

Жесткое тестирование точности линейного алгоритма робастной стабилизации.

В.В. Александров, С.С. Лемак, И.Н. Соболевская

Институт математических исследований сложных систем
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Рассмотрена задача тестирования точности стабилизации управляемой системы, когда часть параметрических и постоянно-действующих возмущений известна с точностью до множества. Сформулированы условия получения отличного результата и "жесткой" и "мягкой" оценок тестирования. Приведены примеры "жесткого" и "мягкого" тестирования. Рассмотрен случай стохастической управляемой системы.

Постановка задачи тестирования

Постановка задачи тестирования, ориентированная на получение гарантированных показателей работы алгоритма управления (стабилизации) и учитывающая возможное наихудшее поведение параметрических и постоянно действующих возмущений, мешающих стабилизации предложена в работе [1]. Ниже рассмотрено применение этой методики к линейным алгоритмам стабилизации. Введено понятие "жесткого" и "мягкого" тестирования.

Пусть математическая модель возмущаемой динамики управляемой системы имеет вид

$$\dot{y} = f(y, w, q, t), \quad y(t_0) \in Y, \quad w(\cdot) \in \mathcal{W}, \quad q(\cdot) \in \mathcal{V}. \quad (1)$$

Включения $w(\cdot) \in \mathcal{W} = \{w(\cdot) \in KC \mid w(t) \in \Omega \subset R^m\}$, $y(t_0) \in Y$, $q \in \mathcal{V}$ описывают ресурсы управлений и возмущений (начальных и постоянно действующих). Требуется оценить качество управления в смысле некоторого функционала $J(w, q, y(t_0))$, причем алгоритм управления при этом неизвестен, а известным является только выходной сигнал системы управления.

Рассмотрим линейную систему уравнений в отклонениях $x = y - \tilde{y}$ от желаемого движения $\tilde{y}(t)$, подлежащего стабилизации

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + C(t)q, \quad (2)$$

где $u = w - \tilde{w} \in U$ — оставшиеся ресурсы по управлению для решения задачи стабилизации.

Возмущения q представим в виде двух составляющих $q = q_0 + \xi$, причем составляющую q_0 постоянно действующего возмущения считаем произвольными кусочно-непрерывными функциями, принимающими любые значения из заданного множества $q_0(t) \in Q \subset R^s$, а ξ — векторный белый шум с известной матрицей интенсивности $F(t) \geq 0$, $M[\xi(t)\xi^\top(t')] = F(t)\delta(t - t')$ (M — операция взятия математического ожидания). Начальные возмущения также имеют две составляющие $x(0) = r = r_0 + \eta$, где $r_0 \in R_0 \subset R^n$, а η — случайная величина с нулевым средним $M[\eta] = 0$ и известной матрицей ковариации $P_0 = M[\eta\eta^\top]$.

Обычно управляющие сигналы формируются как функции времени и отклонений x : $u = u(t, x)$. Рассмотрим случай, когда они формируются в виде линейной обратной связи по отклонениям $u = K(t)x$.

Обозначим $v = (q_0, r_0)$ — возмущения системы, известные с точностью до множества. Введем следующий критерий точности стабилизации

$$J(u, v) = M[x(t_k)^\top S x(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} (x^\top G x + u^\top N u) dt], \quad (3)$$

где S, G неотрицательно определенные симметричные матрицы, N — положительно определена, t_k конечный момент управления. Процедура тестирования [1], [2] состоит из трех этапов. На первом этапе находится нижняя (наилучшая) оценка точности стабилизации путем решения максиминной задачи с определенной дискриминацией для управления

$$\inf_{u \in U} J(u, v) \rightarrow \sup_{v \in V}, \quad (4)$$

где $V = Q \times R_0$. Определим множества U_0, V_0 таким образом, что $U \subset U_0$, а $V_0 \subset V$ и существует седловая точка и цена (в силу теоремы Н.Н.Красовского [3]) игры:

$$\max_{v \in V_0} \min_{u \in U_0} J(u, v) = \min_{u \in U_0} \max_{v \in V_0} J(u, v) = J^0(u^0(x, t), v^0(u, x, t)) = J_0^0. \quad (5)$$

