

Теорема Тьюринга–Пригожина для систем параболических уравнений с малой диффузией

Колесов А.Ю., Розов Н.Х., Садовничий В.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Рассматривается вопрос о существовании и устойчивости пространственно неоднородных состояний равновесия (так называемых диссипативных структур) в системах типа реакция–диффузия с граничными условиями Неймана на отрезке. Выявлены характерные особенности динамики диссипативных структур при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах, главная из которых – неограниченный рост их количества (в том числе и устойчивых). Полученные результаты использованы для решения проблемы параметрического возбуждения автоволн в системах параболических уравнений с малой диффузией.

Введение

Вопрос о свойствах нелинейных сред, где формируются устойчивые самоподдерживающиеся структуры, и об общих закономерностях их образования является одним из фундаментальных в современном естествознании, базирующемся на концепции нелинейного мира. При изучении этой проблемы применительно к разнообразным явлениям биофизики, экологии, химической кинетики и т.д. весьма часто и очень успешно используются математические модели, формулируемые в рамках параболических систем типа реакция–диффузия (см., например, [1] – [5]). Например, указанные параболические системы, рассматриваемые в некоторой ограниченной области пространства и дополненные условиями Неймана на ее границе, удачно моделируют процесс формирования пространственно неоднородных структур в однородных средах. Для описания данного феномена применяется, как правило, бифуркационная теорема Тьюринга–Пригожина [1], в основе которой лежит открытая А.Тьюрингом [6] диффузионная неустойчивость пространственно однородного состояния равновесия.

Теорема Тьюринга–Пригожина описывает ситуацию, когда при определенном изменении параметров системы однородное состояние равновесия теряет устойчивость (за счет пространственно неоднородных возмущений), а в его окрестности появляются пространственно неоднородные состояния равновесия – так называемые диссипативные

структуры (ДС). Однако на вопрос о судьбе устойчивых ДС при удалении от точки бифуркации теорема Тьюринга–Пригожина ответа не дает. В связи с этим становятся актуальными другие пути исследования сформулированного вопроса, а именно, численный анализ, специальные асимптотические методы построения так называемых контрастных ДС [7] и др.

В настоящей работе изучаются проблемы существования и устойчивости ДС в параболических системах с малой диффузией. Дополнительным аргументом в пользу рассмотрения именно такой постановки задачи служит то обстоятельство, что здесь мы оказываемся в окрестности максимального вырождения. А это, в свою очередь, позволяет в полном объеме выявить все характерные особенности динамики ДС, главная из которых – неограниченный рост их количества (в том числе и устойчивых) при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах.

1 Нелокальная постановка задачи

1.1

На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$u_t = \nu D u_{xx} + F(u), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (1.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^2$; $\nu > 0$ – параметр, отвечающий за пропорциональное изменение коэффициентов диффузии; матрица $-D$ гурвицева; вектор-функция $F(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$. Основное предположение о краевой задаче (1.1) заключается в том, что $u = 0$ – единственное ее пространственно однородное состояние равновесия, глобально экспоненциально устойчивое в рамках точечной модели

$$\dot{u} = F(u), \quad \dot{} = d/dt. \quad (1.2)$$

В качестве фазового пространства (пространства начальных условий) краевой задачи (1.1) возьмем гильбертово пространство $\overset{\circ}{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$, состоящее из вектор-функций класса W_2^2 , удовлетворяющих граничным условиям из (1.1). Понятие фазового пространства полезно тем, что позволяет без принципиальных изменений распространить на бесконечномерный случай основные положения качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, касающиеся устойчивости по Ляпунову, интегральных многообразий, теоремы об устойчивости по первому приближению и др. Поэтому ниже соответствующие факты применительно к задаче (1.1) и к другим встречающимся краевым задачам будем использовать без каких-либо дополнительных пояснений.

Поставим вопрос о динамике ДС краевой задачи (1.1) по параметру ν . Наиболее простая и естественная ситуация, которая здесь может возникнуть, описывается следующими двумя условиями.

Условие 1.1. Считаем, что квадратный многочлен

$$P(\nu) = \det(A - \nu D), \quad A = F'(0) \quad (1.3)$$

имеет корни $0 < \nu_1 < \nu_2$.

Сформулированное условие обеспечивает тьюринговскую неустойчивость нулевого решения задачи (1.1). Действительно, линеаризуя ее на нулевом состоянии равновесия и применяя к получившейся линейной системе метод Фурье по функциям $\cos nx$, $n = 0, 1, \dots$, убеждаемся, что за устойчивость решения $u = 0$ в рамках распределенной модели (1.1) отвечает расположение спектра матриц $A - n^2\nu D$, $n = 0, 1, \dots$. Заметим, далее, что из предполагаемой экспоненциальной устойчивости решения $u = 0$ в рамках точечной модели (1.2) вытекает гурвицевость матрицы A , а значит, и неравенства $\operatorname{tr}(A - n^2\nu D) < 0$ при всех $n \geq 0$. А отсюда и из очевидного представления $\det(A - n^2\nu D) = P(n^2\nu)$ заключаем, что состояние равновесия $u = 0$ задачи (1.1) экспоненциально неустойчиво при

$$\nu \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (\nu_1/n^2, \nu_2/n^2). \quad (1.4)$$

Условие 1.2. Предполагаем существование таких значений α и β , $\nu_1 < \alpha < \beta < \nu_2$, что при всех

$$\alpha \leq \nu \leq \beta \quad (1.5)$$

во-первых, краевая задача (1.1) имеет пару непрерывных по ν диссипативных структур

$$u_1(x, \nu) = u_0(x, \nu), \quad u_2(x, \nu) = u_0(\pi - x, \nu); \quad (1.6)$$

во-вторых, отрицательны действительные части собственных значений краевой задачи

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = \lambda h, \quad h'(0) = h'(\pi) = 0, \quad (1.7)$$

где $A(x, \nu) = F'_u(u_0(x, \nu))$, а штрих – дифференцирование по x .

Обратим внимание на естественность сформулированного условия, так как (и это уже отмечалось) устойчивые ДС (1.6) могут возникать в системе (1.1) в результате классической бифуркации Тьюринга–Пригожина [1]. Отметим еще, что в рамках условий 1.1 и 1.2 простейшей является ситуация, когда ДС (1.6) непрерывно продолжаются по параметру ν на весь тьюринговский интервал $\nu_1 < \nu < \nu_2$ и

$$u_0(x, \nu_1) \equiv u_0(x, \nu_2) \equiv 0. \quad (1.8)$$

Опираясь на условие 1.2, с помощью так называемого принципа подобия (см. [8], [9]) можно построить и другие ДС задачи (1.1). Суть этого принципа состоит в следующем. Продолжим фигурирующую в (1.6) вектор-функцию $u_0(x, \nu)$ по переменной x на отрезок

$[-\pi, 0]$ четным образом, а затем на всю ось x по периодичности с периодом 2π . Тогда, как легко видеть, при любом натуральном n функция $u_0(nx, n^2\nu)$ по-прежнему будет удовлетворять задаче (1.1), если, конечно, $n^2\nu \in [\alpha, \beta]$. А отсюда очевидным образом вытекает, что на каждом из отрезков

$$\alpha/n^2 \leq \nu \leq \beta/n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

задача (1.1) имеет две ДС, задающиеся равенствами

$$u_n^1 = u_0(nx, n^2\nu), \quad u_n^2 = u_0(\pi - nx, n^2\nu). \quad (1.10)$$

Заметим, что с ростом n отрезки (1.9) начинают пересекаться во все большем числе, а значит, количество сосуществующих ДС (1.10) у задачи (1.1) при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно растет. Действительно, при любом фиксированном ν существуют только те ДС (1.10), номера n которых удовлетворяют неравенствам $\sqrt{\alpha/\nu} \leq n \leq \sqrt{\beta/\nu}$. Количество же n_* таких номеров при $\nu \rightarrow 0$ неограниченно увеличивается, а точнее говоря, имеет порядок $\nu^{-1/2}$.

1.2

В этом пункте сформулируем набор ограничений, обеспечивающих устойчивость ДС (1.10) на каждом из отрезков (1.9). Для этого введем в рассмотрение спектральные задачи

$$n^2\nu Dh'' + A(x, n^2\nu)h = \lambda h, \quad h'(0) = h'(n\pi) = 0, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (1.11)$$

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = \lambda h, \quad h'(0) = 0, \quad (1.12)$$

где матрица $A(x, \nu)$ та же, что и в (1.7), параметр ν в случае задач (1.11) меняется на отрезках (1.9), а в случае (1.12) – на отрезке (1.5). Считаем еще, что задача (1.12) рассматривается на полуоси $0 \leq x < \infty$, а при $x \rightarrow \infty$ для нее ставится условие ограниченности.

Обозначим через $\sigma_n(\nu)$ спектр задачи (1.11), состоящий, как известно [10], из счетного числа собственных значений, а через $\sigma(\nu)$ – спектр задачи (1.12). Нетрудно заметить, что при всех ν из отрезков (1.9) справедливы включения

$$\sigma_n(\nu) \subset \sigma(n^2\nu), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Действительно, если λ_0 – произвольное собственное значение задачи (1.11), то продолжая отвечающую ему собственную функцию $h_0(x)$ четным образом на отрезок $[-n\pi, 0]$, а затем на всю ось x по периодичности с периодом $2\pi n$, убеждаемся, что λ_0 будет собственным значением и задачи (1.12) (при замене ν на $n^2\nu$).

Условие 1.3. Считаем, что при всех ν из отрезка (1.5) уравнение

$$\nu Dh'' + A(x, \nu)h = 0$$

не имеет нетривиальных ограниченных на полуоси $x \geq 0$ решений, удовлетворяющих условию $h'(0) = 0$.

Сформулированное условие означает, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1.12). Однако, что характерно для данного случая, у нее всегда есть непрерывная ветвь собственных значений, касающаяся мнимой оси в точке $\lambda = 0$. Для построения указанной ветви применим следующий специальный прием. Положим в (1.12)

$$h = h_1 \cos zx - h_2 \sin zx, \quad (1.14)$$

где $|z| \ll 1$, а функции h_1, h_2 – решения краевой задачи

$$\begin{aligned} \nu D(h_1'' - 2zh_1' - z^2 h_1) + A(x, \nu)h_1 &= \lambda h_1, \quad h_1'(0) = h_1'(\pi) = 0, \\ \nu D(h_2'' + 2zh_2' - z^2 h_2) + A(x, \nu)h_2 &= \lambda h_2, \quad h_2(0) = h_2(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Отметим, что при $z = 0$ задача (1.15) имеет нулевое собственное значение, которому отвечает собственная функция с компонентами $h_1 = 0, h_2 = \partial u_0 / \partial x$. Заметим также, что $\partial u_0 / \partial x \neq 0$ при любом фиксированном ν из отрезка (1.5). Действительно, в предположении противного имеем $u_0(x, \nu_*) \equiv 0$ при некотором $\nu_* \in [\alpha, \beta]$, так как $u = 0$ – единственное пространственно однородное состояние равновесия задачи (1.1). А это противоречит экспоненциальной устойчивости ДС (1.6), ибо при $\nu = \nu_* \in (\nu_1, \nu_2)$ нулевое решение неустойчиво (см. (1.4)).

Условие 1.4. Предполагаем, что при всех $\nu \in [\alpha, \beta]$ число $\lambda = 0$ – простое собственное значение краевой задачи

$$\nu D h'' + A(x, \nu)h = \lambda h, \quad h(0) = h(\pi) = 0. \quad (1.16)$$

Приведенное условие обеспечивает существование у задачи (1.15) при $(z, \nu) \in [-z_0, z_0] \times [\alpha, \beta]$, где $z_0 > 0$ достаточно мало, гладкого по совокупности переменных простого собственного значения $\lambda(z, \nu)$, $\lambda(0, \nu) \equiv 0$. Кроме того, $\lambda(-z, \nu) \equiv \lambda(z, \nu)$, так как задача (1.15) не изменяется при заменах z на $-z$, h_2 на $-h_2$. Для построения тейлоровского разложения $\lambda(z, \nu)$ по z положим в (1.15)

$$\lambda = \lambda_1(\nu)z^2 + \lambda_2(\nu)z^4 + \dots, \quad (1.17)$$

$$h_1 = zv_1(x, \nu) + z^2 v_2(x, \nu) + \dots, \quad h_2 = \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, \nu) + zw_1(x, \nu) + \dots \quad (1.18)$$

и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z . Опуская несложные выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$\lambda_1(\nu) = \nu \int_0^\pi \left(D \left(2 \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), g(x, \nu) \right) dx, \quad (1.19)$$

где $(*, *)$ – евклидово скалярное произведение в \mathbb{R}^2 , а v_1, g – решения краевых задач

$$\nu D v_1'' + A(x, \nu)v_1 - 2\nu D \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \quad v_1'|_{x=0} = v_1'|_{x=\pi} = 0;$$

$$\nu D^* g'' + A^*(x, \nu)g = 0, \quad g|_{x=0} = g|_{x=\pi} = 0,$$

причем $\int_0^\pi \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, g(x, \nu) \right) dx \equiv 1$.

