К математической теории осязания

Винокуров В.А. *, Садовничий В.А.†

Аннотация

Предложен математический формализм для описания систем искусственного осязания. Сформулированы математические модели процессов снятия, обработки и интерпретации осязательной информации. Поставлены задачи кодирования и воспроизведения осязательной информации и предложены алгоритмы их решения. Рассмотрена задача интерпретации осязательной информации и изучена соответствующая простейшая математическая модель. В рамках этой простейшей модели получено строгое решение задачи интерпретации в случае конечных деформаций и показана недостаточность линейного подхода (закон Гука) для описания задач интерпретации осязательных данных.

Статья содержит первое в отечественной литературе развёрнутое изложение математических моделей осязания. В ней впервые предложено решение задачи построения оптимального алгоритма линейного кодирования функции многих переменных в форме математической гипотезы. Статья представляет интерес для математиков, механиков, медиков и инженеров, занимающихся конструированием и использованием систем искусственного осязания.

Введение

Человек наделён пятью чувствами: зрение, слух, осязание, обоняние, вкус. Из этих пяти чувств в современном мире наибольшую информацию приносят зрение и слух. Именно для информации, даваемой этими двумя чувствами, человечество на сегодня добилось поразительных успехов в создании искусственных систем её записи, хранения, обработки, передачи и воспроизведения. Сидя перед телевизором или компьютером в Москве, современный человек может наблюдать в реальном времени за событиями на улице Санкт-Петербурга или общаться с коллегами на космической станции. Абонент мобильной связи, находясь в лесу, может беседовать с другом, находящимся на другом конце земного шара. Более того, средства записи сделали визуально и аудио доступными события прошлого — будь то события личной жизни или космический полёт Гагарина. Т.е. системы искусственного зрения и слуха позволяют нам не только общаться с другими людьми на расстоянии, но и путешествовать во времени.

Но иногда, при виде красивой картины возникает интуитивное желание потрогать рукой какие-то её элементы. Но сегодня это желание не осуществимо, ибо системы искусственного осязания не достигли ещё такого уровня развития как системы искусственного слуха и зрения.

*Электронная почта автора: "vinokur@narod.ru", сайт автора: "http://vinokur.narod.ru".

Однако в последнее десятилетие ряд лабораторий (см., например, [1, 2]) и фирм (см., например, [3, 4, 5, 6]) начали разработку и производство компонент систем искусственного осязания (краткая аббревиатура СИО). Основные приложения этих разработок: медицина, оборудование для слепых, оборудование для систем безопасности. Представляется чрезвычайно перспективным использование систем искусственного осязания в соединении с Интернетом, что может привести к взрывному росту сфер применения и числа пользователей этих систем.

Правительством Российской Федерации научное руководство программой создания первой отечественной системы искусственного осязания возложено в 2007 году на Институт математических исследований сложных систем МГУ им. М.В. Ломоносова. В российской программе создания СИО участвуют ряд подразделений МГУ им. М.В. Ломоносова, другие университеты России, государственные и частные предприятия. Первые экземпляры искусственных тактильных механорецепторов уже созданы и получили ряд дипломов на российских и международных выставках. Основой координации работ многочисленных научных и производственных коллективов, участвующих в проекте, является математическое описание СИО, дающее общий точный язык разработки. Именно на строгом математическом языке формулируются количественные требования к элементам системы, рассчитываются характеристики и проектируются конструкции этих элементов.

В настоящей работе мы формулируем математическое описание СИО (раздел 1) и в разделах 2-4 применяем это описание к математическому моделированию конструкций и алгоритмов работы при записи, кодировании, декодировании и интерпретации осязательной информации.

Работа выполнена при поддержке ГК № 02.522.11.2008 от 18 мая 2007 года.

1 Математическое описание работы тактильного механорецептора

Тактильный механорецептор получает информацию о механических свойствах тканей человека при соприкосновении его внешней рабочей поверхности с изучаемым объектом. Внешняя рабочая поверхность механорецептора представляет собой поверхность упругого деформируемого тела — рабочего тела механорецептора. При работе прибора фиксируются давления, возникающие в рабочем теле механорецептора, а также фиксируются смещения точек поверхности рабочего тела. Результатом работы прибора в идеальном случае являются две величины: скалярное поле давлений на рабочей поверхности механорецептора и векторное поле смещений точек рабочей поверхности механорецептора. Далее мы приведем математическое описание работы механорецептора при дополнительном предположении малости деформаций рабочей поверхности. А именно, мы предположим, что поверхность соприкосновений имеет поле нормалей, мало отличающееся от постоянной. Т.е. мы предполагаем, что смещение точек рабочей поверхности происходят, в основном, по нормали, так что смещениями в перпендикулярном направлении можно пренебречь.

1.1 Описание взаимодействия рабочей поверхности механорецептора с изучаемым объектом

1.1.1 Основные величины

В начальном состоянии рабочая поверхность механорецептора представляет из себя плоскую площадку (обычно круг). Выберем декартову ортогональную систему координат с осями x и y в плоскости начального положения рабочей поверхности и с осью z по направлению нормали к ней. При работе прибора рабочее тело перемещается параллельно вдоль оси z на расстояние $h \in [0, H] \equiv I$, где число $H \in \mathbf{R}_+$ — максимальный сдвиг рабочего тела. Введем следующие обозначения. Через $B \in \mathbf{R}^2$ обозначим базовую область, а именно, область плоскости, которую занимает рабочая поверхность механорецептора в исходном (не сдвинутом) положении. Величина $h \in [0, H]$ далее обозначает величину сдвига рабочего тела вдоль оси z. Поверхность изучаемого объекта в исходном (не деформированном) состоянии задается уравнением $z = f(x, y),\ (x, y) \in B$. После сдвига на расстояние h в результате контакта с объектом поверхность рабочего тела приобретает новую форму. Эту новую поверхность мы задаем уравнением

$$z' = g(h, (x, y)),\ (x, y) \in B, \tag{1}$$

в сдвинутой на величину h декартовой ортогональной системе координат с новыми переменными

$$z' = z + h, x' = x, y' = y. \tag{2}$$

В исходной системе координат новая поверхность рабочего тела запишется уравнением

$$z = a(h, (x, y)), (x, y) \in B, \tag{3}$$

где

$$a(h, (x, y)) = g(h, (x, y)) - h. \tag{4}$$

В частности, по определению

$$\forall (x, y) \in B \ \Big| \ g(0, (x, y)) = a(0, (x, y)) = 0. \tag{5}$$

Функции f и g мы далее предполагаем непрерывными.

