

Единое описание кинетических и газодинамических процессов

Ю.Л. Климонтович

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Аннотация

На основе идей и методов физики открытых систем [5] устанавливается обобщенное кинетическое уравнение для описания неравновесных процессов в газах. Это позволяет проводить единое описание кинетических и газодинамических процессов без использования традиционной теории возмущений по числу Кнудсена и, тем самым, избежать принципиальных трудностей традиционной теории. На ряде примеров, в частности при определении теплового потока, продемонстрирована эффективность предлагаемого способа описания неравновесных процессов.

Для установленного обобщенного кинетического уравнения для газа Больцмана существует доказательство существования глобального решения (Wieser, 1973). Переход от обобщенного кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики производится без использования теории возмущений по числу Кнудсена. Это дает основание допустить существование глобального решения и для полной системы уравнений газовой динамики.

Переход к приближению "несжимаемой жидкости" нарушает как закон сохранения энергии газа, так и уравнение баланса энтропии, которое выражает второй закон термодинамики для неравновесных процессов.

По этой причине уравнение Навье–Стокса выпадает из общей системы уравнений газовой динамики. Существование для него глобального решения не следует из существования глобальных решений для обобщенного кинетического уравнения и соответствующего уравнения газовой динамики.

Доказательство глобального решения уравнения Навье–Стокса требует иного подхода.

Содержание

1	Некоторые математические проблемы гидродинамики и кинетики	67
2	Физически бесконечно малые масштабы разреженного газа	71
2.1	Общее определение	71
2.2	Кинетический уровень описания	71
2.3	Гидродинамический уровень описания	72
2.4	Физическое число Кнудсена	73

2.5	Согласование кинетического и гидродинамического определений сплошной среды.	74
3	Кинетическое уравнение Больцмана	75
3.1	Структура и свойства интеграла столкновений Больцмана	75
3.2	Время и длина релаксации в газе Больцмана	76
3.3	H -теорема Больцмана. Функционал Ляпунова для газа Больцмана	76
3.4	Свободно-молекулярное течение газа	78
3.5	Некоторые результаты и проблемы	79
4	Уравнения газовой динамики	79
4.1	Введение	79
4.2	Уравнения газовой динамики	80
4.3	Энтропия и производство энтропии в газовой динамике	83
4.4	Замечания к теории возмущений по числу Кнудсена	83
5	Обобщенное кинетическое уравнение	84
5.1	Введение	84
5.2	Первый шаг к диссипативным уравнениям — сглаживание по объему “точки” сплошной среды	85
5.3	Обобщенное кинетическое уравнение	86
5.4	Уравнение баланса энтропии. H -теорема. Функционал Ляпунова	90
5.4.1	Уравнение баланса энтропии	90
5.4.2	Локальное равновесие	91
5.5	Функционал Ляпунова	92
5.5.1	Замкнутая система	92
5.5.2	Незамкнутая система	92
5.6	Тепловой поток	93
5.6.1	Замкнутая система ($F = 0$)	93
5.6.2	Тепловой поток во внешнем поле	95
6	Единое кинетическое и гидродинамическое описание	95
6.1	Введение. Замечания к теории возмущений по числу Кнудсена	95
6.2	Уравнения газовой динамики с учетом самодиффузии и подвижности заряженных частиц	97
6.3	Решение обобщенного кинетического уравнения для несжимаемой жидкости	100
6.4	Уравнения баланса энергии и энтропии ”несжимаемой жидкости”	101

6.4.1	Уравнение баланса кинетической энергии несжимаемой жидкости	101
6.4.2	Уравнение баланса энтропии	102
6.5	Заключение	103

1 Некоторые математические проблемы гидродинамики и кинетики

В гидродинамике несжимаемой жидкости для описания ламинарных течений математической основой служит уравнение Навье–Стокса. Согласно Рейнольдсу уравнение Навье–Стокса для пульсаций гидродинамической скорости служит также и для описания турбулентного движения.

Имеются, однако, некоторые сомнения в правомерности использования уравнения Навье–Стокса в качестве математического базиса в гидродинамике несжимаемой жидкости. Не является бесспорным и выбор уравнения Навье–Стокса в качестве стартового для перехода в теории турбулентности к уравнениям Рейнольдса.

Действительно, уравнение Навье–Стокса математически не вполне обосновано, поскольку для него нет доказательства глобального существования его решения. Более того оно не вполне правомерно и с физической точки зрения, поскольку для модели несжимаемой жидкости нарушается уравнение баланса энтропии, которое выражает второй закон термодинамики.

Для облегчения доказательства существования решения уравнения Навье–Стокса в работах О.А. Ладыженской была проведена его регуляризация путем введения в него дополнительно нелинейной вязкости. Это означало переопределение тензора вязких напряжений:

$$\pi_{ij} = -\eta u_{ij} \rightarrow -\eta (1 + \alpha (u_{ij})^2) u_{ij}. \quad (1.1)$$

Здесь u_{ij} — тензор производных скорости, α — произвольный коэффициент. Для сглаженного таким образом уравнения Навье–Стокса О.А. Ладыженская доказала существование решения при всех $t > 0$.

При этом, естественно, возникает вопрос о физическом смысле дополнительной нелинейной вязкости.

В гл. 13 книги (Климонтович, 1982) показано, что подобная регуляризация может отражать атомарную структуру сплошной среды. Тогда дополнительный нелинейный член в уравнении О.А. Ладыженской пропорционален двум безразмерным параметрам — квадрату числа Маха и отношению квадрата среднего расстояния между атомами r_{av} к квадрату характерного масштаба задачи L .

В этом случае нелинейный член настолько мал, что не может проявляться при измерении вязкости с помощью самых совершенных вискозиметров.

Вторая возможность — представить дополнительный член как результат разложения

по числу Кнудсена $Kn = l/L$ или обратному числу Рейнольдса Re . Здесь l – длина свободного пробега, а L – характерная длина задачи. Этот параметр зависит от плотности и соответствующий вклад мог бы быть обнаружен при измерении вязкости.

Возможен, наконец, промежуточный случай, когда появление дополнительного члена отражает структуру сплошной среды. В этом случае безразмерный нелинейный член в уравнении О.А. Ладыженской пропорционален квадрату отношения размера "точки" сплошной среды к характерному параметру задачи. Это "физический параметр Кнудсена" $K_{ph} = l_{ph}/L$. В отличие от числа Кнудсена он определяется отношением физически бесконечно малого масштаба l_{ph} , который характеризует размер "точки" сплошной среды, к характерному масштабу задачи L . Для всех уравнений сплошной среды параметр K_{ph} всегда мал. Однако, такое определение параметра α также не вполне удовлетворительно, так как структура уравнений сплошной среды не должна явно зависеть от размера "точки" сплошной среды.

Другие возможности физической интерпретации "параметра Ладыженской", по-видимому, отсутствуют. Это возвращает нас к исходному уравнению Навье–Стокса и, следовательно, вопрос о существовании для него глобального решения остается открытым.

Можно все же предположить, что возможность регуляризации уравнения Навье–Стокса обусловлена учетом структуры сплошной среды. Тогда необходимо более детально рассмотреть вопрос о конкретизации определения физически бесконечно малых масштабов. Роль структуры сплошной среды легче выявить на примере разреженного газа – газа Больцмана, когда можно выделить кинетический и гидродинамический уровни описания неравновесных процессов.

Наша ближайшая цель – статистическое обоснование кинетического уравнения для разреженного газа с учетом структуры сплошной среды. При этом возникнет, в свою очередь, вопрос о существовании решения кинетического уравнения Больцмана на всех временах.

Известно, что все попытки доказательства существования основного кинетического уравнения для разреженного газа – уравнения Больцмана, не увенчались успехом. При этом выявились все существенно различные точки зрения на эту проблему.

Одна из них наиболее четко выражена известным физиком Уленбеком (G.E.Uhlenbeck). Около 30 лет тому назад на конференции в Вене, посвященной столетию уравнения Больцмана, он сказал:

"The Boltzmann equation has become such a generally accepted and central part of Statistical Mechanics, that it almost seems blasphemy to question its validity and to seek out its limitations".

Такая позиция предполагает, фактически, что отсутствие доказательства существования глобального решения уравнения Больцмана не является принципиальным недостатком теории.

В то же (см. обзор в сборнике "Уравнение Больцмана" под редакцией А.В. Бобылева и Д.Н. Зубарева, Москва, "Мир", 1986) были предложены различные варианты регуляризации (сглаживания) уравнения Больцмана с целью облегчения доказательства существования решения кинетического уравнения.

Наибольший успех на этом пути был достигнут немецким математиком W. Wieser *L'équation de Boltzmann avec de viscosité. Solution globale sous des hypothèses faibles sur la condition initial.* (C.R. Acad.Sc.Paris, t.298, serie I, № 8, 1984; *An Existence Theorem for perturbed Boltzmann Equation* (Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1982). В этих работах приведено доказательство существования решения уравнения Больцмана при введении в него дополнительного диссипативного члена диффузионного типа с некоторым коэффициентом.

Позднее кинетическое уравнение с дополнительным диссипативным членом использовалось в работах (Елизарова Т.Г., Четверушкин Б.Н. Использование кинетических моделей для расчета гидродинамических течений (Математическое моделирование, Москва, Наука, 1986, с. 261). Однако, дополнительные диссипативные члены в работах W. Wieser и Т.Г. Елизаровой, Б.Н. Четверушкина вводились без достаточного физического обоснования. Общим недостатком этих работ, является, в частности, нарушение инвариантности кинетического уравнения относительно преобразования Галилея.

Проблеме обобщенных кинетических уравнений для описания и не только кинетических, но и гидродинамических процессов посвящен и цикл работ Б.В. Алексеева (см. обзор Физические основы обобщенной больцмановской кинетической теории газов (УФН 70 (2000) 649). Здесь также имеется определенный произвол при формулировке соответствующих обобщенных кинетических уравнений. Нарушается, в частности, традиционная структура кинетических уравнений – они содержат не только первые, но и высшие временные производные. Это нарушает естественные условия нормировки одноточечной функции распределения в шестимерном пространстве координат и импульсов.

Во всяком случае, приведенные работы свидетельствуют о том, что пришло время пересмотреть вопрос о структуре кинетического уравнения для разреженного газа. Такого рода работы по обобщению уравнения Больцмана становятся не "богохульством", как это следует из приведенного высказывания Уленбека, а велением времени.

Последовательному выводу обобщенного кинетического уравнения в рамках Физики открытых систем посвящены работы автора этих строк (Климонтович Ю.Л., 1990, 1992, 1995).

Вывод обобщенного кинетического уравнения для газа с дополнительным диссипативным членом диффузионного типа стал возможным благодаря явному учету структуры сплошной среды. На основе этого уравнения для разреженного газа удалось решить две принципиальные задачи.

Во-первых, для обобщенного кинетического уравнения существует доказательство существования решения на всех временах.

При этом выполняются:

1. Учет роли структуры сплошной среды.
2. Существование функционала Лапунова.
3. Граничные условия для функции распределения в шестимерном пространстве координат и импульса.

Благодаря соответствующим граничным условиям производится отбор решений, при которых интеграл, определяющий функционал Лапунова, конечен.

Более того, на основе кинетического уравнения удается осуществить переход к уравнениям газовой динамики без использования теории возмущений по параметру Кнудсена - по отношению длины свободного пробега к характерному масштабу задачи. Это существенно, поскольку, как будет показано, теория возмущений по числу Кнудсена с математической точки зрения не является корректной.

Итак, для уравнения Больцмана нет доказательства существования решения для всех времен. При этом переход к уравнениям газовой динамики осуществляется путем математически некорректной теории возмущений по числу Кнудсена.

В связи с этим представляет интерес высказывание известного специалиста по статистической теории – главного редактора журнала *Statistical Physycs* – J.L.Lebowitz:

"It is not secret that there does not exist at present anything resembling a rigorous derivation of the hydrodynamic equations governing the time evolution of macroscopic variables from the laws governing their microscopic constituents".