Цена игры J_0^0 является нижней оценкой точности стабилизации для любого тестируемого управления \tilde{u} , поскольку

$$J_0^0 = J(u^0, v^0) \leq \min_{u \in U} J(u, v^0) \leq J(\tilde{u}, v^0) = \tilde{J}.$$

Сама процедура тестирования в этом случае сводится к последовательному выполнению двух шагов:

1-й шаг. После представления данных о множестве возмущений V решается динамическая игра (5), что позволяет найти седловую точку (отличный результат) и оптимальную контрстратегию $v^0(t, x, u)$.

2-й шаг. Происходит процедура тестирования: на вход системы (2) подаются сигналы управления \tilde{u} , вырабатываемые тестируемым алгоритмом стабилизации, а также наихудшие возмущения v^0 , вычисляется результат \tilde{J} и путем сравнения с отличным результатом получаем оценку "мягкого" тестирования: $\kappa^* = \frac{J_0^0}{\tilde{J}} * 10$.

В случае, если $U = U_0$ и $V = V_0$, найденная оценка может быть достижима, поскольку наличие дискриминации, заключающейся в использовании тестирующей системой информации об управлении \tilde{u} и координатах x является естественным фактом для задач гарантированного тестирования.

Если нет совпадения множеств $U = U_0$ и $V = V_0$, или (и) отсутствует седловая точка игры (5), то процедура тестирования усложняется, поскольку для определения стратегии тестирования необходимо решать задачу экстремального синтеза:

$$J_0 = \max_{v \in V} \min_{u \in U_0} J(u, v) \leq \min_{u \in U} \max_{v \in V} J(u, v) \leq \max_{v \in V} J(\tilde{u}, v) = \tilde{J}_{\max}. \quad (6)$$

Сравнивая с отличным результатом J^0 , получим оценку "жесткого" тестирования

$$\kappa_* = \frac{J_0}{\tilde{J}_{\max}} * 10 \leq \kappa^*,$$

поскольку $J_0 \leq J^0$, а $\tilde{J} \leq \tilde{J}_{\max}$.

Вычисление отличного результата тестирования

Рассмотрим первый этап методики тестирования — получение отличного результата и формирование оптимальной контрстратегии. Предположим сначала, что стохастические составляющие возмущений отсутствуют ($\xi \equiv 0$ и $\eta \equiv 0$), а расширение множества допустимых управлений U_0 совпадает со всем пространством. Вычислим отличный результат на множестве программных контрстратегий $v(\cdot) \in V = \{q(\cdot) \in \mathcal{L}_2^s[t_0, t_1] | q(t) \in Q\} \times \{\|r\| \leq 1\}$. Таким образом отличный результат находим из решения задачи

$$J_0^0 = \max_{v \in V} \min_u J(u, v), \quad (7)$$

с функционалом качества

$$J = x(t_k)^\top S x(t_k) + \int_{t_0}^{t_k} (x^\top G x + u^\top N u) dt. \quad (8)$$

Решение задачи (7) получим методом последовательных приближений. Пусть на текущем шаге решения внешней задачи на максимум мы получили решение $v = (q(t), r)$. Рассмотрим решение внутренней задачи при известном v . Оптимальные u из уравнения Беллмана для системы (2) и функционала (8)

$$V_t + \min_u [V_x^\top (Ax + Bu + Cq) + x^\top G x + u^\top N u] = 0 \quad (9)$$

где $V(t, x)$ — функция Беллмана. Условие минимума в (9) $\frac{\partial}{\partial u} [V_x^\top Bu + u^\top N u] = 0$ приводит к уравнению $u^0 = -\frac{1}{2} N^{-1} B^\top V_x$.

