

Локальные инварианты динамических систем на плоскости.*

Р.И. Богданов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Статья является обзором результатов, примыкающих к публикации автора «Нелокальные первые интегралы полиномиальных векторных полей» во 2-м выпуске настоящего издания. Показано, что динамические системы на плоскости в общем положении (точнее в конечномодалых случаях) локально в окрестности неподвижных точек интегрируются в терминах элементарных функций математического анализа в подходящих гладких координатах. В частности, в статье даются списки возникающих при этом элементарных функций. Эти списки представляют большой интерес для численных исследований в приложениях: по гидродинамике, газодинамике, и т.д.

Естественным образом, прослушав в 1968-1969 учебном году курс В.И. Арнольда по обыкновенным дифференциальным уравнениям на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова, я попросился к нему в ученики. В.И. Арнольд предложил во время летних каникул прочитать одну из книг (мне достались книги "Мемуары о кривых, определяемых дифференциальными уравнениями" А. Пуанкаре, "Непрерывные группы" Л.С. Понтрягина и "Теория Морса" Д. Милнора) и пройти осенью соответствующее собеседование. В итоге я стал учеником В.И. Арнольда.

Курс В.И. Арнольда по обыкновенным дифференциальным уравнениям (см. [4]) он читал после курса "механики", вероятно, поэтому изложение было построено в "инженерном" духе: формулировалась теорема о "выпрямлении" векторного поля в окрестности неособой точки; рассказывались многочисленные следствия этой теоремы существования; затем (во втором семестре) рассказывалось одно из многочисленных ее доказательств. Это было нетрадиционным изложением для мехмата, но позволило увеличить информативность курса: в частности, в конце изложить теорию гладких многообразий (среди прочих нововведений, что весьма воодушевляло сильных студентов).

К теореме о "выпрямлении" векторного поля примыкает большой круг идей и методов обыкновенных дифференциальных уравнений, развитие которых частично освеща-

*Работа выполнена частично при поддержке фонда РФФИ грант №01-01-00583 а.

ется ниже.¹

На устном экзамене в конце годового курса профессора (тогда) В.И. Арнольда, я получил от него дополнительный вопрос (экзамен сдавался досрочно, поэтому уверенный правильный ответ завершал экзамен оценкой "отл."): как устроена алгебра непрерывных первых интегралов в окрестности особой точки типа "фокус" векторного поля на плоскости? После лихорадочного перебора теории линейных уравнений и т.п. через примерно 2 минуты мной был назван правильный ответ: локально постоянные функции. После уточнения (~3 мин.) доказательства этого факта я получил свой "отл".

Обдумывая потом (прошло уже более 30 лет) ход сдачи экзамена я был обескуражен тем, насколько "качественные" геометрические соображения заменяют в подходящих случаях "бесполезные" трудоемкие аналитические приемы исследования. Позднее (через 10, 20 лет) я возвращался к этой мысли.

Ниже излагаются основные результаты, которые я сумел получить отпирываясь от этого академического вопроса. По ходу изложения в комментариях (сноски) отмечается состояние соответствующих вопросов к моменту, когда были получены описываемые результаты. Безусловно, я благодарен В.И. Арнольду за многочисленные обсуждения и полезные замечания по ходу этой работы.

Введение.

1⁰. Нормальные формы в качестве представителей класса эквивалентности.

В последние десятилетия нормальная форма дифференциального объекта такого, как векторное (поливекторное) поле, дифференциальная k -форма, функция в \mathbb{R}^n и т.д., довольно-таки устоявшийся термин в литературе (см., например, [24],[28] и библиографию там же).

Этот термин в логически законченных исследованиях подразумевает действие подходящей группы на пространстве дифференциальных объектов. Как правило пространство дифференциальных объектов является функциональным пространством, т.е. бесконечномерным линейным пространством над кольцом подходящих коэффициентов (обычно \mathbb{R} или \mathbb{C}). Соответственно, подходящая группа является бесконечномерной (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) функциональной группой.

Групповое действие разбивает пространство дифференциальных объектов на орбиты действия группы. Иногда орбиту называют классом эквивалентности. Два дифференциальных объекта называют, соответственно, эквивалентными, если они лежат в одной орбите действия группы.

Традиционно слова "нормальная форма" означают - "представитель класса эквивалентности", или другими словами - элемент орбиты группового действия. Большим

¹В 90-х годах в беседе с коллегой в ответ на вопрос о моей специальности я ответил - теория обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате увидел недоумение и услышал : "... неужели сейчас можно работать в этой области? Здесь все сделано классиками". Ситуация аналогичная положению в математической физике, сложившемуся в конце XIX столетия, когда ничто не предвещало развития физики на основе квантовой механики.

недостатком этого термина является тот факт, что нормальная форма определена не единственным образом (см., например, п.4⁰).

2⁰. Традиционные группы, используемые для получения нормальных форм дифференциальных объектов.

Классификационные задачи для векторных полей исторически, начиная с работ А. Пуанкаре, апеллировали к группе обратимых замен фазовых координат в фазовом пространстве. В локальных задачах, рассматривающих произвольную достаточно малую окрестность точки в фазовом пространстве, обратимость замены гарантируется обратимостью линейного приближения соответствующей замены фазовых координат в указанной точке фазового пространства. Линейные приближения для всех обратимых замен сами по себе образуют группу. Обычно действие линейной группы разбирается отдельно от общей группы нелинейных замен фазовых координат, потому что соответствующие классификационные задачи приводят к конечномерным (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) пространствам.

