

Кинетика бесстолкновительной сплошной среды

В.В. Козлов

Механико-математический факультет
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Развиваются идеи Пуанкаре о тепловом равновесии идеального газа, рассматриваемого как бесстолкновительная сплошная среда. Установлены теоремы о диффузии в невырожденных вполне интегрируемых системах. В качестве следствия показано, что независимо от начального распределения газ с течением времени необратимо равномерно распределяется по всему объему, хотя при этом каждая частица бесконечно много раз сколь угодно близко подходит к своему начальному положению. Однако, такая индивидуальная возвращаемость не является равномерной, что и приводит к явлению диффузии в обратимой и консервативной системе. Доказано выравнивание давления и внутренней энергии идеального газа, указаны формулы для предельных значений этих величин и выведено классическое уравнение состояния газа в тепловом равновесии. Показано, что из закона движения бесстолкновительной сплошной среды вытекает возрастание энтропии газа при его адиабатическом расширении.

1 Тепловое равновесие

Установление теплового равновесия газа в сосуде является одной из центральных проблем неравновесной статистической механики. Общепринятой моделью служит газ Больцмана–Гиббса – совокупность большого (но конечного) числа одинаковых твердых шариков, упруго сталкивающихся друг с другом и со стенками сосуда. Согласно классическому подходу, основанному на использовании кинетического уравнения Больцмана, сначала практически мгновенно устанавливается максвелловское распределение по скоростям, а затем (уже не так быстро и с колебаниями) происходит выравнивание плотности газа [1].

Правда, при таком подходе возникает ряд затруднений принципиального характера. Во-первых, уравнение Больцмана приближенное. Оно не учитывает кратных соударений, а также предполагает статистическую независимость числа парных столкновений. Последнее предположение (Stosszahlansatz по П. и Т. Эренфестам [2]) правдоподобно, но, конечно, не вытекает непосредственно из динамики модели газа Больцмана–Гиббса. Кроме того, есть трудности в согласовании решений уравнения Больцмана со свойством обратимости уравнений динамики и с теоремой Пуанкаре о возвращении (обсуждение этого круга вопросов см. в [3, 4]).

Логическая возможность согласования необратимого поведения системы со свойствами обратимости и возвращаемости была продемонстрирована М. Кацем [4, 5] на так называемой круговой модели, не имеющей, впрочем, прямого отношения к теории газов. Фазовое пространство в модели Каца – набор белых и черных шаров в вершинах правильного n -угольника. Кроме этого, выделено некоторое множество M вершин n -угольника, состоящее из $m < n/2$ элементов. Динамика круговой модели определяется поворотом на один элемент против часовой стрелки. Если при этом шар не принадлежал к множеству M , то его цвет не изменяется, а если принадлежал M , то цвет шарика меняется на противоположный. Ясно, что динамика такой системы инвариантна относительно направления вращения (обратимость). Можно также проверить, что за $2n$ сдвигов система придет в начальное состояние (возвращаемость).

Пусть $N_c(t)$ и $N_b(t)$ – количество черных и белых шаров в целочисленные моменты времени t . Как доказал Кац, среднее значение отношения

$$\left\langle \frac{N_c(t) - N_b(t)}{n} \right\rangle,$$

вычисленное по всем возможным положениям множества M , убывает при $n \rightarrow \infty$ как $(1 - 2\mu)^t$, где μ – предельное значение отношения m/n . Таким образом, если $\mu < 1/2$, то по истечении достаточно большого времени число белых и черных шаров в среднем будет совпадать.

Круговая модель Каца является усовершенствованным вариантом более ранней модели Эренфестов [2], обладавшей лишь свойством обратимости. Она также демонстрирует характерную особенность обычного способа рассуждений в статистической механике: вычисление усредненных значений, предельный переход по числу частиц ($n \rightarrow \infty$), а затем уже предельный переход по времени ($t \rightarrow \infty$). Последний момент связан с тем, что среднее время возвращения стремится к бесконечности вместе с n и поэтому рассматривают временной диапазон, меньший по порядку этой величины.

На самом деле в обосновании термодинамики имеются дополнительные затруднения несколько иного сорта. Дело в том, что идеальный газ рассматривается как система невзаимодействующих частиц. В частности, они не могут сталкиваться друг с другом. Именно при этом предположении в статистической механике выводится уравнение состояния идеального газа. Если же учесть взаимодействие (в частности, допустить возможность столкновений), то каноническое распределение Гиббса даст нам уравнение состояния, которое будет отличаться от классического уравнения Клапейрона (см. по этому поводу [6]).

С другой стороны, как показано в работах [7, 8], уравнение Клапейрона выводится из общих принципов статистической механики в предположении, что плотность распределения вероятностей есть однозначная функция от полной энергии системы частиц. Подчеркнем, что эта функция вовсе не обязана совпадать с плотностью распределения Максвелла.

Идеальный газ – это фундаментальная модель механики сплошной среды и статистической механики. Поэтому особое значение приобретает проблема обоснования необратимого поведения идеального газа, не использующего механизм Больцмана парных столкновений. И совсем не очевидно, что на самом деле такой механизм необратимости существует.

Этому кругу вопросов и посвящена настоящая работа.

2 Идеальный газ как бесстолкновительная сплошная среда

Указанные выше трудности можно преодолеть, если рассматривать идеальный газ как бесстолкновительную сплошную среду. Сразу следует отметить, что гипотеза о сплошности газа хорошо согласуется с непрерывностью распределения частиц газа по скоростям.

Кроме этого, бесстолкновительные модели играют существенную роль во многих разделах математической физики. Укажем, например, теорию Я.Б. Зельдовича, объясняющую появление неоднородностей в распределении пылевидного вещества во Вселенной. (см. [9]). Другой важный пример – уравнение Бюргерса. Оно описывает динамику жидкости без давления и является одним из возможных упрощений уравнений Навье–Стокса [10]. Многомерная гидродинамика инвариантных многообразий гамильтоновых систем, развитая в книге [11], также описывает эволюцию бесстолкновительной среды.

Идеальный газ как бесстолкновительную сплошную среду впервые рассматривал, по-видимому, А. Пуанкаре в [12]. Он изучал поведение идеального газа в прямоугольном параллелепипеде

$$\Pi^n = \{0 \leq z_1 \leq \ell_1, \dots, 0 \leq z_n \leq \ell_n\}$$

(ℓ_s – ребра параллелепипеда) для значений $n = 1, 2$ и 3 . Такой газ Пуанкаре назвал одномерным. По терминологии Пуанкаре, трехмерный газ составляют молекулы, которые могут сталкиваться друг с другом. Основное его наблюдение состоит в том, что независимо от начального распределения с течением времени газ стремится к равномерному заполнению Π . Тем самым идеальный газ демонстрирует необратимое поведение. Каждая частица газа бесконечное число раз подходит сколь угодно близко к своему начальному состоянию. Однако, ввиду неравномерности свойства возвращаемости, имеет место необратимая диффузия газа. Кроме того, уравнения движения бесстолкновительной среды инвариантны при отражении времени $t \mapsto -t$. Таким образом, еще в 1906 году на упрощенной модели (имеющей самое прямое отношение к кинетической теории) Пуанкаре продемонстрировал совместимость свойств обратимости и возвращаемости с необратимым поведением динамической системы.

