации в почти периодических движениях.

9. С точки зрения теории обыкновенных дифференциальных уравнений мы получаем возможность с помощью понятия нелокального интеграла по-новому подойти к классическим проблемам. Например:

- a) Какое максимальное число предельных циклов может родиться из особой точки типа "фокус" в полиномиальных векторных полях фиксированной степени (вопрос о "фокусных" или "ляпуновских" величинах в фокусе)? ⁴

²В хороших случаях: например, в выпуклом случае при дополнительных условиях.

³Это мнение возникло в связи с критикой работ Ландиса и Петровского, посвященных II-й части 16-й проблемы Гильберта (см.[25]).

⁴Есть пример бифуркации Андронова (которая на Западе называется бифуркацией Андронова-Хопфа)

- б) Как описать полиномиальные векторные поля с "мешком" неизолированных циклов?
 с) Проблема Арнольда-Гильберта (см. [8]).

Список можно, безусловно, продолжать (см., например, [3], [4], [7], [11], [16], [17], [18], [19]).

10. В заключение мне хочется поблагодарить за полезные обсуждения и замечания В.И. Арнольда, Д.В. Аносова, А.Ф. Филиппова⁵, М.Б. Севрюка, А.М. Лукацкого⁶, В.А. Садовниченко и участников его семинара, где эти результаты впервые докладывались. Особо мне хочется отметить поддержку М.И. Зеликина, на семинаре которого обсуждались нижеизложенные результаты. Я благодарен Э.Б. Винбергу и Л.А. Онищику и участникам их семинара, где докладывались результаты и обсуждалась конструкция §3. Особо мне хочется поблагодарить оргкомитеты конференций "Equadiff-99" (Berlin), и Int. Conf. On Diff. and Func. Diff. Eq. (Moscow, 1999), предоставивших возможность доложить эти результаты и опубликовать их в тезисах (см. [22], [23]). Мне приятно отметить участие руководителя секции "Celestial Mechanics" на конференции "Equadiff99" Кен. Мейер за совет не связывать понятие нелокального интеграла с "бородатой" проблемой Гильберта, что я и делаю. В заключение, я благодарен участникам семинара ЛТФ им. Н.Н. Боголюбова (старшего) Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна Моск. обл.), где докладывались эти результаты и обсуждались их приложения в математической физике.

§2. Построение нетривиального нелокального первого интеграла при наличии выпуклой базы.

2.1. Полуаффинное накрытие фазовой плоскости во внешности выпуклой замкнутой фазовой кривой.

2.1.1. Обозначения. Через C обозначим выпуклую замкнутую фазовую кривую векторного поля V на плоскости.

2.1.2. Определение. Гладкое многообразие с краем, образованное положительными полукасательными к кривой C назовем полуаффинным накрытием внешности кривой C . Отображение накрытия на внешность кривой C определим формулой

$$(t, \tau) \mapsto x(t) + \tau V(x(t)), \quad 2.1$$

где $x(t)$ - точки замкнутой кривой C , $t \in [0, T)$ - время на кривой C , T - период на кривой C , τ - координата на положительной полукасательной к кривой C в точке $x(t)$.

2.1.3. Лемма. Полуаффинное накрытие топологически эквивалентно полуцилиндру $S^1 \times R^+$ и однолистно накрывает внешность кривой C на фазовой плоскости.

при $n \leq 3$ (см. [2], [5]). Есть пример Баутина при $n = 2$ и примыкающие к нему исследования (см. [12]). Есть пример бифуркации Богданова-Тakens (см. [2], [5], [13], [14]).

⁵Д.В. Аносов и А.Ф. Филиппов (независимо) проверили результаты §2.

⁶А.М. Лукацкий проверил результаты §3.

2.1.4. Доказательство леммы 2.1.4 следует из выпуклости кривой C . Действительно, каждой точке x из внешности кривой C отвечают две касательные к кривой C . Поскольку векторное поле V не обращается в нуль на кривой C , то положительная полукасательная определена единственным образом.

2.2. Поднятие векторного поля на полуаффинное накрытие.