Нелинейные группы рассматривались для аналитических замен фазовых координат. Отправляясь от аналитических групп, вводятся в рассмотрение формальные степенные ряды в качестве формальных замен координат. Другая возможность по сравнению с аналитическим подходом реализации формальных нормальных форм заключается в использовании замен фазовых координат класса \mathbb{C}^∞ . Естественным образом появляются группы замен фазовых координат класса \mathbb{C}^r , (где $0 \leq r \leq \infty$, r - целое). В случае \mathbb{C}^0 естественно нормальные формы называются топологическими.

Группы замен фазовых переменных класса \mathbb{C}^r вкладываются естественным образом в группы замен фазовых переменных класса \mathbb{C}^k при $k \leq r$. Таким образом возникает фильтрация групп (подробнее см.[37]). Соответственно возникает фильтрация орбит. Проще говоря, речь идет о "склейке" орбит группового действия. Самые "большие" орбиты отвечают склейке для замен фазовых переменных класса \mathbb{C}^0 . Поэтому термин класс эквивалентности предъявлен в п. 1⁰ и отражает тот факт, что группе замен фазовых переменных класса \mathbb{C}^0 не отвечает групповое действие в пространстве дифференциальных объектов (за исключением пространства непрерывных функций на фазовом пространстве).

3⁰. Понятие "общее положение" или "случай общего положения", "нормальная форма общего положения" выражает нижеследующее свойство орбиты группового действия на пространстве дифференциальных объектов. Групповое действие разбивает пространство дифференциальных объектов на орбиты действия. Как правило, это разбиение устроено довольно сложно. Поэтому приходится упорядочивать каким-либо способом орбиты. Зачастую орбиты бесконечномерные (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) подмногообразия в бесконечномерном (над \mathbb{R} или \mathbb{C}) пространстве дифференциальных объектов. Вместе с этим некоторые орбиты могут иметь конечную коразмерность. В таком случае коразмерность - целое число - позволяет упорядочивать такие орбиты. Обычно орбиты с минимально возможной коразмерностью и называются орбитами "общего положения" и т.д.

В качестве примера естественно привести нормальные формы квадратных матриц (над \mathbb{C}) относительно линейных замен координат. Набор собственных чисел матрицы является инвариантом на орбите действия. Следовательно орбита общего положения имеет коразмерность n , равную размеру матриц. Этот пример конечномерный, поэтому он и был разобран исторически раньше других.

Ниже мы приводим другие примеры нормальных форм "общего положения". В каждом примере подразумевается свое групповое действие, которое мы не описываем явно, если из контекста понятно о каком действии идет речь.

В бесконечномерном случае может оказаться, что орбиты группового действия, являясь подмногообразиями, имеют бесконечную коразмерность (подробнее см. п. 1.3. ниже). Обычно, такая ситуация обнаруживает патологическую постановку задачи и требует дополнительного анализа прикладной проблемы, чтобы избежать патологий.

4⁰. Неединственность нормальных форм.

Как отмечалось в пункте 1⁰ нормальные формы определяются не единственным образом. В связи с этим можно накладывать дополнительные требования к "нормальной форме" векторного поля, гарантирующие её единственность. Наиболее жестким требованием являлось бы требование ее интегрируемости в каком-либо смысле (например, в элементарных функциях подходящих координат в фазовом пространстве). К сожалению, вопросы интегрируемости настолько сложны, что на сегодня бытует фольклорное мнение, что это свойство не встречается в "общем положении" в теории динамических систем ². Вместе с этим анализ существующих примеров нормальных форм не отвергает такой гипотезы (не очевидно даже, что такая нормальная форма определена единственным образом) ³. Поясним сразу же, что нормальные формы для их интегрируемости приходится строить с помощью орбитальной эквивалентности векторных полей (подробнее см. ниже, §2, а также табл.1, в которой первые три строки известны со времени основополагающих работ А. Пуанкаре, а 4 нижних появились лишь в 80-е годы XX-го столетия). Традиционная фольклорная формулировка апеллирует к группе замен фазовых переменных в фазовом пространстве ⁴, что является достижением XIX столетия. Далеко не полный перечень соответствующих имен - А. Пуанкаре, Брио и Буке, С. Ли, Э. Нетер и т.д. Соответствующие вопросы достаточно подробно освещены в [29], поэтому ниже в §1 мы бегло иллюстрируем эту проблему в основном апеллируя к работам А. Пуанкаре (см. современное изложение в [3]).

§1 Локальные нормальные формы векторных полей.

1.1. Выпрямление векторного поля в окрестности неособой точки.

² Слова "общее положение" нуждаются, естественно, в уточнении

³ Анализ единственности нормальной формы приводит к изучению группы Галуа нормальной формы (см., например, п. 1.1.3 и табл.1 ниже).

⁴ в случае бесконечной гладкости, традиционно обозначаемой через $Diff$

1.1.1. Теорема о "выпрямлении" векторного поля (см. [4]) в окрестности неособой точки является локальной теоремой: в окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ (или эквивалентно система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\dot{(\cdot)} = d(\cdot)/dt$ приводится с помощью подходящей замены координат к "простейшему" виду

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \partial/\partial x \quad (2)$$

(эквивалентно, существуют такие координаты $\{(y_1, \dots, y_{n-1}, x)\} = \mathbb{R}^n$, что система (1) примет вид

$$\left. \begin{array}{l} \dot{y}_j = 0 \\ \dot{x} = 1 \end{array} \right\}, \quad (3)$$

где $j = 1 \div (n-1)$, x - выделенная очевидным образом переменная).