К сожалению, эти замечательные идеи Пуанкаре оказались непонятыми и невоображаемыми. Я не нашел ни одной работы по статистической механике, в которой бы

упоминались его идеи в связи с обсуждением проблемы необратимости. Комментарии к работе Пуанкаре 1906 года в III-ем томе его собрания сочинений на русском языке совершенно не касаются существа дела.

В последнее время появились интересные работы по кинетической теории, в которых также используется модель бесстолкновительной среды. Упомянем в качестве примера динамический демон Максвелла [13, 14]. Однако они также не содержат упоминания пионерской работы Пуанкаре.

Правда, Пуанкаре рассмотрел лишь самые простые варианты и в его работе нет точных формулировок, а также полных и строгих доказательств в современном понимании этих слов. Однако его идеи заслуживают того, чтобы наконец-то (спустя почти 100 лет) они оказались вовлеченными в орбиту современной неравновесной статистической механики. Цель настоящей работы – развить идеи Пуанкаре о тепловом равновесии идеального газа как бесстолкновительной сплошной среды.

Итак, рассмотрим динамику частиц в n -мерном параллелепипеде Π^n . Ясно, что Π^n допускает естественное 2^n -листное накрытие n -мерным тором $\mathbb{T}^n = \{x_1, \dots, x_n \bmod 2\pi\}$, разветвленное на границе Π^n . Переменные x и z связаны следующим образом: $x = \pi z/\ell$, если z возрастает от 0 до ℓ , и $x = 2\pi - \pi z/\ell$, если z убывает от ℓ до 0 (рис. 1).

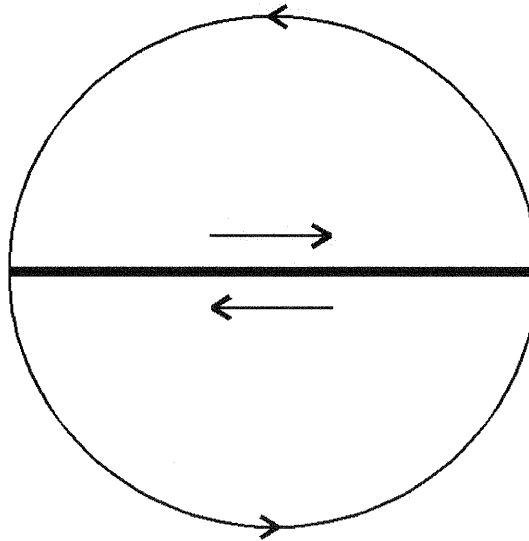


Рис. 1

Пусть v_1, \dots, v_n – компоненты скоростей частицы газа в $\Pi^n \subset \mathbb{R}^n = \{z\}$. Тогда скорости изменения ее x -координат равны

$$\omega_1 = \pi v_1/\ell_1, \dots, \omega_n = \pi v_n/\ell_n. \quad (2.1)$$

Следовательно, в переменных $x \bmod 2\pi, \omega$ динамика частиц газа в Π описывается уравнениями

$$\dot{x}_s = \omega_s, \quad \dot{\omega}_s = 0 \quad (s = 1, \dots, n). \quad (2.2)$$

3 Первая теорема о диффузии

Уравнения (2.2) описывают эволюцию интегрируемой системы. Фазовое пространство

$$\mathbb{P}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n = \{\omega, x \mod 2\pi\}$$

расслоено на инвариантные торы $\omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \text{const}$, которые заполнены условно-периодическими траекториями с частотами $\omega_1, \dots, \omega_n$. Для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$ эти траектории всюду плотны (и даже равномерно распределены) на торе $\omega = \text{const}$.

Такая картина вообще характерна для вполне интегрируемых гамильтоновых систем с компактными энергетическими поверхностями [15]. В окрестности инвариантных торов можно ввести переменные действие-угол $x \mod 2\pi, y$, в которых уравнения Гамильтона принимают вид:

$$\dot{y}_s = 0, \quad \dot{x}_s = \omega_s(y); \quad 1 \leq s \leq n. \quad (3.1)$$

В невыврожденном случае, когда

$$\frac{\partial(\omega_1, \dots, \omega_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0,$$

от переменных y можно перейти к новым переменным ω . В этих координатах уравнения (3.1) принимают вид (2.2). Таким образом, уравнения (2.2) представляют универсальный вид уравнений движения невырожденных вполне интегрируемых систем.

Пусть $f(\omega, x)$ – интегрируемая по Лебегу функция, 2π -периодическая по каждой из координат x_1, \dots, x_n . Пусть функция $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману; в частности, она ограничена. Введем функцию времени

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{T}^n} f(\omega, x - \omega t) g(x) d^n x d^n \omega, \quad (3.2)$$

Так как функция $f(\omega, x - \omega t)$ интегрируема по Лебегу при всех значениях t , а g – измеримая и ограниченная функция, то интеграл (3.2) корректно определен.

Функция $K(t)$ имеет прозрачную интерпретацию. Прежде всего заметим, что $x - \omega t = x_0 = \text{const}$ ввиду уравнений (2.2). Пусть, согласно Гиббсу, $f \geq 0$ – плотность распределения интегрируемых систем в \mathbb{P} (плотность вероятностной меры), а g – характеристическая функция измеримой по Жордану области D на \mathbb{T}^n . Ясно, что

$$\langle f \rangle = \int_{\mathbb{P}} f d^n x d^n \omega = 1.$$

Нетрудно понять, что тогда $K(t)$ равно доли всех систем, фазы которых (т.е. координаты x точек на \mathbb{T}^n) принадлежат области D .

Изучим поведение функции $K(t)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Теорема 1. *Существует*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} K(t) = \langle f \rangle \bar{g}, \quad (3.3)$$

где

$$\bar{(\cdot)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (\cdot) d^n x.$$

Вернемся к случаю, когда f – плотность распределения вероятностной меры, а g – характеристическая функция измеримой области D . Тогда соотношение (3.3) переходит в равенство

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} K(t) = \text{mes } D / \text{mes } \mathbb{T}^n. \quad (3.4)$$

Следовательно, независимо от начального распределения при неограниченном возрастании времени система оказывается равномерно распределенной по фазам. Этот результат свидетельствует о наличии необратимой диффузии в невырожденных интегрируемых системах.

Доказательство теоремы 1 разобьем на несколько пунктов. Поскольку интегрируемую по Лебегу функцию можно представить в виде разности двух неотрицательных интегрируемых функций, то будем считать, что $f \geq 0$.

1) Пусть $g(x) = \bar{g} = \text{const}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{P}} f(\omega, x - \omega t) g d^n x d^n \omega = \langle f \rangle \bar{g}$$

по формуле замены переменных в кратных интегралах.

2) Пусть $g(x) = \exp i(m, x)$, $m \in \mathbb{Z}^n$ и $m \neq 0$. Полагая $u = x - \omega t$, получим

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{-m}(\omega) e^{i(m, \omega)t} d^n \omega,$$

где

$$f_{-m} = \int_{\mathbb{T}^n} f(\omega, u) e^{i(m, u)} d^n u$$

– коэффициент Фурье функции f как функции на \mathbb{T}^n , умноженный на $(2\pi)^n$. По теореме Фубини, функция $f_{-m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Лебегу. Следовательно (согласно теории преобразования Фурье), $K(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

3) Из п.п. 1 и 2 вытекает, что теорема 1 справедлива для любого тригонометрического полинома g .