2.2.1. Определение. Точку (t, τ) назовем регулярной, если в этой точке якобиан отображения (2.1) отличен от нуля.

2.2.2. Лемма. Точка (t, τ) не является регулярной в том и только в том случае, когда - либо $\tau = 0$ либо кривизна кривой C в точке $x(t)$ обращается в нуль.

2.2.3. Доказательство леммы 2.2.2. Обозначая через $Dx/D(t, \tau)$ матрицу Якоби отображения (2.1) в точке t, τ , получаем, дифференцируя (2.1),

$$Dx/D(t, \tau) = \left(V(x(t)) + \tau \frac{DV}{Dx} \Big|_{x(t)} \cdot V(x(t)), V(x(t)) \right), \quad (2.2)$$

где $V(x)$ данное векторное поле, записанное в виде вектор столбца, а запись (\cdot, \cdot) обозначает матрицу 2×2 , составленную из двух вектор столбцов.

Из (2.2) следует, что якобиан отображения (2.1) дается выражением

$$\det Dx/D(t, \tau) \cdot \partial/\partial x \wedge \partial/\partial y = \tau \frac{DV}{Dx} \Big|_{x(t)} \cdot V(x(t)) \wedge V(x(t)),$$

где $(\cdot \wedge \cdot)$ обозначает внешнее произведение двух векторов на плоскости.

Следовательно $\det Dx/D(t, \tau) = 0$, влечет $\tau = 0$ либо

$$\tau \frac{DV}{Dx} \Big|_{x(t)} \cdot V(x(t)) \wedge V(x(t)) = 0,$$

Последнее условие выделяет на кривой C точки нулевой кривизны.

2.2.4. Следствие. Векторному полю $V(x)$ отвечает векторное поле $w(t, \tau)$ на накрывающем многообразии в случае выпуклой кривой C (при $\tau = 0$ формула (2.2) показывает, что $V(x(t))$ поднимается тривиально). Более того, в случае выпуклой кривой C точки (t, τ) при $\tau > 0$ - регулярные.

2.3. Инфинитезимальное вычисление нелокального первого интеграла.

2.3.1. Определение. Пусть $\tau_1 \dots \tau_n$ интегральные кривые векторного поля V в координатах (t, τ) , проходящие соответственно через точки $P_j = \{(t, \tau_j)\}$, $j = 1 \div n$. Точку P_j назовем регулярной⁷, если векторное поле V в точке P_j трансверсально полупрямой $t = \text{Const}$. Через $t_j, j = 1 \div n$ обозначим время на кривой τ_j , определяемое движением вдоль векторного поля V на кривой τ_j .

⁷Определение 2.3.1 использует слова регулярная точка, использованные в 2.2.1 в другом смысле. В силу следствия 2.2.4 понятие регулярности в смысле 2.2.1 не используется ниже.

2.3.2. Лемма. Пусть P_j - различные регулярные точки. Тогда для всякой кривой τ векторного поля \mathbf{V} в окрестности регулярной точки (t, τ) , отличной от $\{P_j\}$ имеет место соотношение

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \tau_1^{n-2} & \dots & \tau_n^{n-2} \\ \frac{d}{dt_1} \ln \left| \frac{\tau}{\tau_1} - 1 \right| & \dots & \frac{d}{dt_n} \ln \left| \frac{\tau}{\tau_n} - 1 \right| \end{vmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

2.3.3. Доказательство леммы 2.3.2. Рассмотрим интегральную кривую $y(t)$ векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, проходящую через точку (t, τ) . Тогда в силу определения координат (t, τ) имеем

$$\mathbf{x}(t) + \tau \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{y}(t). \quad (2.4)$$

Отсюда, дифференцируя (2.4) по t , получаем

$$\left(1 + \frac{d\tau}{dt}\right) \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) + \tau \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t)} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{d\mathbf{y}}{dt}. \quad (2.5)$$

Заметим, что

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \lambda(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{y}), \quad (2.6)$$

так как y интегральная кривая векторного поля \mathbf{V} .