Этот результат обескураживает. Действительно, "нулевых" компонент типа y можно дописывать сколько угодно (конечное число) - ничего не меняется в ответе.

Локально теория обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности неособой точки, как теперь модно говорить, "стабильно эквивалентна" одномерной интегрируемой:

$$\dot{x} = 1 \Leftrightarrow x = x_0 + t, t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n,$$

где ε достаточно малое вещественное число.

Исторически сложилось, что одна из первых теорем существования решения у системы обыкновенных дифференциальных уравнений является теоремой о нормальной форме "общего положения" в простейшем случае.

1.1.2. Классические инварианты динамики становятся тривиальными для "выпрявленного" векторного поля и вычисляются явно. Действительно, алгебра первых интегралов образована функциями от $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$; $div \mathbf{v} = 0$ и т.д. ⁵ Слова "функции от y " требуют уточнения с помощью подходящего выбора функционального пространства на фазовом пространстве. Обычно такая процедура совершенно необходима для постановки задач типа существования. Традиционно в теории обыкновенных дифференциальных уравнений функциональные пространства определяются функциональными свойствами векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. В конкретных примерах вместе с этим процедуры интегрирования зачастую приводят к более экзотическим функциям по сравнению со свойствами компонент векторного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$. Нормальная форма (3) позволяет рассматривать более богатые функциональные пространства (функции с изолированными особенностями, "неизолированными" и т.д.), которые, к сожалению, приходится вводить в рассмотрение в связи с соответствующими приложениями результатов.

⁵Этот факт в приложениях математической физики ведет к ряду недоразумений.

1.1.3. Группы Галуа (подробнее см. [37]) в приложении к нормальной форме вида (3) позволяют найти полную систему локальных инвариантов в окрестности неособой точки векторного поля.

В частности алгебра Галуа нормальной формы (3) образована векторными полями, коммутирующими с векторным полем (2):

$$St_v = \mathcal{E}(\mathbf{y}) < \partial/\partial y_1, \dots, \partial/\partial y_{n-1}, \partial/\partial x >,$$

где, естественно, $\mathcal{E}(\mathbf{y})$ обозначает подходящую алгебру первых интегралов (см. п. 1.1.2.).

1.2. Линейная нормальная форма А. Пуанкаре в окрестности стационара "общего положения".

1.2.1. Нормальные формы векторных полей в окрестности стационаров "общего положения" были получены А. Пуанкаре, в его докторской диссертации (см. [35]). Нормальные формы А. Пуанкаре, в соответствии со временем их получения, были линейными:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (4)$$

где A - матрица $n \times n$ (над \mathbb{C} или \mathbb{R}) может мыслиться в жордановой нормальной форме.

Слова "общее положение" определяют довольно-таки сложно устроенное в топологическом смысле разбиение пространства векторных полей. Точнее, речь идет об особых точках с нерезонансными собственными числами матрицы линеаризации векторного поля в особой точке (дополненными подходящими диофантовыми неравенствами (см. [3],[5])).⁶

В "общем положении" в нормальной форме (4) матрица является диагональной.⁷ Другими словами, существует система координат $\{y_1, \dots, y_n\} \in \mathbb{R}^n$, в которой система уравнений (4) примет вид

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i,$$

т.е. является прямым произведением векторных полей на прямой.

Отметим здесь, что в случае диагональной матрицы инварианты векторного поля (4) вычисляются в терминах элементарных функций фазовых координат.

1.2.2. "Общее положение" по Пуанкаре (т.е. случай, когда применима нормальная форма (4)) наряду с большим достоинством простоты нормальной формы (4) имеет и существенный недостаток. Недостаток заключается в том, что "резонансные" стационары представляют сложную структуру уже в пространстве матриц, отвечающих линеаризации векторного поля в стационаре. Особенно неудобно существование такой структуры в численных приложениях. Зачастую в приложениях эта структура мешает устойчивости расчетных алгоритмов. Поэтому в приложениях исследователи пытались

⁶Понятие резонанса собственных чисел поясняется в п. 1.3. ниже.

⁷Вообще говоря, над полем комплексных чисел. Читатель, не знакомый с комплексификацией и овеществлением линейных векторных полей (см.[4]) может ниже подразумевать, что $\lambda_i \in \mathbb{R}$

различными способами обойти эти трудности. Реально результаты §2 показывают естественные методы построения устойчивых численных алгоритмов в приложениях.

1.3. Функциональные модули А. Пуанкаре в резонансном стационаре.

1.3.1. Резонансными соотношениями (условиями) на собственные числа матрицы линеаризации векторного поля в особой точке:

$$v(x) = Ax + o(\|x\|)$$

называются соотношения вида

$$\lambda_i = (\lambda, \mathbb{k}_i) \quad (5)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ - набор собственных чисел матрицы, а \mathbb{k}_i - целочисленный вектор, компоненты которого не отрицательны.

При наличии нетривиальных резонансных соотношений, нормальная форма (4) А. Пуанкаре усложняется и содержит функциональные модули.

