

Стохастические модели в микро- и макромире

А.В. Булинский

Механико-математический факультет

Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

*Андрею Николаевичу Колмогорову,
к 100-летию со дня рождения*

Аннотация

Рассматривается широкий класс стохастических моделей, возникающих и использующихся при описании явлений микро- и макромира. Основное внимание уделяется классическим случайным процессам и случайным полям, рассматриваются также и некоторые аспекты некоммутативной теории вероятностей, связанные с квантовомеханическими моделями. Обсуждается роль предельных теорем теории вероятностей для анализа исследуемых моделей.

1. Введение

В предисловии к первому выпуску трудов семинара "Время, хаос и математические проблемы" В.А.Садовничий (см. [1], с. 7) подчеркнул, что основной из задач семинара является популяризация современных методов описания сложных систем не только в природе, но и в обществе. Цель данной статьи – обсудить стохастические подходы к описанию процессов, происходящих в микро- и макромире. Разумеется, при этом мы ограничимся рассмотрением лишь ряда проблем.

Общий подход к описанию действительности математическими средствами состоит в построении некоторой модели изучаемых явлений, в получении выводов в рамках этой модели, а затем в сопоставлении установленных результатов с реальностью. Надо отметить, что речь не идет о *навязывании* природе каких-либо математических утверждений. По-видимому, следует говорить о том, что можно предлагать различные модели тех или иных явлений и по-разному их интерпретировать. При этом *модель – это только модель, а не сама реальность*. Более того, современная математика настолько богата абстрактными конструкциями, что ее развитие не всегда напрямую связано с практикой. Это тоже интересный и очень непростой вопрос (см., напр., [2]). Наконец, проблема адекватности построенной модели, как правило, далеко не тривиальна. Здесь мы сталкиваемся с тем, что требуется охарактеризовать качество модели, а это возможно делать, руководствуясь разными соображениями, например, *целевыми функциями*.

Таким образом, для реализации упомянутой схемы описания действительности требуется сочетание различных способностей. Далекое не всегда один и тот же исследователь

в состоянии предложить содержательную математическую модель, провести ее изучение да к тому же соотнести сделанную работу с наблюдениями над реальными объектами. В XX веке блестящий пример сочетания всех этих талантов дает А.Н.Колмогоров.

Заметим, что мы не стремимся делить математику на "чистую" и "прикладную". Опыт развития науки показывает: то, что возникает как бы в недрах самой математики и кажется современникам полезным лишь для дальнейшего развития теории, позднее может найти приложения. С другой стороны, имеется множество выдающихся примеров, когда прикладные задачи приводили к созданию новых понятий, методов и даже целых областей исследования.

Остановимся на сказанном подробнее применительно к проблемам стохастики. Теория вероятностей изучает *математические модели случайных явлений*. Вопрос о том, какие явления следует называть случайными является весьма сложным и спорным. Обычно говорят, что случайные явления проявляются в *случайных экспериментах*, т.е. таких опытах, исходы которых в точности нельзя предсказать до их проведения. Кроме того, предполагается, что существует возможность воспроизводить (повторять) упомянутые опыты. Имеются крайние точки зрения на понятие случайного эксперимента. Так, можно считать, что мы просто не в состоянии учесть и измерить громадное количество параметров, описывающих эксперимент. Отсюда для нас и проистекает неопределенность результатов. Например, высоко подбрасывая монету, мы не знаем в точности ее положение, приложенные к ней силы, характеристики воздушной среды и т.д., поэтому не можем сказать, на какую сторону она упадет. Другая точка зрения состоит в том, что ряду явлений природы, особенно в микромире, *внутренне присуща случайность*. Яркими представителями этих противоположных воззрений были соответственно А.Эйнштейн и В.Гейзенберг.

Для современной науки традиционным является аксиоматическое построение. Главное достоинство такого подхода состоит в том, что фиксируются "правила игры" и появляется возможность на основе общих соотношений и принципов конструировать и изучать модели, применимые к различным явлениям. Широчайшую известность получила аксиоматика теории вероятностей, предложенная А.Н.Колмогоровым в 1933 г. (см. [3]). Интересно отметить, что в рамках этого аксиоматического подхода на основе меры и измеримых отображений удается строго вывести результаты, показывающие, как многократное воспроизведение случайных опытов (например, в "почти одинаковых" условиях так, чтобы результаты одних опытов "почти не влияли" на результаты других) приводит к *закономерностям нового типа*. Иначе говоря, "хаотические" (непредсказуемые) результаты отдельных случайных экспериментов могут привести к некоему "порядку" в должном смысле этого слова. Так, согласно закону больших чисел возникает устойчивость относительных частот случайных событий, а центральная предельная теорема и закон повторного логарифма позволяют, в определенном смысле, оптимально описать характер флуктуаций этих частот (см., напр., [4]). В итоге, в рамках аксиоматики Колмогорова возникла удивительно красивая теория суммирова-