4) Воспользуемся теперь известным утверждением из теории интеграла Римана (ср. с [16]). Пусть функция $g : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируема по Риману. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два тригонометрических многочлена g_1 и g_2 , таких, что

(а) $g_1(x) \leq g \leq g_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{T}^n$,

(б) $\bar{g}_2 - \bar{g}_1 < \varepsilon$. Доказательство этого утверждения использует аппроксимационную теорему Вейерштрасса.

5) Положим

$$K_j(t) = \int_{\mathbb{P}} f(\omega, x - \omega t) g_j(x) d^n x, d^n \omega; \quad j = 1, 2.$$

Поскольку $f \geq 0$, то для всех t

$$K_1(t) \leq K(t) \leq K_2(t).$$

Согласно п. 3, при $t \rightarrow \infty$ разность $K_2(t) - K_1(t)$ стремится к

$$\langle f \rangle (\bar{g}_2 - \bar{g}_1) < \langle f \rangle \varepsilon \quad (3.5)$$

Здесь использовано свойство (b) из п. 4.

Таким образом, неравенство (3.5) имеет место для всех $t > T_1(\varepsilon)$.

6) Согласно п. 3, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_2(\varepsilon)$, такое, что для всех $t > T_2(\varepsilon)$ имеем

$$|K_j(t) - \langle f \rangle \bar{g}_j| < \varepsilon. \quad (3.6)$$

С другой стороны, по свойству (a) и с учетом неравенства $f \geq 0$ имеем

$$\langle f \rangle \bar{g}_1 \leq \langle f \rangle \bar{g} \leq \langle f \rangle \bar{g}_2. \quad (3.7)$$

Из (3.5)–(3.7) вытекает, что при $t > \max(T_1(\varepsilon), T_2(\varepsilon))$

$$|K(t) - \langle f \rangle \bar{g}| < 3\langle f \rangle \varepsilon.$$

Что и требовалось доказать.

Эти рассуждения напоминают доказательство теоремы Вейля о равномерном распределении [16]. Собственно говоря, у Пуанкаре нет точной формулировки утверждения о предельном равномерном распределении по фазам. Он ограничился рассмотрением п. 2 в частном случае, когда $n = 1$, в предположении, что функция f непрерывно дифференцируема по ω .

4 Выравнивание плотности

Пусть $f(\omega, x) \geq 0$ – плотность распределения частиц газа в фазовом пространстве при $t = 0$, а $g(z)$ – характеристическая функция измеримой области G в Π^n . По определению плотности, $\langle f \rangle = 1$. С другой стороны, используя явные формулы 2^n -листного накрытия $\mathbb{T}^n \rightarrow \Pi^n$, получим

$$\bar{g} = \frac{1}{\ell_1 \cdots \ell_n} \int_{\Pi^n} g(z) d^n z = \frac{\text{mes } G}{\text{mes } \Pi}. \quad (4.1)$$

Следовательно, по теореме 1,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} K(t) = \text{mes } G / \text{mes } \Pi.$$

Таким образом, с течением времени t доля частиц газа, находящихся в области $G \subset \Pi$, пропорциональна объему G . Итак, приходим к следующему результату (сформулированному в работе Пуанкаре [12]): независимо от вида начального распределения f при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ произойдет необратимое выравнивание плотности газа в сосуде Π . Подчеркнем еще раз, что диффузия бесстолкновительной среды обусловлена неравномерностью возвращаемости ее частиц по начальным данным.

Поскольку разность $K(t) - \text{mes } G / \text{mes } \Pi$ стремится к нулю, то флуктуации плотности идеального газа неограниченно убывают с ростом времени. Для газа Больцмана–Гиббса, состоящего из конечного числа частиц, прежде всего надо дать строгое определение выравнивания плотности. К сожалению, до настоящего времени в этом направлении нет точных теоретических результатов. Однако в любом случае (ввиду теоремы Пуанкаре о возвращении) выравнивание плотности газа Больцмана–Гиббса должно сопровождаться незатухающими флуктуациями. Вопросы численного моделирования газа Больцмана–Гиббса обсуждаются, например, в работе [17].

Чтобы оценить скорость выравнивания плотности идеального газа, рассмотрим простой пример. Будем считать, что по скоростям частицы газа распределены по нормальному закону:

$$f(\omega, x) = \frac{\lambda(x)}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}, \quad \omega^2 = \omega_1^2 + \dots + \omega_n^2. \quad (4.2)$$

Здесь λ – неотрицательная измеримая функция на \mathbb{T}^n , причем

$$\int_{\mathbb{T}^n} \lambda(x) d^n x = 1. \quad (4.3)$$

Если интерпретировать (4.2) как плотность распределения Максвелла, то дисперсия σ^2 пропорциональна абсолютной температуре τ .

В рассматриваемом случае имеет место равенство

$$K(t) - \frac{\text{mes } G}{\text{mes } \Pi} = \sum'_m g_m \lambda_{-m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}}}{(\sqrt{2\pi}\sigma)^n} e^{i(m,\omega)t} d^n \omega, \quad (4.4)$$

где g_m – коэффициент Фурье поднятия функции $g(z)$ на \mathbb{T}^n , а $(2\pi)^n \lambda_m$ – коэффициент Фурье функции $\lambda : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Согласно (4.3), имеем простую оценку $|\lambda_m| \leq 1$. С другой стороны, с учетом формулы (4.1) имеем следующее неравенство:

$$|g_m| \leq \text{mes } G / \text{mes } \Pi.$$

Следовательно, из (4.4) получаем неравенство

$$\left| K(t) - \frac{\text{mes } G}{\text{mes } \Pi} \right| \leq \frac{\text{mes } G}{\text{mes } \Pi} \sum_{m \neq 0} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 (m,m)}{2}}. \quad (4.5)$$

Ряд справа сходится при всех $t > 0$ (если, конечно, $\sigma \neq 0$) и его сумма чрезвычайно быстро стремится к нулю, когда $t \rightarrow \pm\infty$.

Сумма мажорирующего ряда

$$\sum_{m \neq 0} e^{-\frac{\sigma^2 t^2 (m, m)}{2}} \quad (4.6)$$

выражается через тэта-функции. Она равна

$$[\theta_3(0, q)]^n - 1,$$

где $q = \exp(-\sigma^2 t^2 / 2)$, а третья тэта-функция определяется рядом

$$\theta_3(v, q) = \sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2\pi n v}.$$

Ясно, что $\theta_3(v, q) \rightarrow 1$ при $q \rightarrow 0$.

Оценка (4.5) универсальна в том смысле, что в нее не входит функция λ . В частности, в качестве λ можно взять δ -функцию Дирака. В этом случае газ в начальный момент будет сосредоточен в одной точке (что, кстати сказать, не противоречит гипотезе о бесстолкновительности среды). Так как σ^2 пропорционально τ , то ряд (4.6) зависит на самом деле от комбинации $t\sqrt{\tau}$. Поэтому время выравнивания плотности убывает с ростом температуры как $1/\sqrt{\tau}$.

Отметим, что в отличие от модели Каца (и обычных представлений о механизме теплового равновесия в газах) выравнивание плотности происходит без предварительного усреднения по состояниям и детерминированно.