При каждом $h \in [0, H]$ определим множество взаимодействия

$$D(h) \equiv \{(x, y) \in B \ \Big| \ g(h, (x, y)) > 0\}, \tag{6}$$

т.е. подмножество тех точек базовой области B, в которых есть положительные деформации поверхности рабочего тела. По построению множество $D(0) = \emptyset$. Введем для точки $(x, y) \in B$ число

$$b(x, y) \equiv \inf\{h \in I \ \Big| \ g(h, (x, y)) > 0\}, \tag{7}$$

т.е. нижнюю границу всех тех сдвигов h, при которых происходит деформация поверхности объекта в точке $(x, y) \in B$. Функция $b = b(x, y)$ определена на множестве точек $F \equiv \cup_{h \in I} D(h)$, в которых происходила деформация поверхности объекта. Только на подмножестве $F \subset B$ мы изучаем механические свойства объекта. Так что далее мы предположим, что функция f определена на подобласти $F \subset B$. Функция $f(x,y)$ выражается через измеренную функцию $b(x,y)$ по формуле

$$f(x,y) = -b(x,y), (x,y) \in F. \tag{8}$$

В наших предположениях поверхность деформируемого объекта при $(x,y) \in D(h)$ в сдвинутой системе координат будет задаваться уравнением $z' = g(h,(x,y))$. В исходной системе координат поверхность деформируемого объекта будет задаваться «склеенной» функцией

$$f(h,(x,y)) = \begin{cases} a(h,(x,y)), & (x,y) \in D(h); \\ f(x,y), & (x,y) \in B \setminus D(h). \end{cases} \tag{9}$$

Введённые величины позволяют нам записать смещения (деформации) точек поверхности объекта при заданном сдвиге h в следующем виде:

$$\operatorname{def}(h,(x,y)) = f(x,y) - f(h,(x,y)), (x,y) \in F. \tag{10}$$

1.1.2 Результаты измерений

В результате измерений мы получили следующие два семейства скалярных полей на плоскости, занумерованных индексом $h \in I$: поле давлений $p = p(h,(x,y)), (x,y) \in B$; поле смещений поверхности объекта $\operatorname{def}(h,(x,y)), (x,y) \in F$. В процессе обработки мы также получили форму поверхности объекта, представляемую функцией $z = f(x,y), (x,y) \in F$, которую можно также передавать далее для обработки и интерпретации.

1.2 Свойства рабочего тела

Итак, в результате измерений мы получаем в идеальной ситуации два семейства скалярных полей: скалярное поле давлений и скалярное поле смещений. Однако в модели механорецептора, используемой нами сегодня, измеряется только поле давлений, а поле смещений должно быть получено математической обработкой из измеренного поля давлений по известным характеристикам рабочего тела механорецептора. Будем предполагать, что существует оператор механорецептора как отображение:

$$A : C(I \times B; \mathbf{R}) \to C(I \times B; \mathbf{R}), \tag{11}$$

составляющее каждому семейству давлений семейство смещений. Оператор механорецептора назовем однородным, если существует такой оператор

$$A_o : C(B; \mathbf{R}) \to C(B; \mathbf{R}), \tag{12}$$

что справедливо представление

$$\forall \varphi \in C(I \times B; \mathbf{R}) \ \forall h \in I \ \Big| \ N_h A \varphi = A_o N_h \varphi, \tag{13}$$

где $N_r : C(I \times B; \mathbf{R}) \to C(B; \mathbf{R})$, $r \in I$, есть линейный непрерывный оператор сужения, сопоставляющей непрерывной функции $f(h, (x, y))$ от переменных $h \in I$ и $(x, y) \in B$ непрерывную функцию $(N_r\varphi)(x, y)$ переменной (x, y), полученную фиксацией аргумента $h = r$.

Простейшим однородным оператором механорецептора является *оператор Гука*, когда существует функция $k \in C(B; \mathbf{R})$ такая, что

$$\forall \varphi \in C(I \times B; \mathbf{R})\ \forall h \in I\ \forall (x, y) \in B\ \Big|\ (A\varphi)(h, (x, y)) = k(x, y) \cdot \varphi(h, (x, y)). \tag{14}$$

Функцию $k \in C(B; \mathbf{R})$ из соотношения (14) назовём *аппаратной функцией*. Оператор Гука назовем *однородным*, если функция k из соотношения (14) является постоянной

$$k(x, y) = Const = K. \tag{15}$$

В этом случае постоянную K назовём *упругой постоянной* механорецептора.

1.3 Дискретизация

1.3.1 Дискретизация по сдвигу

Мы рассмотрели идеализированную модель процедуры измерений с помощью тактильного механорецептора, в которой результатом измерений являются две непрерывные вещественные функции трёх вещественных переменных h, x, y: $p = p(h, (x, y))$, $g(h, (x, y))$, — определённые на произведении $I \times B$. Однако при реальной регистрации сигналов и вводе в компьютер проводится дискретизация сигнала. А именно, величина сдвига пробегает не весь непрерывный интервал $[0, H]$, а принимает лишь конечное число значений $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots h_n = H$, например, при перемещении с постоянным шагом $s \in [0, H]$ полагают величины сдвигов равными $h_j = j \cdot s$, $j \in \overline{1, m}$, где величина шага $s = \frac{H}{m}$ и m — некоторое натуральное число.

1.3.2 Дискретизация по области B

Проводится дискретизация и по переменной $(x, y) \in B$, но она может иметь более сложный характер. В нашем приборе n каналов измерения давлений в n полостях рабочего тела выдают при каждом сдвиге n значений давлений $p_1, p_2, \ldots p_n$. В простейшей линейной модели дадим следующую интерпретацию этим n величинам. Выделим n подобластей $P_1, P_2, \ldots P_n$ области B и определим величину p_i, где $i = 1, 2, \ldots n$, как среднее значение давления по подобласти P_i, т.е.

$$p_i(h) = \frac{\int_{P_i} p(h, (x, y))\, dS}{S(P_i)}, \ i \in \overline{1, n}. \tag{16}$$

Здесь $S(P_i)$ — площадь i-той подобласти. В качестве измеряемых величин мы получаем, при фиксированном значении сдвига h, значения n линейных функционалов вида (16) от непрерывной функции $p = p(h, (x, y))$ аргумента $(x, y) \in B$ при фиксированном аргументе $h \in I$.

В результате дискретизации мы вместо непрерывной вещественнозначной функции $p = p(h, (x, y))$ трёх вещественных переменных, определенной на произведении $I \times B$, получаем лишь $m \times n$ значений $p_i(h_j)$, $i \in \overline{1, n}$, $j \in \overline{1, m}$, линейных функционалов вида (16) от этой функции. Первая естественная математическая задача — описание возможной точности восстановления непрерывной скалярной функции, определённой на множестве $I \times B$, по значениям $m \times n$ линейных функционалов $p_i(h_j)$ от неё. Эта задача сначала должна быть рассмотрена на слое $h = Const$ в двумерном варианте, как задача о восстановлении функции двух переменных из некоторого класса, заданной в круге, по известным (возможно с ошибкой) значениям n линейных функционалов вида (16) — средних по подобластям от неё.

1.3.3 Оптимизация переходов от непрерывного к дискретному представлению векторного поля и наоборот

Итак, при передаче в компьютер и при хранении информации мы от непрерывной вещественнозначной функции, определённой на множестве $I \times B$, переходим к некоторому кодированию этой функции с помощью конечного набора чисел. При последующем воспроизведении этого векторного поля в конечном устройстве мы должны по полученному набору чисел снова с некоторой точностью воспроизвести непрерывное векторное поле. Здесь возникает две задачи. Первая задача — определить оптимальные процедуры кодирования и воспроизведения. Вторая задача — сконструировать аппаратно независимую кодировку скалярного поля и предложить аппаратно независимый стандарт передачи осязательных данных.

1.4 Получение характеристик механических свойств объекта

Итак, для описания свойств объекта мы получили две скалярные функции: поле давлений p и поле смещений def. Кроме того, мы получили форму объекта до деформации — функция f. Полученные данные должны быть использованы для восстановления механических свойств материала объекта в точке $(x, y) \in F$. В фиксированной точке $(x, y) \in F$ мы имеем две функции переменной h: величину смещения поверхности — функция $\mathrm{def}(h, (x, y))$ и величину давления — функции $p(h, (x, y))$. Предполагая материал слоистым, мы приходим к одномерной математической задаче о восстановлении свойств слоёв по известной величине деформации и приложенной силе. В зависимости от модели деформируемой среды в разделе 4.4.1 будут получены соотношения, связывающие распределение механических характеристик по слоям с известными функциями $p(h, (x, y))$ и $\mathrm{def}(h, (x, y))$.