Итак, интересующая нас ветвь собственных значений задачи (1.12) задается соотношениями (1.14), (1.17), (1.18). Отметим, что аналогичным образом непрерывную ветвь ее собственных значений порождает любое собственное значение λ_0 задачи (1.7) или (1.16). В самом деле, пусть ему отвечает собственная функция $h_0(x)$. Тогда при $z = 0$ собственное значение λ_0 будет иметь и задача (1.15) (с собственной функцией $h_1 = h_0(x)$, $h_2 = 0$ или $h_1 = 0$, $h_2 = h_0(x)$ соответственно). Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, этими непрерывными ветвями исчерпывается, вообще говоря, весь спектр $\sigma(\nu)$ краевой задачи (1.12).

Условие 1.5. Допустим, что при значениях ν из отрезка (1.5), во-первых, $\sigma(\nu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$, а во-вторых, отрицательна величина (1.19).

Все сформулированные условия позволяют дать ответ на вопрос об устойчивости ДС (1.10). А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. При выполнении условий 1.1–1.5 и при любом натуральном n пара ДС (1.10) краевой задачи (1.1) экспоненциально устойчива на всем промежутке (1.9) своего существования.

Для доказательства линеаризуем задачу (1.1) на состоянии равновесия u_n^1 (случай u_n^2 рассматривать нет необходимости, так как он сводится к данному заменой $\pi - nx \rightarrow nx$). В результате убеждаемся, что после замены $nx \rightarrow x$ за устойчивость пары ДС (1.10) отвечает расположение спектра задачи (1.11). Остается заметить, что поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (1.12) (см. условие 1.3), то в силу (1.13) и условия 1.5 имеем

$$\sigma_n(\nu) \subset \sigma(n^2\nu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Теорема 1.1 доказана.

Из этой теоремы, являющейся аналогом классического результата Тьюринга–Пригожина для сингулярно возмущенного случая, следует, что при выполнении условий 1.1–1.5 и при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых сосуществующих ДС (1.10) у задачи (1.1) неограниченно растет. При этом, однако, всегда сталкиваемся со следующей характерной особенностью: у задач (1.11) существуют собственные значения, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Действительно, упомянутые собственные значения и отвечающие им собственные функции получаются при подстановке в (1.14), (1.17), (1.18) величины $n^2\nu$ вместо ν и при дискретных значениях $z = k/n$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ (случай $k = 0$ исключается, так как здесь получается нулевая собственная функция).

Обратим внимание, что если теорема 1.1 вытекает из условий 1.1–1.5 очевидным образом, то реализуемость самих этих условий далеко не тривиальна. Связано это с тем,

что все они сформулированы в нелокальных терминах. Поэтому становится актуальным следующее утверждение.

Теорема 1.2. *Класс параболических краевых задач (1.1), удовлетворяющих условиям 1.1–1.5 не пуст.*

Доказательство данной теоремы приводится в следующем параграфе. А здесь лишь отметим, что условия 1.1–1.5 топологически грубы, т.е. сохраняются при малых возмущениях матрицы D и вектор-функции F (в метрике C^k , $k \geq 1$). Именно по этой причине в условии 1.5 мы требуем выполнения неравенства $\lambda_1(\nu) < 0$, характеризующего некоторую общность положения.

2 Локальная постановка задачи

2.1

Первый этап доказательства теоремы 1.2 состоит в получении локальных вариантов условий 1.1 и 1.2. Для их формулировки положим в (1.1)

$$D = D_0 + \mu D_1, \quad (2.1)$$

где матрица $-D_0$ гурвицева, D_1 – произвольна, $\mu > 0$ – вспомогательный малый параметр, и рассмотрим аналогичный (1.3) квадратичный многочлен $P(\nu, \mu)$.

Условие 2.1. *Найдется такое $\nu_0 > 0$, что*

$$P(\nu_0, 0) = \frac{\partial P}{\partial \nu}(\nu_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial \mu}(\nu_0, 0) < 0. \quad (2.2)$$

Несложный анализ показывает, что в предположениях (2.2) и при всех $0 < \mu \ll 1$ многочлен $P(\nu, \mu)$ имеет два корня

$$\nu_1(\mu) = \nu_0 - \Delta_1(\mu)\sqrt{\mu}, \quad \nu_2(\mu) = \nu_0 + \Delta_2(\mu)\sqrt{\mu}; \quad (2.3)$$

$$\Delta_j(0) = \Delta_0 \equiv \sqrt{-\nu_0(D_1 a, b)/(D_0 a_1, b)}, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Здесь a и b – собственные векторы матриц $A - \nu_0 D_0$ и $A^* - \nu_0 D_0^*$ соответственно, отвечающие их нулевым собственным значениям и нормированные условием $(a, b) = 1$, а a_1 , $(a_1, b) = 0$, – решение системы

$$(A - \nu_0 D_0)a_1 = D_0 a. \quad (2.5)$$

Отметим, что из первого соотношения (2.2) вытекает равенство

$$(D_0 a, b) = 0, \quad (2.6)$$

а из второго соотношения (2.2) и очевидного неравенства $P''_{\nu\nu}(\nu_0, 0) > 0$ – оценки

$$(D_1 a, b) < 0, \quad (D_0 a_1, b) > 0. \quad (2.7)$$

Следовательно, оказывается заведомо разрешимой вырожденная система (2.5), а подкоренное выражение в (2.4) является положительным.

Итак, прояснился смысл условия 2.1 и стала понятной причина введения вспомогательного параметра μ : из (2.3) следует, что $2\Delta_0\sqrt{\mu}$ – длина тьюрингского интервала (ν_1, ν_2) , которую мы считаем малой. А это, как будет показано ниже, и обеспечивает требуемую локальность интересующих нас проблем существования и устойчивости ДС (1.10). Отметим еще, что отход от особенности, реализующейся при $\mu = 0$, возможен не только за счет варьирования коэффициентов диффузии, но и за счет изменения каких-либо других параметров системы. Главное, чтобы при этом сохранялось второе соотношение (2.2).

Условие 2.1 представляет собой локальный вариант условия 1.1. Для формулировки локального варианта условия 1.2 введем в рассмотрение тейлоровское разложение вектор-функции $F(u)$ в нуле:

$$F(u) = Au + F_2(u, u) + F_3(u, u, u) + \dots, \quad (2.8)$$

где F_2, F_3 – квадратичная и кубическая симметричные формы. Введем, далее, величину

$$d_0 = \left(2F_2(a, v) + F_2(a, w) + \frac{3}{4}F_3(a, a, a), b \right) \quad (2.9)$$

где векторы v и w – решения систем

$$Av = -\frac{1}{2}F_2(a, a), \quad (A - 4\nu_0 D_0)w = -\frac{1}{2}F_2(a, a).$$

Условие 2.2. Предполагаем, что $d_0 < 0$.

Это условие, представляющее собой локальный вариант условия 1.2, в совокупности с условием 2.1 обеспечивает существование и устойчивость у задачи (1.1) исходной пары ДС (1.6). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$u_t = (\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)u_{xx} + F(u), \quad u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad (2.10)$$

где δ – вспомогательный параметр порядка единицы, отвечающий за изменение параметра ν между корнями (2.3).

Для отыскания диссипативных структур задачи (2.10) воспользуемся аналогом стандартного одночастотного метода [11], т.е. положим в (2.10)

$$u = \sqrt{\mu}u_1(x) + \mu u_2(x) + \mu^{3/2}u_3(x) + \dots, \quad u_1(x) = \xi a \cos x, \quad (2.11)$$

где $(A - \nu_0 D_0)a = 0$, а ξ – неизвестная "амплитуда". Привлекая затем разложение (2.8) и приравнявая коэффициенты при μ и $\mu^{3/2}$, получим краевые задачи для нахождения u_2 и u_3 :

$$\nu_0 D_0 u_2'' + Au_2 + \delta D_0 u_1'' + F_2(u_1, u_1) = 0, \quad u_2'|_{x=0} = u_2'|_{x=\pi} = 0; \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \nu_0 D_0 u_3'' + A u_3 + \delta D_0 u_2'' + \nu_0 D_1 u_1'' + 2F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_1, u_1) &= 0, \\ u_3|_{x=0} = u_3'|_{x=\pi} &= 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из анализа задачи (2.12), разрешимость которой обеспечивает равенство (2.6), вытекает, что

$$u_2 = \delta \xi a_1 \cos x + \xi^2 (v + w \cos 2x) + \eta a \cos x, \quad (2.14)$$

где a_1 – решение системы (2.5), векторы v, w те же, что и в (2.9), а η – произвольная вещественная постоянная. Подставляя (2.14) в задачу (2.13), после некоторых преобразований убеждаемся, что условие разрешимости последней имеет вид

$$[-\nu_0(D_1 a, b) - \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3 = 0, \quad (2.15)$$

где ляпуновская величина d_0 определена в (2.9).

Условие 2.2 вместе с неравенствами (2.7) позволяет найти из уравнения разветвления (2.15) амплитуду

$$\xi(\delta) = \sqrt{[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]/d_0} > 0, \quad |\delta| < \Delta_0. \quad (2.16)$$

Подставляя ее в (2.11) и (2.14), полностью определяем первый член ряда (2.11) и частично – второй. Что же касается фигурирующей в (2.14) произвольной постоянной η , то она определяется из условия разрешимости аналогичной (2.13) краевой задачи для u_4 , причем, как это обычно бывает в теории ветвления, для нее получается уже линейное неоднородное уравнения вида $2d_0 \xi^2(\delta) \eta = \varphi$. А так как в дальнейшем явная формула для η не потребуется, то соответствующие вычисления опустим.

Для того чтобы придать изложенным формальным построениям строгий смысл, будем считать, что в задаче (2.10) параметры μ, δ удовлетворяют неравенствам

$$0 < \mu \leq \mu_0, \quad -\Delta_1(\mu) < \delta < \Delta_2(\mu), \quad (2.17)$$

где $\mu_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало, а функции $\Delta_j(\mu)$, $j = 1, 2$, заимствованы из (2.3).

Лемма 2.1. При выполнении условий 2.1, 2.2 и при всех μ, δ , удовлетворяющих неравенствам (2.17), краевая задача (2.10) имеет две экспоненциально устойчивые ДС

$$u_1(x, \delta, \mu) = u_0(x, \delta, \mu), \quad u_2(x, \delta, \mu) = u_0(\pi - x, \delta, \mu), \quad (2.18)$$

$$u_0(x, -\Delta_1(\mu), \mu) \equiv u_0(x, \Delta_2(\mu), \mu) \equiv 0, \quad (2.19)$$

где функция $u_0(x, \delta, \mu)$ допускает (в метрике $\overset{o}{W}_2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$) равномерное по δ из любого фиксированного отрезка $[\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0, \Delta_0)$ асимптотическое представление (2.11), (2.16).