5 Вторая теорема о диффузии

Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ интегрируемы вместе со своим квадратом (из класса $L_2(\mathbb{P})$). Ясно, что при всех значениях t функция $f(\omega, x - \omega t)$ также принадлежит L_2 . Поэтому корректно определена функция

$$K(t) := \int_{\mathbb{P}} f(\omega, x - \omega t) g(\omega, x) d^n x d^n \omega.$$

Теорема 2. *При указанных предположениях*

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} K(t) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \bar{g} d^n \omega. \quad (5.1)$$

Этот результат, конечно, не вытекает из теоремы 1 (впрочем, как и теорема 1 не является следствием теоремы 2). В работе Пуанкаре [12] формула (5.1) не упоминается.

Прежде чем доказывать теорему 2, укажем одно вспомогательное утверждение. Пусть

$$\sum f_m(\omega) e^{i(m, x)} \quad \text{и} \quad \sum g_m(\omega) e^{i(m, x)} \quad (5.2)$$

– ряды Фурье функций f и g при фиксированном значении ω . По теореме Фубини, эти ряды определены для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^n$. Более того, для почти всех ω функции f и g принадлежат $L_2(\mathbb{T}^n)$. Следовательно,

$$\sum_{\mathbb{T}^n} f(\omega, x - \omega t) g(\omega, x) d^n x = (2\pi)^n \sum_m f_m g_{-m} e^{-i(m, \omega) t}. \quad (5.3)$$

Так как $f, g \in L_2$, то функции $|f_m g_{-m}|$ интегрируемы в \mathbb{R}^n при всех $m \in \mathbb{Z}^n$. Положим $g'_m = g_m \exp[i(m, \omega)t]$. Ясно, что $g'_m g'_{-m} = g_m g_{-m}$.

Лемма 1.

$$\sum_m \int_{\mathbb{R}^n} |f_m g'_{-m} + f_{-m} g'_m| d^n \omega < \int_{\mathbb{P}} (f^2 + g^2) d^n x d^n \omega. \quad (5.4)$$

Это – вариант неравенства Бесселя. Оно показывает, что ряд в левой части неравенства (5.4) сходится равномерно по $t \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство леммы. Воспользуемся очевидным неравенством

$$|f_m g'_{-m} + f_{-m} g'_m| \leq f_m f_{-m} + g_m g_{-m}.$$

Поскольку f_m и f_{-m} комплексно сопряжены, то $f_m f_{-m} \geq 0$. Аналогично, $g_m g_{-m} \geq 0$.

Теперь нам осталось доказать неравенство

$$\sum_m \int_{\mathbb{R}^n} f_m f_{-m} d^n \omega \leq \int_{\mathbb{P}} f^2 d^n x d^n \omega. \quad (5.5)$$

Аналогичное неравенство имеет место и для функции g .

Действительно, пусть f_N – конечная сумма членов ряда Фурье (5.2), таких, что $|m| < N$. Тогда

$$0 \leq \int_{\mathbb{P}} (f - f_N)^2 d^n x d^n \omega = \int_{\mathbb{P}} f^2 d^n x d^n \omega - \sum_{|m| < N} \int_{\mathbb{R}^n} f_m f_{-m} d^n \omega.$$

Следовательно, неравенство (5.5) справедливо для любой частичной суммы ряда в левой части (5.3). Переходя к пределу при $|m| \rightarrow \infty$, получаем требуемое.

Докажем теперь теорему 2. По лемме 1 (с учетом известных теорем Леви и Лебега) ряд (5.3) сходится для почти всех ω и его можно почленно интегрировать. Интегрируя обе части равенства (5.3) по всему \mathbb{R}^n , приходим к соотношению

$$K(t) = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \bar{g} d^n \omega + (2\pi)^n \sum_{m \neq 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_m(\omega) g_{-m}(\omega) e^{-i(m, \omega)t} d^n \omega.$$

Так как функции $f_m g_{-m}$ интегрируемы по Лебегу, то каждый член ряда в правой части стремится к нулю, когда $t \rightarrow \pm\infty$. Согласно лемме, этот ряд сходится равномерно по t . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$, такое, что сумма членов ряда с номерами $|m| > N(\varepsilon)$ будет меньше $\varepsilon/2$ при всех значениях t . Конечная сумма остальных слагаемых стремится к нулю, когда $t \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, найдется $T(\varepsilon)$ (зависящее на самом деле от $N(\varepsilon)$), такое, что при $|t| > T(\varepsilon)$ эта сумма будет меньше $\varepsilon/2$. Итак, при $|t| > T(\varepsilon)$ сумма указанного ряда оказывается меньше ε , что доказывает теорему.

Теорема 2 позволяет ответить на вопрос об эволюции плотности распределения f при неограниченном возрастании времени. На первый взгляд кажется, что плотность $f(\omega, x - \omega t)$ осциллирует условно-периодически и поэтому вообще не имеет предела при $t \rightarrow \infty$. Однако плотность распределения вероятностей "существует" не сама по себе, а

только при усреднении некоторой фиксированной функции из L_2 . Поэтому эволюцию f при $t \rightarrow \infty$ следует понимать в обобщенном смысле, как это обычно делается в теории обобщенных функций (см., например, [18]).

Чтобы понять, как интегрируемая система (2.2) распределена в фазовом пространстве \mathbb{P} при $t \rightarrow \infty$, введем характеристическую функцию g следующего множества

$$G = \{x \bmod 2\pi, \omega : x'_s \leq x_s \leq x''_s, \quad \omega'_s \leq \omega_s \leq \omega''_s, \quad 1 \leq s \leq n\}.$$

Ясно, что

$$\langle g \rangle = \begin{cases} (2\pi)^{-n} \prod_{s=1}^n (x''_s - x'_s), & \text{если } \omega' \leq \omega \leq \omega'', \\ 0, & \text{для остальных } \omega. \end{cases}$$

Утверждается, что при $t \rightarrow \infty$ функция $f(\omega, x - \omega t)$ стремится в обобщенном смысле к \bar{f} . Предельная плотность \bar{f} – интегрируемая неотрицательная функция на \mathbb{R}^n , причем $\langle f \rangle = 1$.

Действительно, по теореме 2, при $t \rightarrow \infty$

$$\int_{\mathbb{P}} f(\omega, x - \omega t) g(\omega, x) d^n x d^n \omega \rightarrow (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \bar{g} d^n \omega = \prod_{s=1}^n (x''_s - x'_s) \int_{\omega'_1}^{\omega''_1} \cdots \int_{\omega'_n}^{\omega''_n} \bar{f} d\omega_1 \dots d\omega_n.$$

Но точно такой же результат получается при непосредственном вычислении среднего значения предельной плотности \bar{f} по области G .

В качестве примера рассмотрим невырожденную гамильтонову систему с одной степенью свободы и покажем, что любая функция распределения из L_2 стремится в обобщенном смысле к функции, зависящей лишь от полной энергии. Напомним определение невырожденности. Будем предполагать, что все фазовое пространство состоит из конечного числа кусков, инвариантных относительно фазового потока, в каждом из которых можно в целом ввести переменные действие–угол $y, x \bmod 2\pi$. Переход от обычных канонических переменных p, q к переменным x, y является симплектическим преобразованием: его якобиан равен единице. В новых переменных гамильтониан $H(p, q)$ зависит лишь от y . Система называется невырожденной, если

$$d^2 H / dy^2 \neq 0 \tag{5.6}$$

в каждом из инвариантных кусков. Можно проверить, что этим условиям удовлетворяет, например, обычный маятник в поле силы тяжести.

