Структуры магнитного поля в задаче динамо*

Д.Д.Соколов, В.М.Галицкий

Физический факультет Московского Государственного университета им. М.В.Ломоносова

Аннотация

Движения проводящей жидкости могут усиливать первоначально слабое магнитное поле. Этот механизм, известный как гидромагнитное динамо, приводит к возникновению магнитных полей галактик, планет и звезд, в частности, широко известного одиннадцитилетнего цикла солнечной активности. Работа механизма динамо порождает огромное разнообразие структур магнитного поля. В настоящей работе мы кратко опишем это разнообразие. Здесь также впервые публикуется один фрагмент количественного описания таких структур – результаты об асимптотическом вычислении дипольно-квадрупольного расщепления в циклах звездной активности.

1 Введение. Гидромагнитное динамо и магнитные структуры

Происхождение магнитные полей в космосе существенно отличается от происхождения магнитных полей в окружающих нас технических приборах. Мы привыкли связывать магнитные явления с квантовыми процессами в твердых телах. Однако твердые тела в космосе – большая редкость и даже геомагнитное поле невозможно связывать с чем-то типа ферромагнетизма потому, что ферромагнитные явления исчезают при достижении некоторой критической температуры (точка Кюри), а недра Земли весьма горячи. Поэтому космический магнетизм связывают с действием электромагнитной индукции Фарадея. Эта мысль была впервые высказана в 1919 г. Лармором и основанная на ней теория получила название теории динамо. Поскольку в качестве движений обычно выступают движения электропроводящей жидкости или плазмы, которые можно описывать в гидродинамическом приближении, то говорят о гидромагнитном динамо.

Работа механизма динамо сопровождается возбуждением разнообразных ярко выраженных структур магнитного поля. Их конкретный вид зависит от обстоятельств, в которых работает механизм динамо. Как правило, течения, возбуждающие магнитное поле, имеют случайную, турбулентную составляющую. Другой компонентой скорости, которая может принимать участие в работе механизма динамо, является общее вращение тела, которое, в свою очередь, может быть дифференциальным или твердотельным.

*Авторы благодарны РФФИ за финансовую поддержку в рамках проектов 00-05-64062 и 00-02-16271.

Могут быть и другие составляющие, но они важны лишь в достаточно специфических ситуациях и мы их здесь не будем рассматривать.

Однородная, изотропная и зеркально симметричная в среднем турбулентность возбуждает случайное мелкомасштабное магнитное поле. Однако даже если турбулентность похожа на гауссовское случайное поле, распределение самовозбуждающегося магнитного поля очень непохоже на гауссовское. Магнитное поле отнюдь не равномерно распределено в пространстве. В отдельных областях магнитное поле растет гораздо быстрее, чем в других. Возникают характерные структуры распределения напряженности магнитного поля, удивительно напоминают структуры, которые образуют человеческие сообщества, растущие и расселяющиеся по земной поверхности. Эти структуры описаны в [1], [2].

Анализ задачи динамо обычно начинают с т.н. кинематического приближения, в котором пренебрегают воздействием магнитных сил на течение жидкости. Однако со временем магнитное поле становится достаточно сильным для того, чтобы магнитные силы существенно изменяли это течение. После этого распределение магнитного поля существенно сглаживается, однако следы структур, образовавшихся на начальном, этапе его развития, заметны долгое время. Однако совсем недавно выяснилось, что на поздних этапах развития турбулентности снова начинается процесс образования магнитных структур. Теперь это не структуры распределения напряженности магнитного поля, а когерентные структуры, выражающиеся в параллельности магнитного поля и поля скорости. Существование подобных структур давно предполагали при интерпретации наблюдений магнитного поля в солнечном ветре. Однако их детальное численное исследование стало возможным только после того, как появилась появился математический аппарат, позволяющий разумно упростить задачу, перейдя к ее асимптотическому описанию. Адекватное асимптотическое описание мелкомасштабного динамо возможно на языке т.н. каскадных моделей турбулентности, в которых описание магнитного поля и поля скорости в каждом интервале масштабов сводится к двум комплексным величинам. Другими словами, пожертвовав малоинтересными в данном контексте деталями пространственного строения МГД-турбулентности, удается проследить ее долговременную эволюцию, не потеряв при этом образования когерентного состояния.

Впервые жизнеспособную каскадную модель мелкомасштабного динамо удалось построить Фрику и Соколову [3]. После этого описание долговременной эволюции магнитного поля стало доступным для современных суперкомпьютеров. Мы наблюдали образование когерентного состояния в вынужденной турбулентности [4]. Однако наиболее впечатляюще выглядит образование когерентного состояния в свободно распадающейся турбулентности, которое нам удалось наблюдать на компьютерном кластере параллельных вычислений НИВЦ МГУ в 2000 г. [6].

Существенно по-другому ведет себя магнитное поле, генерируемое турбулентностью и вращением. В этом случае растут не только флуктуации магнитного поля, но и среднее (крупномасштабное) магнитное поле. Важно, что причиной этого служит своеобразное свойство турбулентных и конвективных течений во вращающихся телах, называемое спиральностью.

