

# Основные результаты спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля с потенциалом, содержащим $\delta$ -функции

В.А. Винокуров, В.А. Садовничий

Институт математических исследований сложных систем  
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

## Аннотация

Основные результаты спектральной теории оператора Штурма–Лиувилля распространены на класс потенциалов, содержащих  $\delta$ -функции. Построена строгая математическая теория таких задач, включающая асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, формулу регуляризованного следа, теорему о полноте системы собственных функций и теорему о равномерной равносходимости с тригонометрическим рядом. Последний результат завершает более чем полуторавековой цикл математических исследований о сходимости рядов Фурье по собственным функциям неожиданным образом — оказывается сходимость ряда Фурье суммируемой функции по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля ничем не отличается от сходимости её тригонометрического ряда Фурье.

Области применения: математика, математическая физика, квантовая механика, квантовые компьютеры, оптика.

Классическая первая краевая задача на отрезке  $[0, \ell]$  состоит из дифференциального уравнения

$$y'' + (\lambda + q(x))y = 0 \quad (1)$$

и краевых условий

$$y(0) = 0, \quad (2)$$

$$y(\ell) = 0. \quad (3)$$

Для случая вещественнозначной, суммируемой на  $[0, \ell]$  функции  $q(x)$  в нашей предыдущей работе [1] построены при любых  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $m = 0, 1, 2, \dots$  приближенные формулы вида

$$\lambda_n = \lambda_{n,m}(q) + \theta_{n,m}, \quad (4)$$

$$s_n = s_{n,m}(q) + \psi_{n,m}, \quad (5)$$

$$y_n(x) = y_{n,m}(q, x) + \Delta y_{n,m}(x). \quad (6)$$

Здесь  $\lambda_n$  —  $n$ -ное собственное значение;  $s_n \equiv \sqrt{\lambda_n}$ ;  $y_n(x)$  —  $n$ -ная нормированная собственная функция;  $\lambda_{n,m}(q)$ ,  $s_{n,m}(q)$ ,  $y_{n,m}(q, x)$  — явно строящиеся через функцию  $q(x)$

величины. В частности,  $\lambda_{n,0} \equiv \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2$  – собственные значения вырожденной задачи,  $y_{n,0}(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$  – нормированные собственные функции вырожденной задачи,  $s_{n,0} \equiv \mu_n = \frac{n\pi}{\ell}$ . Величины  $\theta_{n,m}$ ,  $\psi_{n,m}$ ,  $\Delta y_{n,m}(x)$  удовлетворяют неравенствам:

$$|\theta_{n,m}| \leq C_{1,m} \cdot \frac{b}{\ell^2} (\gamma_n)^m, \quad (7)$$

$$|\psi_{n,m}| \leq C_{2,m} \cdot \frac{1}{\ell} (\gamma_n)^{m+1}, \quad (8)$$

$$|\Delta y_{n,m}(x)| \leq C_{3,m} \cdot \sqrt{\frac{2}{\ell}} (\gamma_n)^{m+1}, \quad (9)$$

где  $\{C_{1,m}\}_{m=0}^{\infty}$ ,  $\{C_{2,m}\}_{m=0}^{\infty}$ ,  $\{C_{3,m}\}_{m=0}^{\infty}$  – предьявленные последовательности констант, число  $b \equiv \ell \cdot \int_0^{\ell} |q(x)| dx$ , числа  $\gamma_n \equiv \frac{b}{n\pi - \frac{1}{4}}$ .

Оценки (7), (8), (9) ошибок аппроксимации приближенных формул (4, 5, 6) обладают тем свойством, что зависят лишь от нормы  $\|q\|_1 \equiv \int_0^{\ell} |q(x)| dx$  функции  $q$  в пространстве  $L_1[0, \ell]$ . Рассматривая  $\delta$ -функцию как предел последовательности "ступенек" с постоянным значением интеграла, мы можем перейти в приближенных формулах (4, 5, 6) к пределу с сохранением оценок типа (7, 8, 9) для ошибки аппроксимации. Исходя из данного замечания, мы в настоящей работе строим для случая  $m = 2$  приближенные формулы типа (4, 5, 6). Построенная асимптотика собственных значений (теорема 1) позволяет получить формулу регуляризованного следа нового вида (теорема 3), а построенная асимптотика собственных функций (теорема 2) позволяет дать прямое доказательство полноты системы собственных функций (теорема 4) и равномерной равносходимости ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи с тригонометрическим рядом Фурье (теорема 5).