Преобразуем правую часть соотношения (2.6). Заметим для этого, что вектор

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t) + \tau \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) \quad (2.7)$$

полиномиально зависит от τ при фиксированном t , то есть компоненты векторного поля \mathbf{V} являются полиномами степени n по τ . Воспользовавшись интерполяционной формулой Лагранжа, получаем

$$\mathbf{V}(\mathbf{y}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(t) + \tau \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) = \sum_{j=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \mathbf{V}(\mathbf{x}(t) + \tau_j \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))), \quad (2.8)$$

где в качестве узлов интерполяции выбраны точки $\{P_j\}$ и точка $(t, \tau_0 = 0)$.

Соотношение (2.5), в которое подставлено выражение (2.6) в точках $\{P_j\}$, приобретает вид

$$\left(1 + \frac{d\tau_j}{dt}\right) \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) + \tau_j \frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t)} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t)) = \lambda_j(t) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t) + \tau_j \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))) \quad (2.9)$$

Разделив (2.9) на $\lambda_j(t)$, заменим поле V в точках P_j в (2.8) через левую часть модифицированного соотношения (2.9). Измененное таким образом соотношение (2.8) подставим в (2.5) и, приведя подобные члены, преобразуем в линейную комбинацию векторов

$\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ и $\frac{D\mathbf{V}}{D\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}(t)} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$. Условие выпуклости кривой C в точке $\mathbf{V}(\mathbf{x}(t))$ эквивалентно (см. 2.2.3) линейной независимости вышеуказанных векторов. Таким образом, получаем два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+\dot{\tau}}{\lambda} &= \sum_{j=0}^n \left(\prod_{\substack{k \neq j \\ k=0}}^n \frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \right) \frac{1+\dot{\tau}_j}{\lambda_j} \\ \frac{\tau}{\lambda} &= \sum_{j=0}^n \left(\prod_{\substack{k \neq j \\ k=0}}^n \frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \right) \frac{\tau_j}{\lambda_j} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Для дальнейшего упрощения (2.10) отщепим в суммах в правой части (2.10) слагаемые, отвечающие узлу $(t, 0)$, в котором, очевидно, $t_0 \equiv 0$, $\lambda_0 \equiv 1$. Получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{1+\dot{\tau}}{\lambda} &= \prod_{j=1}^n \frac{\tau - \tau_j}{(-\tau_j)} + \tau \sum_{j=0}^n \left(\prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n \frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \right) \frac{1+\dot{\tau}_j}{\lambda_j \tau_j} \\ \frac{\tau}{\lambda} &= \prod_{j=1}^n \frac{\tau - \tau_j}{(-\tau_j)} \cdot \frac{0}{1} + \tau \sum_{j=1}^n \left(\prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n \frac{\tau - \tau_k}{\tau_j - \tau_k} \right) \frac{1}{\lambda_j} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Исключим из первого уравнения системы (2.11) величину $\frac{1}{\lambda}$, воспользовавшись вторым уравнением (2.11), предварительно преобразованным к виду

$$\frac{1}{\lambda} = \left(\prod_{j=1}^n (\tau - \tau_j) \right) \left[\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{1}{\tau - \tau_j} \right] \quad (2.12)$$

делением на $\tau \prod_{j=1}^n (\tau - \tau_j)$.

Подстановка (2.12) вместо $\frac{1}{\lambda}$ и деление на $\tau \prod_{j=1}^n (\tau - \tau_j)$ преобразует первое уравнение системы (2.11) к виду

$$\begin{aligned} (1+\dot{\tau}) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{1}{\tau - \tau_j} \right) &= \\ &= \frac{1}{\prod_{j=1}^n (-\tau_j)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{\tau(1+\dot{\tau}_j)}{\tau_j(\tau - \tau_j)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Разобьем сумму в правой части (2.13) на две, воспользовавшись тождеством

$$\frac{\tau}{\tau_j(\tau - \tau_j)} = \frac{1}{\tau_j} + \frac{1}{\tau - \tau_j}$$