Для того, чтобы подойти к понятию спиральности, заметим, что эволюцию среднего магнитного поля естественно описывать с помощью уравнений Максвелла, осредненных по турбулентным пульсациям. Такое уравнение соотносится с детальными уравнениями Максвелла в среде точно также, как эти уравнения соотносятся с микроскопическими уравнениями Максвелла, записанными для точечных носителей заряда. Как известно, при переходе от микроскопических уравнений Максвелла к макроскопическим происходит перенормировка таких величин, как диэлектрическая проницаемость, и вместо диэлектрической проницаемости вакуума занимает диэлектрическая проницаемость среды, а сами уравнения сохраняют свою структуру. По-существу, сама процедура осреднения уравнений и была предложена Максвеллом.

Однако при выводе своих уравнений Максвелл вероятно не задумывался о возможном осреднении по векторным флуктуациям. Дело в том, что в статистически однородной среде среднее от произведения некоторого скалярного поля ϕ на его градиент равно нулю, поскольку $2\phi \mathrm{grad}\, \phi = \mathrm{grad}\, \phi^2$, а среднее от производной равно нулю в силу однородности. Однако среднее от произведения *векторного* поля на его ротор не обязано равняться нулю. В результате при осреднении уравнений Максвелла по турбулентным пульсациям возникает новый член, который существенно меняет структуру уравнений. Коэффициент, с которым этот член появляется в уравнениях, и является спиральностью.

Впервые на это обстоятельство, ускользнувшее от внимания поколений классиков науки, обратил внимание в середине 60-ых годов XX столетия президент Академии наук ГДР Макс Штеенбек и два его молодых тогда сотрудника, Ф.Краузе и К.-Х.Рэдлер. М.Штеенбек был глубоким физиком, он прошел сложный жизненный путь, который включал долголетнюю работу над военными программами фирмы Сименс и последующую работу над аналогичными проектами в плену в нашей стране. Он оставил интересные воспоминания о своем жизненном пути [6]. Он обладал своеобразным юмором, который донесли до нас его более молодые коллеги (он говорил им, в частности: "Вы живете как свиньи. Они тоже не курят!") и который помог ему сделать это самое важное открытие в истории физики ГДР. Отметим, что примерно в те же годы к понятию спиральности в контексте задачи о генерации магнитного поля Земли подошел отечественный геомагнитолог С.И.Брагинский; этот факт широко признан мировым научным сообществом.

Итак, спиральность пропорциональна произведению скорости на ее ротор. Похожая величина встречается в физике элементарных частиц при описании, скажем, свойств нейтрино, но в обычной макрофизике, не включающей осреднение по турбулентным пульсациям, спиральность не встречается.

Именно спиральность приводит к тому, что турбулентные движения не просто запутывают магнитное поле, а приводят к рождению порядка из хаоса. Например, магнитное поле в галактике М31 (туманность Андромеды) образует красивое кольцо, которое впервые предсказали отечественные специалисты в теории динамо, а впервые наблюдали немецкие радиоастрономы (см. [7]). Теперь это кольцо украшает одну из немецких марок. Еще более известным примером является одиннадцитилетний цикл солнечной активности, т.е. волна магнитного поля, пробегающая в недрах Солнца и проявляющаяся в виде волны солнечных пятен. На связь солнечного цикла со спиральностью указал американский астроном Паркер, причем ему удалось выписать правильные уравнения солнечного цикла за 10 лет до открытия спиральности Штеенбеком и его коллегами. Впрочем, историческое развитие теории динамо совершенно не совпадало с логическим: только в середине семидесятых выдающийся отечественный физик академик Я.Б.Зельдович объяснил, что, собственно, происходит с магнитными линиями во время работы динамо. Проблема состоит в том, что для генерации магнитного поля нужно на месте, где раньше была одна одна магнитая линия, получить две, но при этом нельзя нарушить вмороженность магнитного поля, т.е. разрезать магнитные линии (динамо-процессы с разрывами магнитных линий тоже возможны, но они очень медленны и не подходят для объяснения происхождения большинства астрофизических магнитных полей). В схеме, получивший название "восьмерка Зельдовича", магнитная линия растягивается вдвое, складывается в восьмерку (здесь и работает спиральность) и два кольца восьмерки накладываются одно на другое. Зельдович вначале рассматривал свою схему как удачную лекционную демонстрацию и не посвятил ей отдельной работы, а включил в качестве хорошей иллюстрации в состав ряда последующих обзоров, написанных со своими учениками. По преданию он впервые показал ее на симпозиуме в Кракове с помощью ремня от брюк, снятого у одного из слушателей. Однако постепенно стала выясняться глубокая связь между схемой Зельдовича и формировавшейся в то время топологической механикой жидкости, в разработку которой внесли определяющий вклад выдающийся отечественный математик академик В.И.Арнольд и английский физик Г.К.Моффатт (см., напр., [8]).