## 1 Постановка задачи

Введем следующие классы заданных на сегменте  $[0, \ell]$  действительных функций: банахово пространства  $C[0, \ell]$  непрерывных функций  $y(x)$  с нормой  $\|y\|_c \equiv \sup_{x \in [0, \ell]} |y(x)|$ ; банахово пространство  $L_p[0, \ell]$ ,  $p \in [1, \infty[$  суммируемых по Лебегу в  $p$ -той степени функций  $q(x)$  с нормой  $\|q\|_p \equiv \left(\int_0^{\ell} |q(x)|^p dx\right)^{1/p}$ ; линейное пространство  $BV[0, \ell]$  функций ограниченной вариаций  $\sigma(x)$  с преднормой  $\|\sigma\|_v$  равной полной вариации функции  $\sigma(x)$  на  $[0, \ell]$ ; линейное подпространство  $BV_c[0, \ell] \subset BV[0, \ell]$ , состоящее из всех функций ограниченной вариации  $\sigma(x)$ , которые непрерывны справа в любой точке  $x \in [0, \ell]$  и непрерывны в точках  $x = 0$  и  $x = \ell$ . Для функции  $\sigma \in BV[0, \ell]$  введем величину  $b = b(\sigma) \equiv \ell \cdot \|\sigma\|_v$ .

Перейдем теперь от краевой задачи, состоящей из дифференциального уравнения (1) и краевых условий (2, 3) к следующей краевой задаче, состоящей из интегрального

уравнения

$$z(x) = x - \int_0^{\ell} \nu(x-t)z(t) d(\sigma(t) + \lambda t), \quad x \in [0, \ell] \quad (10)$$

и краевого условия

$$z(\ell) = 0. \quad (11)$$

Здесь  $\sigma \in BV[0, \ell]$  – заданная функция, функция  $\nu(\xi) \equiv \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0 \end{cases}$  и требуется найти такое  $\lambda \in \mathbf{C}$  и такую функцию  $z \in C[0, \ell]$ , чтобы выполнялись соотношения (10, 11). В случае, когда потенциал  $q(x)$  – непрерывная функция и функция  $\sigma(x) \equiv \int_0^x q(t) dt$ , каждое собственное значение краевой задачи (10, 11), является собственным значением краевой задачи (1, 2, 3) с собственной функцией  $z(x)$  класса  $C^{(2)}[0, \ell]$ , удовлетворяющей условию  $z'(0) = 1$ . Тогда функция

$$y(x) = \frac{z(x)}{\|z\|_2} \quad (12)$$

будет нормированной собственной функцией краевой задачи (1, 2, 3). Справедливо и обратное утверждение: если  $y(x)$  собственная функция класса  $C^{(2)}[0, \ell]$  краевой задачи (1, 2, 3) с собственным значением  $\lambda \in \mathbf{C}$ , удовлетворяющая условию  $y'(0) = 1$ , то функция  $z(x) = y(x)$  – собственная функция краевой задачи (10, 11).

Далее, следуя ([2], гл. 12), мы рассматриваем краевую задачу (10, 11) с функцией  $\sigma(x)$  из пространства  $BV_c[0, \ell]$ . Аткинсоном установлено, что в этом случае краевая задача (10, 11) при любом  $\sigma \in BV_c[0, \ell]$  сохраняет следующие известные свойства краевой задачи (1, 2, 3) с непрерывным потенциалом  $q(x)$  :

1) Все собственные значения краевой задачи (10, 11) вещественны, имеют кратность 1 и образуют монотонно возрастающую к бесконечности последовательность  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_n < \dots$ .

2) Соответствующая непрерывная собственная функция  $z_n(x)$  имеет ровно  $n-1$  нулей на  $]0, \ell[$ .

3) Последовательность нормированных собственных функций  $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , образует полную ортонормированную систему в  $L_2[0, \ell]$ .

Аткинсоном получены асимптотические формулы вида (4, 5, 6) для  $m = 0$ .

