

Электронный парамагнитный резонанс и математические модели датирования остывающих природных систем

Д.Г. Кошут, Ю.П. Соловьев, А.Т. Фоменко

Геологический факультет,

Механико-математический факультет

Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация

В работе рассмотрены основные физико-математические модели методов определения возраста горных пород и минералов. Показано, что традиционные методы геохронологии, базирующиеся на модели закрытой системы, могут приводить к существенным ошибкам. Наиболее сложными для датирования являются неизотермические системы, в которых процессы накопления радиогенных продуктов изменяются в ходе эволюции природной системы. Разработана физико-математическая модель и получено аналитическое решение для датирования остывающей системы. Теоретические модели использованы для экспериментального определения возраста кварца методом спектроскопии электронного парамагнитного резонанса. В качестве неизотермической системы рассмотрен Эльджуртинский интрузивный комплекс на Центральном Кавказе. Датирование вулканических пород вулкана Эльбруса осуществлено в рамках модели закрытой системы.

Введение

Вопрос о возрасте Земли вызвал научные дискуссии, длящиеся более 200 лет. Правильный ответ на этот вопрос важен не только для понимания процессов развития нашей планеты, но и Солнечной системы, Вселенной. Первые количественные оценки возраста Земли были сделаны Эдмундом Галлеем, английским астрономом и геофизиком. Он предположил, что изначально пресные воды океанов стали солеными в результате сноса в них реками солей из земных пород. По известной солености океана Галлей рассчитал, что возраст Земли равен приблизительно 10 тыс. лет. Во второй половине XVIII века иной метод был использован Жорж Луи Бюффеном, директором королевского ботанического сада в Париже, автором известного многотомного труда "Естественная история". Им была использована модель остывающей планеты: он измерял длительность остывания раскаленных добела в печи каменных ядер. Возраст Земли - около 75 тыс. лет - был получен им из времени остывания ядер и соотношения радиусов ядер и земного шара. Во второй половине XIX века английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) опубликовал несколько статей, в которых он ввел некоторые ограничения на возможный

возраст Земли. Его расчеты основаны на рассмотрении светимости Солнца, процессов охлаждения Земли и влияния лунных приливов на скорость вращения Земли. Вначале У. Кельвин ограничил возраст Земли 100 млн. лет. Позднее в 1887 г. в своей знаменитой лекции "Возраст Земли как колыбели жизни" он уменьшил возможный возраст до 20-40 млн. лет [1].

Как это часто бывает, рождение новых и обобщение известных идей происходит почти одновременно. За год до лекции лорда Кельвина французский физик Анри Беккерель сообщил об открытии радиоактивности. Когда выяснилось, что радиоактивный распад является экзотермическим процессом, стало ясно, что расчеты Кельвина базировались на неверной модели просто остывающей Земли. Однако открытие радиоактивности Беккерелем и законов радиоактивного распада Фредериком Содди и Эрнестом Резерфордом впоследствии привели к созданию принципиально новых и физически гораздо более строгих методов определения возраста Земли. Получившие название методов изотопной геохронологии они широко описаны Гюнтером Фором в его монографии "Основы изотопной геологии" [2]. По данным методов изотопной геохронологии возраст Земли составляет около 4.5 млрд. лет.

Определение возраста геологических объектов представляет интерес не только с точки зрения фундаментальной науки, но и с точки зрения практической геологии. Многие рудные месторождения (например, золоторудные) бывают приурочены к толщам определенного возраста, их генетический тип также может зависеть от возраста пород, миграция и переотложение рудных элементов тоже зависит от возраста. Знание этих параметров позволяет оптимально организовать геолого-разведочные работы. Другой областью применения датирования является предсказание катастрофических геологических событий (например, извержений вулканов). Для этой цели важно изучить и выявить периодичность подобных явлений в прошлом. Таким образом, методы определения возраста пород могут быть использованы при решении широкого круга геологических задач.

1 Физико-математические основы датирования

Качественно схему определения возраста горных пород и, следовательно, момента протекания геологических процессов, в которых они образовались, можно представить следующим образом. В некоторый момент времени после образования Земли в результате геологической деятельности из мантии в земную кору внедряются магматические расплавы. После остывания до некоторой температуры расплав кристаллизуется. Если расплав застыл внутри земной коры, то такие породы называются интрузивными. Если он достиг поверхности Земли, то - эффузивными. В идеальном случае сразу после кристаллизации включаются "геологические часы". Например, попавший в породу радиоактивный изотоп (родительский) начинает распадаться с образованием другого изотопа (дочернего). При известной скорости радиоактивного распада необходимо изме-

ритель концентрацию дочерних и оставшихся родительских продуктов, чтобы рассчитать время, прошедшее с момента кристаллизации, т.е. возраст породы.

На аналогичных принципах основаны и другие методы датирования, в частности, использующие спектроскопию электронного парамагнитного резонанса (ЭПР) для измерения концентрации родительских и дочерних продуктов. Кристаллизовавшаяся гранитная порода состоит из зерен отдельных минералов. В породе также присутствуют радиоактивные элементы, чаще всего уран, торий, калий, которые создают некоторый радиационный фон. Под воздействием радиационного фона (рис. 1)¹ в минералах образуются радиационные дефекты. В частности, граниты содержат в большом количестве кварц. При кристаллизации высокотемпературного расплава в кварце образуются структурные дефекты, такие как вакансии и примесные атомы (алюминий, титан, германий). В начальный момент эти дефекты являются диамагнитными, т.е. не содержат ионов с неспаренными спинами и не обладают магнитными свойствами. С течением времени дефектные ионы под воздействием ионизирующего излучения захватывают электроны или дырки и переходят в парамагнитное состояние (рис. 2): образуются парамагнитные радиационные центры. Этот процесс протекает под воздействием всех компонент радиационного фона - α , β и γ . Для определения возраста необходимо измерить скорость образования центров и их концентрацию. При этом должно выполняться условие, что образующиеся радиационные центры не разрушаются, т.е. часы включаются сразу после кристаллизации пород. Более подробное описание основных парамагнитных центров в кварце приведено в обзоре [3], основы метода ЭПР датирования изложены в работе [4].

Интенсивность радиационного фона можно рассчитать по концентрации U , Th , K в породе, а также в самом датируемом минерале. С интенсивностью радиационного фона связано второе предположение нашей модели, которое заключается в том, что радиационный фон считается постоянным. Это обусловлено тем, что времена полураспада указанных радиоактивных элементов больше 10^9 лет и существенно превышают возраст Земли. Однако доля поглощенного радиационного фона зависит от размера зерен минерала, в нашем случае кварца. На рис. 3 показано воздействие излучения на зерно кварца. В соответствии с глубиной проникновения можно оценить поглощенную дозу от каждой компоненты излучения.

Введенные ограничения соответствуют наиболее грубой модели закрытой системы, в которой не происходит потери дочерних продуктов. Образовавшиеся в кварце алюминиевые радиационные парамагнитные центры не разрушаются в природных условиях и с течением времени накапливаются. В рамках этой модели процесс накопления радиационных центров в минерале описывается достаточно простым уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y), \quad (1.1)$$

где y – концентрация дочерних радиационных центров, λ – эффективность образования центров, c_p – концентрация родительских центров (предцентров), t – время. Решение

¹Рисунки см. в конце статьи.

этого уравнения имеет вид:

$$y = c_p(1 - \exp(-\lambda t)). \quad (1.2)$$

График этой функции представлен на рис. 4.

Однако модель закрытой системы слишком проста и область ее применения ограничена. Для большинства геологических объектов требуется учет потери радиогенных продуктов, причем это относится не только к методу ЭПР датирования, но и к методам изотопной геохронологии. Такие системы называются открытыми.

Известно, что радиационные центры в минералах термически неустойчивы. При повышенных температурах они разрушаются, теряют захваченные электроны или дырки и возвращаются в диамагнитное состояние. Скорость этого процесса сильно зависит от температуры, при которой находится минерал. Таким образом, характер накопления радиационных центров, т.е. работа "геологических часов", будет зависеть от изменения температуры пород на протяжении всей геологической истории. Изменение температуры с момента кристаллизации пород до настоящего времени может быть очень сложным из-за перемещения пород в земной коре, внедрения в земную кору более поздних расплавов, воздействия горячих гидротермальных растворов, наличия потока тепла из глубин Земли и т.д.

Учесть влияние температуры в общем случае невозможно. Поэтому выделяют некоторые частные случаи. Мы рассмотрим изотермическую и монотонно остывающую системы. Наряду с этим следует учесть физический механизм рекомбинации радиационных центров. Известны две модели рекомбинационных процессов: линейная (одночастичная) и квадратичная (двухчастичная) рекомбинация. В изотермической системе в случае линейной рекомбинации уравнение, описывающее накопление центров в минерале, и его решение имеют вид:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k_c y, \quad (1.3)$$

$$y = \frac{\lambda c_p}{\lambda + k_c} (1 - \exp(-(\lambda + k_c)t)), \quad (1.4)$$

где $k_c = k \exp(-E/k_B T_c)$ – скорость рекомбинации центров при температуре T_c , k_B – постоянная Больцмана, E – энергия активации, K – вероятность аннигиляции при бесконечно высокой температуре. Кривая (1.4) показана на рис. 4 пунктирной линией. В случае квадратичной рекомбинации радиационных центров решение дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k_c y^2 \quad (1.5)$$

имеет вид [2]

$$y = \frac{R - \lambda}{2k_c} \frac{1 - e^{-Rt}}{1 + \frac{R - \lambda}{R + \lambda} e^{-Rt}}, \quad (1.6)$$

где $R = \sqrt{4c_p k_c \lambda + \lambda^2}$.

Учет постоянной скорости рекомбинации не изменяет характера процесса накопления радиогенных продуктов, а в основном замедляет его. В случае ЭПР датирования

температуры закрытия для радиационных дефектов невысоки, поэтому даже для изотермических, относительно низкотемпературных систем следует учитывать рекомбинационные процессы.

Более корректной и в то же время более сложной для описания является модель монотонно остывающей системы. В этом случае накопление центров описывается уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k(t)y, \quad (1.7)$$

где $k(t)$ – скорость рекомбинации, зависимость которой от температуры выражается соотношением Аррениуса

$$k(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{E}{k_B T(t)}\right). \quad (1.8)$$

Здесь E – энергия активации, K – вероятность аннигиляции при бесконечно высокой температуре, k_B – постоянная Больцмана, $T(t)$ – зависящая от времени абсолютная температура.