В дальнейшем изложении мы подробно рассмотрим один фрагмент, описывающий образование структур в теории динамо. Этот новый результат относится к вычислению в рамках асимптотического метода расщепления между скоростями роста дипольных и квадрупольных конфигураций магнитного поля. Это расщепление помогает описывать своеобразные асимметричные структуры магнитного поля, возникавшие на Солнце в конце т.н. минимума Маундера.

2 Динамо Паркера

Для уравнений звездного динамо среднего поля можно построить асимптотические решения в рамках так называемого динамо Паркера [9]. Уравнения этой модели обнаруживает значительное формальное сходство с уравнением Шрёдингера, для которого хорошо развита техника построения асимптотических решений в рамках метода ВКБ. Более точно эта аналогия может быть описана следующим образом. Кинематическую динамо-волну, распространение которой в конвективной оболочке Солнца и служит физической причиной 11-летнего цикла солнечной активности, можно сопоставить с волной вероятности в квантовой механике. Множество скоростей роста и периодов осцилляций динамо-волны, которые определяются собственными значениями задачи динамо Паркера, можно сопоставить с энергетическим спектром уравнений квантовой механики [10]. Большой безразмерный параметр динамо Паркера называется динамо-числом D и он дает возможность строить коротковолновое приближение в той же мере, как малость постоянной Планка дает возможность строить коротковолновое приближение в квантовой механике. Разумеется, роль динамо-числа примерно такая же, как у обратной постоянной Планка. Конечно, коротковолновые асимптотики можно строить для самых разнообразных задач о распространении волн. Однако часто эти задачи описываются гиперболическими уравнениями, тогда как в квантовой механике и теории динамо возникают параболические уравнения.

Соответствующие коротковолновые асимптотики в задаче динамо Паркера были построены Кузаняном и Соколовым [11] для плоского слоя и Галицким и Соколовым [12] для сферического слоя. Однако эти решения описывали поведение динамо-волны в одном полушарии Солнца и не были приспособлены для описания разницы в поведении дипольных и квадрупольных конфигураций магнитного поля. В рамках настоящей работы мы впервые публикуем асимптотические результаты, касающиеся этой стороны вопроса. В частности, мы покажем, что для реалистических значений динамо-числа скорость роста дипольной конфигурации больше, чем скорость роста квадрупольной конфигурации. Это означает, что механизм динамо Паркера предпочтителен для образования дипольных магнитных полей, что соответствует реальному положению дел на Солнце. В то же время на Солнце наблюдаются и сравнительно небольшие квадрупольные компоненты магнитного поля, а в конце минимума Маундера квадрупольная компонента магнитного поля была сравнима с дипольной и образовывалось сравнительно долгоживущее состояние со смешанной четностью. Результаты настоящей работы открывают путь к асимптотическому описанию подобных явлений.

Ключевым наблюдением, приводящим к нашему асимптотическому результату, служит то, что источники генерации динамо-волны сосредоточены в основном в средних широтах солнечной конвективной зоны, так что генерация магнитного поля происходит в областях, удаленных от солнечного экватора (и полюса). Поэтому в первом приближении можно независимо рассматривать генерацию динамо-волн в северном и южном полушариях Солнца. В этом приближении скорости роста дипольной и квадрупольной конфигураций, естественно, совпадают. Искомый эффект можно рассматривать как расщепление уровней, связанное с относительно слабым взаимодействием динамо-волн в приэкваториальной области. Оказывается, что эта задача также обнаруживает замечательную формальную аналогию с известной квантовомеханической задачей о расщеплении уровней в двух симметричных потенциальных ямах, т.н. задача о потенциале Лифшица. Мы модифицируем и применим метод Лифшица для решения нашей задачи.

3 Основные уравнения

Напомним основные уравнения динамо Паркера. Крупномасштабное магнитное поле в турбулентном потоке дифференциально вращающейся проводящей жидкости подчиняется т.н. уравнению среднего поля, предложенному Штеенбеком, Краузе и Рэдлером в шестидесятых годах:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \alpha \mathbf{B} + \mathrm{rot}\, [\mathbf{V}, \mathbf{B}] + \beta \Delta \mathbf{B}, \tag{1}$$

где $\mathbf{B}$ и $\mathbf{V}$ - крупномасштабные (средние) магнитное поле и поле скорости соответственно, α - спиральность и β - коэффициент турбулентной диффузии.

Кинематические осесимметричные решения можно представить в виде суммы полоидального и тороидального магнитного поля

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{B}_p(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_t(\mathbf{r}))e^{\gamma t}, \tag{2}$$

где $\mathbf{B}_t = (0, 0, \tilde{B})$ - азимутальная компонента магнитного поля, $\mathbf{B}_p = R\,\mathrm{rot}\,(0, 0, \tilde{A})$ - радиальная компонента магнитного поля (R – радиус Солнца), а γ - собственное число, так что $\mathrm{Re}\,\gamma$ – скорость роста магнитного поля, а $2\pi(\mathrm{Im}\,\gamma)^{-1}$ – период динамо-волны.