При использовании же обобщенного кинетического уравнения, для которого удается доказать существование решения при всех временах, переход к уравнениям газовой динамики производится без использования теории возмущений по числу Кнудсена. Это позволяет избежать ряда принципиальных трудностей, связанных с ее применением.

Для перехода к уравнениям газовой динамики будет достаточно задать вид искомой функции распределения. При этом выполняются все три указанные условия. Это дает основание перенести доказательство существования решения обобщенного кинетического уравнения на уравнения газовой динамики. При этом, однако, остается проблема доказательства существования решения уравнения Навье–Стокса.

В заключение этого краткого Введения отметим следующее.

Обобщенные кинетические уравнения служат основой не только для разреженных газов, но и для электрон-ионной плазмы. Их использование позволяет преодолеть ряд принципиальных проблем современной теории плазмы (Климонтович, 1997, 1999).

Более того, явный учет структуры сплошной среды позволяет по той же схеме построить и соответствующие кинетические уравнения для описания многих процессов в открытых системах – для развития кинетической теории турбулентного движения, для описания теории фазовых переходов второго рода, а также для описания многих явлений физики открытых систем. Последовательному изложению идей, методов и многих результатов Физики открытых систем посвящена трехтомная монография автора "Статистическая теория открытых систем" (Москва, "Янус" 1995, 1999, 2001).

Перейдем теперь к построению кинетических и газодинамических уравнений для разреженного газа – газа Больцмана. Начнем с определения физически бесконечно малых масштабов.

2 Физически бесконечно малые масштабы разреженного газа

2.1 Общее определение

При кинетическом и газодинамическом описании процессов в газах используется модель сплошной среды. При этом возникает необходимость определения понятия "точка сплошной среды". В общем случае речь идет об определении физически бесконечно малых масштабов τ_{ph}, l_{ph} времени и длины и соответствующего среднего числа частиц в $N_{ph} = nV_{ph}$ в физически бесконечно малом объеме V_{ph} , принимаемом за "точку".

Традиционно ограничиваются лишь общим определением понятия "сплошная среда". Это значит, что достаточно допустить наличие малых элементов среды на рассматриваемом уровне описания, но все-же настолько больших, что эти малые элементы содержат много частиц. Определение "малый элемент" означает, что его линейные размеры l_{ph} много меньше любого характерного размера L системы.

В качестве характерного масштаба при кинетическом описании выступает длина свободного пробега l и, следовательно, размер точки сплошной среды таков, что имеет место неравенство $l_{ph} \ll l$. При использовании этого неравенства предполагается неявно, что длина свободного пробега меньше характерного размера системы, т.е. $l \ll L$. Возможна, однако, и иная ситуация, когда газ настолько разрежен, что имеет место обратное неравенство: $L \ll l$. Этому условию отвечает так называемое "бесстолкновительное" приближение. При этом диссипативные процессы определяются в основном не столкновениями частиц, а "столкновениями" частиц со стенкой.

2.2 Кинетический уровень описания

Для газа Больцмана основные параметры длины удовлетворяют неравенствам

$$r_0 \ll r_{av} \ll l, \quad \varepsilon = nr_0^3 \ll 1. \quad (2.1)$$

Аналогичны соответствующие соотношения между временными параметрами.

Время перехода к локальному равновесию определяется временем и длиной столкновений τ, l . Таким образом, для кинетического этапа релаксации в общих неравенствах

$$\tau_{ph} \ll T, \quad l_{ph} \ll L, \quad N_{ph} \gg 1 \quad (2.2)$$

следует произвести замену:

$$T \rightarrow \tau, \quad L \rightarrow l. \quad (2.3)$$

Представление **разреженного** газа в виде сплошной среды, на первый взгляд, представляется парадоксальным, так как при условии разреженности газа выполняется неравенство $\varepsilon = nr_0^3 \ll 1$ и, следовательно, объем атома много меньше приходящегося на него объема. Покажем, что представление разреженного газа в виде сплошной среды все же оправдано.

Разделим интервал τ , который характеризует средний временной промежуток между двумя последовательными столкновениями любой выделенной частицы, на число частиц в физически бесконечно малом объеме $N_{ph} = nV_{ph}$.

В результате получим меньший временной интервал τ_{ph} . Он определяет промежуток времени, через который испытывает столкновение одна из частиц, находящихся в объеме V_{ph} . Интервал $\tau_{ph} = \tau/N_{ph}$ и принимается за физически бесконечно малый.

Для получения уравнений, определяющих физически бесконечно малые масштабы, используем естественное при кинетическом описании соотношение $\tau_{ph} = l_{ph}/v_T$, а также соотношение $N_{ph} = nV_{ph} \sim nl_{ph}^3$. Из полученных таким путем уравнений с учетом определения параметров l и ε , получаем конкретные оценки физически бесконечно малых масштабов:

$$\tau_{ph} \sim \sqrt{\varepsilon}\tau \ll \tau, \quad l_{ph} \sim \sqrt{\varepsilon}l \ll l, \quad N_{ph} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \gg 1. \quad (2.4)$$

Определение физически бесконечно малых масштабов не является, естественно, универсальным. Оно зависит от выбранного уровня описания неравновесных процессов (кинетического, гидродинамического или реакционно-диффузионного).

2.3 Гидродинамический уровень описания

В гидродинамике времена релаксации выражаются через внешний параметр L , и один из трех диссипативных коэффициентов: диффузии D , вязкости ν и температуропроводности χ . Все эти процессы диффузионного типа. Коэффициент “диффузии” D представляет здесь один из трех коэффициентов D , ν , и χ . Время релаксации определяется выражением

$$\tau_D = \frac{L^2}{D}, \quad D = D, \nu, \chi. \quad (2.5)$$

Для диффузионных процессов связь между физически бесконечно малыми масштабами времени и длины определяется (вместо “кинетического соотношения” $\tau_{ph} = l_{ph}/v_T$) соответствующим газодинамическим (“G”) соотношением

$$\tau_{ph}^G = \frac{(l_{ph}^G)^3}{D}, \quad D = D, \nu, \chi. \quad (2.6)$$

Тем самым, “следы” диффузионного (гидродинамического) движения сохраняются и в физически бесконечно малом объеме V_{ph} , т.е. в “точке” сплошной среды.

В результате получаем оценки физически бесконечно малых масштабов при газодинамическом описании:

$$\tau_{ph}^G \sim \frac{\tau_D}{N^{2/5}} \ll \tau_D, \quad l_{ph}^G \sim \frac{L}{N^{1/5}} \ll L, \quad N_{ph}^G \sim N^{2/5} \gg 1. \quad (2.7)$$

Здесь использовано равенство $nL^3 = N$.

Физически бесконечно малые масштабы зависят теперь от внешнего масштаба L . Это и показывает, что определение физически бесконечно малых масштабов и, следовательно, само определение “точки” сплошной среды существенно зависит от принятого уровня описания.

2.4 Физическое число Кнудсена

Газодинамическое описание является более грубым, чем кинетическое и “точка” сплошной среды в газовой динамике больше, т.е. $V_{ph} \leq V_{ph}^G$. Переход от кинетического описания к более “грубому” газодинамическому описанию проводится традиционно следующим образом.

Для приближенного решения кинетического уравнения используется теория возмущений по малому числу Кнудсена $Kn = l/L$ (методы Гильберта, Чепмена–Энскога и Грэда (см. Силин, 1971; Климонтович, 1964, 1982; Жданов, 1982). При использовании такой теории возмущений возникают, однако, серьезные трудности, связанные с тем, что параметр Kn не отражает в достаточной мере структуру “сплошной среды”.

При учете структуры сплошной среды вместо числа Кнудсена естественно использовать “физическое число Кнудсена” (Климонтович, 1995). При кинетическом описании оно определяется выражением

$$K_{ph} = \frac{l_{ph}}{l} = \frac{1}{N_{ph}} \ll 1. \quad (2.8)$$

Для области “бесстолкновительного” (свободно-молекулярного) течения, когда характерный параметр длины L (например, диаметр трубы) много меньше длины свободного пробега l , для использования приближения сплошной среды необходимо выполнение двух неравенств

$$l_{ph} \ll L \ll l. \quad (2.9)$$

В случае газодинамического описания физический параметр Кнудсена определяется выражением

$$K_{ph}^G = \frac{l_{ph}^G}{L} \sim \frac{1}{(N_{ph}^G)^{1/2}}. \quad (2.10)$$

Малость этого параметра обеспечивается условием $N_{ph}^G \gg 1$.

2.5 Согласование кинетического и гидродинамического определений сплошной среды.

Во введении были отмечены существенные физические трудности, которые возникают при переходе от кинетического описания к гидродинамическому на основе теории возмущений по числу Кнудсена. Более детально этот вопрос будет обсуждаться ниже. В связи с этим естественно развить единый метод описания неравновесных процессов как на кинетических, так и гидродинамических масштабах. Это позволит избежать использования теории возмущений по числу Кнудсена и тем самым избежать связанных с этим трудностей.

Такое единое описание оправдано лишь для ограниченной области масштабов, так как по мере продвижения в кинетическую область, т.е. в сторону меньших масштабов, гидродинамическое описание станет, в конце концов, невозможным. Для выделения области единого описания заметим следующее.

Соотношение между двумя физически бесконечно малыми объемами V_{ph} и V_{ph}^G можно выразить через параметр плотности ε и число Кнудсена Kn :

$$\frac{V_{ph}}{V_{ph}^G} \sim \varepsilon^{3/10} Kn^{6/5} \leq 1. \quad (2.11)$$

Знак равенства отвечает здесь наибольшему значению числа Кнудсена (соответственно, наименьшему значению характерного параметра L_{\min}), при котором еще возможно единое кинетическое и газодинамическое описание сплошной среды. Используя приведенные определения физически бесконечно малых масштабов получаем следующие оценки для искомого размера точки и соответствующего максимального значения числа Кнудсена:

$$L_{\min} \sim \sqrt{N_{ph}} l_{ph} \sim \frac{l}{\sqrt{N_{ph}}}, \quad (Kn)_{\max} \sim \sqrt{N_{ph}}. \quad (2.12)$$

Таким образом, размер точки L_{\min} , при котором сохраняются следы диффузионного движения и еще возможно гидродинамическое описание движения, меньше длины свободного пробега l , но больше физически бесконечно малого масштаба l_{ph} при кинетическом описании.

Соответствующий характерный временной масштаб определяется выражением

$$(\tau_{ph}^G)_{\min} \sim \frac{L_{\min}^2}{D} \sim \sqrt{\varepsilon} \tau \sim \tau_{ph}. \quad (2.13)$$

Его величина порядка физически бесконечно малого интервала при кинетическом описании.

Итак, для чисел Кнудсена, меньших $(Kn)_{\max} \sim \sqrt{N_{ph}}$, возможно определение точки сплошной среды для единого описания кинетических и гидродинамических процессов. Из приведенных выше соотношений следует оценка числа частиц в "точке"

$$N_{\min} = nL_{\min}^3 \sim \varepsilon^{-5/4}, \quad (Kn)_{\max} \sim \sqrt{N_{ph}} \sim \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon}}. \quad (2.14)$$

При нормальных условиях, когда $\varepsilon \sim 10^{-4}$, получаем оценку $N_{\min} \approx 10^5$; $(Kn)_{\max} \sim 10$.

3 Кинетическое уравнение Больцмана

3.1 Структура и свойства интеграла столкновений Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана - замкнутое уравнение для одноточечной функции распределение в шестимерном пространстве (в сплошной среде) координат и импульсов $x = (r, p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + F_0(r, t) \frac{\partial f}{\partial p} = I_B(r, p, t). \quad (3.1)$$

"Интеграл столкновений" $I_B(r, p, t)$ по Больцману, выражается через одноточечные функции распределения. Он описывает диссипацию, обусловленную перераспределением атомов в пространстве скоростей.