В переменных действие–угол уравнения Гамильтона

$$\dot{p} = -\partial H / \partial q, \quad \dot{q} = \partial H / \partial p$$

принимают вид

$$\dot{x} = \omega(y), \quad \dot{y} = 0, \tag{5.7}$$

где $\omega = dH/dy$ – частота периодического движения.

Согласно (5.6), $d\omega/dy \neq 0$. Следовательно, ω – монотонная функция от y и поэтому в каждом инвариантном куске можно перейти от переменной y к частоте ω . Тогда уравнение (5.7) примет универсальный вид

$$\dot{x} = \omega, \quad \dot{\omega} = 0$$

и мы можем воспользоваться теоремой 2: начальная плотность f стремится к "равновесному" пределу \bar{f} , зависящему только от ω . В итоге предельная плотность есть функция от y и, следовательно, от H .

Еще Гиббс предпринимал попытки доказать, что при $t \rightarrow \infty$ распределение вероятностей стремится (в каком-то смысле) к стационарному состоянию, которое отвечает тепловому равновесию [19] (гл. XII). По мнению М. Каца [4] (гл. III), идея Гиббса о том, что вероятность следует вводить в механику только посредством начальной плотности, кажется, конечно, очень привлекательной. Но, вообще говоря, эта точка зрения, по-видимому, несостоятельна и вероятность в механике должна появляться и разными другими путями.

На наш взгляд теоремы 1 и 2 о диффузии в интегрируемых системах демонстрируют плодотворность подхода Гиббса и указывают на то, что его идеи еще до конца не реализованы.

6 Давление, внутренняя энергия и уравнение состояния

Теорема 1 устанавливает закон выравнивания плотности идеального газа в прямоугольном параллелепипеде. Теорема 2 позволяет доказать выравнивание давления и плотности энергии идеального газа, указать формулы для предельных значений этих величин и тем самым вывести уравнения состояния газа в тепловом равновесии.

Выведем сначала формулу для давления газа на одну из стенок сосуда, считая, что давление обусловлено столкновениями частиц газа с этой стенкой. Вывод формулы для давления следует классическому рассуждению в элементарной кинетической теории газа (см., например, [20]; правда обычно предполагается, что газ уже находится в тепловом равновесии и распределение по скоростям имеет вид распределения Максвелла).

Для определенности рассмотрим стенку, заданную уравнением $z_1 = \ell_1$. Выделим бесконечно малую прямоугольную площадку σ с центром в точке с координатами ℓ_1, z_2, z_3 ; ее площадь равна $d\sigma = dz_2 dz_3$. Частицы газа, которые могут удариться о площадку σ со скоростью $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ в момент времени t , находятся в момент времени $t - dt$ на параллельной площадке σ_- той же площади $d\sigma$ (рис. 2). За время dt они заметают объем

$$dv = \omega_1 dt dz_2 dz_3.$$

Их число равно

$$dn = N f(\omega, \ell_1, z_2, z_3) dv,$$

где постоянный множитель N имеет смысл "числа частиц газа в сосуде". Пусть m – масса "одной" частицы. Тогда mN – общая масса газа. Числа m и N имеют условный характер; они введены с целью сопоставления полученных ниже формул с известными формулами статистической механики. Поскольку $\langle f \rangle = 1$, то mNf – плотность распределения массы газа.

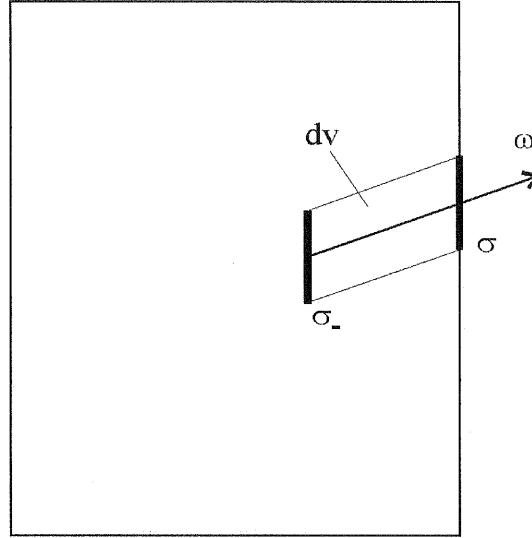


Рис. 2

За время dt частицы передают стенке импульс

$$dP = 2m\omega_1 dn = 2mN\omega_1^2 f dt d\sigma.$$

Ясно, что dP/dt есть сила давления. Если мы разделим ее на площадь $d\sigma$, то получим элементарное давление на стенку в точке с координатами ℓ_1, z_2, z_3 . Интегрируя по всем скоростям, получим полное давление

$$p = 2mN \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \omega_1^2 f(\omega, \ell_1, z_2, z_3) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \quad (6.1)$$

Пусть f – четная функция скоростей: $f(-\omega, z) = f(\omega, z)$. Тогда формула (6.1) принимает более симметричный вид:

$$p = mN \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f(\omega, \ell_1, z_2, z_3) d^3\omega. \quad (6.2)$$

Подчеркнем, что в начальный момент давление p зависит от точки на стенке $z_1 = \ell_1$. Формула для давления на другие стенки имеет вид (6.2), только ω_1^2 надо заменить на ω_2^2 и ω_3^2 соответственно.

Замечание 1. Как определить давление газа в произвольной внутренней точке $z \in \Pi$ на площадке с нормалью n ? Если частицы газа будут ударяться в площадку с противоположных сторон, то (с учетом предположения о четности функции распределения)

получим, очевидно, нулевое давление. Если же в сосуд Π поместить тело небольшого объема, то частицы газа будут ударяться в площадку, двигаясь с одной стороны. Следовательно, в этот момент времени давление будет определяться слегка подправленной формулой (6.2):

$$p = mN \int_{\mathbb{R}^3} (\omega, n)^2 f(\omega, z) d^3\omega.$$

Устремим теперь t к бесконечности. Тогда, согласно разд. 5, плотность f стремится к "равновесному" состоянию \bar{f} , зависящему лишь от точки стенки:

$$p = mN \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 \bar{f} d^3\omega. \quad (6.3)$$

Замечание 2. На самом деле формула (6.3) нуждается в дополнительном обосновании, поскольку в (6.2) нет усреднения по конфигурационному пространству и функция $\omega \mapsto \omega_1^2$, конечно, не из класса L_2 . Формулу (6.3) следует понимать по-другому.

Пусть $f(\omega, x)$ – плотность распределения, "поднятая" в прямое произведение $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3$. Положим

$$p(t) = mN \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f(\omega, x - \omega t) d^3\omega.$$

Далее, пусть

$$\sum_k f_k e^{i(k, x)}$$

– ряд Фурье функции f , определенный для почти всех $\omega \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$p(t) = mN \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 \bar{f} d^3\omega + mN \sum_{k \neq 0} e^{i(k, x)} \int_{\mathbb{R}^3} \omega_1^2 f_k(\omega) e^{-i(k, \omega)t} d^3\omega.$$

Если функции $\omega_1^2 f_k$ суммируемы для всех $k \in \mathbb{Z}^3$, то $p(t)$ стремится к (6.3) при $t \rightarrow \infty$.