Функцию Беллмана ищем в виде $V = x^\top \mathcal{L} x + l^\top x + l_0$. Подставляя в уравнение Беллмана, получим соотношения

$$\dot{\mathcal{L}} + G + \mathcal{L}A + A^\top \mathcal{L} - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{L}(t_k) = S, \quad (10)$$

$$\dot{l} + A^\top l - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top l + 2\mathcal{L}Cq = 0, \quad l(t_k) = 0, \quad (11)$$

$$\dot{l}_0 - \frac{1}{4}l^\top BN^{-1}B^\top l + l^\top Cq = 0, \quad l_0(t_k) = 0. \quad (12)$$

Оптимальное значение функционала следующее:

$$J(u^0, q, r) = r^\top \mathcal{L}(t_0)r + l^\top(t_0)r + l_0(t_0). \quad (13)$$

Решение внешней задачи максимизации функционала (13) по $(q(t), r)$ можно найти последовательно, сначала при заданных r найдя максимум по $q(t)$. Действительно, первое слагаемое в (13) и решение уравнения (10) от $q(t)$ не зависит и задача сводится к решению задачи оптимального управления по q для системы (11), (12) и линейного функционала (13). Пусть $\tau = t_k - t$ — обратное время. Проинтегрировав систему (10) в обратном времени, получим матричную функцию $\mathcal{L}(\tau)$. Система (11) и (12) в обратном времени переписывается так

$$\frac{dl}{d\tau} = (A^\top - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top)l + 2\mathcal{L}(\tau)Cq(\tau), \quad l(0) = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dl_0}{d\tau} = -\frac{1}{4}l^\top BN^{-1}B^\top l + l^\top(\tau)Cq(\tau), \quad l_0(0) = 0, \quad (15)$$

а экстремальная задача

$$\min_q J_1(q) = \min_q [-r^\top l(t_k) - l_0(t_k)]. \quad (16)$$

(время t_k фиксировано). Для ее решения применим принцип максимума Понтрягина. Введем дополнительную координату $l_{n+1} = \tau$, $\frac{dl_{n+1}}{d\tau} = 1$. Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi^\top ((A^\top - \mathcal{L}BN^{-1}B^\top)l + 2\mathcal{L}Cq) + \psi_0(-\frac{1}{4}l^\top BN^{-1}B^\top l + l^\top Cq) + \psi_{n+1}, \quad (17)$$

а сопряженная система

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\tau} &= (\mathcal{L}BN^{-1}B^\top - A)\psi - \psi_0(Cq - \frac{1}{2}BN^{-1}B^\top l) \\ \frac{d\psi_0}{d\tau} &= 0 \\ \frac{d\psi_{n+1}}{d\tau} &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Из условий трансверсальности получим $\psi(t_k - t_0) = r$, $\psi_0(t_k - t_0) = 1$, откуда в силу (18) следует $\psi_0 \equiv 1$. Рассмотрим случай, когда ограничения на q имеют вид $|q_i(t)| \leq \nu_i$, $i = 1, \dots, s$.

Из принципа максимума следует $q_i^0(t) = \nu_i \text{sign } \gamma_i(t)$, где вектор $\gamma = (2\psi^\top \mathcal{L} + l^\top)C$. Тогда из условия постоянства гамильтониана в момент времени $\tau = 0$ (учитывая, что $l(0) = 0$, $\mathcal{L}(0) = S$) получим дополнительное соотношение для компонент вектора $\psi(0)$: $\sum_{i=1}^s \nu_i |\gamma_i(0)| + \psi_{n+1} = 0$.

Рассмотрим некоторые примеры вычисления отличного результата, оптимальной контрстратегии и оценки "жесткого" тестирования.

Пример 1.

Решим задачу тестирования точности стабилизации положения равновесия для системы второго порядка $\ddot{x} = u$ с функционалом качества $J = \int_0^\infty (x^2 + \dot{x} + \ddot{x}^2) dt$, в которой управление формируется в виде линейной обратной связи $u = -k_1 x - k_2 \dot{x}$.