Для произвольной температурной зависимости $T(t)$ уравнение (1.7) можно решить только с привлечением методов численного интегрирования. В данной работе рассматривается монотонно остывающая геологическая система, закон остывания которой можно выразить следующей, использованной и в других работах [5, 6], зависимостью $T(t)$:

$$T(t) = \frac{T_0}{1 + \beta t},$$

где T_0 – начальная температура системы; β – константа остывания системы, предполагаемая постоянной. На интервале времен $t \ll 1/\beta$ эта зависимость в первом приближении близка к линейной и экспоненциальной. Наряду с этим такая зависимость $T(t)$ позволяет получить аналитическое решение уравнения (1.7). Его решение, приведенное в приложении, имеет вид:

$$y = ac_p \nu^a e^\nu [\Gamma(-a, \nu(t)) - \Gamma(-a, \nu(0))], \quad (1.9)$$

где $\Gamma(r, x) = \int_x^\infty e^{-z} z^{r-1} dz$ – неполная гамма-функция,

$$a = \lambda\tau, \quad \nu(t) = \tau k(0) e^{-t/\tau}, \quad k(0) = K \exp\left(-\frac{E}{k_B T_0}\right), \quad \tau = \frac{k_B}{\beta E}.$$

При высоких начальных температурах T_0 и медленном остывании (т.е. при больших $k(0)$ и τ) значение $\nu(0)$ становится очень большим (в нашем случае $\nu(0) \approx 10^{12}$). Это означает, что $\Gamma(-a, \nu(0))$ – пренебрежимо малая величина и мы можем переписать (1.9) в виде

$$y = ac_p \nu^a e^\nu \Gamma(-a, \nu(t)). \quad (1.10)$$

Процесс накопления радиационных центров для двухчастичной рекомбинации описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k(t)y^2, \quad (1.11)$$

в котором через y , λ , и c_p обозначены те же величины, что и в уравнении (1.7). Функция $k(t)$ в данном случае имеет несколько иной смысл: произведение $k(t) \cdot y$ является скоростью рекомбинации центров.

Положим $a = \lambda\tau$, $b = \lambda\tau c_p$ и перейдем в (1.11) к новой независимой переменной

$$\nu = \nu(t) = \tau k(0)e^{-t/\tau}. \quad (1.12)$$

В результате получим уравнение

$$\nu \frac{dy}{d\nu} = \nu y^2 + ay - b \quad (1.13)$$

с новым начальным условием $y(\nu(0)) = 0$. Его решение (см. приложение) имеет вид

$$y = \frac{u'_0(\nu(0))}{u_0(\nu(0))} + \frac{\nu^a/u_0^2(\nu)}{\frac{nu(0)^a}{u'_0(\nu(0))u_0(\nu(0))} + \int_{\nu}^{\nu(0)} \frac{\nu^a}{u_0^2} d\nu}, \quad (1.14)$$

где $u_0 = \nu^{\frac{a+1}{2}} I_{-(a+1)}(2\sqrt{b\nu})$; $I_{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(\mu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s}$ и $I_{\mu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(-\mu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu+2s}$ — модифицированные функции Бесселя.

В приложении также приведены некоторые приближенные решения уравнений (1.7) и (1.11).

На рис. 5 представлена обобщенная схема процесса накопления радиационных центров в кварце в условиях монотонно остывающей системы. После образования Земли в момент времени t_3 сформировался гранитный интрузив (момент времени t_0). С момента кристаллизации гранитного интрузива до настоящего времени в кварце образовались радиационные центры, концентрация которых соответствует t_n . Сравнение решений для закрытой системы и системы с постоянной рекомбинацией центров с решениями (1.10) и (1.14) показывают принципиально различный характер процесса накопления дочерних продуктов. Чем выше температура закрытия минерала, тем ближе результаты датирования по решениям (1.2), (1.4) и (1.6) к его реальному возрасту. Решения (1.10) и (1.14) формально не зависят от температуры закрытия минерала и при известных параметрах системы должны давать реальный возраст формирования пород.

Для измерения возраста необходимо экспериментально измерить ряд параметров системы: концентрацию родительских диамагнитных алюминиевых центров в кварце c_p , концентрацию дочерних парамагнитных алюминиевых центров y и эффективность их образования λ под действием излучения, энергию активации E , вероятность аннигиляции при бесконечно высокой температуре K , а также знать режим остывания системы. Концентрацию парамагнитных центров y измеряют с помощью метода ЭПР спектроскопии. Величины c_p и λ можно измерить в лабораторных условиях. При больших временах накопления центров, что соответствует большим дозам облучения, концентрация парамагнитных центров стремится к насыщению, величина которой принимается за значение c_p . Эффективность образования центров λ можно представить в виде $\lambda = fp$,

где f – число парамагнитных центров, создаваемых единичной дозой для единичной концентрации c_p , а p – мощность дозы. Для измерения f минерал облучают последовательными дозами ионизирующего излучения и получают зависимость $y = f(D)$, где D – доза. В низкотемпературных лабораторных условиях потерей радиационных центров можно пренебречь. Поэтому процесс накопления центров описывается уравнением (1.1). Учитывая, что при малых дозах облучения $y \approx c_p$ и подставляя в (1.1) $\lambda = fp$, легко получить следующее выражение для f :

$$f = \frac{1}{c_p p} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dy}{dD}.$$

Радиационная чувствительность f рассчитывается из наклона дозовой зависимости при малых дозах облучения.

Для измерения E_a и K используют соотношение Аррениуса (1.8), если известна скорость рекомбинации $k(t)$, хотя бы при двух температурах. Кинетику рекомбинации исследуют в ходе лабораторных отжигов разной длительности в изотермических условиях, но при нескольких температурах. В процессе отжига минерал не облучается и образования центров нет, поэтому кинетика их разрушения описывается уравнением (1.5) без первого слагаемого в правой части. Концентрация центров уменьшается по экспоненциальной зависимости, по которой рассчитывается скорость рекомбинации для данной температуры отжига.

Наиболее сложным параметром является режим остывания системы. Одним из наиболее распространенных методов реконструкции режима остывания системы является подход, основанный на методах изотопной геохронологии. Наиболее простой способ заключается в определении возраста минерала, температура закрытия которого измерена. В более сложном варианте определяется возраст разных минералов из одной и той же пробы. Если температуры закрытия этих минералов различны, то и измеренные возрасты будут разными. Эти данные в сочетании с известной современной температурой проб позволяют построить зависимость температуры породы от возраста. Затем эту экспериментальную зависимость аппроксимируют той или иной функцией, как, например, в нашем случае гиперболической.

2 Природные объекты

2.1 Эльджуртинский гранитный массив – открытая система

В качестве геологического объекта для датирования был выбран Эльджуртинский интрузивный гранитный массив (Большой Кавказ). Образование Эльджуртинского массива связано с магматической активностью, проявившейся в пределах коллизионной структуры типа континент-континент, которая заложилась в позднем миоцене в результате столкновения Аравийской плиты с Кавказской [7]. Эльджуртинские граниты являются уникальным геологическим объектом, так как относятся к одним из самых

молодых плутонических пород на Земле. Они являются удобным объектом исследования, так как вскрыты на площади около 10 км^2 , а также пробурены тремя скважинами общей протяженностью более 5 км по вертикали. Результаты детального изучения пород массива геохимическими, минералогическими и петрологическими методами, а также пробы кварца любезно предоставлены А.Г. Гурбановым (ИГЕМ РАН).

Возраст пород и режим остывания массива определен методом $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ датирования [8]. Для ЭПР датирования были взяты пробы 96/85 и 103/85 как наиболее детально изученные указанными методами. Места отбора проб указаны на рис. 6, на котором схематично представлено поперечное сечение Эльджуртинского массива.

Для определения возраста кварца с помощью уравнений (1.10) и (1.14) необходимы следующие величины: энергия активации E , предэкспоненциальный множитель K , концентрация Al -предцентров c_p , эффективность образования Al -центров λ и температурная зависимость $T(t)$.

Энергия активации и предэкспоненциальный множитель были измерены в работах [9, 10, 11]. К сожалению, эти величины для Al -центров недостаточно точно определены: например, значения энергии активации изменяются от 1.3 эВ [9, а также устное сообщение П.В. Мельникова] до 1.7 эВ [11], причем первая величина получена для реакции первого порядка, а вторая – для реакции второго порядка. Предэкспоненциальный множитель для реакции первого порядка изменяется от $1.6 \cdot 10^9$ [4] до $3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ [10]. В данной работе для реакции первого порядка принято: $E = 1.3 \text{ эВ}$ и $K = 1.6 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$. В работе [11] изучен процесс рекомбинации Al -центров по реакции второго порядка, однако предэкспоненциальный множитель не измерен, так как не была осуществлена калибровка ЭПР спектрометра. Из-за отсутствия надежных литературных данных по параметрам квадратичной рекомбинации был проведен отжиг исследованных образцов кварца для измерения этих величин. В результате получены значения энергии активации 1.4 эВ и предэкспоненциального множителя – $3.8 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1} \text{ ppm}^{-1}$. Следует отметить, что эти величины носят предварительный характер, так как в исследованных нами образцах кварца при отжиге в лабораторных условиях в зависимости от температур отжига и начальной концентрации радиационных центров проявляются оба процесса – линейный и квадратичный. По-видимому, именно этим явлением можно объяснить отклонение экспериментальных данных по отжигу Al -центров в кварце от гиперболической зависимости при больших временах отжига, отмеченное в работе [11]. В связи с этим для получения окончательных параметров рекомбинационных процессов необходимо проведение специальных исследований, учитывающих различную исходную концентрацию центров и широкий диапазон температур отжига.

Эффективность образования центров $\lambda = fp$, где f – число парамагнитных центров, создаваемых единичной дозой для единичной концентрации c_p , а p – мощность дозы. Мощность дозы γ -излучения рассчитана по содержанию U , Th , и K в породе и составила 3.4 мГр/год. Величина f и концентрация предцентров c_p были получены из дозовой зависимости: $f = 1.36 \cdot 10^{-2} \text{ ppm/Гр}$, $c_p = 480 \text{ ат. ppm}$. Аналогичные измерения

выполнены для пробы 103/85.