Заметим, что если \bar{f} зависит от $\omega^2 = \sum \omega_s^2$, то справедлив закон Паскаля: давление по всем направлениям одинаково. В противном случае это не так: доля частиц, движущихся в разных направлениях, разная.

Для средней кинетической энергии одной частицы имеем формулу

$$e = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\Pi} \frac{m\omega^2}{2} f(\omega, z) d^3z d^3\omega.$$

Переходя к 8-листному накрытию $\mathbb{T}^3 \rightarrow \Pi$, эту формулу можно представить в виде:

$$e = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{T}^3} \frac{m\omega^2}{2} f(\omega, x) d^3x d^3\omega.$$

Средняя (внутренняя) энергия всего газа равна, очевидно,

$$E = \frac{mNv}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \omega^2 \bar{f} d^3\omega, \quad (6.4)$$

где v – объем сосуда. Интеграл справа сходится, если давления газа на каждую стенку сосуда принимают конечные значения.

Если \bar{f} зависит от ω^2 , то из (6.3) и (6.4) вытекает простое соотношение

$$E = \frac{3}{2}pv. \quad (6.5)$$

Эта формула хорошо известна в теории идеального газа.

Пусть

$$\Omega = dE + pdv \quad (6.6)$$

– 1-форма притока тепла; она не является полным дифференциалом. Согласно второму началу термодинамики, Ω имеет интегрирующий множитель: $\beta\Omega = dS$, где S – энтропия, $\beta = 1/(k\tau)$, τ – абсолютная температура, k – постоянная Больцмана. С учетом (6.5) форма (6.6) имеет интегрирующий множитель $(pv)^{-1}$. Следовательно, pv пропорционально абсолютной температуре τ и мы приходим к уравнению состояния идеального газа – уравнению Клапейрона.

К этому же выводу можно прийти по-другому, положив

$$\bar{f} = c\rho \left(\beta \frac{m\omega^2}{2} \right), \quad (6.7)$$

где $\beta = 1/(k\tau)$, k – постоянная Больцмана, c – нормировочный множитель:

$$c^{-1} = v \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\beta \frac{m\omega^2}{2} \right) d^3\omega. \quad (6.8)$$

Распределения вида (6.7) изучались в работе [8]; к ним относится и классическое распределение Максвелла.

После замены $\omega_s = \tilde{\omega}_s/\sqrt{m\beta}$ получим

$$c^{-1} = \frac{v}{(\sqrt{m\beta})^3} \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{2} \right) d^3\tilde{\omega},$$

$$E = \varkappa \frac{Nk\tau}{2}, \quad \varkappa = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\omega}^2 \rho \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{2} \right) d^3\tilde{\omega} / \int_{\mathbb{R}^3} \rho \left(\frac{\tilde{\omega}^2}{2} \right) d^3\tilde{\omega}.$$

Для распределения Максвелла $\varkappa = 1$. В работе [8] описан класс немаксвелловских распределений, для которых также $\varkappa = 1$.

7 Энтропия

Как известно, энтропия определяется равенством

$$S = - \int_{\mathbb{P}} f(\omega, x) \ln f(\omega, x) d^n x d^n \omega, \quad (7.1)$$

где f – функция распределения вероятностей. Для распределения Максвелла она совпадает с энтропией, принимаемой в равновесной термодинамике.

Спрашивается, как ведет себя энтропия со временем в рассматриваемом случае, когда газ представляется бесстолкновительной сплошной средой? Важно подчеркнуть, что эволюция состояния газа является адиабатическим процессом: передачи энергии не происходит.

Чтобы получить S как функцию времени, надо в подынтегральном выражении (7.1) заменить x на $x - \omega t$. Однако, при такой подстановке интеграл (7.1) не изменится и S как функция времени будет константой.

Это простое наблюдение соответствует результату Пуанкаре [12] о том, что тонкая энтропия математиков, в отличие от грубой энтропии физиков, всегда постоянна. Кстати сказать, разделение энтропии на тонкую и грубую по сути дела отвечает мелко- и крупнозернистой структурам фазового пространства, введенным позже Т. и П. Эренфестами в их известной работе [2].

К вопросу о поведении энтропии можно подойти с несколько иной стороны. Мы уже видели в разд. 5, что функция распределения $f(\omega, x - \omega t)$ при $t \rightarrow \infty$ стремится в обобщенном смысле к своему среднему значению \bar{f} , зависящему лишь от ω . Положим

$$S_\infty = -(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f} \ln \bar{f} d^n \omega. \quad (7.2)$$

Это выражение можно интерпретировать как энтропию в установившемся равновесном состоянии. Кстати сказать, формулу (7.2) можно получить по теореме 2, полагая $g = \ln f$.

Имеет место неравенство

$$S \leq S_\infty, \quad (7.3)$$

выражающее второе начало термодинамики для необратимых процессов.

Для доказательства (7.3) зафиксируем значение ω и обозначим $f(\omega, x)$ через $\rho(x)$. Нам достаточно установить неравенство

$$\overline{\rho \ln \rho} \geq \bar{\rho} \ln \bar{\rho}.$$

Оно в свою очередь эквивалентно дискретному неравенству

$$\sum \rho_i \ln \rho_i \geq \left(\sum \rho_i \right) \ln \sum \rho_i$$

для положительных ρ_i , которое является частным случаем неравенства Иенсена для выпуклой функции $\rho \mapsto \rho \ln \rho$. Что и требовалось.

Как заметил Пуанкаре [12], значения энтропии можно сравнивать лишь в состояниях установившегося равновесия.

Рассмотрим простой, но поучительный пример. Пусть сосуд Π разделен перегородкой на две части и первоначально газ сосредоточен в одной из частей Π_- , находясь в

тепловом равновесии. Его энтропию обозначим S_- . Уберем теперь перегородку. Тогда газ начнет адиабатически расширяться, стремясь (по теореме 1) равномерно заполнить весь объем Π . Пусть S_+ – энтропия газа после установления теплового равновесия, которое произойдет за бесконечное время. Согласно (7.3), $S_- \leq S_+$. Более того, можно показать, что в этом случае имеет место постоянное соотношение

$$S_+ = S_- + \ln \frac{v_+}{v_-}, \quad (7.4)$$

где $v_-(v_+)$ – объем $\Pi_-(\Pi_+)$.

Действительно, пусть f_- – плотность распределения газа, находящегося в тепловом равновесии в сосуде Π_- ; эта функция зависит лишь от скорости ω . Тогда, очевидно, $S_- = -v_- J$, где

$$J = \int_{\mathbb{R}^n} f_- \ln f_- d^n \omega.$$

После снятия перегородки равновесие нарушается и плотность $f(\omega, z)$ уже зависит от точки $z \in \Pi$: в начальный момент $f = f_-$, если $z \in \Pi_-$, и $f = 0$, если $z \in \Pi \setminus \Pi_-$. По теореме 2, при $t \rightarrow \infty$ плотность f стремится в обобщенном смысле к своему среднему значению

$$\bar{f} = \frac{1}{v_+} \int_{\Pi} f d^n z = \frac{v_-}{v_+} f_-.$$

Наконец,

$$S_+ = -v_+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v_-}{v_+} f_- \ln \left(\frac{v_-}{v_+} f_- \right) d^n \omega = -v_- J - v_- \int_{\mathbb{R}^n} f_- d^n \omega \ln \left(\frac{v_-}{v_+} f_- \right) = S_- + \ln \left(\frac{v_-}{v_+} \right).$$

Формула (7.4) совпадает с известной формулой приращения энтропии при свободном расширении газа в пустоту. Однако, мы получили эту формулу не опираясь на законы термодинамики, а использовали лишь закон движения идеального газа как бесстолкновительной среды.