Обозначим

$$G = \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

радиальный градиент угловой скорости. Будем измерять длины в единицах солнечного радиуса, время в единицах диффузионного времени $\tau_{\mathrm{diff}} = R^2/\beta$, а α и G в единицах их максимальных значений. Предположим также, что диффренциальное вращение намного более интенсивно, чем спиральность (т.н. $\alpha\omega$-приближение). Будем также пренебрегать широтными градиентами угловой скорости. Более того, предположим, что генерация магнитного поля происходит в тонкой сферической оболочке и осредним магнитное поле по радиальному сечению этой оболочки. В результате этих упрощений уравнение Штеенбека-Краузе-Рэдлера принимает вид

$$\gamma A = \alpha(\theta)B + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(A\cos\theta)\right); \tag{3}$$

$$\gamma B = -DG(\theta)\frac{d}{d\theta}(A\cos\theta) + \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}(B\cos\theta)\right). \tag{4}$$

Здесь $D = R_\alpha R_\omega$ - безразмерное динамо-число ($R_\alpha = \beta^{-1}\alpha_{\max}R$, $R_\omega = \beta^{-1}R^2 G_{\max}$), которое характеризует интенсивность источников генерации, функция $A(\theta) = R_\alpha^{-1} < \tilde{A}(\theta, r) >$ пропорциональна осредненной азимутальной компоненте векторного потенциала магнитного поля, $B(\theta) = =< \tilde{B}(\theta, r) >$ - осредненная азимутальная компонента магнитного поля, $< ... >$ означает осреднение по радиальному сечению оболочки, широта θ измеряется от солнечного экватора. Разумеется, спиральность $\alpha(\theta)$ также осреднена по радиальному сечению рассматриваемой оболочки. Мы включили член с радиальной диффузией в γ полагая

$$< \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\tilde{B}r) >= -\mu^2 B, \quad < \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\tilde{A}r) >= -\mu^2 A. \tag{5}$$

Динамо-число для Солнца составляет примерно $|D| \approx 10^3 - 10^4$ и далее мы будем рассматривать его как большой параметр, по которому будут строиться асимптотические разложения. Подчеркнем, что уравнения (3, 4) рассматриваются на всей сфере включая полюса сферы и в силу наличия особенностей в этих полюсах не требуют постановки дополнительных граничных условий.

4 Задача на собственные значения

Введем комплексную двухкомпонетную вектор-функцию

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} A(\theta) \\ B(\theta) \end{pmatrix}$$

и линейный дифференциальный оператор

$$\hat{H}_\theta = \begin{pmatrix} \Delta_\theta & \alpha(\theta) \\ -D\frac{d}{d\theta}\cos\theta & \Delta_\theta \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где

$$\Delta_\theta = \frac{d}{d\theta}\frac{1}{\cos\theta}\frac{d}{d\theta}\cos\theta.$$

В этих обозначениях задача (3, 4) принимает вид

$$\hat{H}_\theta \vec{h} = \gamma \vec{h}. \tag{7}$$

Далее мы будем выделять трехкомпонентные векторы жирным шрифтом, а двухкомпонентные – стрелочкой.

Введем также оператор четности по правилу

$$\hat{P} f(\theta) = f(-\theta). \tag{8}$$

В силу соображений симметрии спиральность антисимметрична относительно солнечного экватора, а градиент угловой скорости симметричен относительно солнечного экватора, так что оператор $\hat{P}$ и оператор в правой части уравнения (1) перестановочны. В силу этого собственные векторы $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ динамо Паркера имеют определенную симметрию, т.е. являются собственными векторами оператора $\hat{P}$:

$$\hat{P}\mathbf{B}_p(\theta) = p\mathbf{B}_p(\theta), \tag{9}$$

причем p равно либо -1 (дипольная конфигурация), либо +1 (квадрупольная конфигурация). Разумеется, собственные векторы с разной симметрией обладают, вообще говоря, различными собственными значениями. Нашей задачей и является нахождение расщепления собственных значений с различной четностью.

Нам важно теперь сформулировать понятие четности собственного решения на языке двумерных векторов $\vec{h}$. Отметим, что азимутальная компонента векторного потенциала и азимутальная компонента магнитного поля для решения с определенной четностью имеют различные свойства симметрии хотя бы потому, что магнитное поле является псевдовектором, а векторный потенциал – вектором. Поэтому операторы $\hat{H}$ и $\hat{P}$ не коммутативны. Однако оператор $\hat{H}$ коммутирует с оператором $\hat{P}\hat{U}$, где

$$\hat{U} = \hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Соответственно, четность p собственного вектора определяется равенством

$$\hat{P}\hat{U}\vec{h}_p(\theta) = p\vec{h}_p(\theta). \tag{11}$$

5 Асимптотические решения для северного полушария

Напомним, что идея коротковолновых асимптотик состоит в разделении решения на быстро осциллирующую экспоненту и медленно меняющуюся амплитуду, так что [11]

$$\vec{h}(\theta) = \vec{a}(\theta)\exp\left(\frac{iS(\theta)}{\epsilon}\right), \tag{12}$$