2 Расчёт характеристик рабочего тела тактильного механорецептора

2.1 Постановка задачи

Рассматривается тактильный механорецептор, чувствительным элементом которого является упругое деформируемое рабочее тело в форме кругового цилиндра радиуса r и высотой l. Внутри рабочего тела сделано n цилиндрических полостей, идущих от верхнего основания рабочего тела к нижнему. Функцией этих полостей является передача давления от нижней поверхности рабочего тела, деформирующейся при соприкосновении с изучаемым объектом, к тензодатчикам, преобразующим изменение давления в соответствующие электрические сигналы. Мы рассматриваем вопрос о конструировании рабочего тела по заданным геометрическим размерам изучаемого объекта и диапазону допустимых давлений на его поверхности.

2.2 Основные обозначения

Итак, через l мы обозначаем высоту цилиндра рабочего тела, через r — радиус его основания, через E — модуль Юнга упругого материала, из которого состоит рабочее тело. Ввиду малости диаметра полостей, передающих давление, по отношению к диаметру самого цилиндра рабочего тела, мы на этом этапе моделирования полагаем рабочее тело однородным и изотропным. Через Δl_m мы обозначаем максимальное отклонение вдоль оси цилиндра точек рабочей поверхности цилиндра при соприкосновении с изучаемым объектом. Через p_m мы обозначаем максимальное давление на поверхности рабочего тела, а через F_m — максимальную силу, действующую на изучаемый объект. По определению верно неравенство

$$p_m \geq \frac{F_m}{\pi r^2}, \tag{17}$$

ибо, вообще говоря, не вся нижняя поверхность рабочего тела соприкасается с изучаемым объектом. Через

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \tag{18}$$

мы обозначаем величину относительной деформации цилиндра рабочего тела.

2.3 Максимальные деформации и давления

Для того, чтобы рецептор мог измерять геометрические размеры объекта, содержащего элементы, возвышающиеся на расстояние Δl над основной поверхностью объекта, необходимо, чтобы геометрическая величина деформации рабочего тела по оси z была не менее Δl. Через p_m обозначим значение максимально допустимого давления на данный объект. Давление p и относительное удлинение ε связаны законом Гука

$$p = E\varepsilon. \tag{19}$$

Подставляя в формулу (19) максимальное значение давления p_m и относительного удлинения ε_m, получаем выражение для модуля Юнга рабочего тела

$$E = \frac{p_m}{\varepsilon_m}, \tag{20}$$

через заданные предельные значения величин допустимого максимального давления на объект $p_m\varepsilon$ и максимальной относительной деформации рабочего тела ε_m.

2.4 Пример 1

Пусть радиус цилиндра $r = 1$ см, максимально допустимая сила $F_m = 20$ Н максимальная деформация $\Delta l = 3$ мм. В этом случае

$$p_m = \frac{F_m}{\pi r^2} = \frac{20 \text{ Н}}{\pi 10^{-4} \text{ м}^2} = \frac{2}{\pi} 10^5 \text{ Па} = 0,64 \cdot 10^5 \text{ Па}. \tag{21}$$

Для того, чтобы деформация подчинялась линейному закону, ограничим максимальную относительную деформацию величиной

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}. \tag{22}$$

Тогда

$$l = \frac{\Delta l_m}{\varepsilon_m} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ м}}{\frac{1}{3}} = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 9 \text{ мм}. \tag{23}$$

Материал рабочего тела должен согласно формуле (20) иметь модуль Юнга

$$E = \frac{\frac{2}{\pi} 10^5 \text{ Па}}{\frac{1}{3}} = \frac{6}{\pi} \cdot 10^5 \text{ Па} \simeq 2 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,2 \text{ МПа}.$$

Близким модулем Юнга обладает вспененный полиэтилен

$$E = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,25 \text{ МПа}.$$

Резина обладает модулем Юнга

$$E = 2,39 \text{ МПа}.$$

3 Кодирование

3.1 О задаче оптимального кодирования скалярного поля в ограниченной области

Мы рассматриваем в этом разделе простейшую часть проблемы кодирования осязательной информации, а именно, — кодирование одного кадра, полученного при фиксированной величине сдвига h. Кодирование семейства полей давлений и смещений аналогично кодированию видеофильмов и представляет собой более сложную, но достаточно глубоко изученную проблему, которую мы на данном этапе не обсуждаем.

Итак, рассматривается вещественная непрерывная функция f, заданная в ограниченной замкнутой области $B \subset \mathbf{R}^2$. Например, область B есть круг радиуса R с центром в начале координат. Задан вектор значений (возможно с погрешностью) n линейных непрерывных функционалов от функции f. Требуется восстановить функцию f и провести её кодирование, т.е. запись информации о функции в файл некоторого формата. Требования к кодированию: минимальный объём файла и максимальная информация о функции с максимальной точностью.

Для приближённого представления непрерывной функции с помощью конечного набора чисел могут быть использованы следующие методы:

1) ряды Фурье, ряды по собственным функциям линейных операторов;

2) полиномиальная интерполяция;

3) сплайны;

4) вейвлеты;

5) поточечное представление (растр);

6) специальные методы.

При выборе метода представления нужно учитывать его "технологические" качества: экономичность, точность, простота, интуитивная прозрачность описания и использования. Для будущего развития СИО важен выбор промежуточного формата хранения информации о кадре в компьютере — аппаратно не зависимого и экономичного. В качестве первого такого формата, де-факто уже используемого в МГУ им. М.В. Ломоносова, мы рассмотрим формат, основанный на методе выделенных точек.

3.2 Операторы кодирования и декодирования (восстановления)

Поскольку с математической точки зрения задача о построении операторов кодирования и декодирования ставится аналогичным образом для произвольной размерности области B, далее до раздела 3.5 включительно мы наряду со случаем $B \subset \mathbf{R}^2$ допускаем случай, когда $B \subset \mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$, т.е. когда B — замкнутое ограниченное подмножество k-мерного пространства $\mathbf{R}^k$. Пусть $C(B)$ — банахово пространство непрерывных вещественных функций, элементами которого являются непрерывные отображения $f : B \to \mathbf{R}$. Нормой элемента $f \in C(B)$ называется величина $\|f\| \equiv \sup\limits_{\vec{r} \in B} |f(\vec{r})|$. Под кодированием мы понимаем запись информации о функции f в виде n чисел, а под декодированием восстановление с некоторой погрешностью исходной функции f по этим n числам. Формализуем эти рассуждения в виде следующих определений.

Определение 1. *Отображение $K : C(B) \to \mathbf{R}^n$ назовём оператором кодирования.*

Определение 2. *Отображение $D : \mathbf{R}^n \to C(B)$ назовём оператором декодирования (восстановления).*

Естественное пожелание — возможность полного восстановления функции по результатам кодирования, т.е. по числовому вектору $\xi = K(f) \in \mathbf{R}^n$. Но в силу бесконечномерности банахова пространства непрерывных функций $C(B)$ это, вообще говоря, невозможно.