Температурная зависимость $T(t)$ определена по данным работы [8], в которой приведены результаты детального датирования пробы 96/85 $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ методом. Для определения температурной зависимости принята следующая температура закрытия для биотита – 633°K . Возраст пробы 96/85 составил 2.48 ± 0.03 млн. лет по биотиту. С учетом современной температуры ($\sim 10^\circ\text{C}$) для пробы 96/85 температурная зависимость может быть выражена уравнением:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{635} (1 + 5 \cdot 10^{-7} \cdot t),$$

где t – время в годах. Таким образом, $T_0 = 635\text{ K}$ и $\beta = 5 \cdot 10^{-7} \text{ лет}^{-1}$.

Концентрация Al -центров, измеренная в пробах кварца без дополнительного облучения и, следовательно, соответствующая концентрации, накопленной в природных условиях, позволяет оценить возраст кварца. Природная концентрация Al -центров в пробе 96/85 (10.8 ат.ррм) соответствует 2.46 и 2.74 млн. лет для рекомбинации центров по реакциям I и II порядков, соответственно. Аналогичная оценка возраста пробы 103/85, природная концентрация Al -центров в которой равна 1.4 ат.ррм, дает 2.13 и 2.28 млн. лет.

На рис. 5 схематично указан возраст наиболее древней пробы 96/85 (точка t_n). Как видно из полученных данных порообразующий кварц Эльджуртинского гранитного массива нельзя считать закрытой системой, так как концентрация центров еще далека от концентрации, соответствующей точке перегиба.

Сравнение полученных результатов с данными радиоизотопного датирования Эльджуртинского гранитного массива приведено в табл. 1.

Табл. 1. Данные датирования Эльджуртинского массива.

Возраст, млн. лет	Метод	Ссылка
2.48 ± 0.029 (96/85), биотит	$^{40}\text{Ar} - ^{39}\text{Ar}$	Hess, et al., 1993
1.92 ± 0.03 (103/85), биотит		
1.90 ± 0.24 (CG-C2-58B, аналог 103/85), биотит	$^{40}\text{Ar} - ^{39}\text{Ar}$	Gasis, et al., 1995
2.26 ± 0.02 (CG-C2-58B), калиевый полевой шпат		
1.8-1.9(поверхность), биотит и КППШ	K/Ar	Борсук, 1979
1.98(поверхность), биотит, ортоклаз, плагиоклаз	$Rb - Sr$	Журавлев и др., 1993
2.05 ± 0.04 (1/90, аналог 103/85), циркон	U/Pb	Grup, частное сообщение, 1999
2.03 ± 0.03 (67/90), циркон		
2.45 (96/85), кварц	ЭПР	Наши данные
2.13 (103/85), кварц		

Возраст пробы 96/85, полученный при учете линейной скорости аннигиляции центров, очень близок к результатам $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ датирования – 2.48 млн. лет [8]. В то же время результаты ЭПР датирования пробы 103/85 превышают значения $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ возраста – около 1.9 млн. лет [8]. Вполне разумное соответствие результатов ЭПР и $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$

датирования следует считать обнадеживающим, но не окончательным. Это обусловлено тем, что результаты ЭПР датирования сильно зависят от ряда параметров: энергии активации, вероятности рекомбинации и эффективности образования центров, режима остывания массива. Для оценки зависимости результатов ЭПР датирования от изменения параметров системы ниже приведены данные соответствующих расчетов.

Подчеркнем, что при расчете концентрации дочерних радиационных парамагнитных центров y по формулам (1.10) и (1.14) возникают и вычислительные трудности, связанные с огромным диапазоном изменения не только аргумента, но и показателя используемых специальных функций. При использовании численных методов интегрирования уравнений (1.7) и (1.11) эти трудности становятся неразрешимыми. Наличие полного аналитического решения позволяет выявить причины "машинного переполнения" и избежать этого, например, с помощью асимптотических приближений.

Рассмотрим влияние параметров модели на результаты датирования открытой остывающей системы. При этом ограничимся только случаем линейной скорости рекомбинации радиационных центров.

Как уже было указано, эффективность образования центров $\lambda = fp$, где f – число парамагнитных центров, создаваемых единичной дозой для единичной концентрации c_p , а p – мощность дозы. Расчет величины λ для большой серии образцов пород Эльджуртинского массива показал, что ее величина изменяется в пределах $\pm 15\%$. Причем данный параметр может быть измерен достаточно точно с помощью современных инструментальных методов анализа. В табл. 2 приведены результаты расчета возраста проб 96/85, 103/85 и двух гипотетических проб, в которых концентрация центров принята равной 60 и 0.35 ат.ррм, при изменении параметра λ в указанных пределах.

Табл. 2. Изменение возраста (млн. лет) в зависимости от λ при $T_0 = 635K$, $\beta = 5.015 \cdot 10^{-7} \text{год}^{-1}$, $E_a = 1.3\text{эВ}$, $K = 4.6 \cdot 10^{16} \text{год}^{-1}$, $c_p = 480 \text{ ат.ррм}$.

Конц. центров ат. ррм.	$\lambda, \text{год}^{-1}$			Разность	
	$8 \cdot 10^{-8}$	$9.6 \cdot 10^{-8}$	$11.5 \cdot 10^{-8}$	млн. лет	%
$y = 60.0$	3.91	3.63	3.40	0.51	14
96/85 ($y = 10.8$)	2.52	2.46	2.42	0.10	4
103/85 ($y = 1.4$)	2.15	2.13	2.11	0.04	2
$y = 0.35$	2.01	1.99	1.98	0.03	1.5

Расчет влияния T_0 необходимо проводить с учетом изменения константы остывания. Изменение только T_0 приведет к линейному сдвигу. Поэтому изменение начальной температуры сопровождалось расчетом новой константы остывания, для расчета которой для пробы 96/85 принят возраст 2.48 млн. лет и современная температура 10°C . В табл. 3 приведены результаты расчетов для пар величин T_0 и β .

Табл. 3. Изменение возраста (млн. лет) в зависимости от T_0 и β при $E_a = 1.3\text{эВ}$, $K = 4.6 \cdot 10^{16} \text{год}^{-1}$, $c_p = 480 \text{ ат.ррм}$, $\lambda = 9.6 \cdot 10^{-8} \text{год}^{-1}$.

Конц. центров ат. ppm.	$T_0, K; \beta, \text{год}^{-1}$			Разность	
	$635; 5.015 \cdot 10^{-7}$	$700; 5.942 \cdot 10^{-7}$	$800; 7.366 \cdot 10^{-7}$	млн. лет	%
$y = 60.0$	3.63	3.64	3.65	0.02	0.5
$96/85(y = 10.8)$	2.46	2.47	2.48	0.02	0.8
$103/85(y = 1.4)$	2.13	2.15	2.18	0.05	2
$y = 0.35$	1.99	2.02	2.06	0.07	2

Изменение обеих величин T_0, β не очень сильно влияет на возраст, однако, константа остывания влияет существенно сильнее. Для примера проведен расчет возраста (табл. 4) при изменении β без изменения начальной температуры ($T_0 = 635K$). Выбранное изменение константы β примерно соответствует скорости линейного остывания $250 - 400^\circ C/\text{млн. лет}$, что можно считать разумным диапазоном с геологической точки зрения.

Табл. 4. Изменение возраста (млн. лет) в зависимости от β при $T_0 = 635K, E_a = 1.3\text{эВ}, K = 4.6 \cdot 10^{16}\text{год}^{-1}, c_p = 480 \text{ ат. ppm.}, \lambda = 9.6 \cdot 10^{-8}\text{год}^{-1}$.

Конц. центров ат. ppm.	$\beta, \text{год}^{-1}$			Разность	
	$5.015 \cdot 10^{-7}$	$5.942 \cdot 10^{-7}$	$7.366 \cdot 10^{-7}$	млн. лет	%
$y = 60.0$	3.63	3.26	2.89	0.74	20
$96/85(y = 10.8)$	2.46	2.10	1.73	0.73	30
$103/85(y = 1.4)$	2.13	1.80	1.45	0.68	32
$y = 0.35$	1.99	1.68	1.36	0.63	32

Несколько замечаний о влиянии рекомбинационных параметров. При измерении энергии активации и предэкспоненциального множителя на основе экспериментальных отжигов (лабораторных или природных) расчет по соотношению Аррениуса приводит к получению обеих величин одновременно. Изменение одной из них при постоянной другой не совсем корректно, по крайней мере в рамках существующих на данный момент физико-химических моделей термоактивационных процессов. Для вариации одной из величин следует измерить одну из них независимо. Более того, величина K должна быть измерена при бесконечно высокой температуре, а реальные лабораторные измерения проводятся при конечных температурах. Тем не менее оценим влияние каждого из параметров отдельно. Зависимость возраста от энергии активации при постоянном значении $K_0 = 4.6 \cdot 10^{16}\text{год}^{-1}$ представлено в табл. 5.

Табл. 5. Изменение возраста (млн. лет) в зависимости от E_a при $T_0 = 635K, K = 4.6 \cdot 10^{16}\text{год}^{-1}, c_p = 480 \text{ ат. ppm.}, \beta = 5.015 \cdot 10^{-7}\text{год}^{-1}, \lambda = 9.6 \cdot 10^{-8}\text{год}^{-1}$.

Конц. центров ат. ppm.	$E_a, \text{эВ}$			Разность	
	1.3	1.4	1.5	млн. лет	%
$y = 60.0$	3.63	3.33	3.06	0.57	16
$96/85(y = 10.8)$	2.46	2.16	1.89	0.57	23
$103/85(y = 1.4)$	2.13	1.84	1.58	0.57	27
$y = 0.35$	1.99	1.71	1.46	0.53	27

Зависимость возраста от предэкспоненциального множителя при $E_a = 1.3\text{эВ}$ представлено в табл. 6.

Табл. 6. Изменение возраста (млн. лет) в зависимости от K при $T_0 = 635K$, $E_a = 1.3\text{эВ}$, $c_p = 480 \text{ ат. ppm.}$, $\beta = 5.015 \cdot 10^{-7} \text{ год}^{-1}$, $\lambda = 9.6 \cdot 10^{-8} \text{ год}^{-1}$.