## 2 Формулировка основных результатов

Введем следующие интегралы Радона от непрерывных функций

$$L_n(\sigma) \equiv \int_0^{\ell} y_{n,0}^2(x) d\sigma(x), \quad (13)$$

$$B_n(\sigma) \equiv \iint_Q k_n(\xi_1, \xi_2) d\sigma(\xi_1) d\sigma(\xi_2). \quad (14)$$

Здесь  $Q \equiv [0, \ell] \times [0, \ell]$  – квадрат,  $k_n(\xi_1, \xi_2)$  – непрерывная в квадрате  $Q$  функция вида

$$\begin{aligned} k_n(\xi_1, \xi_2) \equiv & \frac{1}{4\pi n} [(1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) \cdot \frac{2}{\pi} \theta\left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_2\right) + \\ & + (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1) \cdot \frac{2}{\pi} \theta\left(\frac{2\pi}{\ell} \xi_1\right) + \\ & + \text{sign}(\xi_2 - \xi_1) ((1 - \cos(2\mu_n \xi_1)) \sin(2\mu_n \xi_2) - (1 - \cos(2\mu_n \xi_2)) \sin(2\mu_n \xi_1))] , \end{aligned} \quad (15)$$

$\theta(t)$  – заданная на  $[0, 2\pi]$  функция  $\theta(t) \equiv \frac{1}{2}(\pi - t)$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

**Теорема 1.** Если  $\sigma \in BV_c[0, \ell]$  и выполнено неравенство  $n > \frac{1}{\pi} \left( \frac{681}{64} b + \frac{1}{4} \right)$ , то справедливы представления

$$s_n(\sigma) = \mu_n - \frac{1}{2\mu_n} (L_n(\sigma) + B_n(\sigma)) + \psi'_{n,2}(\sigma), \quad (16)$$

$$\lambda_n(\sigma) = \lambda_{n,0} - L_n(\sigma) - B_n(\sigma) + \nu'_{n,2}(\sigma) \quad (17)$$

и верны неравенства

$$|\psi'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{b^2(1 + 222b + b^2)}{\ell(n\pi - \frac{1}{4})^3}, \quad (18)$$

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{b^2(4,4 + 467b + 2b^2)}{\ell^2(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (19)$$

**Теорема 2.** Если  $\sigma \in BV_c[0, \ell]$  и выполнено неравенство  $n \geq \frac{1}{\pi} (125b + \frac{1}{4})$ , то для нормированной собственной функции справедливо при  $x \in [0, \ell]$  представление

$$y_n(x) = y_{n,0}(x) + \frac{1}{2\pi n} y_{n,1,0}(x) + \Delta y_n(x), \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} y_{n,1,0}(x) \equiv & \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left\{ \cos(\mu_n x) \left[ \ell \int_0^x (1 - \cos(2\mu_n \xi)) d\sigma(\xi) - \right. \right. \\ & \left. \left. - x \int_0^\ell (1 - \cos(2\mu_n \xi)) d\sigma(\xi) \right] - \right. \\ & \left. - \sin(\mu_n x) \left[ \int_0^\ell \xi \sin(2\mu_n \xi) d\sigma(\xi) - \ell \int_x^\ell \sin(2\mu_n \xi) d\sigma(\xi) \right] \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

и верно неравенство

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1b + 256,5b^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (22)$$

### 3 Формула следа

Каждая функция ограниченной вариации  $\sigma \in BV_c[0, \ell]$  может иметь на  $[0, \ell]$  не более счетного числа точек разрыва  $x_i \in ]0, \ell[$ ,  $i \in I$ , внутри интервала  $]0, \ell[$ , в которых существуют правый предел  $\sigma(x_i + 0)$  и левый предел  $\sigma(x_i - 0)$  и определена величина скачка  $c_i \equiv \sigma(x_i + 0) - \sigma(x_i - 0)$ . В силу ограниченности полной вариации функции  $\sigma$  ряд  $\sum_{i \in I} |c_i|$  сходится (см. [3], с. 191, 192).

Справедлива следующая формула регуляризованного следа.

**Теорема 3.** Пусть функция  $\sigma \in BV_c[0, \ell]$  и  $\{x_i\}_{i \in I} \subset ]0, \ell[$  — множество её точек разрыва, а  $c_i$  — соответствующее значение её скачка в точке разрыва  $x_i$ ,  $i \in I$ , тогда следующие ряды сходятся и справедливо равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma))) = -\frac{1}{8} \sum_{i \in I} c_i^2. \quad (23)$$

Причем в случае непрерывной функции  $\sigma(x)$  множество  $I = \emptyset$  пустое и по определению полагается  $\sum_{i \in \emptyset} c_i^2 = 0$ .