Напомним, что для газа Больцмана параметр плотности $\varepsilon = nr_0^3 \ll 1$. Это дает основание учитывать лишь столкновения пар частиц. В результате Больцман получил следующее выражение для интеграла столкновений:

$$I_B(r, p, t) = n \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^\infty d\varphi \int dp_1 |v - v_1| \times \\ \times [f(p'_1, r, t)f(p', r, t) - f(p_1, r, t)f(p, r, t)]. \quad (3.2)$$

Благодаря соотношениям $p', p'_1 = p(\rho, \varphi), p_1(\rho, \varphi)$ и законам сохранения при парных столкновениях кинетической энергии и импульса, интеграл столкновений зависит лишь от компонент вектора p ; ρ - прицельный параметр.

Напомним замечательные свойства интеграла столкновений Больцмана. Они состоят в том, что интеграл

$$I(r, t) = n \int \Phi(p) I_B(r, p, t) dp = 0 \quad (3.3)$$

для функций $\Phi(p) = 1, p, p^2/2m$, которые сохраняются при парных столкновениях. Эти свойства будут использованы при переходе от кинетического уравнения Больцмана к уравнениям газовой динамики. При выборе функции $\Phi(p)$ в виде $\Phi(p) = -k_B \ln f(p, r, t)$ интеграл

$$I(r, t) = n \int \Phi(p) I_B(r, p, t) dp \geq 0. \quad (3.4)$$

Знак равенства отвечает равновесному состоянию, когда распределение по импульсам - распределение Максвелла. Последнее свойство будет использовано при установлении "H-теоремы Больцмана", которая определяет ход энтропии в процессе временной эволюции системы к равновесному состоянию.

3.2 Время и длина релаксации в газе Больцмана

Для оценки времени релаксации представим интеграл столкновений Больцмана в виде:

$$I_B(r, p, t) \sim \frac{1}{\tau_{rel}} f(p, r, t). \quad (3.5)$$

Положим в интеграле столкновений $|v - v'| \sim v_T$, $\rho \sim r_0$, $\int f(p) dp \sim 1$. В результате получаем следующие оценки:

$$\tau_{rel} \sim \frac{1}{nr_0^2 v_T} = \frac{l}{v_T}, \quad l_{rel} \sim \tau_{rel} v_T \sim \frac{1}{nr_0^2} = l. \quad (3.6)$$

Таким образом, время релаксации по порядку величины совпадает с временем свободного пробега, а длина релаксации - с длиной свободного пробега.

3.3 H-теорема Больцмана.

Функционал Ляпунова для газа Больцмана

Больцман определил выражение для энтропии неравновесных состояний идеального газа выражением

$$S(t) \equiv \int \rho(r, t) s(r, t) dr = - k_B n \int \ln(n f(p, r, t)) f(p, r, t) dr dp. \quad (3.7)$$

Включение в это определение множителя n обеспечивает согласованность этого определения с термодинамическим определением энтропии идеального газа

$$S_0 = k_B N \left\{ \ln \frac{1}{n} + \frac{3}{2} \ln(2\pi m k_B T) + \frac{3}{2} \right\}. \quad (3.8)$$

Ниже понадобится введенное выражение для локальной энтропии $s(r, t)$. Уравнение для нее следует из уравнения Больцмана и имеет вид:

$$\frac{\partial s(r, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \int \frac{p}{m} (-k_B n) \ln((n f(p, r, t))) f(p, r, t) dp = \sigma(r, t). \quad (3.9)$$

Здесь введено обозначение $\sigma(r, t)$ для локального производства энтропии

$$\sigma(r, t) = - k_B n \int \ln((n f(p, r, t))) I_B(p, r, t) dp \geq 0. \quad (3.10)$$

Из уравнения баланса энтропии следует, что для "внешне замкнутой" системы, когда поток вещества и энергии через границы равен нулю, энтропия системы

$$\frac{dS}{dt} \geq 0. \quad (3.11)$$

не может убывать. Она либо возрастает, либо, по достижении равновесного состояния, остается неизменной.

Вместо часто употребляемого термина "замкнутая система" здесь использовался термин "внешне замкнутая система". Это оправдано следующим.

В процессе эволюции идеального газа (газа Больцмана) к равновесному состоянию сохраняется не сама энергия, а лишь ее среднее значение:

$$\langle E \rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \text{const.} \quad (3.12)$$

При установлении этого равенства используется свойство интеграла столкновений Больцмана для функции $\Phi(p) = p^2/2m$ и условие $F_0(r, t) = 0$.

Поскольку сохраняется не полная энергия, а лишь ее среднее значение, то возможны флуктуации энергии. Это указывает на "внутреннюю незамкнутость" системы. Она обусловлена тем, что описание неравновесных процессов на основе уравнения Больцмана является приближенным. Используется лишь информация, которая определяется одно-точечной функцией распределения. Остается огромный "резервуар" движений, которые не могут быть описаны уравнением Больцмана. Это и делает газ Больцмана внутренне незамкнутым.

Условие (3.12) позволяет сформулировать H -теорему Больцмана на языке функционала Ляпунова. Действительно, с учетом последнего равенства можно оказать, что разность энтропий равновесного S_0 и неравновесного $S(t)$ состояний определяется интегралом

$$\Lambda_S = S_0 - S(t) = k_B n \int \ln \frac{f(p, r, t)}{f_0(p)} f(p, r, t) dr dp \geq 0. \quad (3.13)$$

С помощью H -теоремы получаем второе неравенство

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \frac{d}{dt} (S_0 - S(t)) \leq 0. \quad (3.14)$$

Эти два противоположных неравенства и показывают, что введенная разность энтропий $\Lambda_S = S_0 - S(t)$ является функционалом Ляпунова.

Итак, можно сделать два вывода:

1. Общепринятое утверждение, что H -теорема Больцмана справедлива для замкнутой системы, не является вполне точным, так как в процессе эволюции к равновесному состоянию сохраняется не полная энергия, а лишь ее среднее значение. Это указывает на наличие внутренней незамкнутости.

2. Для газа Больцмана содержание H -теоремы Больцмана эквивалентно утверждению о существовании функционала Ляпунова Λ_S , определяемого разностью энтропий равновесного и неравновесного состояния. Наличие функционала Ляпунова свидетельствует об устойчивости равновесного состояния во "внешне замкнутой" системе.

Поскольку энтропия обладает совокупностью свойств, позволяющих использовать ее в качестве меры степени хаотичности (неопределенности) при статистическом описании, то H -теорема Больцмана может быть сформулирована и следующим образом:

В процессе эволюции газа Больцмана к равновесному состоянию степень хаотичности системы возрастает и достигает максимума в равновесном состоянии.

Решение уравнения Больцмана представляет собой чрезвычайно сложную задачу. По этой причине существенно выявление условий сведения кинетического уравнения Больцмана к более простым уравнениям. Это можно сделать в двух предельных случаях: свободно-молекулярного течения и гидродинамического приближения. Гидродинамическому описанию будет посвящена специальная глава. Здесь же рассматривается лишь другой предельный случай.

3.4 Свободно-молекулярное течение газа

В вводной главе было введено число Кнудсена $Kn = l/L$. Оно определяется, таким образом, отношением длины свободного пробега l - длины релаксации для газа Больцмана, к характерному масштабу задачи L . Например, при течении газа в трубе радиуса R и длины L свободно-молекулярному течению отвечают условия

$$l_{ph} \ll R, L \ll l. \quad (3.15)$$

Правое неравенство показывает, что длина свободного пробега больше всех характерных масштабов задачи. Это условия отвечает большим значениям числа Кнудсена. Левое неравенство необходимо, если свободно-молекулярное течение описывается в приближении сплошной среды. Если оно не выполняется, то кинетическое описание становится невозможным и следует вернуться к исходной модели газа - системе частиц.

В нулевом приближении по обратному числу Кнудсена в уравнении Больцмана можно положить интеграл столкновений равным нулю. В результате приходим к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + F_0(r, t) \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (3.16)$$

В этом приближении диссипативный член отсутствует и кинетическое уравнение имеет симметрию обратимого процесса. Однако, обратимость является иллюзорной, поскольку граничное условие как правило является диссипативным.

Рассмотрим пример стационарного течения газа при условии, что сила равна нулю. Используем диссипативное граничное условие — **диффузное отражение**:

$$f(r_S, p)|_{(n_0 p) < 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \exp\left(-\frac{p^2}{2k_B T}\right). \quad (3.17)$$

Отвечающее ему свободно-молекулярное течение также является диссипативным.

Пусть стационарное течение происходит по трубе радиуса R и разность давлений на концах трубы равна $p_1 - p_2$. Длину трубы обозначим через L . Расход газа определяется выражением (см. Силин, 1971, раздел 22)

$$Q_m = \frac{8R^3}{3} \left(\frac{\pi m}{2k_B T}\right)^{1/2} \frac{p_1 - p_2}{L}. \quad (3.18)$$

Сравним этот результат с формулой Пуазейля для течения вязкой жидкости в трубе радиуса R и длины L при разности давлений на концах трубы $p_1 - p_2$. Расход при течении Пуазейля определяется выражением:

$$Q_m = \frac{\pi R^4}{8\nu} \frac{p_1 - p_2}{L}. \quad (3.19)$$

Здесь ν - кинематическая вязкость. По порядку величины $\nu \sim v_T l$. Сравнивая две приведенных формулы для расхода, приходим к условию соответствия

$$\nu \Longleftrightarrow v_T R; \quad l \Longleftrightarrow R. \quad (3.20)$$

Таким образом, длине свободного пробега l при гидродинамическом течении соответствует при свободно-молекулярном течении радиус трубы R .

Свободно-молекулярное течение можно назвать "бесстолкновительным", так как в нулевом приближении по обратному числу Кнудсена столкновения частиц между собой не играют роли. Диссипация определяется столкновениями частиц со стенкой. Это и отражается приведенным условием соответствия.

3.5 Некоторые результаты и проблемы

Для уравнения Больцмана существование глобального решения уравнения Больцмана, несмотря на многолетние усилия многих математиков, до сих пор не доказано.

Вывод диссипативного кинетического уравнения для разреженного газа основан на теории возмущений по малому параметру плотности $\varepsilon = nr_0^3$.

В теории Больцмана переход от системы частиц к сплошной среде в шестимерном пространстве координат и импульсов является, фактически, исходным предположением, но структура сплошной среды не определена.

Отсутствует определение ансамбля Гиббса для неравновесных процессов.

Будет показано, что учет структуры сплошной среды приводит к появлению в кинетическом уравнении Больцмана дополнительного диссипативного члена, определяемого пространственным перераспределением атомов в пространстве.

4 Уравнения газовой динамики

4.1 Введение

В традиционной теории определение физически бесконечно малых масштабов не конкретизируется ни в кинетике, ни в газовой динамике. Это, как будет показано, порождает ряд принципиальных трудностей при переходе от кинетического описания к газодинамическому.

Опишем кратко традиционный переход к уравнениям гидродинамики на основе теории возмущений по числу Кнудсена и отметим возникающие при этом принципиальные трудности. Это послужит основанием для построения в следующей главе обобщенного кинетического уравнения.