где $\epsilon = |D|^{-1/3}$,

$$\vec{a}(\theta) = \begin{pmatrix} \mu(\theta) \\ \epsilon^{-2}\nu(\theta) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} \mu_1(\theta) \\ \epsilon^{-2}\nu_1(\theta) \end{pmatrix} + \dots \tag{13}$$

и

$$\gamma = \frac{1}{\epsilon^2}\Gamma_0 + \frac{1}{\epsilon}\Gamma_1 + \dots \tag{14}$$

Асимптотическое представление (12) применимо на некотором удалении от полюсов и экватора, т.е. тех мест, где в силу условий симметрии обращаются в нуль источники генерации. Соответственно, решение (12) должно убывать при приближении к этим областям. Это и является в нашем случае аналогом краевых условий, выделяющих собственные решения.

Поведение собственных функций вблизи полюса исследовано в [12] и мы здесь не будем касаться этого вопроса. Поведение собственной функции вблизи экватора определяет расщепление дипольных и квадрупольных собственных значений. Для того, чтобы вычислить это расщепление, нужно сначала построить решение для динамо-волны, возбужденной в одном полушарии, но учесть при этом возможность распространения рассматриваемой волны в соседнее полушарие. Другими словами, нужно заменить реальное распределение спиральности, антисимметричное относительно экватора, на распределение, которое в одном полушарии совпадает с исходным, а в другом полушарии тождественно обращается в ноль. Такое решение и строится в данном разделе.

Нам понадобится вычислить два первых асимптотических приближения в представлении (12). Для построения первого приближения подставим представление (12) в уравнение (7) и приравняем члены с минимальными степенями ϵ. В результате получим

$$\begin{pmatrix} \Gamma_0 + k^2(\theta) & -\alpha(\theta) \\ ik(\theta)G(\theta)\sin\theta & \Gamma_0 + k^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu(\theta) \\ \nu(\theta) \end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

где $k(\theta) = \frac{dS}{d\theta}$.

Условием нетривиальной разрешимости этого уравнения является обращение в нуль детерминанта матрицы в правой части части, что дает уравнение Гамильтона-Якоби

$$(\Gamma_0 + k^2)^2 + i\hat{\alpha}k = 0, \tag{16}$$

где $\hat{\alpha}(\theta) = \alpha(\theta)\sin\theta$.

Уравнение (16) является алгебраическим уравнением четвертого порядка и, соответственно, имеет четыре решения. При изменении θ эти корни перемещаются по комплексной плоскости, образуя четыре кривые. Нетрудно убедиться [11], что построить из них гладкое решение для S на всем интервале изменения S возможно только если

$$\Gamma_0 = \frac{3\hat{\alpha}_{\max}^{2/3}}{2^{8/3}} e^{\pm i\pi/3}. \tag{17}$$

Таким образом определяется в первом приближении старшее собственное число нашей задачи. Условие регулярности заменяет в данном случае более привычное в квантовой механике условие Бора-Зоммерфельда. Конечно, условия типа Бора-Зоммерфельда для высших уровней можно вывести и для уравнений динамо Паркера, но они оказываются несовместными и интересующая нас задача имеет (по крайней мере в рамках асимптотического анализа) лишь конечное число дискретных собственных решений [13].

В квантовой механике такой вариант квазиклассического приближения часто называют осцилляторным приближением, но часто его рассматривают в отрыве от собственно метода ВКБ. Несмотря на то, что осцилляторное приближение было известно очень давно, только после работ В.П.Маслова вопрос стал ясен в степени, достаточной для проведения данного вычисления.

Перенумеруем теперь ветви, которые образуют решения уравнения (16), следующим образом. Ветвь k_1 имеет отрицательные $\mathrm{Im}\, k$, ветвь k_2 имеет отрицательные $\mathrm{Re}\, k$, на ветви k_3 меняет знак $\mathrm{Re}\, k$, а на ветви k_4 меняет знак $\mathrm{Im}\, k$.

Собственные функции первого приближения имеют вид

$$\begin{pmatrix} A(\theta) \\ B(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_0 + k^2 \\ \frac{ik\cos\theta}{\epsilon^2} \end{pmatrix} \sigma(\theta) \exp\left(\frac{i}{\epsilon}\int k(\theta)d\theta\right). \tag{18}$$

Функция

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\cos\theta} \exp \int \frac{\Gamma_1 - ik'\left(1 + \frac{2k^2}{\Gamma_0 + k^2}\right)}{2ik + \frac{\hat{\alpha}}{2(\Gamma_0 + k^2)}} d\theta \tag{19}$$

находится из уравнений второго приближения, откуда определяются и поправки

$$\Gamma_{1,n} = 3ik'(\theta_0)(n + 1/2), \tag{20}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а θ_0 – точка, в которой функция $\hat{\alpha}$ достигает максимального значения. Далее мы ограничимся для определенности старшим собственным значением с $n = 0$. В окрестности экватора, где, как можно проверить, предшествующие выкладки становятся неприменимы, решение уравнения (7) можно найти непосредственно:

$$\begin{pmatrix} A(\theta) \\ B(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ i\epsilon^{-2}k_0 \end{pmatrix} \exp(\frac{i}{\epsilon}k_0\theta), \tag{21}$$

где $k_0 = \sqrt{-\Gamma_0}$.