Теорема 1. *Пусть $K : C(B) \to \mathbf{R}^n$ — линейное непрерывное отображение, тогда существует непрерывная функция f такая, что $K(f) = 0$ и $\|f\| = 1$.*

Итак, линейный непрерывный оператор кодирования переводит в ноль как нулевую функцию, так и некоторую непрерывную функцию f с нормой единица и функцию $f' = -f$. Какой бы элемент $g \in C(B)$ мы не взяли в качестве образа $g = D(0)$ или ошибка $\|f - g\|$ или ошибка $\|f' - g\|$ будут не менее единицы. Мы видим, что требование идеального восстановления

$$f = D(K(f)) \tag{24}$$

в силу теоремы 1 в случае линейного непрерывного оператора кодирования не может быть выполнено для каждой непрерывной функции $f \in C(B)$.

Из теоремы 1 вытекает, что для функции $q = \lambda f$, $\lambda \in \mathbf{R}_+$, норма разности $\|q - D(K(q))\| = \|q - D(0)\| \geq \|q\| - \|D(0)\| = \lambda - \|D(0)\|$ может быть сколь угодно велика при $\lambda \to \infty$. Где же выход? Для корректной постановки задач кодирования и декодирования мы:
1) ограничимся вместо множества всех непрерывных функций $C(B)$ некоторым его подмножеством $G \subset C(B)$;
2) будем добиваться уменьшения разности $f - D(K(f))$ на этом подмножестве G функций.
Далее мы рассматриваем подмножество функций $G = \mathrm{Lip}(B, M) \subset C(B)$, удовлетворяющих условию Липшица с заданной константой Липшица $M > 0$.

3.3 Описание формата хранения осязательной информации в методе выделенных точек (МВТ)

В методе выделенных точек задаются:

1) натуральное число n;

2) множество $T \equiv \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots \vec{r}_n\} \subset B$ из n точек области B, далее называемое "сеткой".

Далее записываются m кадров. Данные одного кадра:

3) величина сдвига h_i, $i \in \overline{1, m}$;

4) n значений поля давлений в точках множества T;

5) n значений поля смещений в точках множества T.

Осязательная информация хранится и передаётся в виде файла с данными 1)-5).

Определение 3. *Оператором кодирования метода выделенных точек называется отображение* $V : C(B) \to \mathbf{R}^n$, *сопоставляющее непрерывной функции* $f \in C(B)$ *вектор* $\xi \in \mathbf{R}^n$ *её числовых значений в точках сетки* T, *т.е. если* $\xi = V(f)$, *то* $\xi_i = f(\vec{r}_i)$, $i \in \overline{1, n}$.

Оператор кодирования метода выделенных точек линеен и непрерывен.

При использовании МВТ решается два основных класса задач. На входе (кодирование) — задача о переработке измеренных величин в данные вида 1)-5), т.е. для каждого кадра решается задача о вычислении значений поля давлений в точках множества T по значениям непосредственно измеряемых величин, например, по значениям n линейных функционалов вида (16), и задача о вычислении значений поля смещений в точках множества T по значениям непосредственно измеряемых величин. На выходе (декодирование) решается задача о восстановлении непрерывного поля давлений и непрерывного поля смещений по их значениям в n точках множества T.

Использование МВТ опирается на решение следующих математических задач.

3.3.1 Нахождение погрешности восстановления функции заданного функционального класса по известным её значениям в точках сетки T.

3.3.2 Оптимальный выбор множества T.

3.3.3 Построение метода кодирования, оптимального по точности и быстродействию.

3.3.4 Построение оптимального метода восстановления (интерполяции) функции из заданного класса по её значениям в точках сетки T.

Ключевым моментом при оптимизации МВТ является решение задачи 3.3.1, т.е. построение оценки погрешности восстановления функции заданного класса по её значениям в точках сетки T. При выборе функционального класса следует учитывать особенности работы тактильного механорецептора. А именно, при малых начальных сдвигах h соприкосновение поверхности рабочего тела с объектом происходит только по части базовой области B. В этой ситуации функции $p(h, \vec{r})$ и $g(h, \vec{r})$, $\vec{r} \equiv (x, y) \in B$, равны нулю на существенной части области B и мы не можем требовать непрерывности их частных производных. Таким образом, классы непрерывно дифференцируемых функций не соответствуют нашей задаче. В связи с этим далее мы будем использовать в нашей модели класс функций, удовлетворяющих условию Липшица.

Фиксируем положительное число M. Определим следующее множество $\mathrm{Lip}(B, M)$ непрерывных вещественных отображений $f : B \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих условию Липшица

$$\forall \vec{r}_1 \in B \; \forall \vec{r}_2 \in B \;\Big|\; |f(\vec{r}_1) - f(\vec{r}_2)| \le M \cdot |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|. \tag{25}$$

3.4 Оценка ошибки МВТ в липшицевом классе $\mathrm{Lip}(B, M)$ при точном задании значений функции на сетке

Итак, $B \subset \mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$, — замкнутое ограниченное множество и $T = \{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_n\} \subset B$ — конечное подмножество из n точек множества B — "сетка". Сетку T мы можем рассматривать как как элемент множества B^n, $T \in B^n$. Введём "дистанцию" от сетки T до множества B:

$$\operatorname{dist}(T,B) \equiv \sup_{\vec{r}\in B} \min_{i\in\overline{1,n}} |\vec{r}-\vec{r}_i|, \tag{26}$$

т.е. наибольшее возможное расстояние точек множества B до сетки T. Дистанция $\operatorname{dist}(T,B)$ при фиксированном множестве B есть непрерывная функция элемента $T \in B^n$. Введём "оптимальную дистанцию"

$$\operatorname{opdist}(n,B) \equiv \inf_{T\in B^n} \operatorname{dist}(T,B). \tag{27}$$

Так как множество B^n — компакт, непрерывная функция $\operatorname{dist}(T,B)$ аргумента $T \in B^n$ достигает своей точной нижней грани в некоторой точке $T_o \in B^n$. Точку T_o мы называем "оптимальной сеткой". В этой точке

$$\operatorname{dist}(T_o,B) = \operatorname{opdist}(n,B). \tag{28}$$

Алгоритм МВТ, т.е. линейное непрерывное отображение $V : C(B) \to \mathbf{R}^n$, построенное по сетке $T \in B^n$, обладает следующими свойствами.

Лемма 1. *Пусть функция* $f \in \operatorname{Lip}(B,M)$ *и* $V(f)=0$, *тогда*

$$\|f\| \le M \cdot \operatorname{dist}(T,B). \tag{29}$$

Лемма 2. *Пусть функции* f_1 *и* f_2 *из класса* $\operatorname{Lip}(B,M)$ *и их значения на множестве* T *совпадают, тогда*

$$\|f_1 - f_2\| \le 2M \cdot \operatorname{dist}(T,B). \tag{30}$$

Лемма 3. *Для МВТ* $V : C(B) \to \mathbf{R}^n$ *существует непрерывный оператор декодирования* $D : \mathbf{R}^n \to C(B)$ *такой, что*

$$\forall f \in \operatorname{Lip}(B,M) \;\Big|\; \|f - D(V(f))\| \le M \cdot \operatorname{dist}(T,B). \tag{31}$$

Замечание 1. *Оценки лемм 1-3 не улучшаемы в классе* $\operatorname{Lip}(B,M)$.

Оценки (29)-(31) сводят построение оптимального алгоритма в классе $\operatorname{Lip}(B,M)$ к выбору оптимальной сетки из n точек для данного базового множества B. При этом возникает вопрос: а не является ли алгоритм МВТ с оптимальным выбором сетки оптимальным в классе всех линейных непрерывных алгоритмов?