Конц. центров ат. ppm.	$K, \text{ год}^{-1}$			Разность	
	$4.6 \cdot 10^{15}$	$4.6 \cdot 10^{16}$	$4.6 \cdot 10^{17}$	млн. лет	%
$y = 60.0$	3.43	3.63	3.82	0.39	11
96/85 ($y = 10.8$)	2.27	2.46	2.66	0.39	16
103/85 ($y = 1.4$)	1.94	2.13	2.32	0.38	18
$y = 0.35$	1.80	1.99	2.19	0.39	20

Анализ данных представленных в таблицах 2 – 6 свидетельствует о том, что наиболее существенными параметрами являются скорость остывания массива и рекомбинационные параметры. Последние могут быть измерены на основе исследования природных объектов, в которых процесс рекомбинации радиационных центров протекает при низких температурах, низком радиационном фоне и в течение длительного геологического времени. Эти исследования предполагается провести в будущем. Уточнение режима остывания требует не только экспериментальных исследований, но и уточнения физических и математических моделей, описывающих природные объекты.

2.2 Эльбрус - закрытая система.

Вулкан Эльбрус можно рассматривать как закрытую систему, в которой не происходит потери радиационных центров. Формирование вулканических пород и их остывание до среднегодовых температур, соответствующих земной поверхности, происходило в течение очень короткого периода времени по сравнению с возрастом Эльбруса. Более того, возраст вулкана невелик и вулканические породы почти не изменены более поздними процессами.

Реконструкция процессов развития вулканов представляет интерес не только с точки зрения фундаментальной науки, но и с точки зрения предсказания возможных катастрофических геологических процессов. Катастрофические извержения "потухших" или давно не извергавшихся вулканов, таких как Ксудач, Камчатка (1907 г), Катмай (1912 г), Безымянный, Камчатка (1956 г), Шивелуч, Камчатка (1964 г), Сент-Хеленс, США (1980 г), Пинатубо, Филиппины (1991 г), стимулировали поиск и изучение потенциально опасных вулканов. На европейской части России к потенциально действующим относится вулкан Эльбрус, у которого не было извержений примерно 1700-1800 лет, т.е. с I-II веков нашей эры [15].

Двухвершинный вулкан Эльбрус (рис. 7), являясь высочайшей вершиной Европы, из-за своего географического положения как бы "нависает" над плотно заселенными районами Северного Кавказа, прилегающими территориями юга России и севера Грузии. Вулкан Эльбрус - один из самых крупных центров оледенения Кавказа. Площадь

перекрывающих его ледников достигает 139км^2 , а суммарный объем льда оценивается примерно в 6км^3 . Наличие обширного снежно-ледового покрова делает вулкан Эльбрус еще более опасным. В случае будущих извержений их негативное воздействие будет катастрофически усилено за счет образования лахаров и крупномасштабных наводнений. Предварительные подсчеты показали, что при интенсивном таянии ледников и снежников, вызванном возможным возобновлением вулканической активности в пределах Эльбрусского центра, в реках Баксан, Малка и Кубань, берущих начало с вулкана, может резко повыситься уровень воды, что приведет к катастрофическим наводнениям. В результате этого могут быть прорваны плотины искусственных водохранилищ (Джегутинского и Краснодарского) и пострадать города Карачаевск, Черкесск, Армавир, Краснодар, Тырнауз, Прохладный, Моздок и многочисленные более мелкие населенные пункты. На рис. 8 представлена схема возможных районов затопления (заштрихованные области).

Возможность взрывного извержения Эльбруса подтверждается обнаруженными на больших расстояниях от вулкана отложениями вулканического пепла (рис. 9) [16]. На берегах Волги (около 800 км от Эльбруса), Кубани (около 280 км) и Отказненского водохранилища (180 км) были обнаружены линзы пеплового материала, состав которых соответствует Эльбрусским пеплам.

Геологическое строение, возраст и морфология вулкана Эльбрус стали изучаться со времени его посещения в 1852 г. немецким натуралистом Г. Абигом [1852]. Первые сведения о возрасте вулкана и петрографии пород некоторых лавовых потоков опубликованы А.П. Герасимовым [1910] и В.В. Дубянским [1914]. Однако до сих пор некоторые актуальные вопросы, в том числе и расшифровка времени образования вулкана и его последующих извержений, еще не решены. Более чем за вековую историю изучения вулкана Эльбрус проблема возрастного датирования его извержений являлась одной из наиболее сложных и дискуссионных. По мере развития методов датирования геологических событий исследователями Эльбруса применялись все более современные методы. Так на самых ранних этапах исследований время образования вулкана приблизительно оценивалось только по геологическим данным, затем стал очень широко применяться геолого-геоморфологический метод относительной геохронологии, а со второй половины прошлого столетия - методы изотопной геохронологии. Необходимо отметить, что в ранее полученных датировках по одному и тому же объекту были существенные различия, что было обусловлено объективными геолого-методическими причинами. Так в основе относительного геолого-геоморфологического метода датирования лежит анализ соотношений датируемого лавового потока или туфового горизонта с разновозрастными элементами рельефа (поверхности выравнивания, речные террасы) или моренными отложениями, связанными с датированными этапами оледенения. Первая и наиболее полная схема эволюции вулкана Эльбрус была разработана Н.В. Короновским [17].

Позже Е.К. Станкевич [18] на основании изучения состава пород, их фаций, морфологии, структурно-тектонического положения, данных изотопных методов датирования

и палеомагнитного анализа выделил в строении вулкана три разновозрастных вулканических комплекса. Возраст наиболее молодых вулканических пород составил 14 тыс. лет, а наиболее древних - 6.7 млн. лет.

В последние годы И.В. Чернышевым и др. [19] проведено датирование $K - Ar$ методом серии лавовых потоков. Эти результаты показали, что первый этап активности вулкана приходится на временной интервал 225-160 тыс. лет назад, а второй, после непродолжительного перерыва, начался менее 80 тыс. лет тому назад, и возможно продолжался в голоцене (менее 10 тыс. лет назад). $K - Ar$ датирование игнимбритов и ассоциирующих с ними туфов риолитового состава, относимых большинством исследователей к ранним стадиям (циклам) эволюции вулкана Эльбрус, дали близкие значения возрастов - от 740 до 880 тыс. лет. Значительный разрыв во времени (более 650 тыс. лет) между формированием пирокластических горизонтов и излиянием лавовых потоков вулкана Эльбрус объяснялся [19] тем, что эксплозивная деятельность не была непосредственно связана с активностью вулкана.

В заключение необходимо отметить, что имеющиеся изотопные датировки по основной массе породы и по породообразующим минералам довольно противоречивы и кроме того имеют жесткие методические ограничения, а для решения проблемы возрастного датирования циклов и этапов эволюции Эльбрусского вулканического центра необходимо проведение специальных исследований с применением новых методов. Так, $K - Ar$ и $^{40}Ar/^{39}Ar$ методами надежно определяется возраст не моложе 250-300 тыс. лет, а ошибка при измерении возраста моложе 100-70 тыс. лет составляет уже от 45 до 85%. Высокая степень насыщенности пород атмосферным аргоном при очень низкой концентрации радиогенного ^{40}Ar или присутствие избыточного ^{40}Ar в породе или минерале обычно не дают возможности для датирования или же резко увеличивают полученные значения $K - Ar$ возрастов. Радиоуглеродный метод (^{14}C) применим в интервале времен от 40-50 тыс. лет и менее. Для широкого использования ^{14}C метода при датировании вулканических образований Эльбруса имеются географические ограничения. Значительная часть лавовых потоков и туфовых горизонтов расположена на высотах с отметками от 3200 м и выше, где отсутствуют почвенный слой и травяно-кустарниковая растительность, а сама вулканическая постройка с отметок 3700м и выше покрыта вековыми ледниками, что естественно препятствовало образованию почв. Следовательно, имеется временной интервал продолжительностью 200-250 тыс. лет, который не может быть продатирован вышеуказанными методами и является как бы "мертвой" зоной. Перекрыть его можно при помощи метода ЭПР датирования по породообразующему кварцу, позволяющему датировать события в интервале времен от единиц миллионов до нескольких тысяч лет [4].

Именно по указанным причинам для восстановления хронологии вулканической деятельности Эльбруса был применен метод ЭПР датирования. Особенности строения и расположения пород Эльбруса позволяют применить самую простую модель закрытой системы при определении их возраста. Методически такие измерения основаны на

определении величины палеодозы, т.е. той дозы облучения, которую минерал получил за время нахождения в природе. Методический принцип очень прост. Из образцов пород выделяют конкретный минерал, в нашем случае кварц. С помощью метода ЭПР измеряют концентрацию радиационных центров в минерале без дополнительного облучения и после искусственного лабораторного облучения последовательными дозами. Полученную таким образом зависимость экстраполируют в область нулевых концентраций центров, что и дает величину палеодозы. Фактически минерал подвергается искусственному старению. Измеренная величина палеодозы равна произведению интенсивности радиационного фона на возраст минерала. В рамках модели закрытой системы возраст минерала равен частному от деления палеодозы на интенсивность радиационного фона, расчет которого проводится по концентрации радиоактивных элементов с учетом поглощающей способности минерала для каждой компоненты излучения.

Для ЭПР датирования была отобрана серия проб вулканических пород Эльбруса. Места отбора указаны на рис. 10. Результаты определения возраста пород Эльбруса методом ЭПР датирования приведены в табл. 7. В этой таблице также указаны известные данные по датированию извержений Эльбруса другими методами.

В результате проведенных исследований впервые в России с помощью метода ЭПР датирования были подтверждены выделенные по геологическим данным циклы активности Эльбрусского вулканического центра и определены их временные интервалы. Наиболее ранняя активизация Эльбруса проявилась в интервале между 231 и 178 тыс. лет тому назад, затем она сменилась периодом денудации (разрушения) вулканической постройки. Возобновление вулканической активности, приведшее к накоплению мощной (до 1,2 км) вулканической толщи, происходило дважды: 137-136 и в интервале 85-46 тыс. лет тому назад, с внедрением субвулканических тел в промежутке между 56 и 45 тыс. лет назад. Многие вулканические породы, сформировавшиеся в период 85-46 тыс. лет назад, омоложены более поздними процессами в неизвестной степени. Затем произошли значительные тектонические подвижки и началось накопление вулканических разрезов в долинах рек Баксан и Малка в интервале времени 49-22 тыс. лет тому назад. После позднелайстоценового оледенения вулканическая активность возобновлялась несколько раз. Однако методом ЭПР удалось пока продатировать только одно извержение, произошедшее 6,7 тыс. лет тому назад. Представленный перечень извержений в течение ранних и поздних этапов кальдерного и посткальдерного циклов является далеко не полным, последующие ЭПР датирования могут его расширить и позволят получить данные о времени проявления докальдерного цикла.