8 Изменение формы сосуда

Изменяются ли наши выводы, если заменить прямоугольный параллелепипед замкнутой поверхностью произвольной формы? Этот вопрос имеет принципиальное значение не только с точки зрения термодинамики.

Дело в том, что траектории частиц газа по сути дела являются световыми лучами. Поэтому задачу можно переформулировать в терминах геометрической оптики. Поместим источник света (возможно распределенный) внутри замкнутой зеркальной поверхности. Спрашивается, будет ли освещенность внутри этой поверхности постоянной, или же она будет зависеть от места? На самом деле родственная задача возникает и при рассмотрении излучения в замкнутом объеме, когда принимается лучевое приближение (см., например, [21]). На поставленный вопрос традиционно отвечают положительно. Правда, при этом кроме соображений динамического характера обычно используют

условия теплового равновесия. Кстати сказать, на этот счет у самого Пуанкаре имеются противоречивые высказывания (см. [22]).

На самом деле ответ, конечно, отрицательный и это легко понять, имея ввиду наличие фокальных точек и каустик. В качестве простого примера можно рассмотреть сосуд в форме эллипса и поместить источник света в один из фокусов. Легко понять, что в итоге свечение сконцентрируется на большой оси эллипса (кстати сказать, неустойчивой). Если же источник света поместить не в фокусе, то освещенность внутри эллипса будет переменной. Существование предельного распределения в этом случае (как и в любой другой интегрируемой задаче) вытекает из теоремы 2. Если же билиард не относится к числу интегрируемых, то существование предельной плотности распределения представляется содержательной задачей.

В некотором смысле любой билиард можно сколь угодно точно приблизить интегрируемым билиардом. На плоскости это многоугольник, углы которого соизмеримы с π (см., например, [23]). Кроме интеграла энергии они допускают интеграл в виде полинома по скоростям. Например, для прямоугольника дополнительный интеграл имеет степень 2 (сохраняется квадрат проекции скорости на любую из сторон). Легко понять, что этим же свойством обладают и билиарды, изображенные на рис. 3. Используя интегрируемость этих систем, с помощью теорем 1 и 2 можно изучать диффузию идеального газа как бесстолкновительной среды в сосудах указанной формы и, в частности, изучать диффузию и смешение газов в сосудах с перегородками.

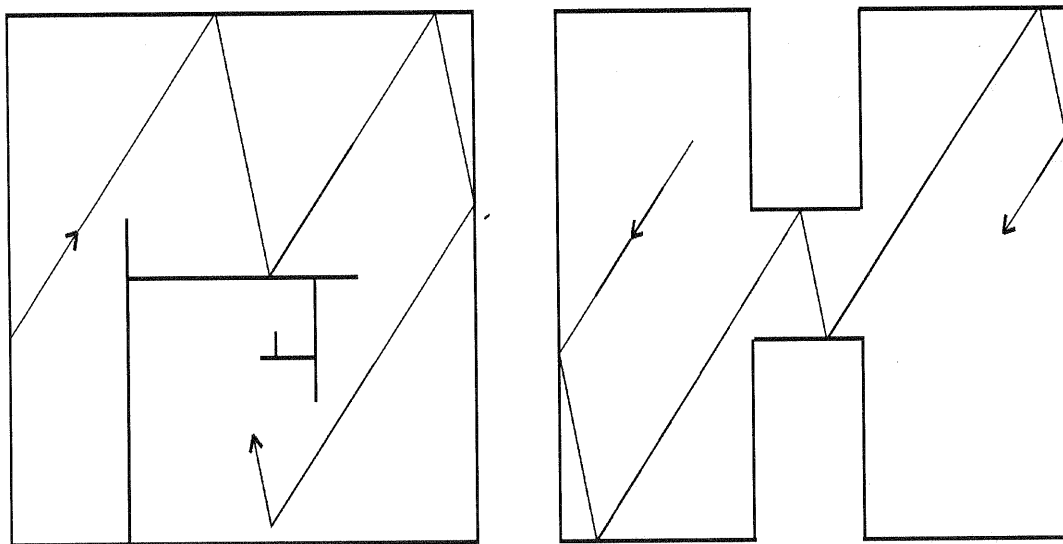


Рис. 3

Итак, указанный механизм необратимой диффузии бесстолкновительной среды не является универсальным. Однако, для разреженных газов его следует учитывать наряду с механизмом хаотизации, основанным на учете соударений молекул. Согласно Пуанкаре, через какое-то время, достаточно долгое, чтобы каждая частица прошла по несколько раз сосуд по всей длине, но достаточно короткое, чтобы столкновения не были многочисленными, в газе установится режим, который соответствует равновесному

состоянию бесстолкновительной сплошной среды. Но это равновесие не будет окончательным, столкновения будут стремиться его нарушить, и только через еще более длительное время газ достигнет, наконец, окончательного теплового равновесия.

Кстати сказать, "странная кинетика" с участием динамического демона Максвелла, открытая в работах [13, 14], также основана на рассмотрении бесстолкновительной среды. Численные расчеты показывают, что в сосудах, составленных из рассеивающих бильярдных шаров, плотность газа не выравнивается. Как мы только что показали, схожий эффект имеет место и для интегрируемых бильярдных шаров. Странности кинетики исчезают как только мы начнем учитывать взаимодействие частиц газа.

В заключение работы сделаем два замечания.

Рассмотрим невырожденную вполне интегрируемую систему, которая описывается уравнениями (2.2) в каждой инвариантной области $D \times \mathbb{T}^n$ фазового пространства, где D – область в $\mathbb{R}^n = \{\omega\}$. Возмутим теперь слегка функцию Гамильтона. Хотя возмущенная система уже не будет интегрируемой, однако большинство (в смысле меры Лебега) инвариантных торов не исчезнут, а лишь слегка деформируются (теорема Колмогорова о сохранении условно-периодических движений). При достаточной гладкости функции Гамильтона динамика на инвариантном множестве большей меры снова будет описываться уравнениями (2.2), но только теперь $\omega \in D \setminus M$, где $\text{mes } M \rightarrow 0$, когда возмущение исчезает [15]. В этой ситуации теоремы 1 и 2 останутся справедливыми, но только плотность распределения вероятностей f надо положить равной нулю в прямом произведении $M \times \mathbb{T}^n$ (в щели между колмогоровскими торами). Таким образом, можно говорить о диффузии возмущенной гамильтоновой системы на инвариантном колмогоровском множестве. Отметим, что $D \setminus M$ имеет структуру канторова множества; в частности, оно нигде не плотно в D .