3.5 Задача оптимального линейного кодирования

Пусть $A : C(B) \to \mathbf{R}^n$ — линейное непрерывное отображение. Введём величину

$$\operatorname{kerrad}(A,M,B) \equiv \sup_{\substack{f\in\operatorname{Lip}(B,M)\\ A(f)=0}} \|f\|. \tag{32}$$

Согласно предыдущему разделу для оператора кодирования V МВТ верно равенство

$$\operatorname{kerrad}(V,M,B) = M \cdot \operatorname{dist}(T,B). \tag{33}$$

Введём точную нижнюю грань величины $\mathrm{kerrad}(A, M, B)$ в классе $L(C(B), \mathbf{R}^n)$ всех линейных непрерывных отображений $A : C(B) \to \mathbf{R}^n$:

$$\mathrm{ocval}(n, M, B) \equiv \inf_{A \in L(C(B), \mathbf{R}^n)} \mathrm{kerrad}(A, M, B). \tag{34}$$

Так как оператор МВТ с оптимальным выбором сетки является линейным непрерывным отображением класса $L(C(B), \mathbf{R}^n)$, то по определению (34) величины $\mathrm{ocval}(n, M, B)$ из соотношений (28),(33) следует неравенство

$$\mathrm{ocval}(n, M, B) \leq M \cdot \mathrm{opdist}(n, B). \tag{35}$$

Определение 4. *Линейное непрерывное отображение A_o называется оптимальным методом линейного кодирования, если*

$$\mathrm{kerrad}(A_o, M, B) = \mathrm{ocval}(n, M, B). \tag{36}$$

Следующая теорема является **гипотезой авторов**.

Теорема 2. *Пусть B замкнутый шар k-мерного евклидова пространства, $k \in \mathbf{N}$, тогда оператор МВТ с оптимальным выбором сетки является оптимальным оператором линейного кодирования*

$$\mathrm{ocval}(n, M, B) = M \cdot \mathrm{opdist}(n, B). \tag{37}$$

Доказательство теоремы 2 авторам известно лишь в двух частных случаях:
1) $k = 1,\ n \in \mathbf{N}$ — доказательство этого частного случая имеется в книге [7, § 4.2].
2) $n = 1,\ k \in \mathbf{N}$.

Справедливость теоремы 2 в остальных случаях есть открытая проблема теории оптимального линейного кодирования.

3.6 Разрешающая способность прибора

Пусть базовая область B есть круг радиуса R. Обозначим через $\Delta g_m \in \mathbf{R}_+$ — максимально возможное изменение функции g от центра круга к его границе, а через $\Delta g \in \mathbf{R}_+$ — максимальную погрешность определения функции на классе $\mathrm{Lip}(B, M)$. Тогда, согласно лемме 2 и замечанию 1 верно равенство

$$\Delta g = M \cdot \mathrm{dist}(T, B) \tag{38}$$

или при заданном уровне погрешности Δg

$$M = \frac{\Delta g}{\mathrm{dist}(T, B)}. \tag{39}$$

Тогда максимальное изменение функции g вдоль радиуса круга

$$\Delta g_m \leq M \cdot R \leq \Delta g \frac{R}{\mathrm{dist}(T, B)}. \tag{40}$$

Назовём безразмерную величину

$$Q \equiv \frac{R}{\mathrm{dist}(T, B)} \tag{41}$$

разрешающей способностью Q прибора. Перепишем неравенство (40) в следующей форме

$$\frac{\Delta g_m}{\Delta g} \leq Q. \tag{42}$$

Вывод 1. *Основной геометрической характеристикой тактильного механорецептора, определяющей точность измерений, является его разрешающая способность* (41).

3.7 Пример 4.1

Рассмотрим тактильный механорецептор, рабочее тело которого имеет форму цилиндра с радиусом основания R, в котором сделаны $n = 19$ воздушных камер в форме прямых круговых цилиндров диаметрами d с расстояниями между центрами ближайших цилиндров $v = 3,5\,\text{мм}$. Выбирая проекции центров малых цилиндров за точки сетки T, мы получаем сетку T, для которой величина

$$\text{dist}(T, B) = \frac{v}{\sqrt{3}} \simeq 2,02\,\text{мм}. \tag{43}$$

Разрешающая способность прибора согласно формуле (41) равна

$$Q = \frac{10\,\text{мм}}{2,02\,\text{мм}} \simeq 5. \tag{44}$$

Если мы желаем теперь произвести измерение рельефа поверхности объекта с погрешностью не более $\Delta g = 1\,\text{мм}$, то согласно неравенству (42) допустимое изменение высоты рельефа

$$\Delta g_m \leq \Delta g \cdot Q = 1\,\text{мм} \cdot 5 = 5\,\text{мм}.$$

Для измерения давления с точностью $\Delta p = 15\,\text{Па}$ допустимое максимальное изменение давления на поверхности объекта

$$\Delta p_m \leq \Delta p \cdot Q = 15\,\text{Па} \cdot 5 = 75\,\text{Па}.$$

4 Использование функции нагружения для анализа структуры сложной механической системы

4.1 К истории вопроса

Изучение функции нагружения материала, т.е. зависимости напряжения σ от относительной деформации ε в образце восходит ещё к Г.В. Лейбницу (см. письмо Г.В. Лейбница к Я. Бернулли 1690 года [8]). Со времён работы Р. Гука 1687 года [9] материалы, используемые в промышленности и строительстве, в диапазоне малых деформаций характеризуются линейной функцией нагружения

$$\sigma = E\varepsilon, \tag{45}$$

называемой законом Гука, где E — константа, характеризующая материал и называемая *модуль нормальной упругости* или *модуль Юнга*. Большое количество экспериментальных работ (см. [10]) посвящено изучению диапазона применимости закона Гука и определению реальной функции нагружения различных материалов. При этом, как правило, начиная с Г.В. Лейбница [8], предложившего использовать гиперболическую зависимость ε от σ, изучение функции нагружения проводилось при малых деформациях и сводилось к построению функции нагружения известного вида, зависящей от нескольких числовых параметров, подлежащих определению в эксперименте.

С XIX века в машинах начинают применяться сильно деформируемые материалы, такие как резина, и соответственно возникают экспериментальные и теоретические исследования функции нагружения для конечных деформаций, т.е. в диапазоне величины относительной деформации ε, сравнимой с единицей. Однако, при этом сохраняется тенденция сводить определение функции деформации к определению нескольких числовых параметров, характеризующих кривую из заданного параметрического семейства.

На сегодня установлено (см. [11]), что в стационарном состоянии однородная изотропная среда характеризуется лагранжианом, определённым с точностью до произвольной числовой функции трёх переменных, вид которой конкретизируется по экспериментальным данным. В настоящей работе мы по существу ограничимся моделью одномерных деформаций. Для решения задач теории искусственного осязания мы применим современный подход функционального анализа. А именно, всю функцию нагружения мы будем рассматривать как один объект, характеризующий материал, т.е. как функциональный параметр – характеристику, вообще говоря, не сводящийся к набору нескольких чисел. Мы покажем, что на этом языке легко ставятся и решаются задачи анализа и синтеза механических систем. Кроме того, мы увидим принципиальную недостаточность линейного подхода (закона Гука) для решения этого класса задач.