Доказательство. Сформулированная лемма представляет собой один из вариантов классической бифуркационной теоремы Тьюринга–Пригожина. Для ее обоснования достаточно заметить, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ задача (2.10) в окрестности нулевого состояния равновесия имеет экспоненциально орбитально устойчивое одномерное интегральное многообразие [12] $u = \xi a \cos x + \Phi(\xi, \mu)$, уравнение на котором после нормировок $\xi/\sqrt{\mu} \rightarrow \xi$, $\mu t \rightarrow t$ записывается в виде

$$d\xi/dt = -[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3 + \mu \Omega(\xi, \mu). \quad (2.20)$$

Здесь достаточно гладкие по совокупности переменных ξ , $\sqrt{\mu}$ функции Φ и Ω со значениями в $\overset{0}{W}_2([0, \pi]; \mathbb{R}^2)$ и \mathbb{R} соответственно таковы, что $\Phi(0, \mu) \equiv 0$, $\Phi'_\xi(0, 0) = 0$, $\Omega(0, \mu) \equiv 0$. Отметим еще, что в данном случае справедливо стандартное утверждение о соответствии между грубыми стационарными режимами исходной задачи (2.10) и ее "укороченной" нормальной формы

$$d\xi/dt = -[\nu_0(D_1 a, b) + \delta^2(D_0 a_1, b)]\xi + d_0 \xi^3.$$

Поэтому двум экспоненциально устойчивым состояниям равновесия $\xi = \pm \xi(\delta)$ последней отвечают две устойчивые ДС (2.18). Остается добавить, что асимптотическое представление (2.11) – следствие гладкости упомянутого выше многообразия по $\sqrt{\mu}$, а тождества (2.19) вытекают из очевидных равенств $\xi(\pm \Delta_0) = 0$. Лемма доказана.

Возвращаясь теперь к исходной задаче (1.1) и опираясь на принцип подобия, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.2. Пусть выполнено равенство (2.1) и условия 2.1, 2.2. Тогда найдется такое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ на каждом из интервалов

$$\nu_1(\mu)/n^2 < \nu < \nu_2(\mu)/n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

краевая задача (1.1) имеет пару ДС

$$u_n^1 = u_0(nx, \delta_n(\nu, \mu), \mu), \quad u_n^2 = u_0(\pi - nx, \delta_n(\nu, \mu), \mu), \quad (2.22)$$

где $\delta_n(\nu, \mu) = (n^2 \nu - \nu_0)/\sqrt{\mu}$.

Сопоставляя область неустойчивости (1.4) с интервалами (2.21) и учитывая (2.19), убеждаемся, что семействами (2.22) при $n = 1, 2, \dots$ исчерпываются все ДС задачи (1.1), (2.1), бифурцирующие из ее нулевого решения. Заметим еще, что поскольку в данной лемме параметры μ и ν независимы, то, как легко видеть, при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих ДС (2.22) неограниченно увеличивается (имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$). При этом, однако, их состав постоянно обновляется, так как каждая пара ДС (2.22) "живет" лишь в ячейке (2.21). Тем самым, при $\nu \rightarrow 0$ наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций их рождения и смерти.

2.2

Второй этап обоснования теоремы 1.2 заключается в исследовании расположения спектра аналогичной (1.12) краевой задачи

$$(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)h'' + Ah + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta)h + \mu B_2(x, \delta, \mu)h = \lambda h, \quad h'(0) = 0, \quad (2.23)$$

рассматриваемой на полуоси $0 \leq x < \infty$ и дополненной условием ограниченности $h(x)$ при $x \rightarrow \infty$. Здесь параметр δ меняется на произвольно фиксированном отрезке $[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0, \Delta_0)$, $\delta_1, \delta_2 > 0$;

$$\begin{aligned} B_1(x, \delta)h &= 2F_2(a, h)\xi(\delta)\cos x, \\ B_2(x, \delta, 0)h &= 2F_2(u_2(x, \delta), h) + 3F_3(a, a, h)\xi^2(\delta)\cos^2 x; \end{aligned} \quad (2.24)$$

$u_2(x, \delta)$ – результат подстановки (2.16) в (2.14).

При $\mu = 0$ спектр задачи (2.23) ясен – это собственные значения пучка матриц

$$A - \nu_0\sigma^2 D_0, \quad (2.25)$$

получающегося при $h = c \cdot \cos \sigma x$, $c \in \mathbb{R}^2$, $\sigma \in \mathbb{R}$. Кроме того, из условия 2.1 вытекает гурвицевость матрицы (2.25) при любом $\sigma \neq 1$ и существование у нее при всех σ , близких к единице, непрерывной ветви собственных значений $\lambda(\sigma)$: $\lambda(1) = \lambda'(1) = 0$, $\lambda''(1) < 0$. Поэтому исследование расположения спектра задачи (2.23) при $\mu > 0$ состоит в асимптотическом вычислении данной ветви, что в свою очередь сводится (см. п. 1.2) к анализу вспомогательной краевой задачи

$$(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)(h_1'' - 2zh_2' - z^2 h_1) + Ah_1 + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta)h_1 + \mu B_2(x, \delta, \mu)h_1 = \lambda h_1, \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} (\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)(h_2'' + 2zh_1' - z^2 h_2) + Ah_2 + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta)h_2 + \mu B_2(x, \delta, \mu)h_2 &= \lambda h_2, \\ h_1'(0) = h_1'(\pi) = h_2(0) = h_2(\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

при $0 < \mu \ll 1$, $|z| \ll 1$.

При $\mu = z = 0$ задача (2.26), (2.27) распадается на две независимые краевые задачи

$$\begin{aligned} \nu_0 D_0 h_1'' + Ah_1 &= \lambda h_1, \quad h_1'(0) = h_1'(\pi) = 0, \\ \nu_0 D_0 h_2'' + Ah_2 &= \lambda h_2, \quad h_2(0) = h_2(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

каждая из которых имеет простое нулевое собственное значение с собственными функциями $h_1^0(x) = a \cos x$ и $h_2^0(x) = a \sin x$ соответственно. Остальные же собственные значения задач (2.28), согласно условию 2.1, находятся в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный левыми частями уравнений (2.26) в пространстве $E = \overset{o}{W}_2^2([0, \pi]; \mathbb{R}^4)$ вектор-функций $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяющих граничным условиям (2.27). Из изложенного выше следует, что при всех достаточно малых μ и z оператор L имеет двумерное инвариантное подпространство

$$E_0(\mu, z) = \operatorname{span}\{v_1(x, \mu, z), v_2(x, \mu, z)\} \subset E, \quad (2.29)$$

где $v_j(x, 0, 0) = e_j(x)$, $j = 1, 2$; $e_1(x) = \begin{pmatrix} h_1^0(x) \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ h_2^0(x) \end{pmatrix}$.

Инвариантность подпространства (2.29) означает существование такой матрицы второго порядка $\Lambda(\mu, z)$, $\Lambda(0, 0) = 0$, что

$$LV = V\Lambda, \quad (2.30)$$

где по столбцам матрицы V размера 4×2 стоят базисные функции подпространства $E_0(\mu, z)$ (см. (2.29)). Отметим также, что матрицы V и Λ можно выбрать гладко зависящими от $\sqrt{\mu}$ и z , так как от этих параметров гладко зависят коэффициенты уравнений (2.26).

Итак, проблема устойчивости состояний равновесия (2.22) свелась к исследованию расположения собственных значений матрицы $\Lambda(\mu, z)$, что, в свою очередь, требует знания нескольких членов ее тейлоровского разложения по $\sqrt{\mu}$ и z . Для их нахождения подставим в (2.30)

$$\begin{aligned} \Lambda &= \mu\Lambda_1 + \sqrt{\mu}z\Lambda_2 + z^2\Lambda_3 + \dots \\ V &= V_0 + \sqrt{\mu}V_1 + zV_2 + \mu V_3 + \sqrt{\mu}zV_4 + z^2V_5 + \dots, \end{aligned} \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} V_0 &= [e_1(x), e_2(x)], \quad V_j = [v_{1j}, v_{2j}], \quad j = 1, \dots, 5, \\ v_{1j} &= \begin{pmatrix} h_{1j} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{2j} = \begin{pmatrix} 0 \\ h_{2j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 3, 5, \\ v_{1j} &= \begin{pmatrix} 0 \\ h_{1j} \end{pmatrix}, \quad v_{2j} = \begin{pmatrix} h_{2j} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = 2, 4, \\ \Lambda_1 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} \lambda_5 & 0 \\ 0 & \lambda_6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Приравнивая затем коэффициенты при одинаковых степенях $\sqrt{\mu}$ и z , для определения функций $v_{1j}, v_{2j}, j = 1, \dots, 5$, получим рекуррентную последовательность краевых задач, из условий разрешимости которых находим элементы матриц $\Lambda_j, j = 1, 2, 3$.

Действуя указанным выше способом, для $h_{1j}, h_{2j}, j = 1, 2$, получим краевые задачи ($L_0 = \nu_0 D_0 d^2/dx^2 + A$)

$$\begin{aligned} L_0 h_{11} + (B_1(x, \delta) - \delta D_0) a \cos x &= 0, \quad h'_{11}(0) = h'_{11}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{21} + (B_1(x, \delta) - \delta D_0) a \sin x &= 0, \quad h_{21}(0) = h_{21}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{12} - 2\nu_0 D_0 a \sin x &= 0, \quad h_{12}(0) = h_{12}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{22} - 2\nu_0 D_0 a \cos x &= 0, \quad h'_{22}(0) = h'_{22}(\pi) = 0, \end{aligned}$$

разрешимость которых обеспечивает равенство (2.6). Учитывая здесь явный вид матрицы $B_1(x, \delta)$ (см. (2.24)), находим:

$$\begin{aligned} h_{11} &= \delta a_1 \cos x + 2\xi(\delta)(v + w \cos 2x), \quad h_{12} = 2\nu_0 a_1 \sin x, \\ h_{21} &= \delta a_1 \sin x + 2\xi(\delta)w \sin 2x, \quad h_{22} = 2\nu_0 a_1 \cos x, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где векторы a_1, v, w те же, что и в (2.14).

Приравнивая в (2.30) коэффициенты при $\mu, \sqrt{\mu}z, z^2$ для $h_{1j}, h_{2j}, j = 3, 4, 5$, приходим к краевым задачам

$$\begin{aligned} L_0 h_{13} + \delta D_0 h''_{11} - \nu_0 D_1 a \cos x + B_1(x, \delta) h_{11} + B_2(x, \delta, 0) a \cos x &= \lambda_1 a \cos x, \quad h'_{13}(0) = h'_{13}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{23} + \delta D_0 h''_{21} - \nu_0 D_1 a \sin x + B_1(x, \delta) h_{21} + B_2(x, \delta, 0) a \sin x &= \lambda_2 a \sin x, \quad h_{23}(0) = h_{23}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{14} - 2\delta D_0 a \sin x + 2\nu_0 D_0 h'_{11} + B_1(x, \delta) h_{12} + \delta D_0 h''_{12} &= \lambda_4 a \sin x, \quad h_{14}(0) = h_{14}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{24} - 2\delta D_0 a \cos x - 2\nu_0 D_0 h'_{21} + B_1(x, \delta) h_{22} + \delta D_0 h''_{22} &= \lambda_3 a \cos x, \quad h'_{24}(0) = h'_{24}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{15} - 2\nu_0 D_0 h'_{12} - \nu_0 D_0 a \cos x &= \lambda_5 a \cos x, \quad h'_{15}(0) = h'_{15}(\pi) = 0; \\ L_0 h_{25} + 2\nu_0 D_0 h'_{22} - \nu_0 D_0 a \sin x &= \lambda_6 a \sin x, \quad h_{25}(0) = h_{25}(\pi) = 0; \end{aligned}$$

Подставляя сюда известные функции (2.32) и учитывая (2.24), из условий разрешимости этих краевых задач определяем

$$\lambda_1 = 2d_0 \xi^2(\delta), \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -4\nu_0 \delta (D_0 a_1, b), \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -4\nu_0^2 (D_0 a_1, b). \quad (2.33)$$

Полученной информации о матрице $\Lambda(\mu, z)$ достаточно для исследования знаков ее определителя и следа при всех $0 < \mu, |z| \ll 1$. Действительно, функции $\text{tr } \Lambda(\mu, z)$ и $\det \Lambda(\mu, z)$ четные по z (см. соответствующие пояснения перед формулой (1.17)); далее, $\det \Lambda(\mu, 0) \equiv 0$, так как при $z = 0$ задача (2.26), (2.27) имеет нулевое собственное значение (см. п. 1.2) с собственной функцией

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, \delta, \mu) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

А отсюда и из (2.33) заключаем, что

$$\text{tr } \Lambda = 2d_0 \xi^2(\delta) \mu - 8\nu_0^2 (D_0 a_1, b) z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu} z^2 + z^4), \quad (2.35)$$

$$\det \Lambda = 8\nu_0^2 (D_0 a_1, b) z^2 [-(\nu_0 (D_1 a, b) + 3\delta^2 (D_0 a_1, b)) \mu + 2\nu_0^2 (D_0 a_1, b) z^2 + O(\mu^{3/2} + \sqrt{\mu} z^2 + z^4)]. \quad (2.36)$$

Из разложения (2.35) вытекает отрицательность $\text{tr } \Lambda$ при любом фиксированном $\delta \in (-\Delta_0, \Delta_0)$ и при всех достаточно малых $\mu > 0, |z|$. Поэтому в анализе нуждается только равенство

$$z^{-2} \det \Lambda = 0, \quad (2.37)$$

в котором параметр $\delta, |\delta| < \Delta_0, |\delta| \neq \Delta_0/\sqrt{3}$, также фиксирован. Но при $|\delta| < \Delta_0/\sqrt{3}$ первое слагаемое в квадратных скобках из (2.36) положительно, что влечет неравенство $z^{-2} \det \Lambda > 0$ при всех достаточно малых $\mu > 0, |z|$. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.3. При выполнении условий леммы 2.2 для любого отрезка $[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3})$, $\delta_1, \delta_2 > 0$, можно указать такое $\mu_0 = \mu_0(\delta_1, \delta_2) > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ и при любом натуральном n пара ДС (2.22) краевой задачи (1.1), (2.1) экспоненциально устойчива при $(\nu_0 - \delta_1\sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 + \delta_2\sqrt{\mu})/n^2$.