Табл. 7. Датирование различными методами геологических событий, связанных с активностью вулкана Эльбрус.

Метод дати-рования	Геологическое событие		Возраст, тыс. лет
Геомор-фологи-ческий Н.В.Коро-новский	Слабая фумарольная деятельность; Излияния андезито-дацитовых лав; Формирование восточного конуса Эльбруса.		Голоцен < 10
	Излияния андезито-дацитовых и дацитовых лав; Выбросы пирокластического материала; Формирование западного конуса Эльбруса.		Верхний плестоцен 150-200
	Излияния андезито-дацитовых и дацитовых лав; Выбросы туфового и пеплового материала;		Средний плестоцен 200-770
	Перерыв в вулканической деятельности; Возможно, извержения дацитов (Кюкюртли);		Нижний плестоцен 780-1770
	Мощные извержения дацитов и липаро-дацитов, липаритовых туфов, игнимбритов и туфолав;		Верхняя часть верхнего плиоцена 1770-2600
	Извержения липарито-дацитовых лав и туфов.		Нижняя часть верхнего плиоцена 2600-3400
К – Ar И.В.Черны-шев, А.Г.Гур-банов и др.	Дацит из лавового потока (р. Малка);		30; 70
	Дацит из лавового потока (у обс. Терскол)		180
	Дацит из лавового потока (р. Битюк-тюбе);		220-225
	Дацитовые игнимбриты (р. Битюк-тюбе)		810-880
	Риолиты. Река Уллукам.		600-1450
	Игнимбриты синкальдерные. Устье Река Чуч-кур.		790
	Трахиандезиты синкальдерные. Устье р. Худес.		800
	Игнимбриты. Река Ирикчат.		6000-6700
Радио-углерод-ный А.Г.Гур-банов и др.	Региональные лесные пожары.		0,41
	Конус выноса обвального происхождения, вызванный землетрясением.		2,52
	Катастрофические лахары.		5,12 6,17 0,99
	Датирование отдельных извержений (по прослоям пеплов с углистым материалом).		7,23 21,0
			~ 100 – 200
ЭПР, наши данные	Ранний этап кальдерного цикла развития Эль-брусского вулканического центра (ЭВЦ). Игнимбриты и туфы риолитового состава.	р. Чемарткол	197-183
		р. Тузлук	210-179
	Поздний этап кальдерного цикла развития (ЭВЦ). Лавы дацитового состава.	Сылтранская вулканическая постройка	~ 137
	Посткальдерный цикл развития ЭВЦ. Лавы дацитового состава.	Верховья р. Баксан	23
		Верховья рек Уллукам, Малка	49; 45; 43; 15
		Вулк. Таш-тебе	39

Приложение

Для одночастичных процессов дифференциальное уравнение скорости накопления структурных радиационных дефектов имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k(t)y, \quad (2.1)$$

где y – концентрация радиационных центров, λ – эффективность образования центров, c_p – концентрация родительских центров (предцентров), t – время, $k(t)$ – вероятность аннигиляции, зависимость которой от температуры выражается соотношением Аррениуса

$$k(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{E}{k_B T(t)}\right). \quad (2.2)$$

Здесь E – энергия активации, k_B – постоянная Больцмана, $T(t)$ – абсолютная температура и K – вероятность аннигиляции при бесконечно высокой температуре.

Для решения воспользуемся следующей зависимостью $T(t)$:

$$T(t) = \frac{T_0}{1 + \beta t},$$

где T_0 – начальная температура системы; β – константа остывания системы. Таким образом, после подстановки $T(t)$ в уравнение (2.2) получим:

$$k(t) = K \cdot \exp\left(-\frac{E(1 + \beta t)}{k_B T_0}\right) = k(0) \cdot e^{-t/\tau}; \quad (2.3)$$

$$k(0) = K \exp\left(-\frac{E}{k_B T_0}\right), \quad \tau = \frac{k_B T_0}{\beta E}.$$

Уравнение (2.1) после подстановки в него $k(t)$ из формулы (2.3) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k(0)e^{-t/\tau}y. \quad (2.4)$$

Для интегрирования уравнения (2.4) перейдем к новой независимой переменной

$$\nu = \nu(t) = \tau k(t) = \tau k(0)e^{-t/\tau}, \quad (2.5)$$

и положим $a = \lambda\tau$. В результате получим уравнение

$$\frac{dy}{d\nu} - \left(\frac{a}{\nu} + 1\right)y = -\frac{ac_p}{\nu} \quad (2.6)$$

с начальным условием $y|_{\nu(0)=0}$. Решая (2.6), находим

$$y = ac_p \nu^a e^\nu [\Gamma(-a, \nu(t)) - \Gamma(-a, \nu(0))], \quad (2.7)$$

где $\Gamma(r, x) = \int_x^\infty e^{-z} z^{r-1} dz$ – неполная гамма-функция. Если $r \neq 0, -1, -2$, то функция $\Gamma(r, x)$ представляется рядом

$$\Gamma(r, x) = \Gamma(r) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{a+k}}{k!(a+k)}; \quad (2.8)$$

для $r = -n$ имеем [20]

$$\Gamma(-n, x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left[-\gamma - \ln x + e^x \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} \right) \frac{1}{x^k} k! - e^{-x} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \frac{m!}{x^{m+1}} \right]$$

где γ – постоянная Эйлера.

При высоких начальных температурах T_0 и медленном остывании (т.е. при больших $k(0)$ и τ) значение $\nu(0)$ становится очень большим (в нашем случае $\nu(0) \approx 10^{12}$). Это означает, что $\Gamma(-a, \nu(0))$ – пренебрежимо малая величина и мы можем переписать (2.7) в виде

$$y = ac_p \nu^a e^\nu \Gamma(-a, \nu(t)). \quad (2.9)$$

В ряде случаев удобно иметь приближенное решение уравнения (2.1) при больших значениях времени t , т.е. при малых значениях ν . При таких предположениях

$$y \cong c_p, \quad \text{если } 0 < a < 1; \quad (2.10)$$

$$y \cong c_p [1 + \nu(\gamma + \ln \nu)], \quad \text{если } a = 1; \quad (2.11)$$

$$y \cong c_p \left(1 - \frac{\nu}{a-1} \right), \quad \text{если } a > 1. \quad (2.12)$$

При малых временах t решение (2.9) хорошо аппроксимируется функцией

$$y = \frac{c_p}{\nu} \left[1 - \frac{(a+1)}{\nu} + \frac{(a+1)(a+2)}{\nu^2} - \frac{(a+1)(a+2)(a+3)}{\nu^3} + \dots \right].$$

Процесс накопления радиогенных продуктов для двухчастичной рекомбинации описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(c_p - y) - k(t)y^2, \quad (2.13)$$

в котором через y , λ , и c_p обозначены те же величины, что и в уравнении (2.1); $k(t) \cdot y$ – вероятность рекомбинации. Положим и перейдем к переменной ν . В результате получим следующее уравнение

$$\nu \frac{dy}{d\nu} = \nu y^2 + ay - b \quad (2.14)$$

с новым начальным условием $y(\nu(0)) = 0$. Это уравнение является частным случаем уравнения Риккати [21]

$$g(\nu) \frac{dy}{d\nu} = f_2(\nu)y^2 + f_1(\nu)y + f_0(\nu), \quad (2.15)$$

общее решение которого задается формулой

$$y = y_0 + \frac{\Phi}{C - \int \Phi \frac{f_2}{g} d\nu}, \quad (2.16)$$

где $\Phi = \exp \left(\int (2f_2 y_0 + f_1) d\nu / g \right)$ и y_0 – частное решение. Таким образом, чтобы решить уравнение (2.14) нужно найти его частное решение. Введем функцию $u = u(\nu)$, связанную с y соотношением

$$y = -\frac{1}{u} \frac{du}{d\nu}.$$

Уравнение (2.14) для функции $u = u(\nu)$ принимает вид

$$\nu \frac{d^2 u}{d\nu^2} - a \frac{du}{d\nu} - bu = 0, \quad a > 0, \quad b > 0. \quad (2.17)$$

Выполним теперь следующую замену переменных, полагая

$$x = 2\sqrt{b\nu}, \quad w = u\nu^{-\mu/2}, \quad \mu = a + 1.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dw}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) w = 0, \quad (2.18)$$

представляющее собой модифицированное уравнение Бесселя. Его общее решение имеет вид

$$w = C_1 I_\mu(x) + C_2 I_{-\mu}(x),$$

где

$$I_\mu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(\mu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2s},$$

$$I_{-\mu}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(-\mu + s + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\mu+2s}$$

модифицированные функции Бесселя, а C_1, C_2 – постоянные интегрирования. Возвращаясь к функции $u = u(\nu)$, получаем общее решение (2.17)

$$u = \nu^{\frac{a+1}{2}} \left[C_1 I_{(a+1)}(2\sqrt{b\nu}) + C_2 I_{-(a+1)}(2\sqrt{b\nu}) \right]. \quad (2.19)$$

Чтобы найти частное решение y_0 уравнения Риккати (2.14), положим в общем решении (2.19) $C_1 = 0, C_2 = 1$, т.е. рассмотрим функцию

$$u_0 = \nu^{\frac{a+1}{2}} I_{-(a+1)}(2\sqrt{b\nu}). \quad (2.20)$$

Тогда

$$y_0 = -\frac{du_0/d\nu}{u_0}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\frac{du_0}{d\nu} = \sqrt{b\nu}^{\frac{a}{2}} I_{-a}(2\sqrt{b\nu}).$$

Следовательно,

$$y_0 = -\sqrt{b} \frac{\nu^{\frac{a}{2}} I_{-a}(2\sqrt{b\nu})}{\nu^{\frac{a+1}{2}} I_{-(a+1)}(2\sqrt{b\nu})}. \quad (2.21)$$

После подстановки (2.21) в уравнение (2.15) с учетом $g(\nu) = \nu, f_2(\nu) = \nu, f_1(\nu) = a, f_0(\nu) = -b$, получим общее решение уравнения (2.14):

$$y = -\frac{du_0/d\nu}{u_0} + \frac{\nu^a/u_0^2}{C - \int_0^\nu \frac{\nu^a}{u_0^2} d\nu}.$$

Константу интегрирования C можно найти из начального условия, которое даст

$$C = \frac{\nu(0)^a}{u'_0(\nu(0))u_0(\nu(0))} + \int_0^{\nu(0)} \frac{\nu^a}{u_0^2} d\nu. \quad (2.22)$$

После простых преобразований окончательное решение имеет вид

$$y = \frac{u'_0(\nu(0))}{u_0(\nu(0))} + \frac{\nu^a/u^2}{\frac{\nu(0)^a}{u'_0(\nu(0))u_0(\nu(0))} + \int_0^{\nu(0)} \frac{\nu^a}{u_0^2} d\nu}. \quad (2.23)$$

Для достаточно больших времен t можно записать приближенное решение уравнения (2.13). В случае малых a , т.е. $0 < a < 1$,

$$y = c_p \left(1 + \frac{1}{C} \frac{c_p \pi^2 \tau^a k(0)^a}{\Gamma(a)^2 \sin^2(\pi a) b^{1-a}} e^{-at/\tau} \right),$$

а для $a > 1$

$$y = c_p \left(1 - \frac{c_p \tau k(0)}{a-1} e^{-t/\tau} \right).$$

Авторы выражают благодарность Р.Шабалину за проведение ЭПР измерений и Р.Грюну за предоставленную программу для расчета интенсивности радиационного фона. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №01-05-65393) и программы "Университеты России".