4.2 Описание схемы эксперимента

Мы рассматриваем две плоские, бесконечно тонкие, абсолютно твёрдые, параллельные пластины, расположенные на расстоянии l друг от друга. Ось x декартовой ортогональной системы координат направлена по нормали к поверхности пластины, оси y и z — перпендикулярно. Первая пластина находится в плоскости $x = 0$, вторая пластина — в плоскости $x = l$. Предполагается, что поперечные размеры пластин много больше расстояния l между ними. Т.е. если, например, пластины имеют форму прямоугольника со сторонами l_y и l_z по осям y и z соответственно, то верны соотношения

$$\frac{l}{l_y} \ll 1, \ \frac{l}{l_z} \ll 1. \tag{46}$$

Между пластинами помещается исследуемая механическая система A. Первая пластина совершает движение по оси x в интервале перемещений $[0, l[$. Механическая система A деформируется под действием силы F со стороны первой пластины. Среднее давление на поверхности первой пластины

$$\sigma = \frac{F}{S}, \tag{47}$$

где S — площадь пластины. Введём величину относительной деформации механической системы A по оси x:

$$\varepsilon = \frac{x}{l}. \tag{48}$$

Определение 5. *Функцией нагружения механической системы A называется функция $\sigma = f(\varepsilon)$, определённая на $[0, 1[$, и сопоставляющая каждому значению относительной деформации ε соответствующее значение давления σ.*

Мы будем далее предполагать, что в начальном положении при $x = 0$ механическая система не деформирована, т.е. при этом $F = 0$ и $\sigma = 0$. Это означает, что для функции нагружения f предполагается выполненным условие

$$f(0) = 0. \tag{49}$$

В случае, если функция нагружения непрерывна и строго монотонно возрастает, существует обратная функция f^{-1}, которую мы будем обозначать $g \equiv f^{-1}$. Функцию f мы будем называть далее *прямой функцией нагружения* или просто *функцией нагружения*, а обратную функцию g — *обратной функцией нагружения*.

Основной целью нашего рассмотрения в разделе 4 является исследование задачи интерпретации осязательных данных при деформации сжатия. Поэтому мы здесь ограничиваемся рассмотрением величины относительной деформации $\varepsilon \in [0, 1[$ и $\sigma \geq 0$. Однако, далее можно также считать, что $\varepsilon \in]-\infty, 1[$ и $\sigma \in \mathbf{R}$, т.е. рассматривать одновременно деформации сжатия и растяжения. Все основные утверждения разделов 4.3-4.6 останутся при этом справедливыми. С математической точки зрения при математических выводах мы опираемся лишь на одномерный характер деформации, т.е. предполагаем, что каждая точка системы смещается лишь вдоль оси x. При сжатии многослойных деформируемых механических систем это условие не трудно технологически реализовать. При растяжении многослойной системы возникает вопрос о склеивании слоёв, как в смысле технологической возможности такового соединения, так и в смысле влияния этой операции на механические свойства системы. Поэтому случай $\varepsilon < 0$ для многослойных механических систем менее практически значим.

4.3 Функция нагружения как характеристика однородного материала

Пусть пластины 1 и 2 являются одинаковыми прямоугольниками со сторонами l_y и l_z и пространство между ними заполнено однородным материалом. Вид функциональной зависимости величины силы F от величины деформации x зависит от всех размеров l, l_y, l_z образца. Покажем однако, что вид функциональной зависимости давления σ от относительного удлинения ε не зависит от геометрических величин l, l_y, l_z при выполнении условия (46).

4.3.1 Независимость величины давления от площади пластин

Рассмотрим два экземпляра вышеописанной системы, занумерованные индексами α и β, с одним и тем же материалом между пластинами, с одинаковым расстояниями между пластинами l, но с разными геометрическими размерами $l_{y,\alpha}, l_{z,\alpha}$ и $l_{y,\beta}, l_{z,\beta}$ пластин. Предположим, что длины $l_{y,\alpha}$ и $l_{y,\beta}$ соизмеримы и длины $l_{z,\alpha}$ и $l_{z,\beta}$ соизмеримы. В силу соизмеримости мы можем разбить пластину 1_α на $N_\alpha \in \mathbf{N}$ одинаковых прямоугольников и пластину 1_β на N_β таких же одинаковых прямоугольников с площадью S_s. Рассматривая эти прямоугольники как основания цилиндров, разобьём тело A_α между пластинами системы α на N_α одинаковых параллелепипедов, а тело A_β между пластинами системы β на N_β таких же одинаковых малых параллелепипедов P. Пусть смещения x одинаковы в системах α и β. Тогда для каждого малого параллелепипеда P сила F_s, действующая со стороны первой пластины, будет одинакова и давление в системе α равно

$$\sigma_\alpha = \frac{N_\alpha F_s}{N_\alpha S_s} = \frac{F_s}{S_s}, \tag{50}$$

а давление в системе β равно

$$\sigma_\beta = \frac{N_\beta F_s}{N_\beta S_s} = \frac{F_s}{S_s}, \tag{51}$$

Итак,

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta. \tag{52}$$

Вывод 2. *Если есть две системы α и β с разными площадями пластин, но с одинаковым начальным расстоянием l между пластинами и с одинаковым однородным материалом между пластинами, то при любой величине деформации $x \in [0, l[$ соответствующие нагружения σ_α и σ_β равны.*

4.3.2 Независимость давления от толщины l образца

Рассмотрим снова два экземпляра α и β вышеописанной системы с одинаковыми пластинами и одинаковым материалом, но с разными расстояниями между пластинами l_α и l_β. Предположим, что геометрические величины l_α и l_β соизмеримы. Предположим, что абсолютные удлинения x_α и x_β в системах таковы, что

$$\frac{x_\alpha}{l_\alpha} = \frac{x_\beta}{l_\beta} = \varepsilon. \tag{53}$$

Покажем, что тогда давления равны, т.е. верно равенство (52).

В самом деле, по условию соизмеримости существуют натуральные числа $N_\alpha \in \mathbf{N}$ и $N_\beta \in \mathbf{N}$ такие, что

$$\frac{l_\alpha}{N_\alpha} = \frac{l_\beta}{N_\beta} = h. \tag{54}$$

Тогда система α разбивается на N_α одинаковых слоёв толщиной h, а система β — на N_β таких же одинаковых слоёв толщиной h. Абсолютное удлинение одного слоя в системе α равно

$$x_{s,\alpha} = \frac{x_\alpha}{N_\alpha}. \tag{55}$$

Абсолютное удлинение одного слоя в системе β равно

$$x_{s,\beta} = \frac{x_\beta}{N_\beta}. \tag{56}$$

В силу (53,54)

$$x_{s,\alpha} = \frac{x_\alpha}{N_\alpha} = \frac{\varepsilon l_\alpha}{N_\alpha} = \varepsilon h. \tag{57}$$

и

$$x_{s,\beta} = \frac{x_\beta}{N_\beta} = \frac{\varepsilon l_\beta}{N_\beta} = \varepsilon h. \tag{58}$$

Итак, удлинения одинаковых слоёв одинаковы, следовательно одинаковы и нагружения, т.е. верно равенство (52).

Вывод 3. *При одинаковой площади пластин в двух системах с одинаковым однородным материалом нагружение σ зависит лишь от величины относительной деформации ε.*

4.3.3 Инвариантность функции нагружения

Выводы 2 и 3 показывают независимость функции нагружения от геометрических параметров системы, удовлетворяющей условию (46).

Вывод 4. *Для любых двух систем α и β, удовлетворяющих условию (46), с одинаковым материалом между пластинами их функции нагружения $\sigma = f_\alpha(\varepsilon)$ и $\sigma = f_\beta(\varepsilon)$ совпадают.*

Итак, функция нагружения однородного материала является характеристикой материала, не зависящей от геометрических размеров образца. Далее мы будем предполагать, что функция нагружения является непрерывной и строго монотонно возрастающей функцией на интервале $[0,1[$ изменения переменной ε, причём

$$\lim_{\varepsilon\to 1} \sigma(\varepsilon) = +\infty. \tag{59}$$

В этих предположениях существует обратное отображение $f^{-1} : [0,+\infty[\to [0,1[$ также непрерывное и строго возрастающее, которое мы будем обозначать $g \equiv f^{-1}$.