4.2 Уравнения газовой динамики

Переход от кинетического уравнения Больцмана возможен при выполнении двух неравенств:

$$l_{ph} \sim \sqrt{\varepsilon} l \ll l \ll L, \quad \varepsilon = nr_0^3 \ll 1. \quad (4.1)$$

Левое неравенство следует из определения физически бесконечно малых масштабов для газа Больцмана. Правое неравенство выделяет область малых значений числа Кнудсена. Установим на основе уравнения Больцмана уравнения переноса плотности, плотности импульса и плотности кинетической энергии. Для плотности ρ приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho u = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $u(r, t)$ -локальная гидродинамическая скорость. Уравнение баланса плотности импульса имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial r_j} = & -\frac{\partial p}{\partial r_i} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial r_j} + \\ & + \frac{\rho}{m} F_i + n \int p_i I_B dp. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Записываем, наконец, уравнение баланса плотности кинетической энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} k_B T \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_i} \left[u_i \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} k_B T + p \right) + \pi_{ij} u_j + q_i \right] = \\ & = \frac{\rho}{m_a} (F_i u) + n \int \frac{p^2}{2m} I_B dp. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Система уравнений для функций $\rho(r, t)$, $u(r, t)$ и $T(r, t)$ не является замкнутой, так как в нее входят более сложные моменты функции распределения $f(r, p, t)$:

$$\pi_{ij}(r, t) = nm \int \left(\delta v_i \delta v_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\delta v)^2 \right) f(r, p, t) dp, \quad \delta v = v - u(r, t), \quad \pi_{ii}(r, t) = 0, \quad (4.5)$$

$$q(r, t) = n \int \delta v \frac{m(\delta v)^2}{2} f(r, p, t) dp. \quad (4.6)$$

Число функций, входящих в эти уравнения, больше числа уравнений. Чтобы получить замкнутую систему уравнений газовой динамики для функций $\rho(r, t)$, $u(r, t)$ и $T(r, t)$, надо выразить "лишние" функции

$$\pi_{ij}, \quad q_i, \quad n \int p_i I_B dp, \quad \text{и} \quad n \int \frac{p^2}{2m} I_B dp \quad (4.7)$$

через функции ρ , u и T .

В нулевом приближении по числу Кнудсена $Kn = l/L$ все члены в кинетических уравнениях, кроме I_B , могут быть опущены. В результате получаем интегральное уравнение:

$$I(r, p, t) = 0. \quad (4.8)$$

Отсюда следует, что функция $f(r, p, t)$ – локальное распределение Максвелла:

$$nf(r, p, t) = \frac{\rho(r, t)}{m} \frac{1}{[2\pi mk_B T(r, t)]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[p - mu(r, t)]^2}{2mk_B T(r, t)} \right\}. \quad (4.9)$$

В этом приближении тензор π_{ij} , и вектор q равны нулю:

$$\pi_{ij}^{(0)} = 0, \quad q^{(0)} = 0. \quad (4.10)$$

В результате в нулевом приближении по числу Кнудсена для пяти функций $\rho(r, t)$, $u(r, t)$ и $T(r, t)$ получаем замкнутую систему уравнений гидродинамики без учета диссипации за счет вязкости и теплопроводности.

Уравнение же баланса плотности импульса можно привести к виду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial r} \right) u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{F}{m}, \quad (4.11)$$

а уравнение баланса плотности энергии свести уравнению для давления

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial r} \right) p + \frac{5}{3} p \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad p = \frac{\rho}{m} k_B T. \quad (4.12)$$

В результате имеется замкнутая система уравнений для плотности, скорости и давления или температуры. Последняя связана с давлением и плотностью локальным уравнением состояния идеального газа.

Чтобы найти выражения для тензора вязких напряжений π_{ij} и вектора теплового потока q , надо знать решение кинетического уравнения Больцмана в первом приближении по параметру Кнудсена. Предложены разные варианты такой теории возмущений. Один из популярных вариантов – ”метод Грэда” представление функции распределения в виде ряда по полиномам Эрмита (Силин, 1971; Жданов, 1982; Лифшиц и Питаевский, 1982, Климонтович, 1964, 1982). Грэд предложил использовать тринадцати моментное приближении по числу функций, входящих в уравнения переноса. В результате функция распределения представляется в виде:

$$nf(r, p, t) = \frac{\rho}{m} \frac{1}{[2\pi mk_B T]^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{[p - mu]^2}{2mk_B T} \right\}$$

$$\left[1 + \frac{\pi_{ij}}{2p} \frac{m\delta v_i \delta v_j}{3k_B T} + \frac{m(\delta v q)}{pk_B T} \left(\frac{m(\delta v)^2}{5k_B T} - 1 \right) \right]. \quad (4.13)$$

Первый член совпадает с локальным распределением Максвелла и отвечает нулевому приближению по числу Кнудсена. Следующие члены, как показывает расчет, пропорциональны первым производным и, следовательно отвечают первому приближению теории возмущений по числу Кнудсена. В результате для тензора вязких напряжений и вектора теплового потока получаем следующие выражения для функций π_{ij} , S_i :

$$\pi_{ij} = -\eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right), \quad \eta = \rho\nu, \quad (4.14)$$

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r_i}, \quad \lambda = c_p \rho \chi. \quad (4.15)$$

η и λ - коэффициенты вязкости и теплопроводности для разреженного газа; ν, χ - кинематическая вязкость и температуропроводность. По порядку величины

$$\eta = \rho\nu \sim \rho l v_T \quad \text{и} \quad \lambda \sim \rho k_B \chi = \rho k_B l v_T. \quad (4.16)$$

Подставим выражение для тензора вязких напряжений и вектора теплового потока в уравнения баланса плотности импульса и энергии. В результате получим замкнутую систему уравнений газовой динамики для разреженного газа с учетом диссипации, которая обусловлена необратимыми процессами за счет вязкости и теплопроводности. Запишем эту систему уравнений в стандартной форме

Уравнение непрерывности оставляем в неизменном виде. С его помощью из уравнения для плотности импульса получаем уравнение для гидродинамической скорости

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \text{grad}) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \text{grad} \text{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\mathbf{F}}{m} \quad (4.17)$$

Это уравнение Навье - Стокса. Оно отличается от уравнения Эйлера учетом диссипации за счет вязкого трения.

Вместо уравнения для плотности энергии, как и в нулевом приближении по числу Кнудсена, удобно использовать соответствующее уравнение для давления (Климонтович, 1982, гл.10).

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) p + \frac{5}{3} p \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\eta}{3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right)^2 + \frac{2}{3} \lambda \Delta T. \quad (4.18)$$

В процессе вывода этих уравнений было сделано допущение, что диссипативные члены малы по числу Кнудсена (или по обратному числу Рейнольдса Re). В общем случае отношение диссипативного члена к недиссипативному порядка обратного числа Рейнольдса.

4.3 Энтропия и производство энтропии в газовой динамике

В газовой динамике разреженного газа локальные уравнения состояния имеют вид:

$$p(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{m} k_B T(r, t); \quad U(r, t) \equiv \frac{\rho(r, t)}{m} \varepsilon(r, t) = \frac{3}{2} k_B T(r, t). \quad (4.19)$$

Второй закон термодинамики для локального равновесия выражается равенством:

$$Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{m}{\rho}\right), \quad S(r, t) = \frac{\rho(r, t)}{m} s(r, t). \quad (4.20)$$

Здесь введены энтропия $s(r, t)$ и внутренняя энергия $\varepsilon(r, t)$ в расчете на одну частицу.

Основываясь на приведенной формулировке второго закона термодинамики и уравнениях газовой динамики, получаем соответствующее уравнение баланса плотности энтропии (Ландау и Лифшиц, 1988; Климонтович, 1982)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{m} s \right) + \operatorname{div} \left[\frac{\rho}{m} u s - \frac{\lambda \operatorname{grad} T}{T} \right] = \sigma(r, t), \quad (4.21)$$

Здесь введено обозначение для производства энтропии

$$\sigma(r, t) = \frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right)^2 + \lambda \left(\frac{\operatorname{grad} T}{T} \right)^2. \quad (4.22)$$

Оно определяется суммой двух положительных вкладов, определяемых, соответственно, вязким трением и теплопроводностью. Знак равенства отвечает случаю полного равновесия.

Ниже будет показано, что переход к приближению "несжимаемой жидкости", когда плотность и температура постоянны, приводит к противоречию с уравнением баланса энтропии.

4.4 Замечания к теории возмущений по числу Кнудсена

Теория возмущений по числу Кнудсена в настоящее время широко используется в литературе. При этом, однако, остается без ответа ряд вопросов, возникающих при физическом анализе этого метода.

1. Имеется формально-математическое противоречие между теорией возмущений по малому параметру плотности $\varepsilon = nr_0^3$, которая приводит к кинетическому уравнению Больцмана, и теорией возмущений по числу Кнудсена $Kn = l/L$ при переходе от кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики.

Действительно, число Кнудсена можно записать в виде $Kn = r_0/L\varepsilon$. Нулевому приближению отвечает локальное распределение Максвелла. Ему отвечает, однако, бесконечное значение параметра плотности. При конечном числе Кнудсена, это отвечает бесконечному числу Рейнольдса. Тем самым, базовое состояние при нулевом значении числа Кнудсена не является физически реализуемым.

2. В уравнение баланса плотности энергии, которое следует непосредственно из уравнения Больцмана, входит некоторый вектор q . Он представляет собой относительный поток относительной кинетической энергии. Это, однако, еще не дает основание принять его за тепловой поток.

В теории возмущений по числу Кнудсена этот вектор определяется законом Фурье. Это и дало основание принять его за тепловой поток. Однако, на основании второго закона термодинамики естественно ожидать, что тепловой поток пропорционален градиенту локальной энтропии. Возникает новый вопрос.

3. Локальная энтропия зависит по меньшей мере от двух термодинамических переменных, например, температуры и плотности. Это дает основание предполагать, что тепловой поток является комбинацией двух градиентов. Закон Фурье справедлив лишь в некотором частном случае.

4. Для газа коэффициент теплопроводности λ связан с молекулярной характеристикой коэффициентом температуропроводности χ соотношением

$$\lambda = \rho C_p \chi \quad (4.23)$$

Приходим, тем самым, к парадоксальному выводу: при любых гидродинамических процессах (медленных - диффузионных и быстрых - волновых) тепловой поток пропорционален теплоемкости при **постоянном давлении**. Однако давление приближенно постоянно лишь при медленных - диффузионных процессах. Напротив, при волновых процессах приближенно постоянной является энтропия, т.е. процесс близок к адиабатическому.

Причиной перечисленных недостатков служит формальное введение модели сплошной среды как при кинетическом, так и гидродинамическом описании неравновесных процессов. Учет структуры сплошной среды приводит к существенному изменению структуры кинетического уравнения - к появлению дополнительного диссипативного члена. Это позволяет проводить единое описание как на кинетических, так и на гидродинамических масштабах для широкого диапазона значений числа Кнудсена. Для выделения гидродинамической области при этом не будет необходимости использовать теорию возмущений по числу Кнудсена. Достаточно выбрать лишь класс функций распределения.

Теперь все подготовлено для изложения альтернативного способа кинетического и гидродинамического описания неравновесных процессов в газах.

5 Обобщенное кинетическое уравнение

5.1 Введение

Ближайшая задача — показать, что учет структуры “сплошной среды” существенно меняет вид кинетического уравнения. В обобщенном кинетическом уравнении, наряду с интегралом столкновений Больцмана, который характеризует изменение одноточечной

функции распределения $f(r, p, t)$ по скоростям, появляется дополнительный диссипативный член. Он определяется изменением этого распределения за счет пространственной диффузии и подвижности частиц при действии средней силы.

На основе обобщенного уравнения становится возможным единое описание неравновесных процессов на кинетических и гидродинамических масштабах. Удастся, тем самым, избежать применения теории возмущений по числу Кнудсена и, как следствие, избежать и тех трудностей, о которых говорилось в заключительном разделе предыдущей главы. Этим достигается и определенное обобщение уравнений гидродинамики — в них, вместо двух диссипативных процессов за счет вязкого трения и теплопроводности, учитывается также и диссипация за счет самодиффузии. При этом, в частности, изменится и определение теплового потока. Он пропорционален теперь градиенту энтропии. В приближении локального равновесия энтропия определяется двумя термодинамическими величинами — температурой и плотностью. По этой причине тепловой поток определяется комбинацией двух соответствующих градиентов. Закон Фурье оказывается справедливым лишь в частном случае изобарического процесса.