Получим в правой части (2.13) выражение

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^n (-\tau_j)} + \sum_{j=1}^n \frac{1 + \dot{\tau}_j}{\tau_j \lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{1 + \dot{\tau}_j}{\tau - \tau_j}. \quad (2.14)$$

Упростим (2.14), воспользовавшись тождеством, полученным из (2.10) (второе уравнение) при $\tau = 0$ ⁸

$$\frac{1}{\prod_{j=1}^n (-\tau_j)} = - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\tau_j \lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)}. \quad (2.15)$$

Подстановка (2.15) в (2.14) и перегруппировка слагаемых дает

$$\sum_{j=1}^n \frac{\dot{\tau}_j}{\tau_j \lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{1 + \dot{\tau}_j}{\tau - \tau_j} \quad (2.16)$$

Таким образом, заменив правую часть в (2.13) на (2.16) и приводя подобные слагаемые, получаем

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j \prod_{\substack{k \neq j \\ k=1}}^n (\tau_j - \tau_k)} \cdot \frac{d}{dt} \ln \left| \frac{\tau}{\tau_j} - 1 \right| = 0 \quad (2.17)$$

В последнем равенстве можно воспользоваться соотношением (2.6) в узле P_j , то есть равенством $dt_j = \lambda_j dt$. Осталось заметить, что разложение по последней строке определителя, указанного в лемме 2.3.2, совпадает с точностью до ненулевого множителя с левой частью (2.17). Действительно, коэффициент при выражении $d(\ln|\tau/\tau_j - 1|)/dt$ в определителе леммы 2.3.2 равен минору

$$(-1)^{j+1} \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1 & \cdots & \tau_{j-1} & \tau_{j+1} & \cdots & \tau_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tau_1^{n-2} & \cdots & \tau_{j-1}^{n-2} & \tau_{j+1}^{n-2} & \cdots & \tau_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

Последний, являясь определителем Ван-дер-Монда, равен

$$\prod_{\substack{1 \leq k < l \leq n \\ k \neq j \\ l \neq j}} (\tau_l - \tau_k) = \frac{\prod_{1 \leq k < l \leq n} (\tau_l - \tau_k)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (\tau_j - \tau_k)}$$

⁸Или из (2.12) при $\tau = 0$.

Доказательство леммы 2.3.2 окончено.

§3. Интегрирование вдоль фазовой кривой.

Мы исходим из соотношения

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(\mathbf{x}) L_{\mathbf{V}(\mathbf{x})}(f_j) = 0, \quad (3.1)$$

где $0 < c_j < \mu_j(\mathbf{x}) < C_j$, $\mathbf{V}(\mathbf{x}) \neq 0$, $\text{grad} f_j \neq 0$.

Наша цель показать, что из соотношения (3.1) следует существование нелокального интеграла

$$H(\mathbf{x}_0, t) = \sum_{j=1}^n f_j(\mathbf{x}_j) \Big|_{\mathbf{x}_j=\mathbf{x}(g_j(t))} \quad (3.2)$$

при отсутствии кручения формы $w_1 = \sum \mu_j(\mathbf{x}) df_j$ на базе ⁹. Слагаемое $\mu_j(\mathbf{x}) L_{\mathbf{V}(\mathbf{x})}(f_j)$ естественно рассматривать на кривой τ_j (здесь это слагаемое лежит на кривой τ). Легче представлять n точек на n фазовых кривых τ_1, \dots, τ_n , чем на кривой τ .

3.1. "Выпрямление" векторных полей $\mu_j \mathbf{V}$.