Доказательство. Введем в рассмотрение спектральную задачу

$$(\nu_0 + \delta_n\sqrt{\mu})(D_0 + \mu D_1)h'' + Ah + \sqrt{\mu}B_1(x, \delta_n)h + \mu B_2(x, \delta_n, \mu)h = \lambda h, \quad h'(0) = h'(n\pi) = 0, \quad (2.38)$$

где $\delta_n = \delta_n(\nu, \mu) \in [-\delta_1, \delta_2]$, получающуюся при линеаризации системы (1.1), (2.1) на состоянии равновесия u_n^1 и замене $nx \rightarrow x$, и обозначим через $\sigma_n(\nu, \mu)$ совокупность ее собственных значений. Обозначим, далее, через $\sigma(\delta, \mu)$ спектр задачи (2.23). Из проведенного выше анализа следует, что $\sigma(\delta, \mu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$. Действительно, все близкие к мнимой оси точки спектра задачи (2.23) – это собственные значения матрицы $\Lambda(\mu, z)$, $|z| \leq z_0$, где $z_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало. Последняя же при $\delta \in [-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3})$, $0 < \mu \ll 1$, $z \neq 0$, является гурвицевой. Исключение составляет только случай $z = 0$, когда одно собственное значение матрицы Λ нулевое, а другое – отрицательно.

Следует особо подчеркнуть, что условие 1.3 здесь выполняется автоматически: $\lambda = 0$ заведомо не является собственным значением задачи (2.23), так как в силу (1.14), (2.34) при $z = 0$ ему отвечает нулевая собственная функция. А отсюда и из изложенного выше вытекает, что

$$\sigma_n(\nu, \mu) \subset \sigma(\delta_n(\nu, \mu), \mu) \setminus \{0\} \subset \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}.$$

Лемма 2.3 доказана.

Обратим внимание, что, как и в лемме 2.2, при фиксированном μ и при $\nu \rightarrow 0$ количество устойчивых сосуществующих ДС (2.22) неограниченно растет (имеет порядок $\sqrt{\mu/\nu}$).

При $\Delta_0/\sqrt{3} < |\delta| < \Delta_0$ из уравнения (2.37) с помощью теоремы о неявной функции, применимость которой гарантирует разложение (2.36), однозначно определяется функция $\mu = \Psi(z)$, $\Psi(-z) = \Psi(z)$:

$$\Psi(z) = 2\nu_0^2(D_0a_1, b)z^2/[\nu_0(D_1a, b) + 3\delta^2(D_0a_1, b)] + O(z^4).$$

Следовательно, при каждом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ существует интервал $|z| < z_*(\mu)$, где $z_*(\mu)$, $z_*(0) = 0$, – положительный корень уравнения $\mu = \Psi(z)$, в котором $z^{-2} \det \Lambda < 0$. Напомним, однако, что при переходе от задачи (2.26), (2.27) к (2.38) следует положить $z = \pm k/n$, $k = 0, 1, \dots$. Точнее говоря, все критические собственные значения (т.е. стремящиеся к нулю при $\mu \rightarrow 0$ или при $n \rightarrow \infty$) задачи (2.38) являются собственными значениями матриц

$$\Lambda_k = \Lambda|_{z=k/n, \delta=\delta_n(\nu, \mu)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm k_0,$$

где k_0 – целая часть nz_0 , а $z_0 > 0$ фиксировано и достаточно мало. Поэтому для того чтобы в рассматриваемом случае задача (2.38) имела точки спектра, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$1/n < z_*(\mu), \quad (2.39)$$

означающего, что хотя бы одно из ненулевых значений z попадет в интервал $(-z_*(\mu), z_*(\mu))$ (значение $z = 0$ при этом исключает по тем же причинам, что и выше).

Суммируя изложенное, приходим к следующему утверждению.

Лемма 2.4. *Для любых отрезков*

$$[-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0, -\Delta_0/\sqrt{3}), \quad [\delta_3, \delta_4] \subset (\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0); \quad \delta_j > 0, \quad j = 1, \dots, 4,$$

можно указать такое достаточно малое $\mu_0 > 0$, что при всех $0 < \mu \leq \mu_0$ пара ДС (2.22) с любым номером n , удовлетворяющим оценке (2.39), экспоненциально неустойчива как при

$$(\nu_0 - \delta_1\sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 - \delta_2\sqrt{\mu})/n^2,$$

так и при

$$(\nu_0 + \delta_3\sqrt{\mu})/n^2 \leq \nu \leq (\nu_0 + \delta_4\sqrt{\mu})/n^2.$$

В дополнение к лемме 2.4 заметим, что если выполняется строго противоположное (2.39) неравенство, то соответствующая пара состояний равновесия (2.22) экспоненциально устойчива при всех ν из интервала (2.21) своего существования. Подчеркнем также, что неравенство (2.39) начинает выполняться только для асимптотически больших (порядка $\mu^{-1/2}$) номеров n .

2.3

Из лемм 2.1 – 2.3 следует, что при выполнении условий 2.1, 2.2 и при любом фиксированном достаточно малом $\mu > 0$ задача (1.1), (2.1) удовлетворяет и условиям 1.1 – 1.5. Действительно, выполнение условия 1.1 очевидно, а условие 1.2 вытекает из леммы 2.1, причем реализуется простейшая ситуация: исходная пара ДС существует на всем тьюрингском интервале (ν_1, ν_2) (ср. (1.8) и (2.19)). Условия же 1.3 – 1.5 будут заведомо выполняться, если в качестве (1.5) взять отрезок

$$\nu_0 - \delta_1\sqrt{\mu} \leq \nu \leq \nu_0 + \delta_2\sqrt{\mu}, \quad [-\delta_1, \delta_2] \subset (-\Delta_0/\sqrt{3}, \Delta_0/\sqrt{3}). \quad (2.40)$$

Для пояснения сути дела заметим, что условие 1.4 – следствие простоты нулевого собственного значения второй из задач (2.28). Далее, в процессе доказательства леммы 2.3 было установлено, что при каждом ν из отрезка (2.40) весь спектр задачи (2.23) (за исключением $\lambda = 0$) лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а точка $\lambda = 0$ не является ее

собственным значением. И наконец, несложный анализ матрицы Λ приводит к выводу, что в случае (2.40) отрицательна аналогичная (1.19) величина

$$\lambda_1 = \frac{4\nu_0^2(D_0 a_1, b)[- \nu_0(D_1 a, b) - 3\delta^2(D_0 a_1, b)]}{d_0 \xi^2(\delta)} + O(\sqrt{\mu}).$$

Итак, для завершения доказательства теоремы 1.2 осталось привести конкретный пример краевой задачи (1.1), (2.1), удовлетворяющей условиям 2.1 и 2.2. С этой целью рассмотрим известную модель "брюсселятора" [1]:

$$\begin{aligned} u_t &= d_1 u_{xx} + A + u^2 v - (B + 1)u, & u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\ell} = 0, \\ v_t &= d_2 v_{xx} + Bu - u^2 v, & v_x|_{x=0} &= v_x|_{x=\ell} = 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

где $d_1, d_2, \ell > 0$; u, v , – скалярные функции; A, B – положительные параметры, связанные неравенствами

$$1 < B < 1 + A^2. \quad (2.42)$$

Краевая задача (2.41) имеет единственное пространственно однородное состояние равновесия $u_0 = A$, $v_0 = B/A$, глобальную экспоненциальную устойчивость которого в рамках точечной модели (см. (1.2)) обеспечивает второе неравенство (2.42).

Выполняя в (2.41) замены $u - u_0 \rightarrow u$, $v - v_0 \rightarrow v$ и полагая $\ell = \pi$, $d_1 = \nu(d - \mu)$, $d_2 = \nu/(d - \mu)$, где (см. (2.42)) $d = (\sqrt{B} - 1)/A > 0$, приходим к задаче вида (1.1), (2.1). Элементарная проверка показывает, что в данном случае (см. (2.2))

$$P(\nu, 0) = (\nu - A)^2, \quad P'_\mu(A, 0) = -A(A^2 + d^{-2}(B - 1)) < 0,$$

а ляпуновская величина (см. (2.9))

$$d_0 = \frac{A^4[4 - 19\kappa - 5\kappa^2/2 + 4\kappa^3]}{18\kappa(A^2 - \kappa^2)}, \quad \kappa = \sqrt{B} - 1,$$

отрицательна, например, при $A = 1$, $B = 1.5$. Теорема 1.2 доказана.

2.4

Проделанный анализ показывает, что при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ краевая задача (1.1), (2.1) хорошо моделирует нелокальную ситуацию, описываемую условиями 1.1 – 1.5. А так как в локальном случае первые два из этих условий обеспечивают выполнение остальных, то естественно ожидать, что подобное типично для краевой задачи (1.1) и в общем случае. Последнее же означает, что область применимости теоремы 1.1 достаточно широка. С ее помощью, в частности, можно объяснить результаты численного счета, проведенного в [13] применительно к краевой задаче (2.41) при увеличении ℓ , что эквивалентно пропорциональному уменьшению коэффициентов диффузии.

В работе [13] численное интегрирование задачи (2.41) проводилось при значениях параметров

$$A = 1; \quad B = 1.5; \quad d_1 = 1/16, \quad d_2 = 16 \quad (2.43)$$

и при начальных условиях

$$u(0, x) = \begin{cases} u_1 & \text{при } 0 \leq x \leq \ell_0, \\ u_2 & \text{при } \ell_0 < x \leq \ell, \end{cases} \quad v(0, x) = v_1;$$

параметры изменялись в пределах:

$$15 \leq \ell \leq 70; \quad 0,5 \leq \ell_0 \leq 22; \quad 0,5 \leq u_1 \leq 10; \quad u_2 = 0,4; \quad v_1 = 1.$$

При этом каждый раз решение задачи (2.41) выходило на диссипативную структуру, компонента $u(x)$ которой имела последовательность узких пиков с характерной шириной $\Delta \ell \approx 1,4$ (ширина измерялась на уровне $u = 1$), отстоящих друг от друга на характерном расстоянии $\Delta L \approx 14,2$ и имеющих характерную высоту $H \approx 11,5$. На рис. 1 (заимствованном из [13]) схематически изображен график компоненты $u(x)$ стационарного решения, полученного для начальных условий с параметрами

$$u_1 = 2; \quad u_2 = 0,4; \quad v_1 = 1; \quad \ell_0 = 0,5; \quad \ell = 57.$$

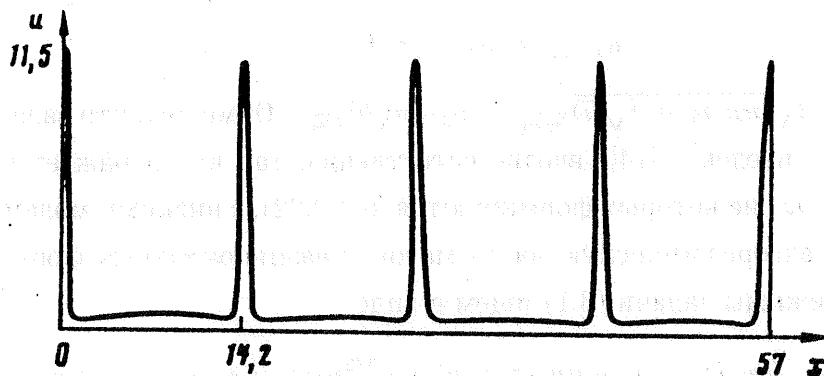


рис. 1

Описанные результаты численного анализа допускают следующую возможную интерпретацию. При условиях (2.43) к задаче (2.41), по всей видимости, применима теорема 1.1, из которой вытекает существование у нее при $\ell \gg 1$ большого числа сильно "изрезанных" по x устойчивых ДС. В частности, стационарное решение при $\ell = 57$ (см. рис.1) получается с помощью принципа подобия при $n = 8$ из некоторой ДС на отрезке $0 \leq x \leq 57/8$. Отметим также, что при увеличении параметра ℓ степень "изрезанности" (количество пиков) возрастает, однако в силу принципа подобия их характеристики (ширина, высота и т.д.) практически не меняются.