В данной задаче нет ограничений на управление, а в качестве возмущений рассматриваются только начальные возмущения $x(0) = r$, где $|r| \leq 1$. В нашем случае система уравнений в отклонениях и функционал качества могут быть записана, как (2) и (8), где матрицы A, B, C, G, S, N имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = 0, \quad S = 0, \quad N = 1.$$

Задача поиска отличного результата на первом этапе процедуры тестирования сводится к экстремальной задаче

$$\max_{r^T r \leq 1} \min_u J(u, r)$$

В данном случае решение внутренней задачи на минимум u^0 имеет вид стационарной обратной связи $u^0 = -B^T \mathcal{L}_\infty x$, где матрица \mathcal{L}_∞ является стационарным решением уравнения Риккати (10), которое в нашей задаче принимает вид

$$\begin{cases} l_{12}^2 = 1 \\ l_{12}l_{22} - l_{11} = 0 \\ l_{22}^2 - 2l_{12} = 1 \end{cases} \quad (19)$$

где l_{ij} — элементы матрицы \mathcal{L}_∞ . Система (19) имеет единственное положительно-определенное решение $l_{11} = \sqrt{3}, l_{12} = 1, l_{22} = \sqrt{3}$, откуда $u^0 = -x_1 - \sqrt{3}x_2$.

Как следует из (13), решение внешней задачи на максимум $\max_{r^T r \leq 1} r^T \mathcal{L}_\infty r$ достигается на собственных векторах единичной длины, соответствующих максимальному собственному числу матрицы \mathcal{L}_∞ . Собственные числа матрицы \mathcal{L}_∞ равны $\lambda_1 = \sqrt{3} - 1, \lambda_2 = \sqrt{3} + 1$, откуда отличный результат равен $J_0^0 = 1 + \sqrt{3}$, а оптимальная контрстратегия — $r^0 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ либо $r^0 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Получим оценки тестирования точности стабилизации для некоторого управления, например, для $\tilde{u} = -\frac{3}{2}x_1 - 2x_2$. Общее решение системы (2) при управлении \tilde{u} имеет вид $x_1(t) = e^{-t}(r_1 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + r_2 \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t), x_2(t) = e^{-t}(r_1 \sin \frac{\sqrt{2}}{2}t + (r_2 - \frac{r_1}{2} \cos \frac{\sqrt{2}}{2}t)$. Подставив это решение в выражение для функционала качества J , после интегрирования при $r_1 = r_1^0, r_2 = r_2^0$ в задаче "мягкого" тестирования, получим $\tilde{J} \approx 2,8$, откуда $\varkappa^* = 9.2$.

В случае "жесткого" тестирования численно находим \tilde{r} , доставляющие максимум функционалу $J(\tilde{u}, r)$, откуда $\tilde{r}_1 = 0.21, \tilde{r}_2 = 0.98$, а $\tilde{J}_{\max} = 3.94$. "Жесткая" оценка тестирования точности стабилизации равна $\varkappa_* = 6.9$.

Пример 2. Рассмотрим задачу тестирования для системы $\ddot{x} = u + q$, где $|q(t)| \leq 1$, при нулевых начальных условиях $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ и функционале качества вида

$$J = \int_0^1 k u^2 dt + x^2(1) + \dot{x}^2(1), \quad (20)$$

где параметр k фиксирован $0 < k \leq 1$.

Матрицы A, B, C, G, S, N системы (2) и функционала (8) имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = 0, \quad N = k.$$

Уравнение Риккати (10) в нашем случае записывается как

$$\begin{cases} \dot{l}_{11} = \frac{1}{k} l_{12}^2 & l_{11}(1) = 1 \\ \dot{l}_{12} = \frac{1}{k} l_{12} l_{22} - l_{11} & l_{12}(1) = 0, \\ \dot{l}_{22} = \frac{1}{k} l_{22}^2 - 2l_{12} & l_{22}(1) = 1 \end{cases} \quad (21)$$