5.2 Первый шаг к диссипативным уравнениям — сглаживание по объему “точки” сплошной среды

Обратимся к динамическим уравнениям для микроскопической фазовой плотности в шестимерном пространстве и микроскопической силы

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F^m(r, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) N(r, p, t) = 0, \quad N(r, p, t) = \sum_{1 \leq i \leq N} \delta(r - r_i(t)) \delta(p - p_i(t)), \quad (5.1)$$

$$F^m(r, t) = F_0(r) - \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi(|r - r'|) N(r', p', t) dr' dp'. \quad (5.2)$$

Это точные динамические уравнения, эквивалентные системе уравнений Гамильтона для всех атомов рассматриваемой макроскопической системы — разреженного газа. Основная задача — переход от точных динамических уравнений к приближенным уравнениям сплошной среды. Приближенность обусловлена, в первую очередь, тем, что при переходе к сплошной среде теряется информация о движениях частиц в пределах точек “сплошной среды”.

Первый шаг на пути перехода к необратимым уравнениям сплошной среды — сглаживание динамического распределения по объему “точки” сплошной среды. Это означает введение границы мелкомасштабных (внутри “точки”) и крупномасштабных флуктуаций. Исключение мелкомасштабных флуктуаций и приводит, в конечном счете, к диссипативным кинетическим уравнениям.

Процедура сглаживания становится возможной и неизбежной, благодаря *сложности движения* рассматриваемой гамильтоновой системы. Эта сложность проявляется,

в частности, в наличии *динамической неустойчивости движения* и, как следствие, в *перемешивании траекторий в фазовом пространстве*. Последнее и оправдывает введение физически бесконечно малых элементов с последующим сглаживанием по физически бесконечно малому объему – по объему “точки сплошной среды”.

Итак, наличие динамической неустойчивости в сочетании с неконтролируемыми малыми воздействиями на систему и оправдывает такое сглаживание. Сглаживание ведет к потере информации о движении атомов в “точках” сплошной среды и, как следствие, к переходу к необратимым уравнениям статистической теории. Существенную роль в обоснование и развитие такой точки зрения на возникновение необратимости внесли работы Н.С. Крылова (Крылов, 1950).

В этом отношении динамическая неустойчивость движения атомов газа Больцмана играет конструктивную (положительную) роль, так как дает возможность перехода от необозримо сложной системы уравнений атомов газа к неизмеримо более простым уравнениям статистической теории неравновесных процессов (Климонтович, 1982, 1990, 1995)

Итак, на первом этапе перехода к необратимым уравнениям сплошной среды вводим в исходные динамические уравнения оператор сглаживания по объему “точки” сплошной среды за физически бесконечно малый интервал времени τ_{ph} :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial r} + F^m(r, t) \frac{\partial}{\partial p} \right) N(r, p, t) = -\frac{1}{\tau_{ph}} [N(r, p, t) - \tilde{N}(r, p, t)] \quad (5.3)$$

$$F^m(r, t) = F_0(r) - \frac{\partial}{\partial r} \int \Phi(|r - r'|) N(r', p', t) dr' dp'.$$

Операция сглаживания определяется равенством:

$$\tilde{N}(r, p, t) = \int N(r - \rho, p, t) F(\rho) d\rho. \quad (5.4)$$

Конкретный вид функции сглаживания $F(\rho)$ зависит от ряда факторов. Используем простейшую форму функции сглаживания в виде распределения Гаусса:

$$F(\rho) = \left(\frac{1}{2\pi L_{\min}^2} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{(\rho - \langle \rho \rangle)^2}{2L_{\min}^2} \right), \quad \langle \rho \rangle = \frac{b}{m} F \tau_{ph}. \quad (5.5)$$

Дисперсия здесь определяется размером точки при едином описании движения на кинетическом и гидродинамическом масштабах. b — коэффициент подвижности под действием силы F , $\langle \rho \rangle$ — среднее смещение за время τ_{ph} .

5.3 Обобщенное кинетическое уравнение

Распределения $N(r, p, t)$, $\tilde{N}(r, p, t)$ являются случайными функциями. Следующий шаг к кинетическому уравнению — усреднение по неравновесному ансамблю Гиббса.

При определении ансамбля Гиббса для равновесного состояния для всех систем ансамбля фиксируется лишь небольшое число термодинамических параметров, например, число частиц, температура и давление. В остальном движение атомов в системах ансамбля остается неопределенным. Это и проявляется в высокой степени хаотичности (неопределенности) движения атомов, которая численно характеризуется энтропией Гиббса.

При введении ансамбля Гиббса для неравновесных состояний заданными для всех систем ансамбля являются соответствующие уравнения сплошной среды. Это — по степени убывания детальности описания — кинетические, гидродинамические, реакционно-диффузионные уравнения. Неопределенность же статистического описания неравновесных состояний характеризуется степенью неопределенности движения атомов в пределах “точек” сплошной среды. По мере огрубления описания при приближении к равновесному состоянию степень этой неопределенности возрастает и в равновесном состоянии становится максимальной.

Проведем в уравнениях (5.3) усреднение по ансамблю Гиббса. Первый момент случайной функции $N(r, p, t)$ связан с одноточечным распределением соотношением:

$$nf(R, v, t) = \langle N(R, v, t) \rangle; \quad r \rightarrow R, p \rightarrow mv. \quad (5.6)$$

Здесь производим замену обозначений. Это создает большее удобство записи дальнейших формул. После усреднения по ансамблю Гиббса приходим к уравнению:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial R} + F(R, t) \frac{\partial}{\partial v} \right) f(R, v, t) = I_{(v)}(R, v, t) + I_{(R)}(R, v, t), \quad (5.7)$$

$$F(R, t) = F_0(R) - \frac{\partial}{\partial R} n \int \Phi(|R - R'|) f(R', v', t) dR' dv'. \quad (5.8)$$

Теперь в правой части уравнения для одночастичного распределения имеем два “интеграла столкновений”. Первый определяется выражением:

$$I_{(v)}(R, v, t) = -\frac{1}{nm} \frac{\partial}{\partial v} \langle \delta F(R, y) \delta N(R, v, t) \rangle. \quad (5.9)$$

Расчет коррелятора в этой формуле в приближении парных столкновений и при условии ослабления начальных корреляций в пределах точек сплошной среды приводит к интегралу столкновений Больцмана (Климонтович, 1982, 1995). В результате первый интеграл столкновений в правой части уравнения (5.7) совпадает с интегралом столкновений Больцмана:

$$I_{(v)}(R, v, t) = I_B(R, v, t). \quad (5.10)$$

Интеграл столкновений Больцмана имеет очень сложную структуру. Его можно заменить более простым выражением, которое все же обладает такими же общими свойствами, что и интеграл столкновений Больцмана. Основанием служит то, что интеграл

Больцмана содержит детальную информацию о процессе столкновений пар частиц. Поскольку было осуществлено сглаживание по объему точки, содержащей много атомов, то заглаживаются и детали столкновений пар частиц.

В качестве модельного “интеграла столкновений”, характеризующего перераспределение частиц по скоростям можно использовать “интеграл столкновений” типа Фоккера - Планка теории нелинейного броуновского движения (Климонтович, 1994, 1995):

$$I_{(v)}(R, v, t) = \frac{\partial}{\partial v} \left[D_{(v)}(R, t) \frac{\partial f}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\tau} (v - u(R, t)) f \right]. \quad (5.11)$$

Здесь $D_{(v)}(R, t)$ — коэффициент диффузии в пространстве скоростей. Он связан с локальной температурой соотношением Эйнштейна:

$$D_{(v)}(R, t) = \frac{k_B T(R, t)}{\tau m} = \frac{n}{\tau \rho(R, t)} \int \frac{m (v - u(R, t))^2}{3} f(R, v, t) dv. \quad (5.12)$$

Средняя скорость связана с функцией распределения соотношением:

$$u(R, t) = \frac{n}{\rho(R, t)} \int v f(R, v, t) dv. \quad (5.13)$$

Из приведенных формул следует, что “интеграл столкновений” содержит лишь один параметр τ — среднее время свободного пробега.

Интеграл столкновений $I_{(v)}(R, v, t)$ обладает теми же свойствами, что и интеграл столкновений Больцмана:

$$I(R, t) = \int \phi(v) I_{(v)}(R, v, t) dv = 0, \quad \phi(v) = 1, v, v^2, \quad (5.14)$$

$$I(R, t) = \int \phi(v) I_{(v)}(R, v, t) dv \geq 0, \quad \phi(v) = -k_B \ln f(R, v, t). \quad (5.15)$$

Как и в кинетической теории Больцмана, “верхние свойства” используются при выводе уравнений гидродинамики, а “нижнее” — при доказательстве соответствующей H -теоремы.

Рассмотрим теперь выражение для второго “интеграла столкновений” в правой части уравнения (5.7). Оно имеет вид:

$$I_{(R)}(R, v, t) = -\frac{1}{\tau_{ph}} \left[f(R, v, t) - \tilde{f}(R, v, t) \right]. \quad (5.16)$$

Поскольку “ширина” функции сглаживания определяется размером “точки” L_{\min} , а характерным масштабом для функции распределения является длина свободного пробега, то в правой части последнего выражения возможно разложение по “физическому числу Кнудсена”

$$K_{ph} = \frac{L_{\min}}{l} \sim \frac{1}{\sqrt{N_{ph}}} \ll 1. \quad (5.17)$$

Оставляем при разложении лишь главные члены:

$$-\frac{1}{\tau_{ph}} \left[f(R, v, t) - \tilde{f}(R, v, t) \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{L_{\min}^2}{\tau_{ph}} \frac{\partial}{\partial R} f \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{b}{m} F f \right). \quad (5.18)$$

Примем во внимание соотношение (2.13), (2.14) входящих в него физически бесконечно малых масштабов L_{\min} и τ_{ph} :

$$\frac{L_{\min}^2}{\tau_{ph}} = \frac{l^2}{\tau} D = \tau \frac{k_B T}{\tau m} \equiv b \frac{k_B T}{\tau m}. \quad (5.19)$$

Здесь D — коэффициент пространственной диффузии. Он связан с подвижностью $b = \tau$ и средней температурой

$$T = \int T(R, t) \frac{dR}{V}. \quad (5.20)$$

В результате имеем следующее выражение:

$$I_{(R)}(R, v, t) = \frac{\partial}{\partial R} \left(D \frac{\partial}{\partial R} f \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{b}{m} F f \right). \quad (5.21)$$

D — один из трех кинетических коэффициентов: кинематической вязкости ν , температуропроводности χ и коэффициента самодиффузии D . Здесь и ниже предполагаем, что имеют место равенства:

$$\nu = \chi = D. \quad (5.22)$$

Чтобы учесть их различие, надо использовать более сложные функции сглаживания.

Запишем обобщенное кинетическое уравнение в явном виде:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial R} + F(R, t) \frac{\partial}{\partial v} \right) f(R, v, t) = \\ & \frac{\partial}{\partial v} \left[D_{(v)}(R, t) \frac{\partial f}{\partial v} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{\tau} (v - u(R, t)) f \right] + \\ & \frac{\partial}{\partial R} \left(D \frac{\partial}{\partial R} f \right) - \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{b}{m} F f \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Это уравнение описывает два релаксационных процесса. Первый из них характеризует релаксацию по скоростям, а второй — релаксацию в обычном пространстве. В результате в равновесном состоянии устанавливается распределение Максвелла-Больцмана.

Имеются, таким образом, два времени релаксации $\tau_{(v)}$ и $\tau_{(R)} \sim \tau_{(D)}$. Их отношение:

$$\frac{\tau_{(v)}}{\tau_{(R)}} \sim \frac{l}{v_T \tau_{(D)}} \sim \frac{l^2}{L^2} = (Kn)^2. \quad (5.24)$$

и, следовательно, пропорционально квадрату числа Кнудсена.