6 Расщепление собственных значений

Обозначим только что полученное решение для северного полушария $\vec{h}_0^N(\theta)$, а аналогичное решение для южного полушария $\vec{h}_0^S(\theta)$. В силу условий симметрии

$$\vec{h}_0^S(\theta) = \hat{U}\vec{h}_0^N(-\theta). \tag{22}$$

Из полученных решений можно построить их симметричные и антисимметричные комбинации, которые дают во втором порядке асимптотические разложения для дипольного и квадрупольного собственных решений

$$\vec{h}_1^d(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{h}_0^N(\theta) + \vec{h}_0^S(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{h}_0^N(\theta) + \hat{U}\vec{h}_0^N(-\theta)); \tag{23}$$

$$\vec{h}_1^q(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{h}_0^N(\theta) - \vec{h}_0^S(\theta)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{h}_0^N(\theta) - \hat{U}\vec{h}_0^N(-\theta)). \tag{24}$$

Множитель $1/\sqrt{2}$ выбран для того, чтобы нормы $\vec{h}_1^d$ и $\vec{h}_1^q$ с точностью до главного члена по ϵ совпадали с нормами $\vec{h}_0^S$ и $\vec{h}_0^N$. Отметим, что $\vec{h}_0^N(\theta)$ быстро затухает в южном полушарии, а $\vec{h}_0^S(\theta)$ в южном, так что члены типа скалярного произведения $(\vec{h}_0^S, \vec{h}_0^N)$ малы. Мы понимаем скалярное произведение двух векторов

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_A \\ f_B \end{pmatrix}, \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} g_a \\ g_b \end{pmatrix}$$

как

$$(\vec{f}, \vec{g}) = \int_0^{\pi/2} (f_A^*(\theta)g_A(\theta) + f^*(\theta)g_B(\theta))d\theta,$$

где * - знак комплексного сопряжения, а норму вектора $\vec{f}$ как $||\vec{f}|| = \sqrt{(\vec{f},\vec{f})}$.

В силу малости собственных функций в приэкваториальной области в первом приближении получаем

$$\hat{H}_\theta \vec{h}_1^d = \gamma_d \vec{h}_1^d; \tag{25}$$

$$\hat{H}_\theta \vec{h}_1^q = \gamma_q \vec{h}_1^q, \tag{26}$$

где γ_d и γ_q собственные числа для дипольной и квадрупольной мод соответственно. Напомним, что

$$\hat{H}_\theta \vec{h}_0^N = \gamma_0 \vec{h}_0^N. \tag{27}$$

Умножим теперь уравнение (25) скалярно на вектор $\vec{h}_0^N$, а уравнение (26) на вектор $\vec{h}_1^d$ и вычтем полученные результаты:

$$(\hat{H}_\theta \vec{h}_1^d, \vec{h}_0^N) - (\hat{H}_\theta \vec{h}_0^N, \vec{h}_1^d) = \gamma_d (\vec{h}_1^d, \vec{h}_0^N) - \gamma_0 (\vec{h}_0^N, \vec{h}_1^d). \tag{28}$$

Откуда

$$\gamma_d = \gamma_0 (1 + (\vec{h}_0^S, h_0^N)||\vec{h}_0^N||^{-2})(1 + (\vec{h}_0^N, \vec{h}_0^S)||\vec{h}_0^N||^{-2})^{-1} + \tag{29}$$
$$+((\hat{H}_\theta \vec{h}_1^d, \vec{h}_0^N) - (\hat{H}_\theta \vec{h}_0^N, \vec{h}_1^d))||\vec{h}_0^N||^{-2}.$$

Принимая во внимание, что $(\vec{h}_0^N, \vec{h}_0^S) << ||\vec{h}_0^N||^2$, получаем отсюда

$$\gamma_d - \gamma_0 = (\vec{h}_0^S, (\hat{H}_\theta - \gamma_0 \hat{E})\vec{h}_0^N)||\vec{h}_0^N||^{-2} + (\vec{h}_0^N, (\hat{H}_\theta - \gamma_0 \hat{E})\vec{h}_0^S)||h_0^N||^{-2}, \tag{30}$$