В простейшем случае, когда решения уравнения (5) порождены одним несократимым набором (однократный резонанс)

$$\mathbb{k}_i - e_i = q \cdot m, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad q > 0,$$

где e_i - вектор с единицей на i -том месте и нулевыми остальными компонентами, появляется мономиальная функция:

$$H(x) = x^m = x_1^{m_1}, \dots, x_n^{m_n}.$$

Тогда нормальная форма модифицируется к нелинейному виду

$$\dot{x}_i = x_i \cdot f_i(H) \quad (6)$$

где $f_i(o) = \lambda_i$ (см. [4]).

Функция $f_i(H)$ называется функциональным модулем в резонансном случае.

Случай неоднократного резонанса усложняет вид функции $f(H)$: здесь H будет представлять подходящий набор функций, ничего не меняющий по существу дела.

Появление функциональных модулей в классификационных задачах обнаруживает трансцендентный характер задачи: невозможность избежать методов "математического анализа" в развитии исследований (оценки теории функций, интегрирование в квадратурах и т.д.). Нетрансцендентные задачи, по крайней мере, связаны с полиномиальными функциями, т.е. допускают исследование с помощью методов алгебраической геометрии.

Результаты, излагаемые ниже, показывают способ, загрубив классификацию, избежать рассмотрения функциональных модулей А. Пуанкаре для векторных полей на плоскости.

§2. Орбитальная эквивалентность векторных полей.

2.1. Фазовые портреты векторных полей.

2.1.1. А. Пуанкаре принадлежит идея изучать не решения системы (1), а геометрический образ, связанный с векторным полем (1), названный А. Пуанкаре фазовым портретом векторного поля (см. [33]). Напомним определение фазового портрета. Фазовой кривой векторного поля (1) называется образ в фазовом пространстве $x(t) \in \mathbb{R}^n$, отвечающий решению $x(t)$ системы (1) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$, где $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \ll 1$. Если две локальные фазовые кривые: $x(t), t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$; $\tilde{x}(t), t \in (\tilde{t}_1 - \tilde{\varepsilon}, \tilde{t}_1 + \tilde{\varepsilon})$ имеют нетривиальное пересечение, т.е. для подходящих t и \tilde{t} $x(t) = \tilde{x}(\tilde{t})$, то мы говорим, что определена "большая" фазовая кривая, являющаяся объединением названных двух. Разбиение фазового пространства на фазовые кривые векторного поля (1) и называется фазовым портретом векторного поля (1).

Следствием теоремы о выпрямлении векторного поля в неособой точке является тот факт, что фазовый портрет векторного поля в окрестности неособой точки является пучком параллельных прямых в подходящей системе координат.

С точки зрения топологической классификации фазовых портретов возможно дальнейшее упрощение системы (6). Разобьем $\{y_i\}$ на $y_i^+ : \lambda_i > 0$ и $y_i^- : \lambda_i < 0$. Тогда топологически фазовый портрет эквивалентен фазовому портрету системы (см. [38]):

$$\dot{y}_i^+ = y_i^+, \dot{y}_i^- = -y_i^-.$$

Таким образом с топологической точки зрения в стационаре "общего положения" определена инвариантно пара целых чисел: $m^+ = \#\{y_i : \lambda_i > 0\}$, $m^- = \#\{y_i : \lambda_i < 0\}$, где очевидно $m^+ + m^- = n$.

2.1.1. Орбитальная эквивалентность формализует понятие фазового портрета векторного поля, апеллируя к действию новой группы, обозначаемой через $Diff^+$, на пространстве всех векторных полей. Группа $Diff^+$ является полупрямым произведением группы $Diff$ всех обратимых замен переменных в фазовом пространстве (здесь группу $Diff$ можно заменять на группу аналитических замен, формальных рядов и т.д.) и группы по умножению положительных функций на фазовом пространстве (подробнее см. [15]).

А. Пуанкаре, к сожалению, не оставил нам в своем богатом наследии явного описания группы Ли $Diff^+$, ее алгебры и т.д. Впрочем, эта группа явно не фигурирует в работах специалистов вплоть до 70-х годов предыдущего столетия, в частности, ее не отметили ни А.А. Андронов ни С. Ли и т.д. Уместно отметить также, что неявно к ее помощи прибегали неоднократно в конкретных примерах (см., например, [1],[2]).⁸

⁸Уместно отметить Г.Вейля, сделавшего попытку в [26] проанализировать соответствующие идеи, но с учетом наличия метрики.

Таблица 1: Нормальные формы векторных полей на плоскости в окрестности конечно-модальных особых точек.