5.4 Уравнение баланса энтропии. H -теорема. Функционал Ляпунова

5.4.1 Уравнение баланса энтропии

При выводе уравнения баланса энтропии используем следующие граничные условия:

$$f(R, v, t)|_{v_i=\pm\infty} = 0, \quad f(R, v, t)|_{R_i=\pm\infty} = 0, \quad i = x, y, z \quad (5.25)$$

Первое условие означает, что вероятность бесконечно больших значений энергии равна нулю. Второе условие запрещает уход атомов на бесконечность. При этих условиях равен нулю на границе конвективный поток:

$$nm \int v f(R, v, t) dv|_{R_i=\pm\infty} = \rho u|_{R_i=\pm\infty} = 0. \quad (5.26)$$

Для замкнутой системы используем дополнительное условие:

$$\rho u|_S - D \frac{\partial \rho}{\partial n}|_S = 0, \quad F(R, t)|_S = 0. \quad (5.27)$$

Оно означает, что полный поток вещества через поверхность равен нулю. Равна нулю на поверхности и внешняя сила.

Вернемся к разделу, в котором сформулирована H -теорема Больцмана. Напомним статистическое определение энтропии

$$S(t) \equiv \int \frac{\rho(R, t)}{m} s(R, t) dR = - k_B n \int \ln(n f(R, v, t)) f(R, v, t) dR dv. \quad (5.28)$$

Здесь, как и при формулировке второго закона термодинамики для локального равновесия, использовано определение энтропии в расчете на одну частицу.

Из обобщенного кинетического уравнения при условии $F = 0$ следует уравнение баланса энтропии:

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\rho u - D \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) s \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(D \rho \frac{\partial s}{\partial R} \right) + \sigma(R, t). \quad (5.29)$$

Поток энтропии представляется теперь в виде суммы двух вкладов: конвективного и диффузионного. Первый пропорционален энтропии, а второй — градиенту энтропии:

$$j_{con} = \left(\rho u - D \frac{\partial \rho}{\partial R} \right) s, \quad j_{dif} = -D \rho \frac{\partial s}{\partial R}. \quad (5.30)$$

Через диффузионный вклад будет определен поток тепла.

Производство энтропии определяется выражением:

$$\sigma(R, t) = k_B n \int \left[D_{(v)} f \left(\frac{\partial}{\partial v} \ln \frac{f}{f_{loc}} \right)^2 + D f \left(\frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{f}{f_0} \right)^2 \right] dv \geq 0. \quad (5.31)$$

Оно представляется в виде суммы двух положительных вкладов. Первый из них определяется перераспределением по скоростям. В состоянии локального равновесия этот

вклад равен нулю. Второй же член обращается в нуль лишь при полном равновесии, когда функция f совпадает с распределением Максвелла f_0 . Оба вклада в производство энтропии пропорциональны соответствующим коэффициентам диффузии.

5.4.2 Локальное равновесие

В состоянии локального равновесия, когда $f = f_{loc}$ — локальное распределение Максвелла, производство энтропии определяется пространственным перераспределением атомов:

$$\sigma(R, t) = k_B \left[D\rho \left(\frac{\text{grad } \rho}{\rho} \right)^2 + \nu \frac{m\rho}{k_B T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right)^2 + \frac{3}{2} \rho \chi \left(\frac{\text{grad } T}{T} \right)^2 \right] \geq 0. \quad (5.32)$$

В отличие от соответствующего выражения теории Больцмана, производство энтропии представляется теперь суммой трех положительных вкладов. Они определяются, соответственно, самодиффузией (квадратом градиента плотности), вязким трением (квадратом производных скорости) и теплопроводностью (квадратом градиента температуры). Напомним, что рассматривается модель, для которой все три кинетических коэффициента равны: $D = \nu = \chi$.

Для медленных гидродинамических процессов давление практически постоянно. В этом случае из уравнения состояния следует связь градиентов плотности и температуры — $T \text{grad } \rho = \rho \text{grad } T$. При этом первый и третий члены в выражении (5.32) можно объединить. Результирующий вклад (с учетом равенства $\lambda = c_p \rho \chi$) совпадает с “температурным” вкладом в производство энтропии теории Больцмана.

Рассмотрим соответствие вкладов, которые определяются производными скорости. Из формул (4.22), (5.32) находим соответствие

$$\frac{\eta}{2T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial r_k} \right)^2 \Longleftrightarrow \frac{\eta}{T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right)^2. \quad (5.33)$$

Видно, что эти вклады не совпадают. Это объясняется следующим.

При переходе от уравнения Больцмана к уравнениям газовой динамики исходно тензор “вязких напряжений” был определен симметричным выражением по индексам ij . В первом приближении по числу Кнудсена тензор вязких напряжений π_{ij} остается, естественно, симметричным и определяется выражением (4.14). Аналогичное выражение вводится и в феноменологической гидродинамике (Ландау и Лифшиц, 1988).

Таким образом, симметрия тензора вязких напряжений, фактически, предопределяется выбором выражения (4.5) в качестве исходного. Из обобщенного кинетического уравнения следует иное определение тензора вязких напряжений:

$$\pi_{ij} = -\eta \frac{\partial u_i}{\partial R_j}. \quad (5.34)$$

Для несжимаемой жидкости это различие не является существенным, так как не сказывается на структуре уравнения Навье - Стокса. Для сжимаемой жидкости или газа оно оказывается заметным.

Из уравнения баланса энтропии с учетом приведенных граничных условий следует, что и для обобщенного кинетического уравнения при нулевой внешней силе справедлива H -теорема Больцмана:

$$\frac{d}{dt}S(t) = \frac{d}{dt} \int \rho(R, t)s(R, t)dR = \int \sigma(R, t)dR \geq 0. \quad (5.35)$$

Знак равенства отвечает равновесному состоянию.

5.5 Функционал Ляпунова

5.5.1 Замкнутая система

Для замкнутой системы здесь, как и для кинетического уравнения Больцмана, средняя кинетическая энергия в процессе эволюции сохраняется. Благодаря этому H -теореме Больцмана снова можно сформулировать как условие существования функционала Ляпунова $\Lambda_S = S_0 - S(t)$, который определяется разностью энтропий равновесного и неравновесного состояний. В принятых в этой главе обозначениях имеем:

$$\Lambda_S(t) = S_0 - S(t) = k_B n \int \ln \frac{f(R, v, t)}{f_0(v)} f(R, v, t) dR dv \geq 0, \quad (5.36)$$

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \frac{d}{dt} (S_0 - S(t)) = - \int \sigma(R, t) dR \leq 0. \quad (5.37)$$

Эти два противоположных неравенства и показывают, что введенная разность энтропий $\Lambda_S = S_0 - S(t)$ является функционалом Ляпунова. При этом первое неравенство есть следствие постоянства средней энергии в процессе эволюции к равновесному состоянию. Второе же выражает H -теорему Больцмана — в процесс эволюции к равновесному состоянию энтропия возрастает и достигает максимального значения в состоянии равновесия.

5.5.2 Незамкнутая система

Предположим, что внешняя сила отлична от нуля и является потенциальной. В этом случае средняя энергия в процессе эволюции не сохраняется, поэтому функционал Ляпунова определяется не разностью энтропий, а разностью соответствующих неравновесной $F(t)$ и равновесной F_0 свободных энергий:

$$\Lambda_F(t) = F(t) - F_0 = k_B T n \int \ln \frac{f(R, v, t)}{f_0(R, v)} f(R, v, t) dR dv \geq 0. \quad (5.38)$$

Чтобы найти временную производную этого функционала, используем граничное условие: полный поток вещества через границу равен нулю. Тогда

$$\frac{d\Lambda_F(t)}{dt} = \frac{d}{d}(F(t) - F_0) = -T \int \sigma(R, t) dR \leq 0. \quad (5.39)$$

Здесь использовано выражение (5.31) для производства энтропии. Однако, теперь в нем надо заменить распределения f_{loc} , f_0 на соответствующие распределения Максвелла - Больцмана.

Наряду с функционалом Ляпунова $\Lambda_F(t)$ для всей системы, можно использовать локальный функционал Ляпунова:

$$\Lambda_F(R, t) \equiv \frac{\rho(R, t)}{m} \lambda_F(R, t) = k_B T n \int \ln \frac{f(R, v, t)}{f_0(R, v)} f(R, v, t) dv. \quad (5.40)$$

С помощью обобщенного кинетического уравнения находим уравнение баланса для этого функционала:

$$\frac{\partial \rho \lambda_F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R} \left[\left(\rho u - D \frac{\partial \rho}{\partial R} - \frac{b}{m} F \rho \right) \lambda_F \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left(D \rho \frac{\partial \lambda_F}{\partial R} \right) - T \sigma(R, t). \quad (5.41)$$

Структура этого выражения подобна структуре уравнения баланса энтропии. Разница в том, что в потоке функционала Ляпунова имеется дополнительный член, пропорциональный силе, а в выражении для производства энтропии распределения Максвелла заменены на соответствующие распределения Максвелла - Больцмана.

Наличие функционала Ляпунова $\Lambda_F(t)$ открытой системы ($F \neq 0$) показывает, что состояние равновесия отвечает минимуму свободной энергии и является устойчивым. Поскольку в открытой системе средняя энергия в процессе временной эволюции меняется, нельзя для сравнения относительной степени упорядоченности напрямую использовать “энтропийный функционал Ляпунова” Λ_S . Для его использования надо произвести перенормировку состояний к заданному значению средней энергии. Только тогда возможно использовать критерий “ S — теорема” (Климонтович, Письма в ЖТФ, 1963, 1994; 1980, 1995).

5.6 Тепловой поток

5.6.1 Замкнутая система ($F = 0$)

В традиционной теории тепловым потоком называется вектор, связанный с функцией распределения соотношением (4.6), а также формулой (4.15), выражающей закон Фурье. Такой способ определения теплового потока, как уже отмечалось выше, не является оправданным с физической точки зрения.

При $F = 0$ мерой хаотичности служит энтропия, поэтому естественно выразить поток тепла через градиент энтропии:

$$q(R, t) = -D \frac{\rho}{m} T \frac{\partial s}{\partial R}, \quad \frac{\rho}{m} s = -k_B n \int \ln(n f(R, v, t)) f(R, v, t) dv. \quad (5.42)$$

В общем случае для определения локального потока тепла надо знать решение кинетического уравнения.

Расчет теплового потока существенно упрощается для состояния локального равновесия. В этом случае локальная энтропия и локальный тепловой поток определяются выражениями:

$$S(R, t) = \frac{\rho}{m} s = \rho \left[\frac{3}{2} \frac{k_B}{m} \left(\ln \frac{2\pi k_B T}{m} + 1 \right) - \frac{k_B}{m} \ln \frac{\rho}{m} \right], \quad (5.43)$$

$$q(R, t) = \frac{k_B}{m} D T \frac{\partial \rho}{\partial R} - c_V \frac{\rho}{m} \chi \frac{\partial T}{\partial R}, \quad c_V = \frac{3}{2} k_B, \quad D = \chi. \quad (5.44)$$

Таким образом, в состоянии локального равновесия для замкнутой системы тепловой поток определяется не только градиентом температуры, но и градиентом плотности.

Рассмотрим четыре частных случая приведенного общего выражения для теплового потока.

1. Изобарический процесс ($p = \text{const}$). С учетом уравнения состояния градиент плотности

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = -\frac{\rho}{T} \frac{\partial T}{\partial R}. \quad (5.45)$$

Таким образом, при изобарическом процессе градиент плотности направлен в сторону уменьшения температуры и

$$q(R, t) = -c_p \frac{\rho}{m} \chi \frac{\partial T}{\partial R}, \quad c_p = \frac{5}{2} k_B. \quad (5.46)$$

Это закон Фурье для изобарического процесса.

2. Изохорический процесс ($V = \text{const}$). Градиент плотности равен нулю и тепловой поток

$$q(R, t) = -c_V \frac{\rho}{m} \chi \frac{\partial T}{\partial R}, \quad c_V = \frac{3}{2} k_B. \quad (5.47)$$

Это закон Фурье для изохорического процесса. Тепловой поток при этом меньше, чем при изобарическом процессе.