Если функция нагружения f дифференцируема в точке $\varepsilon \in [0,1[$, то её производная $\frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon)$ в этой точке называется *дифференциальным модулем нормальной упругости*. Производная в точке $\varepsilon = 0$ называется *модулем нормальной упругости* или *модулем Юнга*

$$E \equiv \frac{df}{d\varepsilon}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}. \tag{60}$$

Далее мы рассмотрим две задачи об определении функции нагружения сложной системы, составленной из нескольких подсистем с известными свойствами.

4.4 Функция нагружения слоистой системы

Пусть пространство двумя между пластинами заполнено k параллельными пластинам слоями толщинами $l_1, l_2, \dots l_k$, $l_1 + l_2 + \dots l_k = l$. Известны обратные функции нагружения $g_1, g_2, \dots g_k$ этих слоёв. Требуется определить обратную функцию нагружения g всей системы.

В каждой точке области между пластинами нагружение σ одинаково. Поэтому относительное удлинение i-того слоя равно $\varepsilon_i = g_i(\sigma)$, а его абсолютное удлинение — $x_i = \varepsilon_i l_i$. Общее смещение первой пластины равно

$$x = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i l_i = \sum_{i=1}^{k} g_i(\sigma) l_i. \tag{61}$$

Относительное удлинение системы равно

$$\varepsilon = \frac{x}{l} = \sum_{i=1}^{k} g_i(\sigma)\frac{l_i}{l} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(\sigma). \tag{62}$$

Итак, для обратной функции нагружения системы g справедливо равенство

$$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i, \tag{63}$$

где

$$\alpha_i = \frac{l_i}{l}, \ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1. \tag{64}$$

Доказано утверждение 1.

Утверждение 1. *Обратная функция нагружения слоистой системы является выпуклой комбинацией обратных функций нагружения слоёв вида (63, 64).*

Дифференцируя равенство (63) в нуле, получаем следствие 1.

Следствие 1. *Модуль Юнга E слоистой системы выражается через модули Юнга слоёв E_i, $i \in \overline{1,k}$, по формуле*

$$\frac{1}{E} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \frac{1}{E_i}. \tag{65}$$

Замечание 2. *Простейшим важным частным случаем слоистой системы является система, каждый слой которой состоит из одного материала с известными свойствами, т.е. с известной функцией нагружения материала.*

4.4.1 Задача о восстановлении толщины слоёв по известной функции абсолютного смещения системы

Пусть нам известна функция абсолютного смещения всей системы $x = \varphi(\sigma)$, $\sigma \in [0, \sigma_0]$, $\sigma_0 \in \mathbf{R}_+$. Из формулы (61) следует равенство

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} l_i g_i. \tag{66}$$

в линейном пространстве непрерывных функций $C([0, \sigma_0], \mathbf{R})$. Равенство (66) означает, что функция φ является линейной комбинацией функций $g_1, g_2, \ldots g_k$ с неотрицательными коэффициентами l_i, имеющими физический смысл толщины слоя. Из линейной алгебры известно, что коэффициенты $l_1, l_2, \ldots l_k$ в формуле (66) однозначно определены тогда и только тогда, когда функции $g_1, g_2, \ldots g_k$ линейно независимы. Доказано следующее утверждение.

Утверждение 2. *Толщины слоёв слоистой структуры восстанавливаются по известной функциональной зависимости $x = \varphi(\sigma)$, $\sigma \in [0, \sigma_0]$, величины абсолютной деформации системы x от нагружения σ тогда и только тогда, когда обратные функции нагружения слоёв линейно независимы.*

Замечание 3. *В силу коммутативности операции сложения скалярных функций из представления* (66) *вытекает, что по одной лишь известной функции $x = \varphi(\sigma)$ системы не может быть восстановлен порядок следования слоёв, ибо равенство* (66) *сохраняется при любой перестановке функций $g_1, g_2, \ldots g_k$.*

4.5 Функция нагружения цилиндрической системы

Пусть пластина 1 разбита на k подобластей $G_1, G_2, \dots G_k$, на каждой из которых, как на основании, построен цилиндр с образующей вдоль оси x до пластины 2. i-тый цилиндр является подсистемой с прямой функцией нагружения f_i, $i \in \overline{1,k}$. Требуется определить прямую функцию нагружения всей системы.

Пусть ε — относительная деформация всей системы. В силу геометрии системы относительные деформации всех k цилиндров равны между собой и равны ε:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = \varepsilon. \tag{67}$$

Давление на поверхности i-того цилиндра равно

$$\sigma_i = f_i(\varepsilon). \tag{68}$$

Сила, действующая со стороны i-того цилиндра на пластину 1 равна

$$F_i = S_i f_i(\varepsilon), \tag{69}$$

где S_i — площадь i-той подобласти G_i на пластине 1. Общая сила, действующая на пластину 1, есть

$$F = \sum_{i=1}^{k} S_i f_i(\varepsilon), \tag{70}$$

а среднее давление

$$\sigma = \frac{F}{S} = \sum_{i=1}^{k} \frac{S_i}{S} f_i(\varepsilon), \tag{71}$$

где $S = \sum_{i=1}^{k} S_i$ — площадь пластины 1. Итак, формулу (71) можно переписать в виде

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i \tag{72}$$

где

$$\alpha_i = \frac{S_i}{S},\ i \in \overline{1,k},\ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1. \tag{73}$$

Доказано следующее утверждение.

Утверждение 3. *Прямая функция нагружения цилиндрической системы является выпуклой комбинацией прямых функций нагружения цилиндров-подсистем вида (72,73).*

Дифференцируя равенство (72) в нуле, получаем следствие.

Следствие 2. *Модуль Юнга E цилиндрической системы выражается через модули Юнга цилиндров-подсистем E_i, $i \in \overline{1,k}$, по формуле*

$$E = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E_i. \tag{74}$$

Замечание 4. *Простейшим важным частным случаем цилиндрической системы является система, каждый цилиндр-подсистема которой состоит из одного материала с известными свойствами, т.е. с известной функцией нагружения материала.*

4.5.1 Задача о восстановлении площадей сечений цилиндров по известной функции нагружения

Пусть в цилиндрической системе при каждой величине относительной деформации системы $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \in]0, 1[$, задана величина полной силы F, действующей со стороны пластины 1, т.е. задана функция $F = \psi(\varepsilon)$ класса $C([0, \varepsilon_0], \mathbf{R})$. Равенство (70) тогда записывается как линейная зависимость функций из линейного пространства $C([0, \varepsilon_0], \mathbf{R})$ вида

$$\psi = \sum_{i=1}^{k} S_i f_i. \tag{75}$$

Итак, справедливо утверждение.

Утверждение 4. *Площади сечений цилиндров цилиндрической системы однозначно восстанавливаются по известной зависимости $F = \psi(\varepsilon)$ силы F, действующей на систему, от относительной деформации системы ε, тогда и только тогда, когда прямые функции нагружения цилиндров-подсистем линейно не зависимы.*

4.6 Линейные среды

Рассмотрим среду, подчиняющуюся закону Гука, т.е. для которой прямая функция нагружения линейна вида (45) на рассматриваемом интервале $[0, \varepsilon_0]$, $0 < \varepsilon_0 < 1$, относительных деформаций. Тогда обратная функция нагружения $\varepsilon = g(\sigma)$ также линейна и имеет вид

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma, \ \sigma \in [0, \sigma_0], \ \sigma_0 = E\varepsilon_0. \tag{76}$$

Для любых k линейных материалов линейное пространство, натянутое на их k функций нагружения, одномерно, что влечёт при $k > 1$ невозможность однозначного восстановления как слоистой структуры (см. утверждение 2), так и цилиндрической структуры (см. утверждение 4).