3.1.1. Замечание. Пусть ψ диффеоморфизм фазовой кривой. Тогда имеет место тождество (см. [6]).

$$L_{\psi_* \mathbf{V}}(f) \Big|_{y=\psi(\mathbf{x})} = L_{\mathbf{V}}(\psi^* f) \Big|_{\mathbf{x}} - L_{\psi_* \mathbf{V}}(f) \Big|_y = L_{\mathbf{V}}(\psi^* f) \Big|_{\mathbf{x}=\psi^{-1}(y)} \quad (3.3)$$

3.1.2. Обозначения. Через ψ_j обозначим диффеоморфизмы фазовой кривой, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, векторного поля \mathbf{V} , такие, что

$$(\psi_j)_* \mathbf{V} = \mu_j \mathbf{V}, \quad (3.4)$$

где $\psi_j(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$.¹⁰

3.1.3. Лемма. Имеет место тождество

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mu_j L_{\mathbf{V}}(f_j) &= \sum_{j=1}^n L_{\mu_j \mathbf{V}}(f_j) \Big|_{\mathbf{y}} = \\ &= \sum_{j=1}^n L_{\psi_{j*} \mathbf{V}}(f_j) \Big|_{y=\psi_j(\mathbf{x}_j)} = \sum_{j=1}^n L_{\mathbf{V}}(\psi_j^* f_j) \Big|_{\mathbf{x}_j=\psi^{-1}(y)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.4. Доказательство леммы 3.1.3 заключается в последовательной (читая (3.5) слева направо) подстановке тождеств (3.4) и (3.3) в левую часть (3.5).

⁹ Здесь базу можно заменить на любую замкнутую кривую, лежащую во внешности базы на фазовой плоскости. Мы опускаем детали, связанные с выбором контура интегрирования формы (см., например, [13], [14]).

¹⁰ Уместно подчеркнуть, что диффеоморфизмы ϕ_j определены корректно на универсальной накрывающей в случае замкнутой кривой τ .

3.2 Линеаризация действия фазовой группы в точке .

3.2.1. Обозначения. Через $g_t(\mathbf{x}_0)$ обозначим фазовую группу на интегральной кривой, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, векторного поля \mathbf{V} . Тогда

$$g_t(\mathbf{x}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (3.6)$$

причем, (см. [5]),

$$g_{t*} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{V}(g_t(\mathbf{x}_0)), \quad (3.7)$$

$$g_{t+t_1}(\mathbf{x}_0) = g_t \circ g_{t_1}(\mathbf{x}_0), \quad (3.8)$$

$$g_{(t+t_1)*} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_0) = g_{t*} \cdot \mathbf{V}(g_{t_1}(\mathbf{x}_0)) = g_{t*} \cdot g_{t_1*} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_0). \quad (3.9)$$

3.2.2. Обозначения. Через $\mathbf{x}_j(t)$ обозначим точки на фазовой кривой, проходящей через точку $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, векторного поля \mathbf{V} , в которых вычисляются слагаемые в правой части (3.5). Соответствующие величины времени вдоль векторного поля \mathbf{V} обозначим через t_j . Очевидно, что t отвечает точке \mathbf{y} в левой части (3.5).

3.2.3. Замечание. В силу соотношения (3.7) имеет место равенство

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}_j(t)) = g_{t_j*} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_0). \quad (3.10)$$

3.2.4. Следствие. С учетом тождеств (3.10) и (3.3) выражение в правой части (3.5) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n L_{\mathbf{V}}(\psi_j^* f_j) \Big|_{\mathbf{x}_j = \psi^{-1}(\mathbf{y})} &= \sum_{j=1}^n L_{g_{t_1*} \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}_0)}(\psi_j^* f_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n L_{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)}(g_{t_j}^* \circ \psi_j^* f_j) = \sum_{j=1}^n L_{\mathbf{V}(\mathbf{x}_0)} \left(\sum_{j=1}^n g_{t_j}^* \circ \psi_j^* f_j \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.2.5. Следствие. Формула (3.11) допускает обобщение

$$\sum_{j=1}^n L_{\mathbf{V}(g_\epsilon(\mathbf{x}_0))} \left(\sum_{j=1}^n g_{t_j-\epsilon}^* \circ \psi_j^* f_j \right) = 0 \quad (3.12)$$

3.2.6. Доказательство следствия 3.2.5 тривиально повторяет выкладку (3.11) с учетом равенства (3.9), в котором последовательно полагается $t_1 = \epsilon, t = t_j - \epsilon$.