имя	V	Φ	$1/\alpha$	ξ	Обозначения
	$s x_1 \partial_1 + \lambda x_2 \partial_2$	$x_1^{-\lambda} x_2^s$	$1/x_1 x_2$	e	(s, λ) нерезонансный
	$x_2 \partial_2 + se$	$e^U x_2^{-s}$	$1/x_2^2$	e	$U = x_1/x_2$
	$Id H/2 + ce$	$e^{cU} H$	$1/H$	e	$c \neq 0, H = x_1^2 + x_2^2,$ $U = \arctg x_1/x_2$
A_j^\pm	$Id U + \theta e + Q(H) e$ $Id H + Q(H) e$	$\frac{U^{j(m+n)} e^{\theta(sV+c)}}{H^j (c+sV)^{c\theta}}$ $\frac{U^{2j} e^{sV+c}}{(c+sV)^{c\theta}}$	$\frac{1}{x_1 x_2 Q(H)}$	$Q(H)e$	$\lambda = -m/n < 0,$ $H = x_1^m x_2^n, V = H^{-j},$ $\lambda \neq -1, \theta = \frac{1+\lambda}{2},$ $U = \frac{1-\lambda}{2} x_1 x_2.$ $\lambda = -1, U = x_1/x_2$
C_j^\pm	$Id H/2 + Q(H) e$	$\frac{e^{2jU+sV+c}}{(c+sV)^c}$	$\frac{1}{HQ(H)}$	$Q(H)e$	$H = x_1^2 + x_2^2, V = H^{-j},$ $U = \arctg x_1/x_2$
B_j^\pm	$Q(H) x_1 \partial_1 + p x_2 \partial_2$	$\frac{U^{2j+2} e^{sV+c}}{(c+sV)^c}$	$\frac{1}{x_1 x_2 Q(H)}$	$x_2 \partial_2$	$p = \pm 1, H = x_1,$ $V = H^{-j}, U = x_2$
D_j^\pm	$s(Id H + w)$	$\frac{e^U}{H^{p/(j+1)}}$	$\frac{1}{x_1^{j+1}}$	w	$w = x_1 \partial_1 + j x_2 \partial_2$ $p = 0, \pm 1,$ $H = -p x_1^{j+1} / (j+1),$ $U = x_2 / x_1^j$
$e = x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2; Q(H) = sH^j + cH^{2j}, j - \text{индекс в серии}, s = \pm 1, \Phi - 1\text{-й интеграл},$ $1/\alpha - \text{интегрирующий множитель}, \xi - \text{образующая стационарной алгебры}$ $-E_2(x_1, x_2)v \oplus E_1(\Phi) \cdot \xi$					

2.2. Нелинейные орбитальные нормальные формы в окрестности резонансных стационаров (элементарные особые точки).

По отношению орбитальной эквивалентности, т.е. апеллируя к действию группы $Diff^+$ на пространстве векторных полей, мы получаем естественное обобщение нормальных форм (4). Естественным образом изменяется вид резонансных соотношений. Ответ приведен в табл.1. Сразу уточним, в табл.1 приводятся нормальные формы всех орбит конечной коразмерности относительно действия группы $Diff^+$ на пространстве векторных полей. Соответствующие особые точки векторных полей на плоскости названы в [12] элементарными. Иногда их называют конечномодальными (точнее бимодальными) особенностями векторных полей на плоскости.

Поскольку естественным образом имеется включение группы $Diff \subset Diff^+$, классы нормальных форм, полученные А. Пуанкаре, остаются и в орбитальной эквивалентности (три первые строки в табл.1). Вместе с этим появляются новые стационары "общего положения" относительно отношения орбитальной эквивалентности по сравнению с классическим действием $Diff$. Они описываются в следующем пункте.

2.2.1. Теорема о выпрямлении векторного поля в окрестности стационарной точки может быть сформулирована, но не совсем очевидным образом. В окрестности стационарной точки векторного поля аналогом теоремы о выпрямлении в неособой точке является теорема о факторизации (см. [11],[13]). Для векторных полей на плоскости резонансное условие на собственные числа матрицы линеаризации векторного поля в особой точке допускает следующую переформулировку. Наличие резонанса (в гиперболическом или эллиптическом случае ; см. нормальные формы A_j^\pm, C_j^\pm в табл.1) эквивалентно существованию гладкого первого интеграла для линеаризации векторного поля в особой точке (сравните с п. 1.3.1). Обозначим этот интеграл через $H(\mathbf{x})$. Отметим также, что в качестве $H(\mathbf{x})$ всегда можно выбрать однородную функцию подходящих фазовых координат $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ (далее уместно выбирать функцию $H(\mathbf{x})$ минимальной степени). Таким образом, если

$$\mathbb{V}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|,) \quad (7)$$

то в резонансном случае

$$L_{A\mathbf{x}}(H) \equiv 0, \quad (8)$$

где $L_{A\mathbf{x}}(\cdot)$ обозначает производную Ли вдоль векторного поля $A\mathbf{x}$ от функции (\cdot) .

Уравнение (6) можно трактовать как уравнение вида

$$L_\xi(H) \equiv f(H), \quad (9)$$

где, очевидно, $\xi = A\mathbf{x}, H = H(\mathbf{x})$ и в случае (8) $f \equiv 0$. Таким образом в окрестности стационара векторного поля на плоскости имеется одномерное векторное поле. Действительно, функция $H(\mathbf{x})$ проектирует фазовое пространство на прямую. На этой прямой уравнение (9) определяет векторное фактор - поле.

Уравнение (9) можно рассматривать как уравнение на фазовой прямой с выделенной координатой $\{H\} \subset \mathbb{R}$. Тогда естественным образом возникают нормальные формы (орбитальные) уравнений вида (9) на прямой относительно группы $Diff$:

$$L_\xi(H) = H^{k+1}(s + cH^k), \quad (10)$$

где $s = \pm 1, k = 1, 2, 3, \dots, c \in \mathbb{R}$.

Ответ (10) следует из результатов докторской диссертации А. Пуанкаре (см.[35],[3]) и хорошо известен специалистам. Осталось сформулировать ответ о нелинейных (орбитальных) нормальных формах векторных полей на плоскости в окрестности "резонансного" стационара: векторное поле орбитально-эквивалентно нормальной форме

$$\mathbb{V}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + H^k(s + cH^k) \mathbf{e}, \quad (11)$$

где $\mathbf{e} = x_1\partial/\partial x_1 + x_2\partial/\partial x_2$ - эйлерово векторное поле на плоскости.

Соответствующие формулировки и доказательства описанных фактов изложены в [15].