Список литературы

- [1] Thomson W. (Lord Kelvin) The age of the earth as an abode fitted for life. Phil. Mag. 1989. (5). 47. 66-90.
- [2] Фор Г. Основы изотопной геологии. М.: Мир. 1989. 590 с.
- [3] Weil J.A. A review of electron spin spectroscopy and its application to the study of paramagnetic defects in crystalline quartz // Phys. Chem. Minerals. 1984. Vol. 10. P. 149-165.
- [4] Ikeya M. New applications of electron spin resonance. Dating, Dosimetry and Microscopy. World Scientific: Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, Bangalore, 1993.
- [5] Dodson M.H. Closure temperature in cooling geochronological and petrological systems // Contrib. Mineral. Petrol. 1973. Vol. 40. P. 259-274.
- [6] Toyoda S., Ikeya M. Thermal stabilities of paramagnetic defect and impurity centers in quartz: Basis for ESR dating of thermal history // Geochemical J. 1991. Vol. 25. P. 437-445.
- [7] Philip H., Cisternas A., Gvishiani A., et al.. The Caucasus: an actual example of the initial stage of continental collision // Tectonophysics 1989. Vol. 161. P. 1-21.
- [8] Hess J.C., Lippolt H.J., Gurbanov A.G., et al.. The cooling history of the Late Pliocene Eldzhurtinskiy granite (Caucasus, Russia) and the thermochronological potential of grain-size/age relationships // Earth and Planet. Sci. Let. 1993. Vol. 117. P. 393-406.

- [9] Мельников П.В., Моисеев Б.М., Ставров О.Д. Палеодозиметрическое датирование жильного кварца методом электронного парамагнитного резонанса // Изв. АН СССР Сер. геол. 1990. N 9. С. 64-70.
- [10] Ikeya M., Toyoda S. Thermal effect in metamorphic rock around an intrusion zone with ESR studies // Appl. Magn. Res. 1991. Vol. 2. P. 69-81.
- [11] Toyoda S., Ikeya M. Thermal stabilities of paramagnetic defect and impurity centers in quartz: Basis for ESR dating of thermal history // Geochemical J. 1991. Vol. 25. P. 437-445.
- [12] Gazis A.C., Lanphere M., Taylor H.P. Jr., Gurbanov A.G. $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ and $^{18}\text{O}/^{16}\text{O}$ studies of the Chegem ash-flow caldera and the Eldjurta granite: Cooling of two late Pliocene igneous bodies in the Greater Caucasus Mountains, Russia // Earth and Planet. Sci. Let. 1995. Vol. 134. 377-391.
- [13] Борсук А.М. Мезозойские и кайнозойские магматические формации Большого Кавказа. М.: Наука, 1979. 299 с.
- [14] Журавлев Д.З, Негрей Е.В. Синхронность формирования Эльджуртинского гранита и рудоносность метасоматитов Тырныауза (Северный Кавказ) по данным Rb-Sr метода // ДАН СССР. 1993. Т. 332. N 4. 482-485.
- [15] Богатилов О.А., Мелекесцев И.В., Гурбанов А.Г. и др. Радиоуглеродное датирование голоценовых извержений вулкана Эльбрус (Северный Кавказ, Россия) // ДАН СССР. 1998. Т. 363. N 2. 219-221.
- [16] Богатилов О.А., Мелекесцев И.В., Гурбанов А.Г., Сулержицкий Л.Д. Кошуг Д.Г., Р.Грюн и др. Катастрофическая плейстоценовая и голоценовая активность вулканического центра Эльбрус (Северный Кавказ, Россия): события и хронология по данным ^{14}C , ЭПР и K-Ar датирования // Вулканология и сейсмология 2001. ? 2. 3-17.
- [17] Короновский Н.В. Геологическое строение и история развития вулкана Эльбрус / Оледенение Эльбруса. М.: Изд-во МГУ. 1968. 15-72.
- [18] Станкевич Е.К. Новейший магматизм Большого Кавказа. Л.: Недра. 1976. 232 с.
- [19] Чернышёв И.В., Лебедев В.А., Бубнов, Аракелянц М.М., С.Н, Гольцман Ю.В. Этапы магматической активности Эльбрусского вулканического центра (Большой Кавказ): изотопно-геохронологические данные // ДАН СССР. 2001. Т. 380. N 3. 384-389.
- [20] Бейтмен Г., Эрдеи А. Высшие трансцендентные функции. М.: 1974. т. II.
- [21] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: 1971.

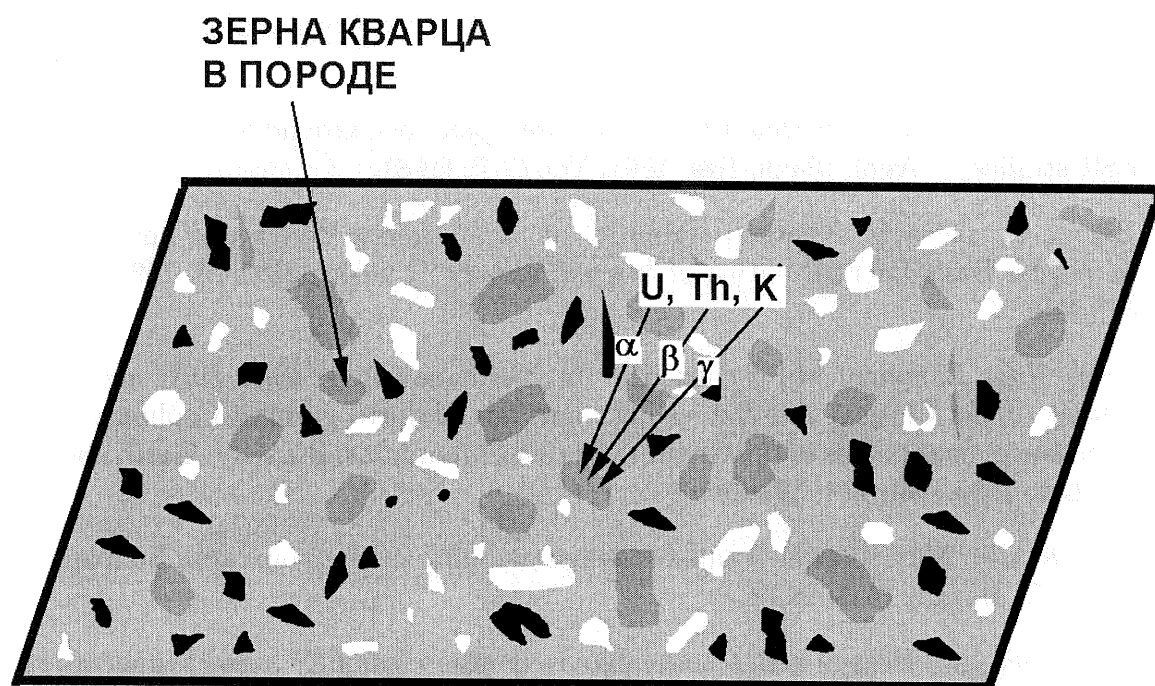


Рис. 1 Облучение зерна кварца в граните.

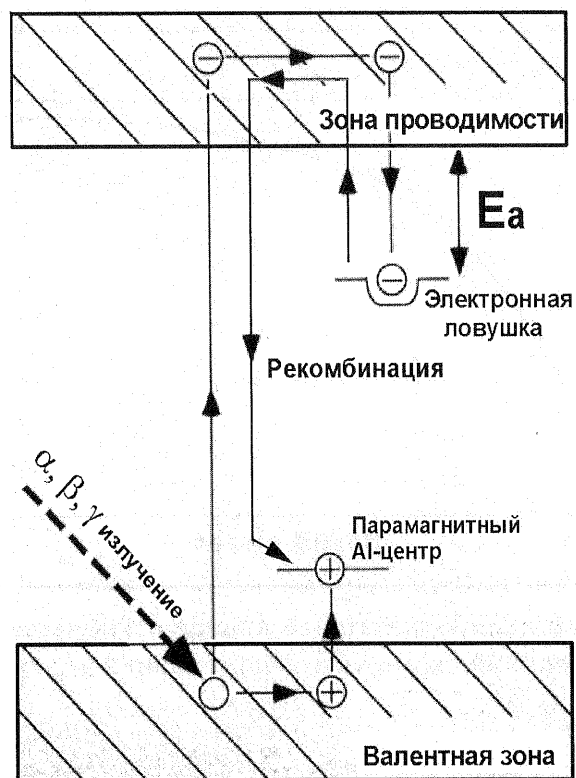


Схема образования радиационных центров

Рис. 2 Схема образования и рекомбинации радиационных парамагнитных центров в кварце.