3.2.7. Следствие. Величина

$$\sum_{j=1}^n g_{t_j-\epsilon}^* \circ \psi_j^* f_j$$

является первым интегралом векторного поля V в окрестности значения t .¹¹

3.2.8. Доказательство следствия 3.2.7 заключается в выкладке

$$\text{Const} = \sum_{j=1}^n \left(g_{t_j-\varepsilon}^* \circ \psi_j^* f_j \right) \Big|_{g_\varepsilon(x_0)} = \sum_{j=1}^n \psi_j^* f_j \Big|_{x_j(t)},$$

при $\varepsilon = 0$.

Последнее равенство выполнено по определению действия $g_{t_j}^*$ на пространстве функций.

3.3. Замечание к интегрированию дифференциальной формы w_1 .

3.3.1. Интегрирование слагаемого $\mu_j(x)df_j$ вдоль фазовой кривой векторного поля V с учетом выкладок п. 3.1 и 3.2 сводится к интегрированию формы df_j вдоль измененной дуги фазовой кривой. Осталось выбрать односвязную область D на полуаффинном накрытии и воспользоваться точностью формы df_j . Область D стандартно выбирается в виде двух слоев полуаффинного накрытия и пары фазовых кривых векторного поля V . Одна фазовая кривая - текущая, рассмотренная выше. Вторая фазовая кривая - либо база, либо другая фазовая кривая, отличная от базы и фазовых кривых τ_1, \dots, τ_n .

Интегралы по трансверсалиям дифференциальных форм df_j вычисляются явно. Интегралы по фазовым кривым исчезают. Действительно, на текущей фазовой кривой $w_1(V) \equiv 0$. На второй фазовой кривой в случае, если это - база, надо "убить" кручение и позаботиться о "начале" отсчета образующих f_j . На второй кривой $f_j = \text{Const}$ (в частности, $f_j = 0$).

3.3.2. Начало отсчета образующих f_j выбирается с помощью замкнутой фазовой кривой во внешности базы. Такая кривая задает "нулевое" сечение расслоения на универсальной накрывающей (см. [9],[10]) полуаффинного накрытия. Таким образом мы приходим к образующим

$$F_j = \ln \left| \frac{\tau - \tau_j}{\tau^* - \tau_j} \right|,$$

где τ^* - замкнутая фазовая кривая, задающая "нулевое" сечение полуаффинного расслоения.

§4. Заключение.

"Парадокс" во II-й части 16-й проблемы Гильберта (см. п. 8,§1) возникает в силу следующих причин.

На текущей фазовой кривой в качестве w или α - пределов (см. [1],[9],[10]) не должны содержаться стационары векторного поля $V(x)$. Поэтому текущая фазовая кривая

¹¹Подчеркнем здесь, что следствие 3.2.7 справедливо при отсутствии кручения форм df_j на базе (см. сноску 9).

должна предполагаться лежащей внутри пары предельных циклов. Одним из них является α -пределом а другой ω -пределом текущей фазовой кривой (и область внутри пары предельных циклов не является кольцом Кнезера (см. [9])).

Для построения нелокального интеграла нам нужен $n + 1$ - предельный цикл векторного поля V . Циклы гомологичны между собой, т.е. образуют гнездо. Тогда в гнезде не может быть простой пары циклов.

Вообще говоря, такая пара существует, если число циклов в гнезде $\geq n(n + 1)/2$ (при $n \geq 4$). Однако, если особые точки "выгнать" в комплексную область, получается "парадокс".

Разгадка "парадокса" в том, что мы нашли препятствие к количеству циклов в гнезде, не связанное с "гамильтоновостью" векторного поля V . "Гамильтоновость" молчаливо или нет фигурировала в критике работ Ландиса, Петровского. Отметим также, что если в выше изложенном подходе добиваться "гамильтоновости", то мы получаем оценку $O(n^2)$ при $n \rightarrow \infty$.