а системы (11) и (12) соответственно примут вид

$$\begin{cases} \dot{l}_1 = \frac{l_{12}(t)}{k} l_2 - l_{12}(t) q(t) & l_1(1) = 0 \\ \dot{l}_2 = \frac{l_{22}(t)}{k} l_2 - l_1 - l_{22}(t) q(t) & l_2(1) = 0. \\ \dot{l}_0 = \frac{l_2^2(t)}{2k} - l_2(t) q(t) & l_0(1) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Заметим, что система (21) не зависит от q и l_i , $i = 0, 1, 2$, она отделяется от (22) и на рис 1 показаны зависимости от времени для $l_{12}(t)$ (кривая 1), $l_{22}(t)$ (кривая 2).

Согласно (13) решение внешней задачи на максимум представляется в виде:

$$J_0^0 = \max_{|q(t)| \leq 1} l_0(0) = \max_{|q(t)| \leq 1} \int_0^1 \left(\frac{l_2^2(t)}{2k} - l_2(t) q(t) \right) dt, \quad (23)$$

при условиях (22). Согласно (17) функция Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0 \left(\frac{l_2^2}{2k} - l_2 q \right) + \psi_1 \left(l_2 \frac{l_{12}}{k} - l_{12} q \right) + \psi_2 \left(l_2 \frac{l_{22}}{k} - l_1 - l_{22} q \right) + \psi_3,$$

а сопряженная система (18)

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0 \\ \dot{\psi}_1 = \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 = -\frac{l_2}{k} \psi_0 - \psi_0 q - \frac{l_{12}}{k} \psi_1 - \frac{l_{22}}{k} \psi_2 \\ \dot{\psi}_3 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

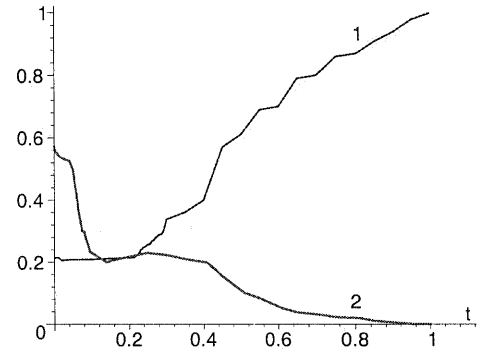


Рис. 1

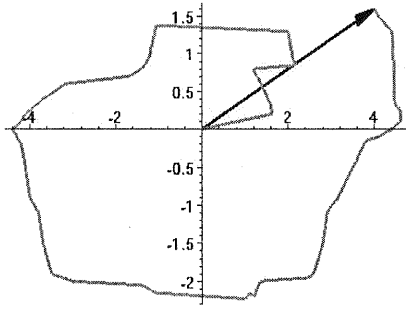


Рис 2.

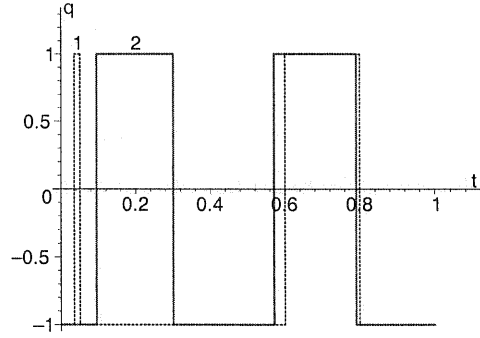


Рис 3.

Из условий трансверсальности следует $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = 0$. Наихудшее возмущение q^0 имеет вид $q^0(t) = -\text{sign}(l_2 + \psi_1 l_{12} + \psi_2 l_{22})$. Решение двухточечной задачи (22), (24) находилось численно.