Заметим еще, что предельную плотность распределения \bar{f} можно также получить усреднением функции f по траекториям системы (2.2). Положим

$$\tilde{f}(\omega, x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega, x - \omega t) dt. \quad (8.1)$$

По теореме Вейля, этот предел существует для всех фаз x и $\tilde{f}(\omega, x) = \bar{f}(\omega)$ для всех нерезонансных наборов частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Напомним, что частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ находятся в резонансе, если $k_1\omega_1 + \dots + k_n\omega_n = 0$ для некоторых целых k_s , не равных одновременно нулю. Поскольку резонансные $\omega \in \mathbb{R}^n$ составляют множество нулевой меры Лебега, то с точки зрения теории меры функции \tilde{f} и f эквивалентны. Функция \tilde{f} непрерывна при нерезонансных значениях ω и вообще говоря разрывна на множестве резонансных торов [24] (как классический пример функции Римана, непрерывной в иррациональных и разрывной в рациональных точках вещественной оси).

Рассмотрим теперь динамическую систему, более общую, чем (2.2). Она задается

автономной системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, \omega), \quad \dot{\omega} = 0 \quad (8.2)$$

в прямом произведении $\mathbb{P} = \Lambda \times \mathbb{R}^m$, где $\Lambda = \{x\}$ – компактное n -мерное многообразие; v – гладкое векторное поле на Λ с инвариантной мерой $d\mu = \lambda(x, \omega)d^n x$:

$$\sum \frac{\partial v_i \lambda}{\partial x_i} = 0.$$

В отличие от (2.2), размерности m и n не совпадают. Например, при $m = 1$ уравнения (8.2) описывают гамильтоновы системы с компактными энергетическим многообразиями; роль переменной ω играет полная энергия системы.

Пусть $f(\omega, x)$ и $g(\omega, x)$ – суммируемые с квадратом функции, заданные на фазовом пространстве \mathbb{P} . Следуя (3.2), рассмотрим функцию

$$K(t) = \int_{\mathbb{P}} f(\omega, g^{-t}(x, \omega)) g(\omega, x) d^m \omega d\mu, \quad (8.3)$$

где g^t – фазовый поток системы (8.2). Для целей обоснования кинетики бесстолкновительной сплошной среды в общем случае желательно доказать следующее утверждение: если для почти всех ω динамическая система $\dot{x} = v(x, \omega)$ эргодична на Λ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} K(t) = \int_{\mathbb{R}^m} \bar{f} \bar{g} \text{mes } \Lambda d^m \omega, \quad (8.4)$$

где

$$(\bar{\cdot}) = \frac{1}{\text{mes } \Lambda} \int_{\Lambda} (\cdot) d\mu, \quad \text{mes } \Lambda = \int_{\Lambda} d\mu.$$

Соотношение (8.4) содержит формулу (5.1) как частный случай.

Отметим, что если для почти всех ω динамическая система на Λ обладает свойством перемешивания, то формула (8.4), конечно, справедлива. Действительно, для фиксированного ω (по определению перемешивания)

$$\int_{\Lambda} f(\omega, g^{-t}(x, \omega)) g(\omega, x) d\mu \rightarrow \frac{1}{\text{mes } \Lambda} \int_{\Lambda} f d\mu \int_{\Lambda} g d\mu \quad (8.5)$$

при $t \rightarrow \infty$ (см., например, [25]). Остается проинтегрировать это соотношение по \mathbb{R}^m .

Важно подчеркнуть, что система $\dot{x} = \omega$ на торе не является перемешивающей. В этом случае при доказательстве (8.4) мы существенно использовали усреднение по ω и свойства преобразования Фурье.

Отметим, что для эргодических систем без перемешивания соотношение (8.5) справедливо лишь для сходимости по Чезаро, когда левая часть усредняется по времени (как в (8.1)) (см. [25]). Однако, усреднение по времени (характерное для эргодических теорем фон Неймана и Биркгофа) в нашем случае желательно заменить усреднением по ω .

Заметим, что в круговой модели Каца также присутствует дополнительное усреднение по всем возможным положениям множества M , которое участвует в описании динамики белых и черных шаров.

Пусть $\Lambda = \mathbb{T}^n$ и поле v не зависит от x . Тогда можно положить $\lambda = 1$ и поэтому $\text{mes } \Lambda = (2\pi)^n$. Формула (8.4) заведомо справедлива и в этом случае, если предположить, что m -мерная поверхность $\omega \mapsto v(\omega)$ в $\mathbb{R}^n = \{v\}$ трансверсальна резонансным плоскостям $(k, v) = 0$, $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Вопрос о справедливости (8.4) в общем случае остается пока открытым.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (99-01-01096) и гранта "Ведущие научные школы" (00-15-96146).

Список литературы

- [1] Больцман Л. Лекции по теории газов. М.: Гостехиздат. 1956.
- [2] Ehrenfest P., Ehrenfest T. Begriffliche Grundlagen der Statistischen Auffassung in der Mechanik. Enzyklopadie der Math. Wiss. Bd. IV. 1911.
- [3] Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. М.: "Мир". 1965.
- [4] Кац. М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: "Мир". 1965.
- [5] Кац. М. Несколько вероятностных задач физики и математики. М.: Наука. 1967.
- [6] Вукалович М.П., Новиков И.И. Уравнение состояния реальных газов. М.-Л.: Гос. энергетическое изд-во. 1948.
- [7] Козлов В.В. Термодинамика гамильтоновых систем и распределение Гиббса. // ДАН. 2000. Т. 370. №3. с. 325-327.
- [8] Kozlov V.V. Billiards, invariant measures and equilibrium thermodynamics // Regular and Chaotic Dynamics, 2000. V. 5. №2. p. 129-138.
- [9] Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука. 1990.
- [10] Burgers J.M. The Nonlinear Diffusion Equation. Dordrecht. D. Reidel. 1974.
- [11] Козлов В.В. Общая теория вихрей. Ижевск: Изд. дом "Удмуртский университет". 1998.
- [12] Пуанкаре А. Замечания о кинетической теории газов. // В кн. А. Пуанкаре. Избранные труды. Т. III. М.: "Наука". 1974. с. 385-412.
- [13] Zaslavsky G.M. From Hamiltonian chaos to Maxwell's Demon. // Chaos. 1995. V. 5. №4. p. 653-661.

- [14] Zaslavsky G.M. Chaotic Dynamics and the Origin of Statistical Laws. // Physics Today. 1999. Ang., part 1. p. 39-45.
- [15] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ АН СССР. 1985.
- [16] Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю один // В кн. Г. Вейль. Избранные труды. М.: "Наука". 1984. с. 58-93.
- [17] Prigogine I., George C., Henin F., Rosenfeld L. Unified Formulation of Dynamics and Thermodynamics // Chemica Scripta. 1973. V. 4. p. 5-32.
- [18] Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход. М.: "Мир". 1976.
- [19] Гиббс Дж. В. Основные принципы статистической механики. М.: Гостехиздат. 1946.
- [20] Левич В.Г. Введение в статистическую физику. М.: Гостехиздат. 1954.
- [21] Зоммерфельд А. Термодинамика и статистическая физика. М.: ИЛ. 1955.
- [22] Пуанкаре А. Теория вероятностей. Ижевск: Ред. журнала "Регулярная и хаотическая динамика". 1999.
- [23] Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991.
- [24] Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1980.
- [25] Халмош П.Р. Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ. 1959.