Для слоистой структуры известная функция абсолютной деформации системы $x = \varphi(\sigma)$ из п. 4.4.1 имеет вид

$$x = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{l_i}{E_i}\right)\sigma, \ \sigma \in [0, \sigma_0].$$

Т.е. вся экспериментальная информация сводится к одному числовому соотношению

$$C_\varphi = \sum_{i=1}^{k} \frac{l_i}{E_i}, \tag{77}$$

в котором известна числовая величина $C_\varphi \equiv \frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma)|_{\sigma=0}$ — производная абсолютной деформации системы x по напряжению σ, и известны модули Юнга E_i, $i \in \overline{1,k}$, слоёв.

Для цилиндрической системы известная функция $F = \psi(\varepsilon)$ зависимости величины полной силы F от величины относительной деформации системы ε согласно формуле (75) имеет вид

$$F = \left(\sum_{i=1}^{k} S_i E_i\right)\varepsilon, \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0].$$

Т.е. вся экспериментальная информация сводится к одному числовому соотношению

$$C_\psi = \sum_{i=1}^{k} S_i E_i, \tag{78}$$

в котором известна числовая величина $C_\psi \equiv \frac{d\psi}{d\varepsilon}(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$ — производная величины полной силы F по величине относительной деформации ε, и известны модули Юнга E_i, $i \in \overline{1,k}$, цилиндров.

4.7 Использование полученных теоретических результатов

Полученные результаты о механических свойствах сложных систем могут быть использованы для двух основных целей: для задач синтеза сложной механической системы с заданными механическими свойствами и для задачи идентификации сложной механической системы по её механическим свойствам.

Для слоистой структуры мы показали, что обратная функция нагружения системы является выпуклой комбинацией вида (63,64) обратных функций нагружения её слоёв. Обратная величина модуля Юнга системы в этом случае является выпуклой комбинацией вида (65,64) обратных величин модулей Юнга слоёв.

Для цилиндрической системы прямая функция нагружения системы является выпуклой комбинацией вида (72,73) функций нагружения цилиндров-подсистем и модуль Юнга системы есть выпуклая комбинация вида (74,73) модулей Юнга цилиндров-подсистем.

В задачах идентификации оказался выделенным случай линейных сред, т.е. малых деформаций. Оказалось, что для любого набора линейных сред линейное пространство, натянутое на набор их функций нагружения, одномерно, что приводит к невозможности однозначного восстановления параметров сложной линейной слоистой системы при количестве слоёв более единицы или сложной линейной цилиндрической системы при количестве цилиндров более единицы. Утверждения 2 и 4 доказывают, что для однозначной идентификации сложной механической системы требуется исследование её поведения при больших деформациях, когда относительная деформация системы ε сравнима с единицей и функция нагружения в силу соотношения (59) является нелинейной.

Данное исследование мы провели с целью приложения к конструированию тактильных датчиков и интерпретации данных, полученных с их помощью. При анализе структуры механической системы по известной функциональной зависимости величины абсолютного смещения x от величины нагружения σ мы использовали локально модель системы, как состоящей из плоско параллельных слоёв, что позволило проводить независимую обработку информации в каждой точке поверхности датчика. Целесообразно на следующем этапе моделирования перейти к более сложной модели с учётом изгибания слоёв и реальной трёхмерности изучаемой механической структуры.

5 Заключение

В настоящей работе мы ввели основные математические величины для описания систем искусственного осязания и рассмотрели в первом приближении вопросы снятия, хранения и интерпретации осязательной информации. Мы рассмотрели простейшие математические модели и постановки задач, позволяющие, тем не менее, сформулировать количественные требования к техническим элементам СИО.

Разумеется, далее вместе с развитием и усложнением технической базы СИО будет развиваться и теоретическая база. Следующие направления являются, на наш взгляд, первоочередными.

1) Расчёт оптимальных конструкций устройств снятия осязательной информации, в частности, оптимального геометрического расположения элементов датчиков и их свойств — смотрите разделы 2,3.

2) Развитие математических средств кодирования и декодирования осязательной информации. Здесь предполагается рассмотрение двумерных вейвлетов специальной конструкции и свойств функционального класса $\mathrm{Lip}(B, M)$.

3) Исследование механических свойств живых тканей при деформациях сжатия.

Естественный следующий уровень развития теории СИО — переход от "покадрового" рассмотрения к рассмотрению фильма. Здесь все три этапа: снятие, хранение и интерпретация — могут потребовать глубого развития, поскольку уже, например, близость двух соседних кадров принципиально меняет объём и характер получаемой и обрабатываемой информации.

К принципиальному развитию теории СИО может привести и исследование механических свойств живых тканей. Например, несжимаемость живых тканей заставит нас изучать модели сложных сдвиговых и изгибных деформаций и потребует рассмотрения существенно не одномерных деформаций. При этом придётся изучать трёхмерные смещения элементов поверхности рабочего тела датчика и переходить к записи, хранению и обработке семейств трёхмерных векторных полей смещений.

Но всё это — дело будущих исследований. В настоящей же работе мы ставили своей основной целью создание единого математического аппарата и общего точного количественного языка для математиков, медиков, инженеров и технологов, занимающихся системами искусственного осязания.

Текст данной публикации доступен в Интернете — смотрите [12].

Список литературы

[1] Tachi Laboratory. The University of Tokyo Graduate School of Information Science and Technology. // Сайт в Интернете: "http://www.star.t.u-tokyo.ac.jp".

[2] ARTANN Laboratories, Inc. // Сайт в Интернете: "http://www.artannlabs.com".

[3] Medical Tactile Inc. // Сайт в Интернете: "http://www.medicaltactile.com".

[4] Pressure Profile Systems, Inc. // Сайт в Интернете: "http://www.pressureprofile.com".

[5] Palpometer Systems, Inc. // Сайт в Интернете: "http://www.palpometer.ca".

[6] Tekscan, Inc. // Сайт в Интернете: "http://www.tekscan.com".

[7] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. // Издательство Московского университета. Москва. 1976.

[8] Leibniz, Gottfried Wilhelm: Letter to Jacobus Bernoulli. // Опубликовано в G. W. Leibniz, Mathematische Schriften (Red. G. E. Gerhardt), Vol. III, Abt. 1, S. 13-20. Heidelsheim: Georg Olms Verlangsbuchhandlung 1855 (переиздано в 1962 г.).

[9] Hooke, Robert: Lectures De Potentia Restitutiva, or of Spring, Explaining the Power of Springing Bodies. // London: John Martyn. Переиздано в Early Science in Oxford (ed. R. T. Gunther), Vol. VIII, pp. 331-356. Oxford: R. T. Gunther, 1931.

[10] Белл Дж.Ф. Экспериментальные основы механики деформируемых твердых тел.// Часть 1. Малые деформации. — Москва: "Наука Главная редакция физико-математической литературы. 1984.

[11] Винокуров В.А. Частицы из среды. Математические методы и модели. // Интернет. 2002. "http://vinokur.narod.ru/vinbook.html".

[12] Винокуров В.А., Садовничий В.А. К математической теории осязания. // Интернет. 2008. "http://vinokur.narod.ru/sat2.pdf".