На рис 2 показано изменение вектора $l = (l_1, l_2)^T$ во времени для оптимальных возмущений $q^0(t)$, которые изображены на рис. 3 (кривая 1). Отличная оценка тестирования равна $J_0^0 = 27,68$. Для тестируемого управления вида $\tilde{u} = 2x_1 - \frac{3}{2}x_2$ вычислим $J(\tilde{u}, q^0) = \tilde{J} = 33.45$ и "мягкая" оценка тестирования равна $\kappa^* = 8,3$. Подставив \tilde{u} в (20) и решив экстремальную задачу, получим $\max_{|q| \leq t} J(\tilde{u}, q) = J(\tilde{u}, \tilde{q}) = \tilde{J}_{\max} = 36,9$. Соответствующее экстремальное возмущение \tilde{q} изображено на рис. 3 (кривая 2). "Жесткая" оценка тестирования равна $\kappa_* = 7,5$.

Тестирование стохастической системы

Рассмотрим теперь задачу построения отличной оценки и контрстратегии первого этапа тестирования при наличии стохастических возмущений ($\xi \neq 0, \eta \neq 0$). Пусть управление задано в виде линейной обратной связи $u = Kx$. Критерий качества (3) можно переписать [4] как

$$J = \text{Tr} \left[SP_x(t_k) + \int_0^{t_k} (GP_x + K^T N K P_x) dt \right], \quad (25)$$

где P_x — матрица вторых моментов $P_x = M[xx^T]$, Tr — операция взятие следа матрицы. Выполнены соотношения $P_x = P + \mu_x \mu_x^T$, где $P = M[\dot{x}\dot{x}^T]$, $\dot{x} = x - \mu_x$, $\mu_x = M[x(t)]$, μ_x удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mu}_x = (A + BK)\mu_x + Cq_0 \quad (26)$$

Матрица P_x удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{P}_x &= (A + BK)P_x + P_x(A + BK)^T + Cq_0\mu_x^T + \\ &+ \mu_x(Cq_0)^T + CFC^T, \quad P_x(0) = P_x^0 = rr^T + P_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Стохастическая задача поиска минимума функционала (3) сводится к детерминированной экстремальной задаче

$$J^0(q_0) \rightarrow \min_K J(q_0)$$

при условии (27), где элементы матрицы K рассматриваются как управления, а элементы матрицы P_x — как фазовые координаты размерности $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$. Решение этой задачи можно получить из принципа максимума Понтрягина для задачи с фиксированным временем и свободным концом траектории. Введем дополнительную переменную x_0 :

$$x_0(t) = \int_0^t \text{Tr}[GP_x + K^\top NKP_x] d\tau,$$

$$\dot{x}_0 = \text{Tr}[NP_x + K^\top NKP_x].$$

Для расширенного вектора координат $\hat{x} = \{x_0, P_x, \mu_x\}$ критерий качества примет вид $J = \text{Tr}[SP_x(t_k)] + x_0(t_k)$.

Выпишем функцию Понтрягина

$$H = f^\top \tilde{\Psi} = \text{Tr} \left[\dot{P}_x, \Psi^\top \right] + \psi_0 \text{Tr}[(G + K^\top NK)P_x] + \psi_\mu^\top ((A + BK)\mu_x + Cq_0),$$

где $\tilde{\Psi} = \{\psi_0, \Psi, \psi_\mu\}$ — сопряженные переменные, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\Psi} = -\left(\frac{\partial H}{\partial P_x}\right), \\ \dot{\psi}_\mu = -2\Psi Cq_0 - A^\top \psi_\mu - K^\top B^\top \psi_\mu. \end{cases} \quad (28)$$

Из условий трансверсальности в случае свободного конца траектории получим: $\psi_0 + \lambda_0 = 0$, $\lambda_0 \geq 0$, $\Psi(t_1) = -\lambda_0 S = \psi_0 S$, $\psi_\mu(t_k) = 0$.