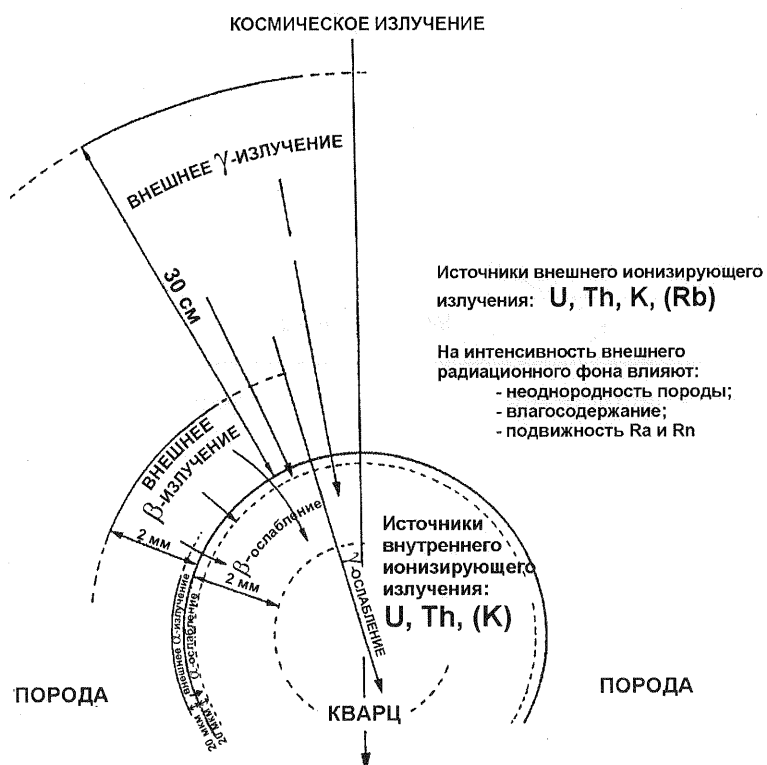


Рис. 3 Воздействие различных компонент излучения на кварц.

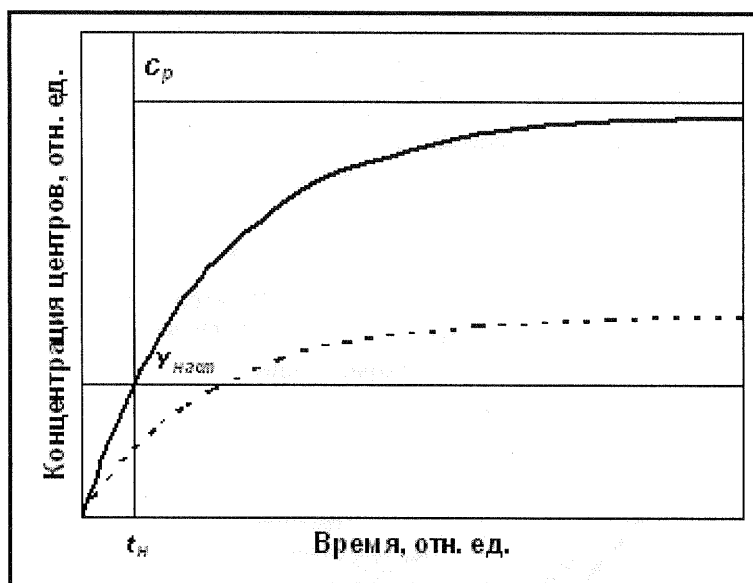


Рис. 4 Накопление радиационных центров в кварце в закрытой системе и в системе с постоянной скоростью рекомбинации центров.

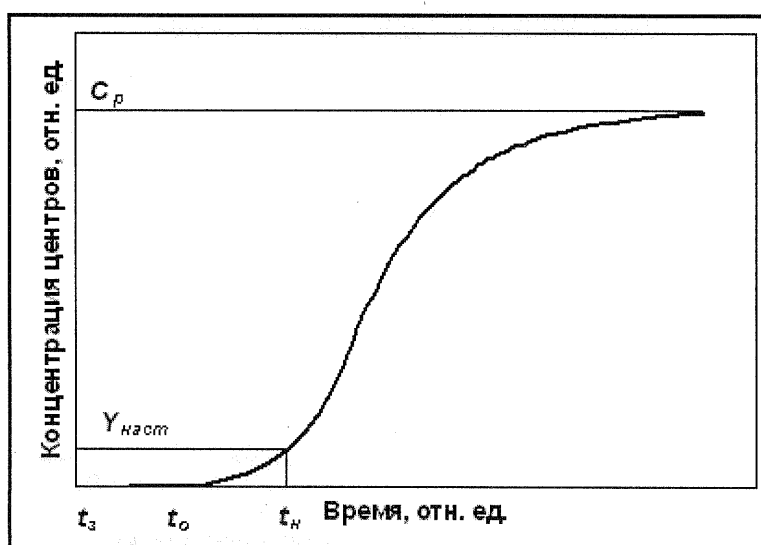


Рис. 5 Накопление радиационных центров в кварце в открытой системе.

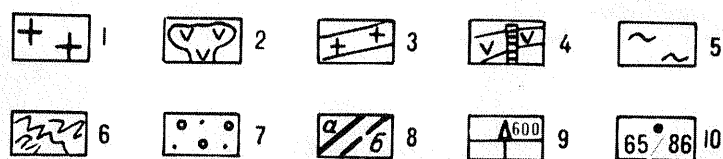
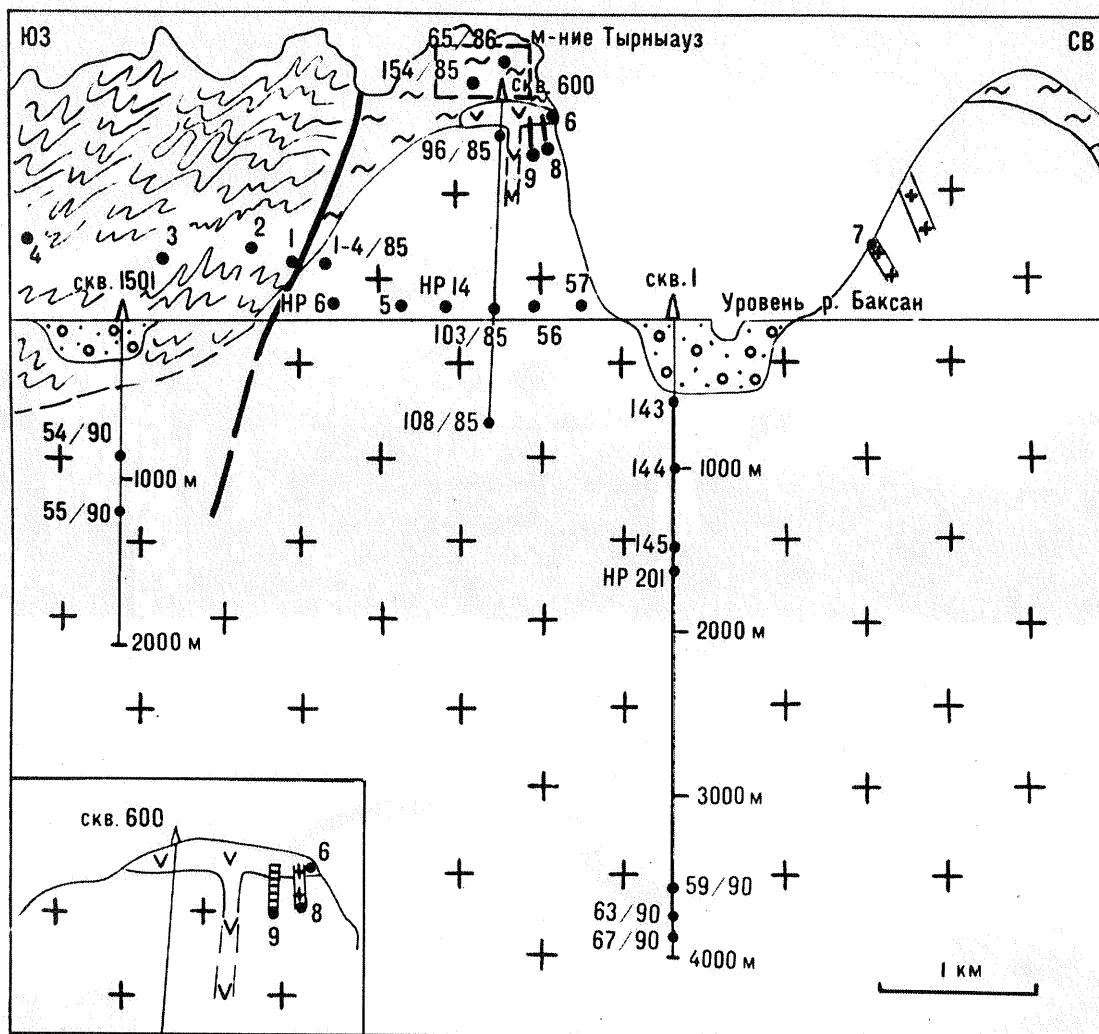


Рис. 6 Сечение Эльджуртинского гранитного массива: 1 - Эльджуртинский гранит, 2 - некк риолитового состава, 3 - дайки лейкократовых гранитов, 4 - дайки витроандезитов, 5 - метаморфические породы эльджуртинской свиты, 6 - метаморфические породы макерской серии (сланцы, гнейсы), 7 - аллювиальные речные отложения, 8а - прослеженные зоны разломов, 8б - предполагаемые зоны разломов, 9 - местоположение скважины и ее номер, 10 - номер пробы.



Рис. 7 Вулкан Эльбрус.