3 Особенности динамики диссипативных структур

3.1

Условия 2.1, 2.2 обеспечивают следующую динамику ДС (2.22) при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении параметра ν . Рассмотрим номер n , удовлетворяющий неравенству

(2.39). Тогда сначала, т.е. при прохождении ν через критическое значение $\nu_2(\mu)/n^2$, ДС (2.22) бифурцируют из неустойчивого нулевого решения и сами, естественно, неустойчивы (см. лемму 2.4). Однако при дальнейшем уменьшении ν они становятся устойчивыми и заведомо остаются таковыми на отрезке (2.40) (см. лемму 2.3). Затем они теряют устойчивость (см. лемму 2.4) и "умирают" на неустойчивом нулевом состоянии равновесия при прохождении ν через критическое значение $\nu_1(\mu)/n^2$. И наконец, следует отметить, что при $\nu \rightarrow 0$ происходит бесконечная последовательность описанных перестроек с состояниями равновесия (2.22) со все большими номерами n .

Итак, возникает вопрос о характере бифуркаций, которые претерпевают ДС (2.22) при уменьшении ν от $\nu_2(\mu)/n^2$ до $\nu_1(\mu)/n^2$. Здесь мы дадим ответ на этот вопрос в рамках эвристической теории, базирующейся на методе квазинормальных форм Ю.С. Колесова [14], [15].

Положим в краевой задаче (1.1), (2.1) $\nu = \kappa\mu$, $\kappa > 0$ и будем считать, что ее стационарные режимы зависят от двух пространственных переменных x и $y = nx$, причем $\nu n^2 = \nu_0 + \delta\sqrt{\mu}$. Тогда приходим к следующей задаче:

$$\begin{aligned} u_t &= (D_0 + \mu D_1) Lu + F(u), \quad u(t, x, y + 2\pi) \equiv u(t, x, y), \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $L \equiv \kappa\mu \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\sqrt{\kappa\mu(\nu_0 + \delta\sqrt{\mu})} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (\nu_0 + \delta\sqrt{\mu}) \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Отметим, что задача (3.1) (аналог которой впервые введен в [14]) вполне естественна, так как отражает взаимодействие высоких мод $\cos nx$, на которых формируются ДС (2.22), с низкими модами $\cos kx$, $k \sim 1$.

Опираясь на алгоритмическую часть метода квазинормальных форм (см. [14], [15]), стационарные режимы задачи (3.1) ищем в виде

$$u = \sqrt{\mu} u_1(\tau, x, y) + \mu u_2(\tau, x, y) + \mu^{3/2} u_3(\tau, x, y) + \dots, \quad \tau = \mu t, \quad (3.2)$$

$$u_1 = a[\eta(\tau, x) \exp(iy) + \bar{\eta}(\tau, x) \exp(-iy)], \quad (3.3)$$

где $\eta = \eta_1 + i\eta_2$ — неизвестная комплексная амплитуда. Так как при подстановке $y = nx$ функции (3.2), (3.3) должны удовлетворять граничным условиям из (1.1), то будем считать, что

$$\partial \eta_1 / \partial x|_{x=0} = \partial \eta_1 / \partial x|_{x=\pi} = \eta_2|_{x=0} = \eta_2|_{x=\pi} = 0. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.2), (3.3) в задачу (3.1), привлекая тейлоровские разложения (2.8) и приравнявая коэффициенты при μ , получим краевую задачу для уравнения ($L_0 \equiv \nu_0 D_0 d^2/dy^2 + A$)

$$L_0 u_2 + \delta D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2\sqrt{\kappa\nu_0} D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + F_2(u_1, u_1) = 0$$

с граничными условиями 2π -периодичности по y (переменные τ, x рассматриваем как параметры). Несложный анализ данной задачи с учетом равенства (2.6), обеспечивающего ее разрешимость, приводит к формуле

$$u_2 = a_1 \left[\left(\delta\eta - 2\sqrt{\kappa\nu_0}i \frac{\partial\eta}{\partial x} \right) \exp(iy) + \left(\delta\bar{\eta} + 2\sqrt{\kappa\nu_0}i \frac{\partial\bar{\eta}}{\partial x} \right) \exp(-iy) \right] + 4v|\eta|^2 + 2w[\eta^2 \exp(2iy) + \bar{\eta}^2 \exp(-2iy)], \quad (3.5)$$

где векторы a_1 , v , w те же, что и в (2.14).

Приравнивая в (3.1) коэффициенты при $\mu^{3/2}$, получим краевую задачу

$$L_0 u_3 - \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \kappa D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\sqrt{\kappa\nu_0} D_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + \delta \sqrt{\frac{\kappa}{\nu_0}} D_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \delta D_0 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \nu_0 D_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2F_2(u_1, u_2) + F_3(u_1, u_1, u_1) = 0, \quad u_3(\tau, x, y + 2\pi) \equiv u_3(\tau, x, y).$$

Подставляя в нее уже известную функцию (3.5), после некоторых преобразований убеждаемся, что условие ее разрешимости имеет вид

$$\eta_\tau = 4(D_0 a_1, b)[s^2 \eta_{xx} + i\delta s \eta_x] + [-\nu_0(D_1 a, b) - \delta^2(D_0 a_1, b)]\eta + 4d_0|\eta|^2\eta, \quad (3.6)$$

где $s = \sqrt{\nu_0 \kappa}$, а постоянная d_0 определена в (2.9). Наконец, дополняя уравнение (3.6) граничными условиями (3.4), приходим к краевой задаче для нахождения амплитуды η . Следуя [14], [15], эту задачу будем называть квазинормальной формой исходной краевой задачи (1.1), (2.1).

Сделаем ряд замечаний. Во-первых, отметим, что в силу независимости ν и μ параметр $s = \sqrt{\nu_0 \nu / \mu}$ в (3.6) может принимать любые значения. Однако нас интересует случай фиксированного μ и малого ν , моделирующий нелокальную ситуацию. Поэтому всюду ниже считаем, что $0 < s \ll 1$. Во-вторых, задача (3.6), (3.4) имеет состояния равновесия

$$\eta_\pm(\delta) = \pm \frac{1}{2} \xi(\delta), \quad |\delta| < \Delta_0 \quad (3.7)$$

(см. (2.16)), устойчивые (неустойчивые) при любом фиксированном δ , $|\delta| < \Delta_0/\sqrt{3}$ ($> \Delta_0/\sqrt{3}$), и при всех $0 < s \ll 1$. В-третьих, сравнивая асимптотические представления (2.11) и (3.2), убеждаемся, что этим состояниям равновесия (при $\delta = \delta_n(\nu, \mu)$) соответствуют ДС (2.22) исходной задачи (1.1), (2.1), причем уменьшение ν при фиксированном n эквивалентно уменьшению параметра δ в (3.7) от Δ_0 до $-\Delta_0$. Наконец, в-четвертых, свойства устойчивости состояний равновесия (2.22) и (3.7) совпадают при всех $\delta \in (-\Delta_0, \Delta_0)$ (см. леммы 2.3, 2.4).

Изложенные факты позволяют предположить, что задача (3.6), (3.4) отвечает не только за устойчивость ДС (2.22), но и за их бифуркации. В рамках данной гипотезы интересующий нас вопрос сводится к исследованию бифуркаций состояний равновесия (3.7) при прохождении параметра δ через значение $\Delta_0/\sqrt{3}$ (случай $\delta = -\Delta_0/\sqrt{3}$ в изучении не нуждается, ибо задача (3.6), (3.4) не меняется при заменах $\delta \rightarrow -\delta$, $\pi - x \rightarrow x$).

Итак, полагая в (3.6) $\eta = \eta_+(\delta)(1 + h)$, $h = h_1 + ih_2$, $\delta = \Delta_0/\sqrt{3} + \gamma s^2$, $\gamma \sim 1$, после подходящих нормировок времени τ и параметров γ , s получим краевую задачу

$$h_\tau = s^2 h_{xx} + s(1 + \gamma s^2) i h_x - \frac{1}{2}(1 - \gamma s^2)(h + \bar{h} + 2|h|^2 + h^2 + |h|^2 h), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h|_{x=0} = \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re} h|_{x=\pi} = \operatorname{Im} h|_{x=0} = \operatorname{Im} h|_{x=\pi} = 0. \quad (3.9)$$

Снова опираясь на метод квазинормальных форм, ее стационарные режимы будем искать в виде

$$h = sh_1 + s^2h_2 + s^3h_3 + s^4h_4 + s^5h_5 + \dots, \quad (3.10)$$

$$h_j = h_j(\sigma, x), \quad j = 1, \dots, 5, \quad \sigma = s^4\tau, \quad h_1 = i\theta(\sigma, x),$$

где θ – подлежащая определению вещественная функция. Подставляя (3.10) в (3.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях s , последовательно находим

$$h_2 = -\theta_x - \frac{1}{2}\theta^2, \quad h_3 \equiv 0,$$

$$h_4 = -\frac{3}{2}(\theta_x)^2 - \theta^2\theta_x - \frac{1}{8}\theta^4 - 2\gamma\theta_x - \theta_{xxx} - (\theta\theta_x)_x, \quad (3.11)$$

а для h_5 получаем уравнение

$$i\frac{\partial h_4}{\partial x} + i\gamma\frac{\partial h_2}{\partial x} - \frac{1}{2}(h_5 + \bar{h}_5 + 2i\theta h_4 + i\theta h_2^2) + \frac{\gamma}{2}i(2\theta h_2 + \theta^3) = i\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}.$$

Подставляя в него (3.11) и полагая $h_5 = 0$, после некоторых преобразований для θ приходим к уравнению

$$\theta_\sigma = -\theta_{xxxx} - 3\gamma\theta_{xx} - 6\theta_x \cdot \theta_{xx}, \quad (3.12)$$

которое, согласно (3.9) и (3.10), следует дополнить граничными условиями

$$\theta|_{x=0} = \theta|_{x=\pi} = \theta_{xx}|_{x=0} = \theta_{xx}|_{x=\pi} = 0. \quad (3.13)$$

В качестве фазового пространства краевой задачи (3.12), (3.13) возьмем гильбертово пространство $W_2(0, \pi)$ функций класса W_2^2 , удовлетворяющих нулевым граничным условиям Дирихле. Несложная проверка показывает, что нулевое решение этой задачи экспоненциально устойчиво (неустойчиво) в метрике данного фазового пространства при $\gamma < 1/3$ ($> 1/3$), что в свою очередь совпадает с условиями устойчивости нулевого состояния равновесия задачи (3.8), (3.9). Поэтому, как и выше, уместно принять краевую задачу (3.12), (3.13) за новый объект исследования.