Список литературы

- [1] А.А. Андронов, В.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. Качественная теория динамических систем. М., 1966.
- [2] В.И. Арнольд. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. -УМН 27, 5, 1972, с. 119-181.
- [3] В.И. Арнольд. Избранное - 60. М.:ФАЗИС, 1997.
- [4] В.И. Арнольд. Особенности каустик и волновых фронтов (Библиотека математика. Вып. 1.) -М.:ФАЗИС, 1996.
- [5] В.И. Арнольд. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. -М.:Наука 1978.
- [6] В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Наука 1971.
- [7] В.И. Арнольд, В.А. Васильев, В.В. Горюнов, О.В. Ляшко. Особенности. II. Классификация и приложения. // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. 1989.
- [8] В.И. Арнольд. Задачи Арнольда. -М.:ФАЗИС, 2000, 454 с.
- [9] Д.В. Аносов, С.Х. Арансон, И.У. Бронштейн, В.З. Гринес. Гладкие динамические системы. II. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. Т.1 (Итоги науки и техники. ВИНТИ.). М. 1985, с. 151-242.

- [10] Д.В. Аносов, С.Х. Арансон, В.З. Гринес, Р.В. Плыкин, Е.А. Сатаев, А.В. Сафонов, В.В. Солодов, А.Н. Старков, А.М. Степин, С.В. Шлячков. Динамические системы с гиперболическим поведением. II. Итоги науки и техники. ВИНТИ. Совр. пробл. матем. Фундам. напр. 1991.
- [11] Arrowsmith D.K., Cartwright I.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system.-// Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3, 4, p. 803-842.
- [12] Н.Н. Баутин. Матем. сб., т. 30, вып.1, 1952, с. 181-196.
- [13] Р.И. Богданов. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. //Тр.сем.им. И.Г. Петровского, вып. 2. М.: МГУ, 1976, с. 37-65.
- [14] Р.И. Богданов. Бифуркация предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости. //Тр.сем.им. И.Г. Петровского, вып. 2. М.: МГУ, 1976, с. 23-35.
- [15] Р.И. Богданов. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1993.
- [16] R.I. Bogdanov. Dynamical systems on the plane. Pr. of Int. Conf. on Dynamical systems, Rio de Janeiro, July 29-August 8, 1997, p.32-35.
- [17] Р.И. Богданов. Приложения слабодиссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Препринт НИИЯФ МГУ 96-22/429. М.:ПРИНТ, 1996.
- [18] Р.И. Богданов, В.А. Расторгуев. Проблема Ферми-Паста-Улама в слабодиссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. М.:Препринт МЭИ 12-17, 1997.
- [19] Р.И. Богданов. Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости. // Функц. анализ и его приложения, т. 31, вып. 2, 1997, с. 67-70.
- [20] Р.И. Богданов. Решение проблемы Гильберта о конечности автоколебаний в неконсервативных динамических системах на плоскости. Препринт НИИЯФ МГУ N98-46.547. -М.:ПРИНТ, 1996, 135 с.
- [21] Богданов Р.И. Положительное решение II -й части 16-й проблемы Гильберта. // Функц. ан. и его прилож. (в печати).
- [22] Bogdanov R.I. Positive solution for the II-nd part of the 16th Hilbert's problem. In: Abstracts of Intern. Conf. on Differential and Functional Differential Equations (Moscow, August 16-21, 1999). Moscow, 1999, 18-19.

- [23] Bogdanov R.I. Positive solution for the II-nd part of the 16th Hilbert's problem. In: Abstracts of Intern. Conf. on Differential Equations (Equafiff 99) (Berlin, August 1-7, 1999). Berlin, 1999, 10-11.
- [24] М.А. Красносельский, А.И. Перов, А.И. Поволоцкий, П.П. Забрейко. Векторные поля на плоскости. // М.: Физматгиз, 1963.
- [25] И.Г. Петровский. Избранные труды. Дифференциальные уравнения. Теория вероятностей. // М.: Наука, 1987.
- [26] Проблемы Гильберта. // М.: Наука, 1969.
- [27] Рохлин, Д.Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. // М.: Наука, 1977.