**Следствие 1.** Функция  $\sigma(x)$  класса  $BV_c[0, \ell]$  непрерывна на сегменте  $[0, \ell]$  тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n(\sigma) - (\lambda_{n,0} - L_n(\sigma))) = 0.$$

### 4 Полнота и равносходимость

Положим в этом пункте  $\ell = \pi$ . Для доказательства полноты ортонормированной системы  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  в гильбертовом пространстве  $L_2[0, \pi]$  мы используем следующее известное утверждение.

**Утверждение 1.** ([2, теорема VI.3.1.] Пусть  $H$  сепарабельное гильбертово пространство,  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  две ортонормированные системы в  $H$ , такие что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\varphi_n - \psi_n\|^2 < \infty, \quad (24)$$

причём ортонормированная система  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  полна. Тогда и ортонормированная система  $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$  полна.

В силу утверждения 1 теорема о полноте, доказанная ранее Аткинсоном [2], получается как прямое следствие теоремы 2.

**Теорема 4.** Для любой функции  $\sigma \in BV_c[0, \pi]$  система ортонормированных собственных функций  $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  первой краевой задачи полна.

Пусть функция  $f \in L_1[0, \pi]$ , тогда для неё определены коэффициенты Фурье  $f_n \equiv \int_0^\pi f(x) y_n(x) dx$  и  $f_{n,0} \equiv \int_0^\pi f(x) y_{n,0}(x) dx$  и частные суммы  $S_m(f, x) \equiv \sum_{n=1}^m f_n y_n(x)$  и  $S_{m,0}(f, x) \equiv \sum_{n=1}^m f_{n,0} y_{n,0}(x)$  двух рядов Фурье. Так как собственные функции  $y_n(x)$  и  $y_{n,0}(x)$  непрерывны, то и частные суммы  $S_m(f, x)$  и  $S_{m,0}(f, x)$  — непрерывные на  $[0, \pi]$  функции.

**Теорема 5.** Для любой функции  $\sigma \in BV_c[0, \pi]$  и любой функции  $f \in L_1[0, \pi]$  предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m(f, x) - S_{m,0}(f, x)\|_c = 0. \quad (25)$$

Функцию  $f \in L_1[0, \pi]$  продолжим нечетно на интервал  $]-\pi, 0[$ , положив  $f(x) = -f(-x)$  при  $x \in ]-\pi, 0[$ , и затем определённую таким образом на  $]-\pi, \pi]$  функцию продолжим до  $2\pi$ -периодической функции  $\bar{f}(x)$ , определённой на всей вещественной прямой  $\mathbf{R}$ . Для так построенной  $2\pi$ -периодической функции  $\bar{f}(x)$  её тригонометрическая сумма Фурье равна

$$\begin{aligned} S_{m,t}(\bar{f}, x) &\equiv \sum_{n=1}^m \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(nx) = \\ &= \sum_{n=1}^m \left( \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi \right) \sin(nx) = \sum_{n=1}^m \left( \int_0^{\pi} f(\xi) y_{n,0}(\xi) d\xi \right) y_{n,0}(x) \end{aligned} \quad (26)$$

и на сегменте  $[0, \pi]$  совпадает с суммой Фурье  $S_{m,0}(f, x)$ , т.е.

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \left| S_{m,t}(\bar{f}, x) - S_{m,0}(f, x) \right| = 0. \quad (27)$$

**Следствие 2.** Для любой функции  $\sigma \in BV_c[0, \pi]$  и любой функции  $f \in L_1[0, \pi]$  предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_m(f, x) - S_{m,t}(\bar{f}, x)\|_c = 0. \quad (28)$$

Соотношение (28) сводит вопрос о сходимости рядов по собственным функциям первой краевой задачи к соответствующим вопросам сходимости тригонометрического ряда Фурье. Отсюда, в частности, следует, что неумлучшаемое достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье функции  $f \in C[0, \pi]$  в терминах модуля непрерывности  $\omega(\delta)$  функции  $f(x)$  есть соотношение  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(\delta) \ln(\delta) = 0$  при выполнении необходимого условия равномерной сходимости  $f(0) = f(\pi) = 0$  (см. [4, теорема 10.3 и гл. 8, §2]).