3. Адиабатический процесс (энтропия $S = \text{const}$). Плотность и температура связаны в этом случае адиабатой

$$T \rho^{1-\gamma} = T \rho^{-2/3} = \text{const}, \quad \frac{1}{T} \frac{dT}{dR} = \frac{2}{3\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R}. \quad (5.48)$$

Отсюда следует, что вклад за счет градиента плотности полностью компенсирует вклад от градиента температуры и тепловой поток

$$q(R, t) = 0. \quad (5.49)$$

Таким образом, для локально-адиабатического процесса тепловой поток равен нулю в каждой точке системы.

4. Изотермический процесс ($T = 0$). Таким образом тепловой поток отличен от нуля и при постоянной температуре

$$q(R, t) = \frac{k_B}{m} DT \frac{\partial \rho}{\partial R}. \quad (5.50)$$

В общем случае тепловой поток направлен в сторону уменьшения локальной энтропии. При постоянной температуре направление уменьшения энтропии совпадает с направлением увеличения плотности. Для этого в область повышенной плотности надо переместить нагретое вещество и, тем самым создать поток тепла.

5.6.2 Тепловой поток во внешнем поле

Введем тепловой поток на примере пространственной диффузии во внешнем поле. Он выражается через диффузионную часть потока функционала Ляпунова (Климонтович, 1995):

$$q(R, t) = D \frac{\rho}{m} \frac{\partial \lambda_F}{\partial R} = k_B T D \frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial R} \ln \frac{f(R, t)}{f_0(R)}. \quad (5.51)$$

При малых отклонениях от равновесного состояния выражение для потока тепла можно представить в виде:

$$q_F(R, t) = k_B T D n \frac{\partial}{\partial R} (f(R, t) - f_0(R)). \quad (5.52)$$

Здесь состояние, к которому стремится система является пространственно неоднородным.

6 Единое кинетическое и гидродинамическое описание

6.1 Введение. Замечания к теории возмущений по числу Кнудсена

При традиционном переходе от кинетического уравнения Больцмана к уравнениям газовой динамики были выявлены противоречия:

1. Противоречие между теорией возмущений по малому параметру плотности $\varepsilon = nr_0^3$, которая приводит к кинетическому уравнению Больцмана, и теорией возмущений по числу Кнудсена $Kn = l/L = r_0/L\varepsilon$. Нулевому приближению по числу Кнудсена отвечает бесконечное значение параметра плотности и, следовательно, бесконечное число Рейнольдса, что невозможно в реальной гидродинамике.

Локальное распределение Максвелла может возникнуть и иным путем, не связанным с теорией возмущения по числу Кнудсена. Именно такая возможность и используется в теории, основанной на обобщенном распределении Больцмана.

2. Тепловой поток определяется вектором

$$q(R, t) = n \int \delta v \frac{m (\delta v)^2}{2} f(R, v, t) dv, \quad \delta v = v - u(R, t) \quad (6.1)$$

Из этого выражения в первом приближении теории возмущений для теплового потока следует закон Фурье. На основании второго закона термодинамики естественно ожидать, что тепловой поток пропорционален градиенту локальной энтропии.

3. Для газа коэффициент теплопроводности

$$\lambda = \rho C_p \chi \quad (6.2)$$

Таким образом, тепловой поток пропорционален теплоемкости при постоянном давлении. Однако, давление почти постоянно лишь при медленных - диффузионных, процессах. Напротив, при волновых процессах почти постоянной является энтропия, т.е. процесс близок к адиабатическому.

4. В основу определения тензора вязких напряжений в первом приближении по числу Кнудсена используется симметричный тензор

$$\pi_{ij}(R, t) = nm \int \left(\delta v_i \delta v_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} (\delta v)^2 \right) f(R, v, t) dv, \quad \pi_{ii}(R, t) = 0. \quad (6.3)$$

Этим уже предопределяется симметрия тензора вязких напряжений. Однако, например, для течений Пуазейля и Куэтта в плоском канале соответствующий тензор вязких напряжений не является симметричным.

При использовании обобщенного кинетического уравнения нет необходимости использовать теорию возмущений по числу Кнудсена. Для перехода к уравнениям газовой динамики достаточно лишь задать класс функций распределений вида:

$$f(R, v, t) = f(R, |v - u(R, t)|, t). \quad (6.4)$$

Важным примером функции этого класса является локальное распределение Максвелла (4.9). Оно характеризуется пятью гидродинамическими функциями $\rho(R, t)$, $u(R, t)$, $T(R, t)$. Для них с помощью обобщенного кинетического уравнения сразу (без использования теории возмущений по числу Кнудсена) следует замкнутая система гидродинамических уравнений с учетом диссипации. При этом, наряду с вязким трением и теплопроводностью, диссипация определяется и самодиффузией.

Диссипация в уравнениях гидродинамики есть следствие наличия в обобщенном кинетическом уравнении дополнительного, по сравнению с уравнением Больцмана, диффузионного "интеграла столкновений". При этом снимаются, в частности, вопросы, которые возникали (при определении вязкого трения и теплопроводности) при использовании, в качестве "стартовых", формул (4.5), (4.6) для функций $\pi_{ij}(R, t)$, $q(R, t)$. Эти выражения не играют теперь роли при построении уравнений гидродинамики на основе обобщенного кинетического уравнения. Действительно, при этом вывод основан на использовании локального распределения Максвелла, но тогда функции

$$\pi_{ij}(R, t) = 0, \quad q(R, t) = 0. \quad (6.5)$$

Таким образом, происхождение диссипации в уравнениях гидродинамики имеет теперь иную природу. Все три диссипативных процесса — следствие члена пространственной диффузии функции распределения в обобщенном кинетическом уравнении. В свою очередь, этот дополнительный “интеграл столкновений” возникает благодаря сглаживанию исходного динамического распределения по объему “точки” сплошной среды и использованию усреднения по соответствующему неравновесному ансамблю Гиббса.

Итак, основной причиной перечисленных недостатков традиционной теории служит пренебрежение атомарной структурой используемой модели сплошной среды как при кинетическом, так и гидродинамическом описании неравновесных процессов. Учет этой структуры приводит к обобщенному кинетическому уравнению, на основе которого возможно единое описание неравновесных процессов на кинетических и гидродинамических масштабах для широкого диапазона значений числа Кнудсена.

Сама же возможность сглаживания исходных динамических уравнений связана с наличием динамической неустойчивости движения атомов, при которой становится существенной роль неконтролируемых внешних воздействий. Тем самым в статистической теории неравновесных процессов проявляется конструктивная роль динамической неустойчивости движения.

6.2 Уравнения газовой динамики с учетом самодиффузии и подвижности заряженных частиц

Для перехода от обобщенного кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики задаем функцию распределения в виде локального распределения Максвелла. Опуская детали (см. Климонтович, 1992; 1995), приведем сразу окончательные уравнения и сравним их с уравнениями газовой динамики, полученными на основе уравнения Больцмана.

Уравнение непрерывности для функции ρ имеет теперь следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial R} = 0, \quad j = \rho u - D \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{b}{m} \rho F, \quad b = \tau. \quad (6.6)$$

Поток вещества в уравнении непрерывности определяется теперь суммой трех вкладов: конвективного, диффузионного и пропорционального подвижности частиц в силовом поле. Поток вещества отличен от нуля и при условии равенства нулю средней скорости гидродинамического движения. Относительная роль конвективного и диффузионного вкладов определяется “диффузионным числом Рейнольдса”

$$(Re) = \frac{uL}{D}. \quad (6.7)$$

Уравнение для плотности импульса может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i j_j)}{\partial R_j} = - \frac{\partial p}{\partial R_i} - \rho \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_j^2} + \frac{\rho}{m} F_i. \quad (6.8)$$

Отметим изменения в уравнении для плотности импульса.

1. Произошла замена

$$\frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial R_j} \rightarrow \frac{\partial(u_i j_j)}{\partial R_j}. \quad (6.9)$$

Это означает, что в динамической части потока импульса конвективный вклад в поток вещества ρu_j заменяется на полный поток с учетом самодиффузии и подвижности заряженных частиц.

2. Локальное давление определяется прежним выражением

$$p = \frac{\rho}{m} k_B T. \quad (6.10)$$

Однако, второй член правой части определяется теперь выражением для силы вязкого трения

$$-\frac{\partial \pi_{ij}}{\partial R_j} = \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial R^2}. \quad (6.11)$$

Это отличие исчезает, когда

$$\frac{\partial u_i}{\partial R_i} = 0. \quad (6.12)$$

При этом из уравнения непрерывности следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial R_i} = \frac{\partial}{\partial R_i} \left(D \frac{\partial \rho}{\partial R_i} - \frac{b}{m} F_i \right); \quad b = \tau. \quad (6.13)$$

и, следовательно, плотность меняется за счет диффузии и подвижности заряженных частиц.

Уравнение для плотности кинетической энергии имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial R_i} \left[j_i \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} k_B T p \right) + u_i p \right] = \\ = \rho \nu u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial R_j^2} + \frac{\rho}{m} (F u). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Полученные таким образом уравнения составляют замкнутую систему диссипативных уравнений газовой динамики.

Напомним, что вектор теплового потока q , не определяется теперь законом Фурье. При использовании обобщенного кинетического уравнения он пропорционален градиенту энтропии.

Приведем полученные уравнения газовой динамики к более удобной форме для функций $\rho(R, t)$, $u(R, t)$ и давления $p(R, t)$. Сравним их с соответствующими уравнениями, полученными на основе уравнения Больцмана. Уравнение непрерывности оставим неизменным. Уравнение же для плотности импульса с помощью уравнения непрерывности представим в виде уравнения для скорости:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{j}{\rho} \text{grad} \right) u = -\frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \Delta u + \frac{F}{m}. \quad (6.15)$$

Отличие от уравнения Навье-Стокса имеется в двух членах. Во втором члене левой части произошла замена скорости u на j/ρ . Поток вещества j определяется с учетом самодиффузии и подвижности. Тензор вязких напряжений определяется теперь более простым выражением. Для несжимаемой жидкости это уравнение совпадает с соответствующим уравнением Навье-Стокса.

Для давления получаем теперь следующее уравнение:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(\frac{j}{\rho} \text{grad} \right) p + \frac{5}{2} p \text{div } u = p \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{D}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial R} - \frac{b}{m} F \right] + \frac{2}{3} \rho \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right)^2 + \frac{2}{3} \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial R^2}, \quad \lambda = \frac{3k_B}{2m} \rho \chi = c_v \frac{\rho}{m} \chi. \quad (6.16)$$

Здесь имеются уже четыре отличия: в левой части скорость u заменена на j/ρ ; в правой части появился дополнительный член, определяемый самодиффузией и подвижностью; тензор вязких напряжений, как и в уравнении для скорости, определяется более простым выражением; коэффициент теплопроводности в последнем члене правой части определяется теперь теплоемкостью при постоянном объеме. Это связано с тем, что часть степеней свободы “забирает” теперь диффузионный член.

Итак, на основе обобщенного кинетического уравнения получены уравнения газовой динамики без использования теории возмущений по числу Кнудсена. Основное отличие от традиционных уравнений газовой динамики состоит в учете вклада самодиффузии и подвижности заряженных частиц.

В этом разделе уравнения газовой динамики были установлены на основе обобщенного кинетического уравнения при условии, что функция распределения имеет вид локального распределения Максвелла. В этом приближении решение уравнений газовой динамики дает полное описание неравновесных процессов в газах. Существенно, что вид уравнений газовой динамики остается неизменным и при использовании более широкого класса функций распределения $f(R, v, t) = f(R, |v - u(R, t)|, t)$. В этом случае, однако, пять моментов, которые определяются решением уравнений газовой динамики, недостаточны для восстановления функции распределения. Для ее определения необходимо обратиться к обобщенному кинетическому уравнению.

Для класса распределений вида $f(R, v, t) = f(R, |v - u(R, t)|, t)$ локальная температура и средняя скорость в кинетическом уравнении могут быть определены путем решения замкнутой системы уравнений газовой динамики. Тогда кинетическое уравнение становится линейным уравнением относительно функции распределения, так как в нем локальная температура и средняя скорость являются известными функциями координат и времени. Это можно проиллюстрировать на примере ударной волны (Климонтович, 1995).