где $\hat{E}$ – единичная матрица 2×2. Поскольку $h_0^N(\theta)$ является собственным вектором оператора $\hat{H}_\theta$ в северном полушарии, первый член в правой части уравнения (30) обращается в нуль и мы получаем

$$\gamma_d - \gamma_0 = (\vec{h}_0^N, (\hat{H}_\theta - \gamma_0 \hat{E})\vec{h}_0^S)||\vec{h}_0^N||^{-2}. \tag{31}$$

Аналогичное вычисление для квадрупольной моды дает

$$\gamma_0 - \gamma_d = \gamma_d - \gamma_0. \tag{32}$$

Принимая во внимание, что $\vec{h}_0^S(\theta)$ является собственной функцией, соответствующей собственному значению γ_0 оператора $\hat{H}_\theta$ с $\alpha(\theta) = 0$ при $\theta < 0$, соотношение (31) можно переписать в виде

$$||\vec{h}_0^N||^2 \Delta\gamma = -2 \int_0^{\pi/2} \alpha A^*(\theta) B(-\theta) d\theta. \tag{33}$$

Итак, мы выразили интересующее нас расщепление собственных значений через интеграл от функций, описывающих динамо-волну в одном полушарии. Хотя коротковолновые асимптотики, полученные в предыдущем разделе, формально неприменимы в вблизи экватора и полюса, интеграл $I(\epsilon)$, стоящий в правой части соотношения (33) не имеет особенности в этих точках, так что можно написать

$$I(\epsilon) = -\frac{2ik_0}{\epsilon^2}\int_0^{\pi/2}\alpha(\theta)\sigma^*(\theta)(\Gamma_0 + k^2(\theta))^* \exp[-\frac{i}{\epsilon}\int_0^{\theta}(k^*(\theta') - k_0 d\theta']d\theta. \qquad (34)$$

Интеграл (34) в принципе можно подсчитать асимптотически, однако его не представляет труда вычислить на компьютере и здесь мы ограничимся результатом такого вычисления. Оно, в частности, показывает, что при реалистических значениях $|D| \approx 10^3 - 10^4$ действительная часть $I(\epsilon)$ является положительным числом порядка 2. Поэтому дипольные моды растут быстрее квадрупольных мод и являются предпочтительными в задаче динамо Паркера.

7 Вычисление нормы собственной функции

Для того, чтобы закончить вычисление расщепления

$$\Delta\gamma = \gamma_d - \gamma_q = \frac{I(\epsilon)}{||\vec{h}_0^N||^2}, \qquad (35)$$

нам осталось вычислить норму, стоящую в знаменателе. По определению нормы

$$||\vec{h}_0^N||^2 = \int_0^{\pi/2}(|A(\theta)|^2 + |B(\theta)|^2)d\theta \qquad (36)$$

и мы опять можем использовать ВКБ-асимптотики для вычисления этого интеграла. Поскольку $A(\theta) \sim \epsilon^2 B(\theta)$, соотношение (36) можно переписать в главном порядке в виде

$$||\vec{h}_0^N||^2 = \int_0^{\pi/2}|B(\theta)|^2 d\theta, \qquad (37)$$

или, подставляя разложение (12),

$$||\vec{h}_0^N||^2 = \frac{1}{\epsilon^4}\int_0^{\pi/2}|k(\theta)^2|\sigma(\theta)|^2\cos^2\theta\exp(-\frac{2}{\epsilon}\int_0^{\theta}\operatorname{Im}k(\theta')d\theta')d\theta. \qquad (38)$$

Пусть $\operatorname{Im}k(\theta)$ обращается в нуль при $\theta = \theta_1$. Интеграл (38) можно асимптотически вычислить по методу Лапласа, что дает

$$||\vec{h}_0^N||^2 = \frac{1}{\epsilon^4}k^2(\theta_1)|\sigma(\theta_1)|^2\cos^2\theta_1\sqrt{\frac{\pi\epsilon}{\operatorname{Im}k'(\theta_1)}}\exp(\frac{2}{\epsilon}\int_0^{\theta_1}|\operatorname{Im}k(\theta)|d\theta). \qquad (39)$$

Положение точки θ_1 определяется уравнением Гамильтона-Якоби и было вычислено в [11]. Оказывается, что оно является решением трансцендентного уравнения

$$\frac{\hat{\alpha}(\theta_1)}{\hat{\alpha}_{\max}} = \frac{9\sqrt{3}}{16\sqrt{q}\sqrt{\sqrt{3}-1}} \approx 0.8052. \tag{40}$$

В итоге получаем

$$\gamma_d = \gamma_0 + \sqrt{\frac{\operatorname{Im} k'(\theta_1)}{\pi\epsilon}} \frac{\epsilon^4 I(\epsilon)}{k^2(\theta_1)|\sigma(\theta_1)|^2\cos^2\theta_1} \exp(-\frac{2}{\epsilon}\int_0^{\theta_1} |\operatorname{Im} k(\theta)| d\theta), \tag{41}$$

или, по порядку величины,

$$\frac{|\Delta\gamma|}{|\gamma_0|} \sim \epsilon^6 \exp(-\frac{2}{\epsilon}|\operatorname{Im} k(\theta_1)|\theta_1). \tag{42}$$

8 Дипольно-квадрупольное расщепление и циклы звездной активности

Мы показали, что расщепление между дипольными и квадрупольными модами в задаче динамо Паркера экспоненциально мало по параметру ϵ^{-1}. Замечательно, что такую поправку, лежащую за рамками теории возмущений, можно получить, используя два члена коротковолновой асимптотики. Эта возможность составляет ключевое достижение метода Лифшица.