## 5 Пример с $\delta$ -функцией

Пусть  $q(x) = c\delta(x - x_0)$ ,  $c \in \mathbf{R}$ ,  $x_0 \in ]0, \ell[$ , т.е.  $\sigma(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ c, & x \geq x_0. \end{cases}$

Тогда интегралы (13) и (14) легко вычисляются и формула (17) принимает вид

$$\lambda_n = \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - c y_{n,0}^2(x_0) - \frac{c^2}{n\pi^2} \sin(2\mu_n x_0) \theta \left( \frac{2\pi x_0}{\ell} \right) (1 - \cos(2\mu_n x_0)) + \nu'_{n,2}(\sigma), \quad (29)$$

где

$$|\nu'_{n,2}(\sigma)| \leq \frac{c^2(4,4 + 467|c|\ell + 2c^2\ell^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (30)$$

В частном случае  $x_0 = \frac{\ell}{2}$  формула (29) принимает вид

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 - c \frac{2}{\ell} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \nu'_{n,2}(\sigma). \quad (31)$$

Для нормированной собственной функции  $y_n(x)$  согласно (20) верно представление

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(\mu_n x) + \frac{c}{2n\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} ((\ell - x_0) \sin(2\mu_n x_0) \sin(\mu_n x) - (1 - \cos(2\mu_n x_0))x \cos(\mu_n x) - 2\ell \sin(\mu_n x_0) \eta(x - x_0) \sin(\mu_n(x - x_0))) + \Delta y_n(x), \quad (32)$$

где функция скачка  $\eta(x - x_0) \equiv \begin{cases} 0, & x < x_0, \\ 1, & x \geq x_0 \end{cases}$  и

$$|\Delta y_n(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\ell}} \frac{(4,1|c|\ell + 256,5c^2\ell^2)}{(n\pi - \frac{1}{4})^2}. \quad (33)$$

А в частном случае  $x_0 = \frac{\ell}{2}$  верно представление

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) - \frac{c}{2n\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \left( (1 - \cos(n\pi))x \cos\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + 2\ell \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \eta\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x - \frac{n\pi}{2}\right) \right) + \Delta y_n(x). \quad (34)$$

Т.е. при  $n$  четном получаем

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) + \Delta y_n(x), \quad (35)$$

а при  $n$  нечётном,  $n = 2k + 1$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  получаем

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(\mu_n x) - \frac{c}{n\pi} \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos(\mu_n x) \left( x - \ell \eta\left(x - \frac{\ell}{2}\right) \right) + \Delta y_n(x). \quad (36)$$

Формула следа (23) принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \lambda_n - \left( \left( \frac{n\pi}{\ell} \right)^2 - c y_{n,0}^2(x_0) \right) \right) = -\frac{1}{8}c^2. \quad (37)$$

Причем в частном случае  $x_0 = \frac{\ell}{2}$  в силу (29, 30) ряд в левой части (37) сходится абсолютно.

Формула следа для случая суммируемого потенциала опубликована нами в работе [5]. Асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций для потенциала, содержащего  $\delta$ -функции, и соответствующая формула следа опубликованы нами в работах [6, 7]. Теорема о равномерной равносходимости опубликована нами в работе [8]. Полное изложение и доказательство представленных здесь результатов смотрите на сайте "<http://vinokur.narod.ru>".

## Список литературы

- [1] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма–Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом. Известия РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64. № 4. С. 47-108.
- [2] Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968.
- [3] Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.
- [4] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1968. Т. 1.
- [5] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Собственное значение и след оператора Штурма–Лиувилля как дифференцируемые функции суммируемого потенциала. Доклады АН. 1999. Т. 365. № 3. С. 295-297.
- [6] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции. Доклады АН. 2001. Т. 376. № 4. С. 444-448.
- [7] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Асимптотика собственных значений и собственных функций и формула следа для потенциала, содержащего дельта-функции. Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38. № 6. С. 735-751.
- [8] Винокуров В.А., Садовничий В.А. Равномерная равносходимость ряда Фурье по собственным функциям первой краевой задачи и тригонометрического ряда Фурье. Доклады АН. 2001. Т. 380. № 6. С. 731-735.