2.2.2. Замечание. Отметим, что нормальная форма (10) векторного поля на прямой в окрестности конечновырожденного стационара возникает при классификации с помощью группы $Diff$ на прямой. С точки зрения орбитальной эквивалентности векторных полей на прямой, т.е. с использованием группы $Diff^+$, нормальная форма (10) упрощается до "мономиальной" нормальной формы":

$$L_{\xi}(H) = s \cdot H^{k+1}. \quad (12)$$

С учетом этого замечания нормальную форму (11) естественно модифицировать к виду

$$\mathbb{V}(x) = \frac{1}{|s + cH^k|} \cdot Ax + sH^k e, \quad (13)$$

или

$$\mathbb{V}(x) = |s - cH^k| \cdot Ax + sH^k e, \quad (14)$$

Это замечание играет решающую роль при интегрировании орбитальных нормальных форм в n -мерном случае в случае однократного резонанса (см. [11],[13]).

2.3. Группы Галуа фазовых портретов.

2.3.1. Орбитальные группы Галуа апеллируют к действию группы $Diff^+$ на пространстве всех векторных полей. Другими словами, мы рассматриваем подгруппу, уважающую фазовый портрет данного векторного поля. Это довольно большая подгруппа даже в случае, когда фазовое пространство является двумерным (см. табл.1). Поэтому такая подгруппа имеет внутреннюю структуру. Наиболее простой вопрос - изучить цепочки подгрупп в такой группе и их стабилизатор. Ответ изложен в [14]. Группы Галуа в приложении к нормальной форме вида (3) позволяют найти полную систему локальных инвариантов в окрестности неособой точки векторного поля.

Разнообразие групп Галуа определяется подгруппами в группе всех локальных замен переменных в фазовом пространстве. Очевидные варианты: симплектическая подгруппа, "ортогональная" подгруппа и т.д. (см. [14],[16],[23]).

Группа Галуа действует естественным образом на себе (традиционно в обыкновенных дифференциальных уравнениях используется действие сопряжениями) и на своей алгебре Галуа (как на всякой группе Ли и ее алгебре Ли). Действие на алгебре Ли естественным образом продолжается до орбитального действия. Другими словами, естественно умножать векторные поля алгебры Галуа на положительные функции на фазовом пространстве. Таким образом мы приходим к возможности (частично реализованной в [14],[16],[23]) изучать пары (тройки и т.д.) векторных полей на плоскости (или в многомерном случае) такие, что последующее поле лежит в алгебре Галуа предыдущего векторного поля. Естественно, возникает задача построения нормальных форм таких пар (троек и т.д.), исследования их модулей (простые пары, появление функциональных модулей) и т.п.

2.4. Сложные особые точки векторных полей на плоскости.

2.4.1. σ -процесс алгебраической геометрии был предложен Брио и Буке для анализа сложных особых точек векторных полей на плоскости. При σ -процессе окрестность стационара на фазовой плоскости накрывается неориентируемым 2-мерным многообразием: стационар (точка в фазовом пространстве) накрывается окружностью; проколтая окрестность стационара накрывается взаимно однозначно дополнением к выше указанной окружности, вложенной в лист Мебиуса. На вклейке (окружности) возникает конечное число особых точек для конечномодалного стационара на фазовой плоскости. Если одна из них сложная, то в ее окрестности можно повторить локальную конструкцию (вышеописанную) σ -процесса. F. Dumortier принадлежит окончательная теорема (см. [28],[29]), гласящая, что в "общем положении" после конечного числа необходимых σ -процессов на вклейке возникает конечное число особых точек, которые являются "элементарными".

Таким образом для конечномодалных особенностей векторных полей есть процедура получения асимптотик в терминах элементарных функций на накрытии от подходящих координат.

§3. Динамические системы с дискретным временем.

3.1. Динамические системы с дискретным временем естественным образом возникают из непрерывных динамических систем с помощью одной из двух нижеследующих конструкций.

а. Для векторного поля мы можем рассмотреть простейшую разностную схему Эйлера (см., например, [6],[17]):

$$\mathbf{x}(t+h) = \mathbf{x}(t) + h \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}(t)). \quad (15)$$

Таким образом мы получаем диффеоморфизм (локально) фазовой плоскости

$$\mathbf{x} \rightarrow g_h(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(h), \quad (16)$$

где $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$.

б. Отображение Пуанкаре в окрестности периодической траектории векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$: $\mathbf{x}(t+T) = \mathbf{x}(t)$. Здесь $T > 0, T \in \mathbb{R}$ - период периодической орбиты. Зафиксируем в точке $\mathbf{x}(t_0)$ плоскость, трансверсальную решению $\mathbf{x}(t)$ в точке $\mathbf{x}(t_0)$ и обозначим эту плоскость через π . Тогда для близких к $\mathbf{x}(t_0)$ начальных условий: $|\mathbf{x} - \mathbf{x}(t_0)| \ll 1$, $\mathbf{x} \in \pi$, решение $\tilde{\mathbf{x}}(t) : \tilde{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}$ через время $t(\mathbf{x})$ возвращается в плоскость π . Тем самым определено отображение $\mathbf{x} \in \pi \mapsto g(\mathbf{x}) \in \pi$.

3.2. Неподвижной точкой диффеоморфизма $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ называется точка $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$: $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Инвариантным слоением диффеоморфизма $g(\mathbf{x})$ называется фазовый портрет векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ со стационаром в точке \mathbf{x} , такой что отображение $g(\mathbf{x})$ приводит

Таблица 2: Нормальные формы диффеоморфизмов плоскости в окрестности конечно-модальных особых точек.