Мы показали также, что дипольная магнитная конфигурация является предпочтительной. Однако квадрупольная конфигурация тоже может представлять интерес для интерпретации данных по звездной активности. Если мы примем, что длина цикла звездной активности составляет $2\pi/\operatorname{Im}\gamma_0 = 22$ года, то $\tau = (\operatorname{Re}\Delta\gamma)^{-1}$ составит $10^5 - 10^6$ лет. На Солнце в конце т.н. минимума Маундера действительно наблюдаются асимметричные относительно экватора конфигурации магнитного поля [14]. В это время динамо-волна распространяется только по одному (южному) полушарию и лишь слегка забегает в другое. Иными словами, прямо наблюдается конфигурация $\vec{h}_0^S(\theta)$. Можно было бы считать, что существование подобных конфигураций объясняется тем, что после нарушения работы солнечного динамо дипольная конфигурация еще не стала преобладающей. Однако время жизни конфигураций со смешанной четностью значительно меньше τ. Аналогично, вариации амплитуда основного солнечного цикла, которые имеют характерный временной масштаб порядка 100 лет, т.н. цикл Глайсберга, хотелось бы отождествить с биениями дипольной и квадрупольной мод, однако период биений $T_1 = (\operatorname{Im}\Delta\gamma)^{-1}$ составляет тоже около $10^5 - 10^6$ лет, что гораздо длиннее цикла Глайсберга.

Это расхождение проще всего объяснить предположив, что модель Паркера не настолько хорошо описывает солнечное динамо для того, чтобы воспроизводить на количественном уровне даже такие тонкие эффекты, как дипольно-квадрупольное расщепление и ограничиться в рамках асимптотических результатов качественным согласием. Однако вполне допустимо, что на других звездах действительно существуют долгоживущие магнитные конфигурации, асимметричные относительно звездного экватора. Действительно, подобные формы звездной активности известны наблюдательно, а численное моделирование полных уравнений динамо в этих случаях дает исключительно малое дипольно - квадрупольное расщепление.

Список литературы

[1] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Molchanov S.A., Sokoloff D.D. Intermittency, diffusion and generation in a nonstationary random medium. Sov. Sci. Rev., C. Math. Phys., 1988, v. 7, p. 1-110.

[2] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. 166. The Almighty chance. Singapore: World Sci. Publ., 1990, p. 316.

[3] Frick P., Sokoloff D. Cascade and dynamo action in a shell model of magnetohydrodynamic turbulence. Phys. Rev. E, 1998, v. 57, N 4, p. 4155-4164.

[4] Frick P., Boffetta G., Giuliani P., Lozhkin S., Sokoloff D. Long-time behavior of MHD shell model. Europhys. Lett., 2000, v. 52, N5, p. 539 - 544.

[5] Антонов Т.Ю., Фрик П.Г., Соколов Д.Д. Рост корреляций в свободно распадающейся турбулентности. Вычислительные методы и программирование, 2000, т. 1, N 1, с. 14 - 18.

[6] Steenbeck M. Impulse und Wirkungen. Berlin: Verl. der Nation, 1978, s. 447.

[7] Ruzmaikin A.A., Shukurov A.M., Sokoloff D.D. Magnetic Fields of Galaxies. Dordrecht: Kluwer, 1988, p. 313.

[8] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Magnetic Fields in Astrophysics. N.Y.: Gordon and Breach, 1983, p. 364.

[9] Parker E.N. Hydromagnetic dynamo models. Astrophys. J., 1955, v. 122, N 1, p. 293 - 314.

[10] Galitsky V.M., Sokoloff D.D. Dynamo waves in the theory of cosmic magnetism and probability waves in quantum mechanics. Acta Astronomica et Geophysica Universitatis Comenianae, 1997, v. 19, N 1, p. 1 - 12.

[11] Kuzanyan K.M., Sokoloff D.D. A dynamo wave in an inhomogeneous medium. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1995, v. 81, N 1, p. 113 - 129.

[12] Galitsky V.M., Sokoloff D.D. Kinematic dynamo wave in the vicinity of the solar pole. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn., 1999, v. 91, N 1 - 2, p. 147 - 167, 1999.

[13] Галицкий В.М., Соколов Д.Д. Спектр уравнений Паркера. Астрон. ж., 1988, т. 75, N1, с. 144 - 151.

[14] Sokoloff D.D., Nesme-Ribes E. The Maunder minimum, a mixed-parity dynamo mode? Astron. Astrophys., 1994, v. 288, N 1, 293-298.