Анализ задачи (3.12), (3.13) проведем с использованием стандартных бифуркационных методов (см. аналогичное рассмотрение в п. 2.1). А именно, положим в ней

$$3\gamma = k^2(1 - \varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.14)$$

где k – произвольно фиксированное натуральное число, и будем искать ее состояния равновесия в виде ряда по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$\theta = \sqrt{\varepsilon}\xi \sin kx + \varepsilon\theta_2(x) + \varepsilon^{3/2}\theta_3(x) + \dots, \quad (3.15)$$

где ξ – подлежащая определению вещественная постоянная. Действуя, далее, обычным образом, сначала находим $\theta_2(x)$, а затем из условия разрешимости линейной неоднородной краевой задачи для θ_3 определяем ξ . Опуская соответствующие выкладки, приведем сразу окончательный результат:

$$\theta_2(x) = \frac{1}{4k} \xi^2 \sin 2kx, \quad \xi = k\sqrt{2/3}. \quad (3.16)$$

Лемма 3.1. При условии (3.14) краевая задача (3.12), (3.13) имеет два экспоненциально неустойчивых (с размерностью неустойчивых многообразий, равной k) состояния равновесия:

$$\theta_1(x, \varepsilon) = \theta_0(x, \varepsilon), \quad \theta_2(x, \varepsilon) = -\theta_0(\pi - x, \varepsilon), \quad \theta_0(x, 0) \equiv 0. \quad (3.17)$$

Здесь функция $\theta_0(x, \varepsilon)$ допускает асимптотическое представление (3.15), (3.16) (в метрике пространства $\overset{\circ}{W}_2(0, \pi)$).

Для доказательства достаточно заметить, что при условии (3.14) в окрестности нулевого решения задача (3.12), (3.13) имеет одномерное инвариантное многообразие, укороченная нормальная форма на котором после соответствующих нормировок записывается в виде

$$d\xi/d\sigma = -k^2\xi + \frac{3}{2}\xi^3.$$

Заметим, далее, что двум ее неустойчивым состояниям равновесия $\xi = \pm k\sqrt{2/3}$ в исходной задаче отвечают два неустойчивых состояния равновесия (3.17). И наконец, степень неустойчивости решений (3.17) (размерность неустойчивого многообразия) равна $m+1$, где m – количество положительных собственных значений в спектре устойчивости нулевого решения задачи (3.12), (3.13) при условии (3.14) и при $\varepsilon = 0$. Последнее же, как нетрудно увидеть, равно $k-1$.

3.2

Проведенные выше исследования показывают, что при уменьшении параметра γ и при прохождении его через значения $k^2/3$, $k = 1, 2, \dots$, от нулевого решения задачи (3.12), (3.13) каждый раз ответвляется по паре неустойчивых состояний равновесия. Интерпретируя эти результаты в терминах исходной задачи (1.1), (2.1), убеждаемся в существовании для каждой пары ДС (2.22) с достаточно большим (удовлетворяющим оценке (2.39)) номером n бифуркационных значений

$$\nu_1(\mu)/n^2 < \underline{\nu}_{1,n} < \dots < \underline{\nu}_{p,n} < \bar{\nu}_{r,n} < \dots < \bar{\nu}_{1,n} < \nu_2(\mu)/n^2 \quad (3.18)$$

со следующими свойствами. Во-первых, при уменьшении параметра ν и прохождении его через значения $\bar{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, r$, от ДС (2.22) последовательно ответвляется по паре неустойчивых состояний равновесия, что понижает каждый раз их степень неустойчивости на единицу и приводит в конечном итоге к устойчивости на интервале $\underline{\nu}_{p,n} < \nu < \bar{\nu}_{r,n}$.

Во-вторых, при прохождении ν через значения $\underline{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, p$, ситуация обратная: на ДС (2.22) каждый раз "умирает" по паре неустойчивых состояний равновесия, увеличивая их степень неустойчивости на единицу. В-третьих, $p, r \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, причем всегда $r < p$, так как $p+1$ и $r+1$ суть размерности неустойчивого многообразия нулевого решения задачи (1.1), (2.1) при $\nu = \nu_1(\mu)/n^2$ и $\nu = \nu_2(\mu)/n^2$ соответственно.

Остановимся на естественно возникающем вопросе о степени строгости изложенных эвристических рассуждений. Используя развитые в [15] методы, можно обосновать законность перехода от задачи (1.1), (2.1) к ее квазинормальной форме (3.6), (3.4) только при $s \sim 1$. Если же $0 < s \ll 1$, то он носит лишь эвристический характер. Напротив, переход от задачи (3.8), (3.9) к задаче (3.12), (3.13) правомерен именно при $0 < s \ll 1$, что также устанавливается методикой [15]. В целом же есть все основания ожидать, что приведенные результаты, хотя и получены эвристически, правильно отражают качественную сторону вопроса.

Подводя итог, приведем достаточно полный перечень основных особенностей динамики ДС (2.22) при фиксированном $\mu > 0$ и при уменьшении ν .

1). *Ячеистость*. При $\nu \rightarrow 0$ состав ДС (2.22) постоянно обновляется, так как каждая из них "живет" лишь в ячейке (2.21).

2). *Принцип подобия*. Все ДС (2.22) получаются с помощью описанного в п.1.1 правила из одной уникальной пары ДС (2.18).

3). *Буферность*. Об этом феномене принято говорить, если в фазовом пространстве некоторой системы при подходящем выборе параметров можно гарантировать существование любого фиксированного числа однотипных аттракторов (состояний равновесия, циклов и т.д.). В нашем случае буферность имеет место, так как при $\nu \rightarrow 0$ количество сосуществующих устойчивых ДС (2.22) неограниченно растет.

Ясен также и механизм возникновения этого явления: каждая пара ДС (2.22) с номером n , удовлетворяющим оценке (2.39), рождается из нулевого состояния равновесия неустойчивой, однако при дальнейшем уменьшении параметра ν и при прохождении его через критические значения $\bar{\nu}_{j,n}$, $j = 1, \dots, r$ (см.(3.18)), раз за разом сбрасывает неустойчивые "оболочки" и, наконец, становится устойчивой при $\underline{\nu}_{p,n} < \nu < \bar{\nu}_{r,n}$.

Отметим, что, по-видимому, впервые описанный механизм был обнаружен А.А.Виттом [16] при анализе одной конкретной гиперболической краевой задачи из радиофизики. В случае параболических систем с малой диффузией данный механизм возникновения буферности выявлен Ю.С.Колесовым [17], который изучал вопросы о существовании и устойчивости периодических решений типа бегущих волн на окружности. Укажем еще и монографию [18], где было установлено, что описанный механизм типичен для широкого класса радиофизических задач.

4). *Принцип максимума амплитуды*. Устойчивыми могут быть лишь ДС с достаточно большими амплитудами (2.16). В частности, состояние равновесия с наибольшей амплитудой всегда устойчиво (см. леммы 2.3, 2.4).

5). *Принцип минимальности*. Как показано в п.3.1, при бифуркациях состояния рав-

новесия (2.22) не порождают никаких других устойчивых стационарных режимов. В связи с этим весьма правдоподобна гипотеза о том, что устойчивыми парами ДС (2.22) исчерпываются, вообще говоря, все аттракторы краевой задачи (1.1), (2.1).

6). *Флуктуационный хаос*. В п.1.2 замечено, что при $n \rightarrow \infty$ устойчивость ДС (1.10) становится все более слабой, так как отвечающие им спектральные задачи (1.11) имеют собственные значения, стремящиеся к нулю при $n \rightarrow \infty$. В этом случае, как правило, с ростом n области притяжения состояний равновесия (1.10) в фазовом пространстве системы (1.1) сужаются, а их количество при $\nu \rightarrow 0$, наоборот, неограниченно увеличивается. В подобной ситуации случайные малые возмущения начальных условий системы приводят к спонтанному ее переходу от одного устойчивого стационарного режима к другому, т.е. наблюдается так называемый флуктуационный хаос.

Данный феномен и явление буферности представляют собой фундаментальные закономерности функционирования сложных систем, присущие не только параболическим задачам. Например, в [18] они были обнаружены как теоретически, так и экспериментально при анализе автоколебаний в целом ряде генераторов с распределенными параметрами, моделями которых служат гиперболические краевые задачи.

В заключение добавим, что часть перечисленных свойств в определенной мере была известна и раньше – в основном благодаря численному анализу модели (2.41), являющейся в данной тематике типовой. Для примера, наряду с [13], укажем работы [19], [20], где выявлен рост числа устойчивых ДС краевой задачи (2.41) при увеличении ℓ , и работу [21], в которой отмечен аналог принципа подобия – свойство скейлинга.

4 Задача о параметрической буферности

4.1

Физические основы теории параметрических колебаний представлены в классических работах Л.И.Мандельштама и Н.Д.Папалекси, а математический аспект проблемы изложен, например, в монографии [11], содержащей теорию нелинейного параметрического резонанса для обыкновенных дифференциальных уравнений. Для некоторых классов волновых уравнений формализм построения возбужденных параметрических колебаний предложен в [22]. Однако теория линейного параметрического резонанса продвинута столь далеко (см. [23], [24]), что позволяет придать результатам из [22] строгий смысл.

Изучение параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах по инициативе Ю.С.Колесова начато в [25], где исследовалась параболическая система типа реакция–диффузия с малыми коэффициентами диффузии. В дальнейшем эта тематика развивалась в работах [26] – [28], [8], [29], посвященных, главным образом, анализу параметрических колебаний в случае сингулярно возмущенных телеграфных уравнений.

В данном параграфе остановимся на связи, казалось бы, весьма далеких друг от друга проблем: нелинейного параметрического резонанса в сингулярно возмущенных системах

и теории диссипативных структур. А именно, опираясь на полученные в §§1, 2 результаты, покажем, что в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией может реализовываться так называемый феномен параметрической буферности. Суть этого явления заключается в том, что при подходящем выборе параметров внешнего воздействия и при надлежащем уменьшении диффузии можно гарантировать существование в указанных системах любого фиксированного числа устойчивых периодических по времени решений.

Начнем с описания исследуемого класса гиперболических систем. На отрезке $0 \leq x \leq \pi$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_{tt} + (A_0 + \varepsilon A_1)u_t + (B_0 + \varepsilon B_1(\tau))u &= \varepsilon Du_{xx} + f(u, u_t), \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь $u \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$; $0 < \varepsilon \ll 1$; A_0, B_0, D – постоянные матрицы, причем $D^* = D$, $D > 0$; π -периодическая по τ (где $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t$, $\delta = \text{const}$) гладкая матрица $B_1(\tau)$ имеет на периоде нулевое среднее значение; тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $f(u, v) \in C^\infty$ начинается с квадратичных слагаемых. В качестве фазового пространства (пространства начальных условий (u, u_t)) краевой задачи (4.1) возьмем $\overset{o}{W}_2^2 \times \overset{o}{W}_2^1$ (по поводу определения $\overset{o}{W}_2^2$ см. п. 1.1).

Сформулируем ограничения, при которых будет изучаться проблема существования и устойчивости периодических по t решений задачи (4.1), бифурцирующих из ее нулевого состояния равновесия. Первое ограничение касается автоколебательных свойств уравнения (4.1) при $\varepsilon = 0$.

Условие 4.1. Предполагаем, что квадратичный пучок матриц $\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0$, где I – единичная матрица, имеет простую пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$, т.е. существуют такие векторы a и b , что

$$\begin{aligned} (-I + iA_0 + B_0)a &= 0, \quad (-I - iA_0^* + B_0^*)b = 0, \\ (2ia + A_0a, b) &= 1, \quad (2ia + A_0a, \bar{b}) = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $(*, *)$ – обычное скалярное произведение в комплексификации \mathbb{R}^m . Остальные же собственные значения указанного пучка матриц считаем лежащими в полуплоскости $\text{Re } \lambda < 0$.

Следующее ограничение обеспечивает нужное согласование ”обыкновенной” и ”диффузионной” частей в (4.1).