имя	$g : \mathbf{x} (v\mathbb{R}) \mapsto$	ξ	η	\mathbb{V}	Обозначения
	$\begin{pmatrix} e^{s\Delta t} & x_1 \\ e^{\lambda\Delta t} & x_2 \end{pmatrix}$	$x_1\partial_1$	$x_2\partial_2$	$s\xi + \lambda\eta$	$\begin{pmatrix} s \\ \lambda \end{pmatrix}$ -нерезо- нансный
	$e^{s\Delta t} \begin{pmatrix} x_1 + \Delta t x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$	e	$x_2\partial_1$	$s\xi + \eta$	жорданова $\Delta t \neq 0$ клетка
	$e^{c\Delta t} \cdot e^{-i\Delta t} \cdot \mathbb{Z}$	e	$IdH/2$	$s\xi + \eta$	$H = \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z}x_1^2 + x_2^2$, $c \neq 0$
A_j^\pm	$\Theta^{-1} \begin{pmatrix} [e^{\Delta t}\Theta^{-cs}]^m & x_1 \\ [e^{\Delta t}\Theta^{-cs}]^n & x_2 \end{pmatrix}$	Λx	$-cH^j\xi + sH^je$	$\xi + \eta$	$\Lambda x = mx_1\partial_1 - nx_2\partial_2$, $H = x_1^n x_2^m$
C_j^\pm	$e^{-i\Delta t} \cdot \Theta^{\frac{cs}{2}} \cdot \mathbb{Z}$	$Id\frac{H}{2}$	$-cH^j\xi + sH^je$	$\xi + \eta$	$H = Z \cdot Z$, Δt – нерезонансный
B_j^\pm	$\begin{pmatrix} Q^{-1} x_1 \\ e^{ps\Delta t} Q^{-cs} x_2 \end{pmatrix}$	$x_2\partial_2$	$-cx_1^j H + sx_1^{j+1}\partial_1$	$p\xi + \eta$	$H = x_1$, $p = \pm 1$
D_j^\pm	$\begin{pmatrix} e^{-s\Delta t} x_1 \\ e^{sj\Delta t} (x_2 + p\Delta t x_1^{j+1}) \end{pmatrix}$	\mathbb{W}	$x_1^j\partial_2$	$s\mathbb{W} + p\eta$	$W = x_1\partial_1 + jx_2\partial_2$, $p = 0, \pm 1$
g является фазовым потоком $g_{\Delta t}(\mathbf{x})$ векторного поля $V \in \mathbb{R} \langle \xi, \eta \rangle$, $\Delta t \neq 0$, $\Delta t \in \mathbb{R}$, $[\xi, \eta] = 0$; $s = \pm 1$, $j \in \mathbb{Z}^+$, $c, \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $(m, n) = 1$. $\Theta = (1 - jsH^j \cdot \Delta t)^{1/j}$, $pmbe = x_1\partial_1 + x_2\partial_2$, $I dH = \frac{\partial H}{\partial x_2}\partial_1 - \frac{\partial H}{\partial x_1}\partial_2$					

фазовые кривые векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ в фазовые кривые векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$. Другими словами, диффеоморфизм $g(\mathbf{x})$ сохраняет фазовый портрет векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, возможно переставляя фазовые кривые между собой.

Оказывается, неподвижные точки диффеоморфизмов "общего положения"⁹ находятся во взаимно однозначном соответствии с элементарными особыми точками векторных полей на плоскости. Точнее, конечно-модальной неподвижной точке диффеоморфизма отвечает коммутативная двумерная над \mathbb{R} алгебра Ли векторных полей чьи фазовые портреты инвариантны относительно диффеоморфизма $g(\mathbf{x})$. Более того, диффеоморфизм $g(\mathbf{x})$ или его квадрат является отображением последования вдоль фазовых кривых одного из векторных полей, вышеуказанной алгебры, за единичное время. Ответ представлен в табл. 2. Точные формулировки изложены в [20].

§4. Заключение.

4.1. Аналогия между векторными полями и диффеоморфизмами фазового пространства восходит к результатам А. Пуанкаре конца XIX-го столетия. К сожалению, в то время она охватывала так называемые нерезонансные особые неподвижные точки векторных полей (соответственно, диффеоморфизмов).

Конец XX столетия позволил продвинуть классические результаты А. Пуанкаре с помощью понятия орбитальной эквивалентности векторных полей на плоскости. При

⁹Точнее, конечномодальные.

этом появились нелинейные векторные поля на плоскости, естественным образом примыкающие к примерам линейных векторных полей (диффеоморфизмов), устойчивых в понимании А. Пуанкаре. Эти исследования, безусловно, требуют дальнейшего развития. Можно надеяться, что в будущем мы узнаем еще много нового в этом направлении развития исследований динамических систем.