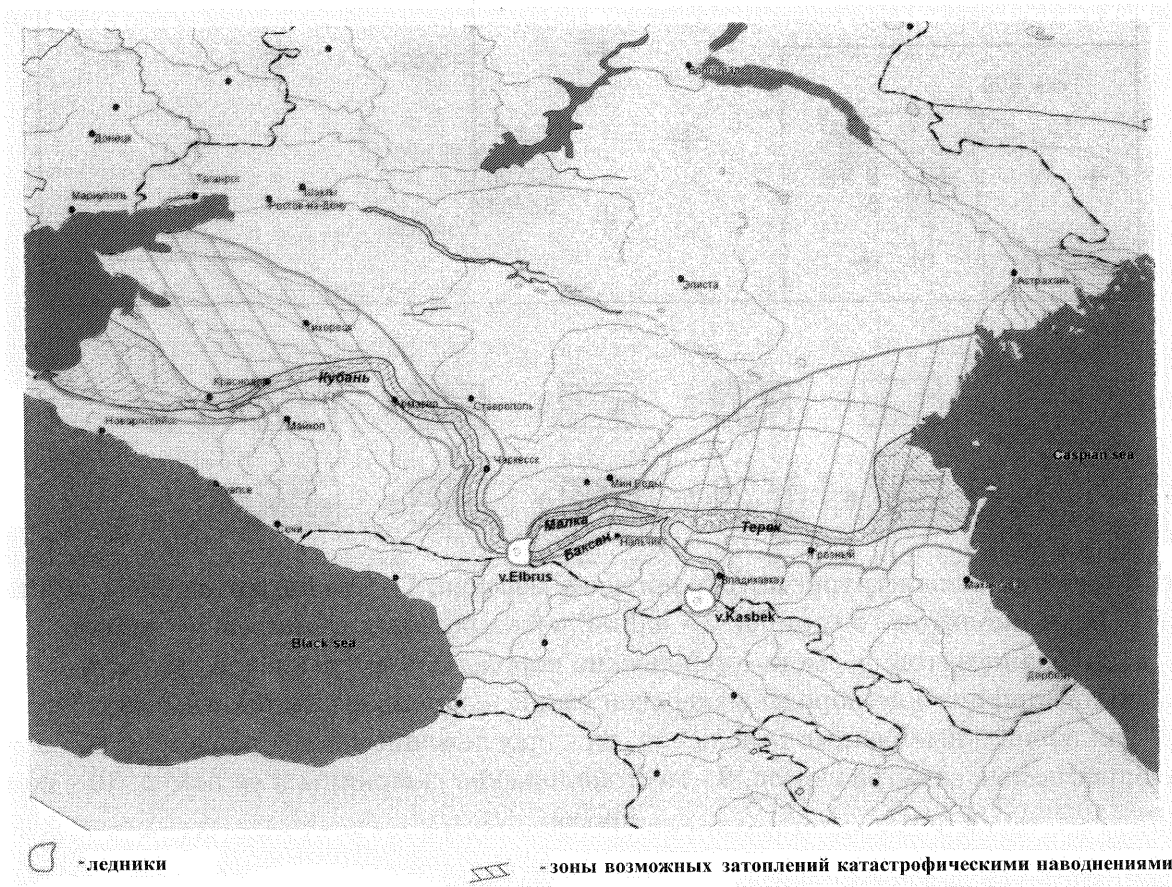


Рис. 8 Зоны возможного затопления в случае катастрофического извержения вулкана Эльбрус (отмечены штриховкой).

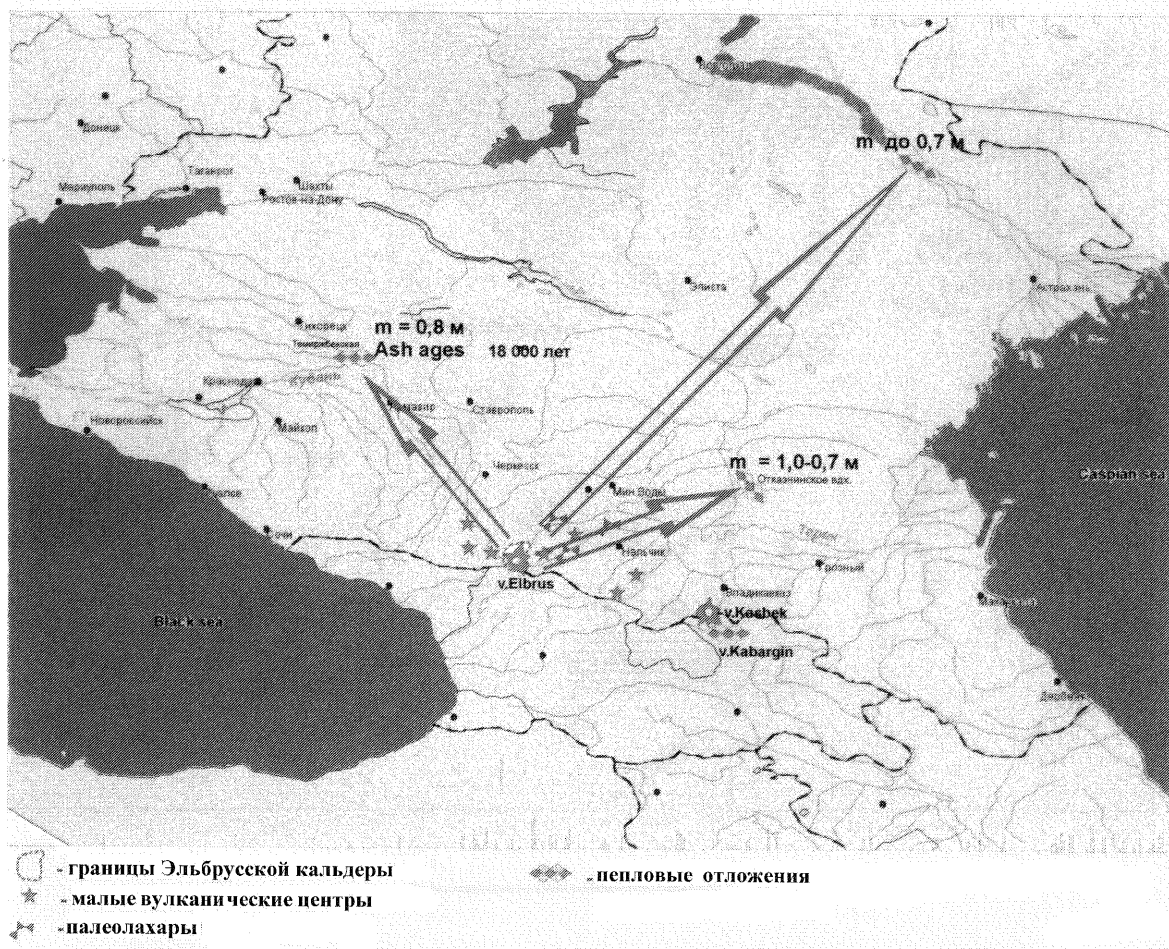


Рис. 9 Места обнаружения следов эксплозивных извержений Эльбруса.

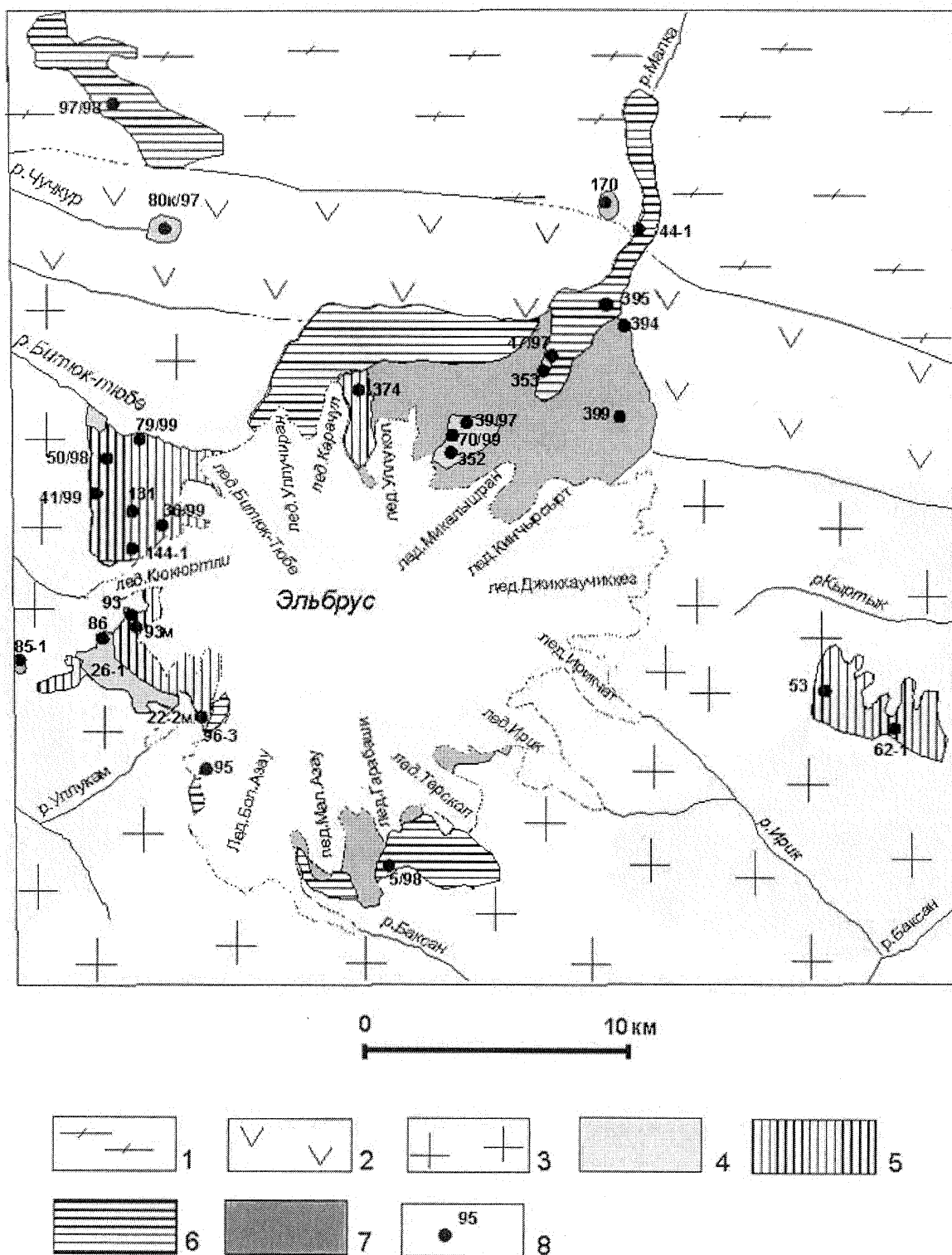


Рис. 10 Схематическая геологическая карта с местами отбора проб вулканитов для ЭПР датирования: 1-3 - структурно- формационные зоны (1 - Бечасынская, 2 - Передового хребта, 3 - Главного хребта); 4-7 - вулканиты (4 - раннего цикла, 5 - синкальдерного этапа, 6-7 - посткальдерных циклов: 6 - неоплейстоценового, 7 - голоценового); 8 - места отбора проб и их номера.