Функция Понтрягина примет вид

$$H = \text{Tr}[(A + BK)P_x \Psi^\top + P_x(A + BK)^\top \Psi^\top + CFC^\top \Psi^\top + \psi_0 G + \psi_0 K^\top NKP_x + (A + BK)\mu_x \psi_\mu^\top + Cq_0 \psi_\mu^\top + \Psi^\top (C\mu_x^\top + \mu_x q^\top C^\top)]. \quad (29)$$

Условие максимума функции Понтрягина $\frac{\partial H}{\partial K} = 0$ приводит к равенству

$$2B^\top \Psi P_x + 2\psi_0(NKP_x) + B^\top \psi_\mu \mu_x^\top = 0, \quad (30)$$

откуда

$$K = -\frac{1}{\psi_0} N^{-1} B^\top \Psi - \frac{1}{2\psi_0} N^{-1} B^\top \psi_\mu \mu_x^\top P_x^{-1}. \quad (31)$$

Параметр $\psi_0 \neq 0$, иначе получим противоречие с принципом максимума. Нормируем $\psi_0 = -1$, $\lambda_0 = 1$. Подставляя найденные значения K в (29) и (28) Выпишем уравнение для сопряженных переменных Ψ :

$$\dot{\Psi} = -\Psi(A + BK) - (A + BK)^\top \Psi + G + (K^\top NK). \quad (32)$$

Введем обозначения $\Omega = \frac{1}{2}\psi_\mu \mu_x^\top$, $\Gamma = q_0 \mu_x^\top$, $\Phi = P_x^{-1}$. Для матрицы Ω можно выписать уравнение

$$\begin{aligned} \dot{\Omega} = & -A^\top \Omega + \Omega A^\top - \Phi \Omega^\top B N^{-1} B^\top \Omega + \Omega \Phi \Omega^\top B N^{-1} B^\top + \Omega \Psi \Omega^\top B N^{-1} B^\top \\ & - \Psi B N^{-1} B^\top \Omega - \Psi C \Gamma + \Omega C^\top. \end{aligned} \quad (33)$$

Матрица усиления K примет вид $K = N^{-1}B^T\Psi + N^{-1}B^T\Omega\Phi$ и для определения оптимальных K имеем следующую двухточечную краевую задачу:

$$\dot{\psi}_\mu = -2\Psi Cq - A^T\psi_\mu - \Psi BN^{-1}B^T\psi_\mu - \Phi\Omega^T BN^{-1}B^T\psi_\mu, \quad \psi_\mu(t_k) = 0, \quad (34)$$

$$\dot{\Psi} = -A^T\Psi - \Psi A + G + \Psi BN^{-1}B^T\Psi + \Phi\Omega^T BN^{-1}B^T\Omega\Phi, \quad \Psi(t_k) = -S, \quad (35)$$

$$\dot{\Phi} = -A^T\Phi - \Phi A - \Phi BN^{-1}B^T\Omega\Phi - \Phi\Omega^T BN^{-1}B^T\Omega\Phi - \Psi\Omega^T BN^{-1}B^T\Phi - \Phi BN^{-1}B^T\Psi - \Phi(CFC^T + C\Gamma + \Gamma^TC^T)\Phi, \quad \Phi(0) = P_0^{-1}, \quad (36)$$

$$\dot{\mu}_x = Cq_0 + A\mu_x + BN^{-1}B^T\Psi\mu_x + BN^{-1}B^T\Omega\Phi\mu_x, \quad \mu_x(0) = \mu_0. \quad (37)$$

Как видим, решение внутренней задачи неявно зависит от возмущений $q_0(t)$, и получить решение внешней задачи возможно с использованием метода последовательных приближений, например, методом Крылова-Черноусько [5].

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант № 01-01-00415) за финансовую поддержку работы.

Список литературы

- [1] В.В.Александров. Тестирование качества стабилизации нестационарных движений. Вестник МГУ, сер. Мат.,мех., N 3, 1997.
- [2] В.А.Садовничий, В.В.Александров, Лемак С.С. "Тестирование точности стабилизации стохастических управляемых систем."// Дифф.ур-ния N 5 1999г.с. 1-7.
- [3] Н.Н. Красовский. Управление динамической системой. М., Наука 1985г.
- [4] М.Х.А. Девис. Линейное оценивание и стохастическое управление. М.; Наука, 1984, 208с.
- [5] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л. О методе последовательных приближений для задач оптимального управления. М.; ЖВМ и МФ, 1962, т.2, N 6.