Список литературы

- [1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1966.
- [2] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1967.
- [3] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М. : Наука, 1978.
- [4] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: 1984, 272 с.
- [5] Арнольд В.И.. Избранное - 60. М.: ФАЗИС, 1997.
- [6] Arrowsmith D.K., Cartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system International Journal of Bifurcation and Chaos, 1993 v.3, ?4, 803-842.
- [7] Богданов Р.И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. //Тр.сем.им. И.Г. Петровского. М.: МГУ, 1976, вып. 2 с. 37-65.
- [8] Богданов Р.И. Орбитальная эквивалентность особых точек векторных полей на плоскости. //Функц. ан. и его прилож. т,10, вып.4, 1976, с.81-82.
- [9] Богданов Р.И. Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости. //Тр.сем. им. И. Г. Петровского, 1976, вып. 2, с. 23-35 (пер. на англ. Bifurcation of the limit cycle of a family of plane vector fields. - Sel. Math. Sov., 1981, v. 1, No. 4, p. 373 - 387.
- [10] Богданов Р.И. Локальные орбитальные нормальные формы векторных полей на плоскости. //Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 1979, вып. 5, с. 51-84.
- [11] Богданов Р.И. Конечнлоопределенные локальные фазовые портреты векторных полей. //Функц. ан. и его прилож., т.16, вып. 4, 1982, с.59-60.
- [12] Богданов Р.И. Инварианты элементарных особых точек на плоскости. - УМН, 1985, т. 40, вып. 3 (243), с. 199 - 200.

- [13] Богданов Р.И. Алгебры первых интегралов конечномодалых особенностей векторных полей. //Функц. ан. и его прилож. т.20, вып.2, 1986, с.56-57.
- [14] Богданов Р.И. Интегралы почти интегрируемых наборов векторных полей на плоскости. //Тр.сем.им. И.Г. Петровского, вып. 16. М.: МГУ, 1992, с. 70-105.
- [15] Богданов Р.И. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. Изд. Московского Университета, 1993.
- [16] Богданов Р.И. Локальные относительные интегральные инварианты, связанные с фазовым портретом векторного поля на плоскости. //Тр.сем.им. И.Г. Петровского, вып. 17. М.: МГУ, 1994, с. 249-265.
- [17] Богданов Р.И. Приложения слабодиссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. Препринт НИИЯФ МГУ 96-22/429. М.:ПРИНТ, 1996, 135 с.
- [18] Богданов Р.И., Расторгуев В.А. Проблема Ферми-Паста-Улама в слабодиссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. М:Препринт МЭИ 12-17,1997.
- [19] Богданов Р.И. Сингулярные относительные интегральные инварианты и адиабатические процессы термодинамики. В сб. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики: Динамические системы - 7, ВИНТИ, 1997.
- [20] Богданов Р.И. Факторизация диффеоморфизмов над фазовыми портретами векторных полей на плоскости. // Функц. ан. и его прилож., т. 31, в. 2, 1997, с. 67-70.
- [21] Богданов Р.И. Мультипликативная теория орбитальной эквивалентности векторных полей на плоскости. В сб. ст. "Локальные и глобальные задачи теории особенностей ". К 60-летию со дня рождения академика В.И. Арнольда. - М.: Изд-во "Наука МАИК "Наука", 1998, 319 с. (Тр. МИАН; Т. 221).
- [22] Богданов Р.И. Комментарий 1971-9.//В книге "Задачи Арнольда".-М.: ФАЗИС, 2000, с. 197-201.
- [23] Богданов Р.И. Симплектическая орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости (элементарные особые точки). // В сб. ст. "Математика и моделирование", Пущино, ОНТИ НЦБИ, 1990, с. 32-45.
- [24] Bogdanov R.I. Singularities of Vector Fields on the Plane with Pointed Direction.-Inv.math., v.54, 1979, p.259-277.
- [25] Богданов Р.И. Сингулярные относительные интегральные инварианты и адиабатические процессы термодинамики. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики: Динамические системы -7, ВИНТИ, 1997, с. 35 - 65. (Singular Relative

Integral Invariants and Adiabatic Processes of Thermodynamics J. of Math. Sc., v.95, N. 5, July 25 1999, p. 2463-2483.)

- [26] Вейль Г. Гравитация и электричество. //В сб. "Альберт Эйнштейн и теория гравитации". - М.: Мир, 1979,с. 513-528.
- [27] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer: New York, 1983, 453 p.
- [28] Dumortier F. Singularities of vector fields. Monografias de Matematica, 32, Rio de Janeiro: IMPA, 1978, 191 p.
- [29] Dumortier F. Singularities of vector fields on the plane.//J. Diff. Eq., 23, N2, (1977),p. 53-166.
- [30] Ichikawa G. Finitely Determined Singularities of Formal Vector Fields. - Invent. math., 1982, t. 66, p. 199 - 214.
- [31] Kahn P.B., Zarmi Y. Nonlinear dynamics. Exploration through Normal Forms. - New York, John Wiley Sons, Inc. 1997.
- [32] Математика XIX века. Чебышевское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей. - М.: Наука, 1987, 318с.
- [33] Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.: Гостехиздат, 1947.
- [34] Пуанкаре А. Избранные труды. т. 3. М. : Наука, 1974, 772 с.
- [35] Poincare H. "Sur les proprietes des fonctions, de finies par des equations aux differentielles partielles", These, 1879, Oevres, t.1, Paris, 1928.
- [36] Frommer M. Die Integralkurven einer gewohn lichen Differentialgleichung erster Ordnung inder Umgebung rationaler Unbestimmtheitsstellen. - Math. Annalen, 1928, t. 99, p. 222 - 272.
- [37] Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления", т.11 (Итоги науки и техники . ВИНТИ АН СССР). М.: 1985.
- [38] Шошитайшвили А.Н. Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки. // Тр.сем. им. И. Г. Петровского, 1975, вып. 1, с. 279-309.