6.3 Решение обобщенного кинетического уравнения для несжимаемой жидкости

Для перехода к уравнениям газовой динамики решение обобщенного кинетического уравнения задавалось в виде локального распределения Максвелла. Это значит, что функция распределения $f(R, v, t)$ задавалась пятью первыми моментами.

Наиболее простое приближение отвечает несжимаемой жидкости, когда функция распределения задается лишь гидродинамической скоростью $u(R, t)$ (тремя моментами). Плотность и температура в этом приближении постоянны, а сила $F = 0$. Проведем соответствующие упрощения в уравнениях газовой динамики.

Уравнение непрерывности в этом приближении принимает вид:

$$\operatorname{div} u = 0 \quad (6.17)$$

и, следовательно, поле скорости является вихревым: .

$$u = u^\perp, \quad \operatorname{div} u^\perp = 0. \quad (6.18)$$

С помощью уравнения (5.18)) найдем уравнение для вихревой компоненты скорости – уравнение Навье–Стокса:

$$\frac{\partial u^\perp}{\partial t} + ((u^\perp \operatorname{grad}) u^\perp)^\perp = - \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p_H \right)^\perp + \nu \Delta u^\perp, \quad \operatorname{div} u^\perp = 0. \quad (6.19)$$

Здесь выделены вихревая компонента силы, определяемая давлением p_H в несжимаемой жидкости. Уравнение для “гидродинамического (H) давления” p_H (Ландау и Лифшиц, 1986; Климонтович, 1995) имеет вид:

$$\Delta p_H = - \rho \operatorname{div}_R [(u^\perp \operatorname{grad}) u^\perp]_R \equiv - \rho \frac{\partial u_i^\perp}{\partial R_j} \frac{\partial u_j^\perp}{\partial R_i}. \quad (6.20)$$

Путем операции rot_R из уравнения (6.19) можно исключить гидродинамическое давление. В результате приходим к замкнутому уравнению для скорости.

Граничное условие к уравнению Навье - Стокса на твердых поверхностях определяется равенством $u^\perp = 0$. Оно выражает наличие молекулярного сцепления прилегающего слоя жидкости с твердой поверхностью.

Таким образом, уравнение Навье–Стокса содержит лишь “гидродинамическое давление” p_H . Оно, тем самым, является примером динамического диссипативного уравнения, аналогичного уравнению маятника с трением. Термодинамические свойства системы в уравнении Навье–Стокса не учитываются. Более того, основные термодинамические функции (внутренняя энергия, термодинамическое давление и энтропии) для несжимаемой жидкости не определены.

Из уравнения Навье–Стокса при условии замкнутости системы, когда поток вещества на бесконечности равен нулю, кинетическая энергия жидкости рассеивается и стремится к нулю (см. следующий раздел). В реальной же замкнутой системе, в процессе

временной эволюции происходит увеличение энтропии и устанавливается равновесное состояние, отвечающее максимуму энтропии.

Таким образом, приближение "несжимаемой жидкости" с физической точки зрения является слишком упрощенным. Покажем, что это приводит к противоречию уравнений баланса кинетической энергии системы и балансом энтропии или функционала Ляпунова.

6.4 Уравнения баланса энергии и энтропии "несжимаемой жидкости"

Вернемся к уравнениям газовой динамики, полученным на основе обобщенного кинетического уравнения. Соответствующее уравнение баланса энтропии определяется уравнением (5.29). В приближении локального равновесия выражение для производства энтропии определяется формулой (5.37).

Полная система уравнений газовой динамики описывает временную эволюцию как динамических характеристик (гидродинамической скорости и соответствующей кинетической энергии), так и термодинамических характеристик (плотности, давления, температуры, энтропии, свободной энергии).

Казалось бы, что с их помощью можно получить уравнения в приближении "несжимаемой жидкости". Это, однако, не так. Причина заключается в "половинчатости" уравнения Навье–Стокса — оно описывает эволюцию лишь гидродинамической скорости. Информация об временной эволюции термодинамических характеристик отсутствует. Они просто не фигурируют в уравнении Навье–Стокса. Такая половинчатость уравнения Навье–Стокса приводит к его противоречию со вторым законом термодинамики для рассматриваемой сплошной среды. Продемонстрируем такое противоречие на примере уравнений баланса кинетической энергии энтропии несжимаемой жидкости при условии замкнутости системы.

6.4.1 Уравнение баланса кинетической энергии несжимаемой жидкости

Запишем уравнение баланса для плотности кинетической энергии несжимаемой жидкости — при условиях $\rho = \text{const}$, $T = \text{const}$, $F = 0$. В качестве исходного используем уравнение Навье–Стокса (6.19). Опустим значок " \perp " и используем условие $\text{div}u=0$. Из него следует уравнение баланса кинетической энергии несжимаемой жидкости. Его можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho u^2}{2} + \frac{\partial}{\partial R_i} \left[u_i \left(\frac{\rho u^2}{2} + p - u_k u_{ik} \right) \right] = -\eta u_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial R_k} = -\frac{\eta}{2} u_{ik}^2. \quad (6.21)$$

Проведем интегрирование по всему объему жидкости в предположении отсутствия движения на бесконечности (на бесконечной поверхности скорость обращается в нуль!) Это соответствует принятым граничным условиям для функции распределения. Оно

использовалось при установлении уравнения баланса энтропии всей рассматриваемой системы. В результате получаем уравнение баланса в кинетической энергии систем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\rho u^2}{2} dR = - \frac{\eta}{2} \int u_{ik}^2 dR \leq 0. \quad (6.22)$$

Знак равенства отвечает условию полной диссипации – полного рассеяния запасенной в начальный момент кинетической энергии несжимаемой жидкости. В рамках этой модели нет информации об изменении термодинамического состояния системы.

Это проявляется, в частности, в том, что в приближении несжимаемой жидкости нарушается закон сохранения энергии рассматриваемой системы. Действительно, из уравнения баланса плотности энергии (4.4) при условии замкнутости, когда сила $F = 0$ и выполняются нулевые граничные условия на бесконечности, следует равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{\rho u^2}{2} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{m} k_B T \right) dR = 0. \quad (6.23)$$

Оно выражает закон сохранения полной энергии рассматриваемой системы при условии ее замкнутости. Это равенство для уравнений газовой динамики (при условии замкнутости) является точным и, следовательно, должно выполняться при всех значениях параметров.

С ним, однако, не согласуется равенство (6.22) – уравнение баланса полной энергии несжимаемой жидкости. Действительно, при постоянных значениях плотности и температуры второй член в левой части последнего равенства равен нулю и мы приходим к противоречию с уравнением (6.22).

Покажем теперь, что приближение несжимаемой жидкости противоречит и второму закону трмодинамики.

6.4.2 Уравнение баланса энтропии

Обратимся к уравнению баланса энтропии (5.29), установленному на основе обобщенного кинетического уравнения. Общее выражение для производства энтропии (5.30) справедливо как на кинетических, так и газодинамических масштабах. На газодинамическом этапе релаксации оно принимает вид (5.37):

$$\sigma(R, t) = \eta \frac{k_B}{m} \frac{m}{k_B T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right)^2 \geq 0. \quad (6.24)$$

В результате получаем следующее уравнение баланса для энтропии системы:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{m} s \right) dR = \eta \frac{k_B}{m} \int \frac{m}{k_B T} \left(\frac{\partial u_i}{\partial R_j} \right)^2 dR \equiv \frac{\eta k_B}{2m} \frac{m}{k_B T} \int u_{ij}^2 dR \geq 0. \quad (6.25)$$

Знак равенства отвечает равновесному состоянию, когда гидродинамическая скорость равна нулю.

Первый член под интегралом определяет плотность энтропии. Для несжимаемой жидкости, в силу постоянства плотности и температуры, энтропия является неопределенной постоянной величиной и, следовательно, временная производная равна нулю. Таким образом приближение несжимаемой жидкости несовместимо с термодинамикой.

Это противоречие снимается, если ослабить использованные выше требования, например, считать постоянной лишь плотность. В результате приходим к замкнутой системе уравнений для локальной температуры и гидродинамической скорости. Можно еще ослабить ограничения несжимаемой жидкости – учесть тепловое расширение. В результате приходим к уравнениям теории свободной конвекции – уравнениям А.Оberbeck, J.Boussinesq.

Изложенное дает основание предположить, что трудности доказательства существования решения уравнения Навье–Стокса, связаны с нарушением требований термодинамики необратимых процессов. При этом радикально меняется характер диссипативного процесса в системе. Это требует при доказательстве существования решения уравнения Навье–Стокса условий, существенно отличных от тех, которые используются при доказательстве существования решения обобщенного кинетического уравнения и, соответственно, полной системы уравнений газовой динамики.

6.5 Заключение

Для разреженного газа основным является кинетическое уравнение Больцмана, установленное в 1903 году. Больцман положил, фактически, в основу теории не модель системы атомов, а кинетическое уравнение для функции распределения координат и импульсов шестимерной сплошной среды. Однако, роль структуры сплошной среды не была выявлена. Это одна из причин трудностей, с которыми сталкивается кинетическая теория Больцмана. В частности не удастся доказать существование решения уравнения Больцмана на всех временах.

Определение и учет структуры сплошной среды позволили получить обобщенное кинетическое уравнение, для которого доказано существование решения.

Обобщенное кинетическое уравнение описывает два релаксационных процесса. Один обусловлен перераспределением атомов по скоростям. В результате устанавливается распределение Максвелла. Второй – определяет перераспределение в обычном пространстве и ведет при наличии внешней силы к установлению распределения Больцмана. Соотношение двух времен релаксации зависит от отношения длины свободного пробега к характерному масштабу задачи.

Обобщенному кинетическому уравнению отвечает уравнение баланса энтропии и соответствующее уравнение баланса для функционала Ляпунова. Часть выражения для потока энтропии определяется диффузией энтропии. Это позволяет дать новое и более общее определение вектора теплового потока.

На основе обобщенного кинетического уравнения возможно единое описание как на

кинетических так и на газодинамических масштабах. Благодаря этому переход от кинетического уравнения к уравнениям газовой динамики осуществляется без использования теории возмущений по числу Кнудсена.

Полученные таким путем уравнения газовой динамики описывают три диссипативных процесса: самодиффузию, вязкое трение и теплопроводность.

Для обобщенного кинетического уравнения доказано существование решения. Это дает основание предполагать существование глобального решения и для полной системы уравнений газовой динамики. Существование уравнения баланса энтропии – существование функционала Ляпунова, для полной системы уравнений газовой динамики обеспечивает выполнение второго закона термодинамики при временной эволюции к равновесному состоянию замкнутой системы.

Ситуация существенно меняется при переходе от полной системы уравнений газовой динамики к уравнению Навье–Стокса несжимаемой жидкости. При этом нарушаются как закон сохранения полной энергии, так и уравнение баланса энтропии системы, которое выражает второй закон термодинамики. Это, по-видимому, и вызывает трудности доказательства существования глобального решения трехмерного уравнения Навье – Стокса.

Список литературы

- [1] Белоцерковский О.Н. (ред) Этюды о турбулентности. "Наука" Москва, 1994
- [2] Климонтович Ю.Л. Статистическая физика, гл.23. ("Наука", Москва, 1982; Harwood Academic publishers, New York, 1986).
- [3] Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса ("Наука, Москва, 1990; Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1991).
- [4] Klimontovich Yu.L. *Is turbulent motion chaos or order? Is the hydrodynamic or kinetic description of turbulent motiom more realistic?* (Physica B 228 (1996) 51).
- [5] Климонтович Ю.Л. Статистическая теория открытых систем (Т. I "Янус", Москва, 1995; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995; Т. II "Янус", Москва, 1999; Т. III, "Янус", Москва, 2001).
- [6] Lesieur M. *Turbulence in Fluids*. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1990).