Условие 4.2. Считаем, что при всех $z > 0$ собственные значения квадратичного пучка матриц

$$\lambda^2 I + \lambda A_0 + B_0 + zD \quad (4.3)$$

лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$, а при малых z те собственные значения $\lambda(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ пучка (4.3), для которых $\lambda(0) = i$ (их существование вытекает из условия 4.1), отходят от мнимой оси общим образом, т.е. выполняется неравенство

$$-\operatorname{Re} \lambda'_z \Big|_{z=0} = \operatorname{Re}(Da, b) > 0. \quad (4.4)$$

Перед формулировкой очередного ограничения предположим для простоты, что все собственные значения $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, m$, матрицы D различны, и обозначим через e_k , $k = 1, \dots, m$, соответствующую им ортонормированную систему собственных векторов.

Условие 4.3. Допустим, что

$$(A_0 e_k, e_k) > 0, \quad k = 1, \dots, m. \quad (4.5)$$

Остановимся на связи условий 4.2 и 4.3. Заметим, что собственные значения $\lambda_k(z)$, $\bar{\lambda}_k(z)$, $k = 1, \dots, m$, пучка (4.3) допускают асимптотику

$$\lambda_k(z) = i\sqrt{\lambda_k z} - \frac{1}{2}(A_0 e_k, e_k) + O(z^{-1/2}), \quad z \rightarrow \infty.$$

А отсюда и из условия 4.2 легко следует, что $(A_0 e_k, e_k) \geq 0$, $k = 1, \dots, m$. Строгие же неравенства (4.5) гарантирует, что с ростом z собственные значения $\lambda_k(z)$, $\bar{\lambda}_k(z)$ не приближаются к мнимой оси. Отметим, далее, что при строгом нарушении условия 4.2 или 4.3, когда при некотором $z_0 > 0$ у пучка (4.3) есть собственное значение в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda > 0$, нулевое решение задачи (4.1) экспоненциально неустойчиво с показателем экспоненты порядка единицы. Тем самым, заведомо неустойчивыми будут и все бифурцирующие из него при $\varepsilon > 0$ периодические решения, т.е. проблема параметрического возбуждения колебаний становится нелокальной.

Наконец, последнее условие – стандартные в этой тематике ограничения на нелинейность в уравнении (4.1) и на линейную часть при отсутствии внешнего воздействия (см., например, [11], [23]).

Условие 4.4. Считаем, что $\operatorname{Re} d < 0$, $\operatorname{Re}(iA_1 a, b) > 0$, где d – комплексная ляпуновская величина уравнения, получающегося из (4.1) при $\varepsilon = 0$.

При сформулированных ограничениях, следуя методике работ [25], [26], параметрические колебания в задаче (4.1) будем искать в виде

$$u = \sqrt{\varepsilon} u_1(\tau, s, x) + \varepsilon u_2(\tau, s, x) + \varepsilon^{3/2} u_3(\tau, s, x) + \dots, \quad (4.6)$$

где $s = \varepsilon t$,

$$u_1 = \xi(s, x) a \exp(i\tau) + \bar{\xi}(s, x) \bar{a} \exp(-i\tau); \quad (4.7)$$

a – собственный вектор из (4.2), ξ – неизвестная комплексная "амплитуда" колебаний, функции u_2 , u_3 , ... периодичны по τ с периодом 2π .

Подставляя (4.6) в уравнение (4.1) и приравнявая коэффициенты при ε , с учетом равенства (4.7) для u_2 получим уравнение вида

$$\ddot{u}_2 + A_0 \dot{u}_2 + B_0 u_2 = c_0(s, x) + c_1(s, x) \exp(2i\tau) + \bar{c}_1(s, x) \exp(-2i\tau), \quad \dot{\cdot} = d/d\tau, \quad (4.8)$$

где s, x считаем параметрами. Отсюда функция u_2 однозначно определяется в форме, аналогичной правой части уравнения (4.8). После приравнивания коэффициентов при $\varepsilon^{3/2}$ для u_3 получим уравнение, подобное (4.8), но его правая часть $g(\tau, s, x)$ – сумма первых и третьих гармоник. Умножим скалярно коэффициент при $\exp(i\tau)$ в $g(\tau, s, x)$ на вектор b (см. (4.2)) и приравняем результат к нулю. В итоге получим краевую задачу

$$\xi_s = \kappa_0 \xi_{xx} + \kappa_1 \xi + \kappa_2 \bar{\xi} + d \xi |\xi|^2, \quad \xi_x|_{x=0} = \xi_x|_{x=\pi} = 0, \quad (4.9)$$

где d – ляпуновская величина из условия 4.4,

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= (Da, b), \quad \kappa_1 = -(iA_1 a, b) - i\delta, \\ \kappa_2 &= -M[(B_1(\tau)\bar{a} \exp(-2i\tau), b)] \end{aligned} \quad (4.10)$$

($M(*)$ – среднее значение), а $\bar{\xi}$ удовлетворяет комплексно сопряженной задаче.

Согласно предложенной Ю.С. Колесовым [15], [28] терминологии, краевую задачу (4.9) будем называть квазинормальной формой исходной задачи (4.1). Справедливо следующее утверждение (см. [15], [28]).

Теорема 4.1. *Предположим, что краевая задача (4.9) имеет состояние равновесия $(\xi_0(x), \bar{\xi}_0(x))$, экспоненциально устойчивое или дихотомичное (в метрике фазового пространства $\dot{W}_2^2 \times \dot{W}_2^2$). Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ в исходной задаче (4.1) этому состоянию равновесия соответствует 2π -периодическое по τ решение с асимптотикой (4.6), (4.7) (при $\xi(s, x) = \xi_0(x)$) и с теми же свойствами устойчивости.*

Доказательство теоремы 4.1 практически без изменений повторяет соответствующие места из работы [15], где метод квазинормальных форм обоснован для параболического случая. Связано это с характером поведения спектра устойчивости нулевого состояния равновесия (т.е. с характером расположения собственных значений пучка матриц (4.3)), который аналогичен описанному в [15]. В частности, неравенство (4.4) обеспечивает, как и в [15], параболичность квазинормальной формы (4.9).

Отдельно рассмотрим скалярный случай, когда в уравнении из (4.1) имеем $m = 1$, $D = \sigma^2$, $\sigma > 0$. Из условия 4.1 с необходимостью следует, что тогда $A_0 = 0$, $B_0 = 1$. В качестве $B_1(\tau)$ возьмем функцию $\alpha \cos 2\tau$, $\alpha \neq 0$. Далее, используя тейлоровское разложение

$$f(u, v) = \alpha_1 u^2 + \alpha_2 uv + \alpha_3 v^2 + \beta_1 u^3 + \beta_2 u^2 v + \beta_3 uv^2 + \beta_4 v^3 + \dots,$$

введем в рассмотрение комплексную ляпуновскую величину

$$d = \frac{1}{2}[\alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3) + \beta_2 + 3\beta_4] - \frac{i}{6}[10\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_3) + 4\alpha_3^2 + \alpha_2^2 + 9\beta_1 + 3\beta_3] \quad (4.11)$$

и будем считать, что $\operatorname{Re} d < 0$. Отметим, наконец, что в квазинормальной форме (4.9) параметр d теперь задается равенством (4.11), а остальные параметры – равенствами

$$\kappa_0 = -i\sigma^2/2, \quad \kappa_1 = -(1/2 + i\delta), \quad \kappa_2 = i\alpha/4. \quad (4.12)$$

Обратим внимание, что в скалярном случае условия 4.2 и 4.3 не выполняются. Точнее говоря, здесь мы сталкиваемся с максимальным вырождением: при всех $z \geq 0$ корни уравнения $\lambda^2 + 1 + z = 0$ чисто мнимые и, в частности, квазинормальная форма (4.9) в силу первого равенства (4.12) не является параболической. Однако, как показано в [28], теорема 4.1 в этом случае по-прежнему справедлива.

Перейдем теперь к параболическим системам. Следуя [25], в фазовом пространстве $W_2([0, \pi]; \mathbb{R}^m)$, $m \geq 2$, рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} u_t &= \varepsilon D u_{xx} + A_0 u + \varepsilon [A_1 + A_2(\tau)]u + F(u), \\ u_x|_{x=0} &= u_x|_{x=\pi} = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $0 < \varepsilon \ll 1$, матрица $-D$ гурвицева. Относительно матрицы A_0 предполагаем, что она имеет пару чисто мнимых собственных значений $\pm i$, т.е. $A_0 a = ia$, $A_0^* b = -ib$, $(a, b) = 1$, $(a, \bar{b}) = 0$, а остальные ее собственные значения лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Допустим, далее, что свойства π -периодической по $\tau = (1 + \varepsilon\delta)t$ матрицы $A_2(\tau)$ аналогичны свойствам матрицы $B_1(\tau)$ из (4.1) и тейлоровское разложение в нуле вектор-функции $F(u) \in C^\infty(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^m)$ начинается с квадратичных слагаемых. Наконец, считаем, что $\operatorname{Re} d < 0$, $\operatorname{Re}(A_1 a, b) < 0$, где d – комплексная ляпуновская величина уравнения, получающегося из (4.13) при $\varepsilon = 0$.

Подставляя (4.6), (4.7) в (4.13) и действуя описанным выше образом, снова получим квазинормальную форму (4.9), в которой теперь (ср. с (4.10))

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= (Da, b), \quad \kappa_1 = (A_1 a, b) - i\delta, \\ \kappa_2 &= M[(A_2(\tau)\bar{a} \exp(-2i\tau), b)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Из результатов [15] следует, что при дополнительном предположении о гурвицевости матрицы $A_0 - zD$ при всех $z > 0$ и при выполнении неравенства (4.4) для задач (4.13) и (4.9), (4.14) справедливо утверждение теоремы 4.1.

4.2

Итак, вопросы существования и устойчивости периодических решений задач (4.1) и (4.13) сводятся к аналогичным вопросам для состояний равновесия задачи (4.9). Поэтому актуально следующее утверждение.

Теорема 4.2. (о параметрической буферности) Пусть в краевой задаче (4.9) параметр d фиксирован и удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re} d < 0$. Тогда для любого натурального n найдутся такие наборы параметров

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) : \operatorname{Re} \kappa_0 > 0, \quad \operatorname{Re} \kappa_1 < 0, \quad \kappa_2 \neq 0; \quad (4.15)$$

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2) : \operatorname{Re} \kappa_0 = 0, \quad \kappa_0 \neq 0, \quad \operatorname{Re} \kappa_1 < 0, \quad \kappa_2 \neq 0; \quad (4.16)$$

при которых краевая задача (4.9) имеет не менее n экспоненциально устойчивых состояний равновесия.

Сформулированная теорема решает проблему параметрической буферности как для гиперболического (в том числе и скалярного), так и для параболического случая. Заметим, что речь здесь идет именно о параметрической буферности, так как при отсутствии внешнего воздействия (при $\kappa_2 = 0$) никаких других состояний равновесия, кроме нулевого, у задачи (4.9) нет. Действительно, если $\kappa_2 = 0$, то умножая уравнение (4.9) на $\bar{\xi}$ и интегрируя результат по $0 \leq x \leq \pi$, убеждаемся, что любое его состояние равновесия $\xi_0(x)$ удовлетворяет равенству

$$-\operatorname{Re} \kappa_0 \int_0^\pi |\xi'_0(x)|^2 dx + \operatorname{Re} \kappa_1 \int_0^\pi |\xi_0(x)|^2 dx + \operatorname{Re} d \int_0^\pi |\xi_0(x)|^4 dx = 0.$$

А отсюда с учетом неравенств $\operatorname{Re} \kappa_0 \geq 0$, $\operatorname{Re} \kappa_1 < 0$, $\operatorname{Re} d < 0$ заключаем, что $\xi_0(x) \equiv 0$.

Для удобства последующего анализа заметим, что в переменных $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $u_1 = \operatorname{Re} \xi$, $u_2 = \operatorname{Im} \xi$ задача (4.9) преобразуется к виду (1.1), если считать, что параметр κ_0 в ней пропорционален $\nu > 0$ и выполнено неравенство $|\kappa_1| > |\kappa_2|$, обеспечивающее гурвицевость матрицы $A = F'(0)$. Заметим, далее, что здесь (см. (4.15), (4.16)) $\det D = |\kappa_0|^2 > 0$, $\operatorname{tr} D = 2 \operatorname{Re} \kappa_0 \geq 0$. И наконец, следует отметить, что все полученные в §§1, 2 результаты сохраняются (вместе с доказательствами) и в случае, когда $\operatorname{tr} D = 0$, $\det D > 0$. Тем самым проблема обоснования теоремы 4.2 сводится к проверке возможности выполнения в данной ситуации условий 2.1, 2.2.

Для доказательства существования набора параметров (4.16) с требуемыми свойствами обратимся к (4.12) и будем считать, что

$$\sigma^2/2 = \nu, \quad \alpha = 2 + \mu, \quad 0 < \mu < 1, \quad \delta > 0. \quad (4.17)$$

Переписывая, далее, задачу (4.9) при условиях (4.17) в форме (1.1), без труда убеждаемся, что здесь $P(\nu, \mu) = (\nu - \delta)^2 - \mu/4 - \mu^2/16$, а значит, выполняется условие 2.1 и, в частности, $\nu_0 = \delta$. Условие 2.2 в этом случае также выполняется, поскольку $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, и, следовательно, $d_0 = (3/2) \operatorname{Re} d < 0$. Таким образом, остается воспользоваться леммой 2.3, гарантирующей существование у задачи (4.9) при условиях (4.12), (4.17), при фиксированном $\mu > 0$ и при $\nu \rightarrow 0$ любого числа устойчивых состояний равновесия. Существование набора параметров (4.15) с нужными свойствами устанавливается аналогично. Теорема 4.2 доказана.

Заключение

1. Поскольку полученные результаты весьма разноплановы, уместно изложить их идейную часть в суммированном виде, исходя из представлений, развитых в книгах [1],

[30]–[33].

Остановимся сначала на чисто математической стороне вопроса. Основное достижение состоит в следующем. При достаточно естественных и в то же время достаточно общих предположениях (см. условия 2.1, 2.2) в произвольной системе типа реакция–диффузия с краевыми условиями Неймана на отрезке удалось показать неограниченное увеличение числа сосуществующих устойчивых ДС при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии и при фиксированных прочих параметрах. Показано, в частности, что описанный эффект наблюдается в классической модели (2.41). Подчеркнем, что ранее строгих результатов на эту тему не было – имелись лишь отдельные численные эксперименты (см., например, [13], [19]), подтверждающие данный феномен.

Следует отметить, что использованные выше методы существенно опираются на одномерность по пространственной переменной и не переносятся непосредственно, скажем, на случай двумерной области. Однако достаточно ясно, что при переходе к плоской области ситуация в принципе не может упроститься. Поэтому представляется весьма правдоподобным, что при пропорциональном уменьшении коэффициентов диффузии число аттракторов параболической системы вида (1.1) неограниченно увеличивается и в этом случае.

Еще одно интересное следствие проведенных рассмотрений – вывод модельного уравнения (3.12), которое после замен $\sigma \rightarrow t$, $v = \theta_x$, $3\gamma \rightarrow \gamma$ преобразуется к виду

$$v_t = -v_{xxxx} - \gamma v_{xx} - 6(v_x)^2 - 6vv_{xx}.$$

Обратим внимание, что полученное уравнение является обобщением известного уравнения Курамото – Сивашинского (см., например, [34]), так как отличается от последнего лишь дополнительным слагаемым $-6vv_{xx}$ в правой части. Поэтому представляет интерес нахождение его специальных частных решений с различными свойствами. Например, в связи с затронутым в §3 вопросом о динамике ДС (2.22) актуальна проблема существования и устойчивости всех его стационарных (т.е. не зависящих от t) решений, удовлетворяющих вытекающим из (3.13) условиями

$$v_x|_{x=0} = v_x|_{x=\pi} = v_{xx}|_{x=0} = v_{xx}|_{x=\pi} = 0, \quad \int_0^\pi v dx = 0.$$

Сформулированная проблема остается открытой, так как лемма 3.1 решает вопрос о динамике только что поставленной краевой задачи по параметру γ лишь локально (в окрестности нулевого состояния равновесия).

Как уже отмечалось, весьма неожиданным следствием развитой в §§1, 2 теории диссипативных структур является возможность решить для достаточно широких классов сингулярно возмущенных систем гиперболических и параболических уравнений так называемую проблему параметрической буферности. Здесь необходимо подчеркнуть следующее обстоятельство: существования у краевых задач (4.1) и (4.13) любого наперед заданного числа устойчивых периодических по t решений можно добиться (см. теорему

4.2) только за счет надлежащего выбора матрицы диффузии D и параметров внешнего воздействия (матриц A_1 , $B_1(\tau)$ в случае задачи (4.1) и матриц A_1 , $A_2(\tau)$ в случае задачи (4.13)). Информация же о системах (4.1) и (4.13) при $\varepsilon = 0$ предполагается фиксированной.

2. В заключение дадим естественнонаучную интерпретацию полученных выше результатов, опираясь на развитые в [1], [30] – [33] представления. Напомним, что, как неоднократно отмечалось в указанных работах, в сложной системе, наряду с процессами разрушения и распада, могут идти и противоположные процессы, связанные с пространственной и временной самоорганизацией. Последнее означает, что в рассматриваемых системах из хаоса могут возникнуть устойчивые самоподдерживающиеся структуры или, как их принято называть, диссипативные структуры (от латинского слова *dissipatio* – рассеяние). Данное название оправдано тем, что такие структуры возникают и существуют исключительно в термодинамически неравновесных условиях, т.е. при постоянном рассеянии энергии во внешнюю среду.

Рассмотрим некоторую сложную систему (биофизическую, экологическую, социальную и т.п.), математической моделью которой является краевая задача (1.1). Отметим, что такая система может функционировать в режиме максимальной пространственной симметрии, так как задача (1.1) допускает, очевидно, решения, не зависящие от x . Более того, если система термодинамически равновесна или близка к равновесной, то она стремится к единственному устойчивому состоянию равновесия $u = 0$. Именно это и наблюдается при достаточно больших значениях параметра ν , т.е. при интенсивном диффузионном факторе выравнивания. При уменьшении же ν может происходить, казалось бы, ничем не мотивированное (не обусловленное какими-либо внешними факторами) нарушение пространственной симметрии.

Итак, возникновение в данной системе устойчивых пространственно неоднородных состояний равновесия уместно считать простейшей формой самоорганизации: система как бы сама выбирает "из шума" характерную для себя (определяемую значениями параметров и начальными условиями) длину пространственной волны, усиливает ее и делает устойчивой. Или, другими словами, из хаоса рождается порядок. Нетривиальным здесь является то обстоятельство, что этот порядок зачастую носит множественный характер, т.е. одновременно может существовать любое фиксированное число "островков порядка" (устойчивые ДС краевой задачи (1.1)). Тем самым, при достаточно малых значениях ν в фазовом пространстве рассматриваемой системы имеется целый набор устойчивых дискретных состояний, разделенных неустойчивыми промежутками (образ горной страны).

Суммируя все вышесказанное, подчеркнем, что явление буферности представляет собой одну из характерных особенностей процесса самоорганизации в сложных системах. Отметим еще, что в той или иной форме о множественности режимов самоорганизации говорилось в [1], [30] – [33] (см. также статьи [35] – [37], посвященные проблемам самоорганизации и буферности в задачах экологии). Однако в настоящей работе,

по всей видимости, впервые строгое математическое обоснование этого положения дано в классической модельной ситуации, когда речь идет о существовании и устойчивости диссипативных структур в системах типа реакция-диффузия с граничными условиями Неймана на отрезке.

Список литературы

- [1] Гленсдорф П., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 350 с.
- [2] Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. О классификации решений системы нелинейных диффузионных уравнений в окрестности точки бифуркации // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. ВИНТИ, 1987. Т. 28. С. 207 - 313.
- [3] Иваницкий Г.Р., Кринский В.И., Сельков Е.Е. Математическая биофизика клетки. М.: Наука, 1978. 308 с.
- [4] Колмогоров А.Н., Петровский И.Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме // Бюлл. МГУ. Мат. и мех. 1937. Т. 1, Вып. 6. С. 1 - 26.
- [5] Колесов Ю.С. Проблема адекватности экологических уравнений. Ярославль, 1985. Деп. ВИНТИ, 1985. No 1901-85. 160 с.
- [6] Turing A. The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. 1952. V. 237. P. 37 - 72.
- [7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.
- [8] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Явление параметрической буферности в системах параболических и гиперболических уравнений с малой диффузией // Укр. мат. журн. 1998. Т. 50, N 1. С. 22 - 35.
- [9] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. О существовании асимптотически большого числа устойчивых диссипативных структур в параболических системах с малой диффузией // Тр. сем. им. И.Г.Петровского. 2000. Вып.20. С. 3 - 26.
- [10] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 526 с.
- [11] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.

- [12] Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
- [13] Еленин Г.Г., Крылов В.В., Полежаев А.А., Чернавский Д.С. Особенности формирования контрастных диссипативных структур // ДАН СССР. 1983. Т. 271, No 1. С. 84 - 88.
- [14] Колесов Ю.С. О границе применимости метода квазинормальных форм // Математические модели в биологии и медицине. Вильнюс, 1989. Вып. 3. С. 99 - 111.
- [15] Колесов Ю.С. Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией // Мат. сб. 1993. Т. 184, No 3. С. 121 - 136.
- [16] Витт А.А. Растраченные автоколебательные системы // Журн. тех. физики. 1934. Т. 4, No 1. С. 144 - 157.
- [17] Колесов Ю.С. Устойчивость и бифуркация бегущих волн // Нелинейные колебания в задачах экологии. Ярославль, 1985. С. 3 - 10.
- [18] Колесов А.Ю., Мищенко Е.Ф., Розов Н.Х. Асимптотические методы исследования периодических решений нелинейных гиперболических уравнений. М.: МАИК "Наука", 1998. 191 с. (Тр. МАИИ. 1998. Т. 222.)
- [19] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Чернавский Д.С. Элементы теории диссипативных структур: связь с проблемами структурообразования // Математическая биология развития. М.: Наука, 1982. С. 82 - 101.
- [20] Белоусов Л.В. Биологический морфогенез. М.: Изд-во МГУ, 1987. 239 с.
- [21] Pate E., Othmer H.G. Application of a model for scaleinvariant pattern formation in developing systems // Differentiation. 1984. V. 28. P. 1 - 8.
- [22] Митропольский Ю.А., Мосеев Б.И. Асимптотические решения уравнений в частных производных. Киев: Вища школа, 1976. 589 с.
- [23] Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука, 1972. 718 с.
- [24] Фомин В.Н. Математическая теория параметрического резонанса в линейных распределенных системах. Л.: Изд-во ЛГУ, 1972. 240с.
- [25] Колесов А.Ю., Колесов Ю.С. Принцип сведения Боголюбова - Митропольского в задаче о параметрическом возбуждении автоволн // ДАН СССР. 1989. Т. 307, No 4. С. 837 - 840.
- [26] Колесов Ю.С. Нелинейный параметрический резонанс в сингулярно возмущенном телеграфном уравнении // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, No 10. С. 1828 - 1829.

- [27] Колесов А.Ю. Параметрические колебания решений телеграфного уравнения с умеренно малой диффузией // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, No 6. С. 79 - 86.
- [28] Колесов Ю.С. Асимптотика и устойчивость нелинейных параметрических колебаний сингулярно возмущенного телеграфного уравнения // Мат. сб. 1995. Т. 186, No 10. С. 57 - 72.
- [29] Колесов Ю.С. Параметрические колебания сингулярно возмущенного телеграфного уравнения с маятниковой нелинейностью // Мат. сб. 1998. Т. 189, No 3. С. 69 - 82.
- [30] Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
- [31] Эбеллинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979. 279 с.
- [32] Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
- [33] Хакен К. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- [34] Ланда П.С. Нелинейные колебания и волны. М.: Физматлит, 1997. 496 с.
- [35] Колесов Ю.С., Майоров В.В. Пространственная и временная самоорганизация в одновидовом биоценозе // Динамика биологических популяций. Горький, 1986. С. 3 - 13.
- [36] Захаров А.А., Колесов Ю.С. Пространственно неоднородные режимы в задаче хищник-жертва // Нелинейные колебания и экология. Ярославль. 1984, С. 3 - 15.
- [37] Колесов А.Ю., Розов Н.Х. Диффузионная буферность в одной математической модели биологии // Изв. РАН. Сер. мат. 1998. Т. 62, No 5. С. 135 - 164.