ния случайных величин. При этом замечательным является то обстоятельство, что наблюдаемая в реальных экспериментах относительная устойчивость частот исследуемых событий получает интерпретацию в виде соответствующих предельных теорем теории вероятностей. Отметим также, что ряд детерминированных функций (или последовательностей) демонстрирует как бы случайное поведение, присущее случайным величинам в смысле определения теории вероятностей. Другими словами "порядок" способен породить "хаос". Для иллюстрации последнего положения достаточно указать на логистическую последовательность $\{x_n\}$, определяемую при надлежащем выборе параметра λ формулой $x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-1})$, $n \geq 1$, $0 < x_0 < 1$, (см., напр., [5], т.1, с. 217). Классический пример хаоса (экспоненциально высокая чувствительность переменных к начальным условиям) дает система Лоренца. Новый этап в понимании хаотичности, зарождающейся в детерминированных системах, возник в результате появления известных работ А.Н.Колмогорова и Я.Г.Синая, в которых было введено понятие динамической энтропии. О бифуркациях и развитии хаоса в динамических системах см., напр., [6] и там же библиографию. Следующий этап наступил около 1980 года, когда возникла теория случайных динамических систем, т.е. было осознано, что стохастическое дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями порождает не только семейство марковских процессов, но и поток случайных диффеоморфизмов. Введение в эту область "пересечения" случайных процессов и динамических систем дает [7].

Сказанное созвучно идеям, высказанным И.Р.Пригожиным о свойствах самоорганизующихся систем (см., напр., [8]). Подчеркнем, что в рамках аксиоматики Колмогорова нет противопоставления случайности и детерминированности. В этой связи стоит вспомнить лозунг, брошенный Т.Д.Лысенко: "Наука – враг случайности". Остроумный выход тогда же был найден А.Я.Хинчиным¹. Лекцию по теории вероятностей он начал словами: "Известно, что наука – враг случайности. А врага надо изучать!"

Считается, что многие реальные явления способны одновременно обладать свойствами как бы случайности и свойствами как бы детерминированности, демонстрируя их в зависимости от характера производимого опыта. Вспомним и о дуализме в поведении электрона, выступающего в роли частицы и в роли волны. Случайность и необходимость сосуществуют в интеграции во многих неравновесных системах.

Стоит также напомнить высказывание Я.Бернулли, сделанное в 1713 году (см.[9], с. 27) и не потерявшее значения по прошествии почти трех веков: "Относительно того, что твердо известно и не подлежит сомнению, мы говорим, что знаем или понимаем, относительно всего прочего, – что только догадываемся или предполагаем. Делать о какой-либо вещи предположения – все равно, что измерять ее вероятность. Поэтому искусство предположений мы определяем как искусство возможно точнее измерять вероятности вещей затем, чтобы в наших суждениях или действиях мы могли всегда выбрать или следовать тому, что будет найдено лучшим, более удовлетворительным, спокойным и

¹Как вспоминал Б.А.Севастьянов в Доме Ученых РАН на вечере 15 апреля 2003 г., посвященном 100-летию со дня рождения А.Н.Колмогорова

разумным. В этом единственно заключается вся мудрость философа и благоразумие политика".

Проиллюстрируем эти слова на следующем простом примере, ставшем популярным в 90-е годы XX века. Для этого вначале представим себе три одинаковые на вид двери, скрывающие от нас содержимое трех комнат. Известно, что в одной из комнат находится сокровище, а в двух других ничего нет. Вы можете выбрать любую из дверей, она будет открыта и тогда Вы получите то, что находится за ней, т.е. сокровище или ничего. В рамках классического определения вероятности (см., напр., [10], с. 21) выбор любой из дверей дает вероятность $1/3$ стать владельцем сокровища. Представим себе усложненный эксперимент. Пусть Вы выбрали какую-то дверь, но теперь ее не открывают, а открывают одну из дверей в какую-либо из комнат, не содержащих сокровища. Итак, перед Вами две закрытые двери, за одной из них сокровище. Затем Вам предлагают поменять сделанный выбор двери, и тогда откроют вновь выбранную. Спрашивается, стоит ли на это соглашаться? Для многих совершенно неожиданным является ответ, что перемена исходного выбора двери приводит к вероятности выигрыша, т.е. получения сокровища, равной $2/3$.

В связи с этим элементарным примером напомним, что описывая случайный эксперимент, мы проводим формализацию, вводя в рассмотрение вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) , т.е. *фундамент*, заложенный А.Н.Колмогоровым. В настоящее время наибольший интерес представляют модели, отражающие динамику развития (в пространстве и во времени) случайных явлений. Для этого используется "настройка" в виде случайных процессов (и случайных полей), определенных на вероятностном пространстве. Об истории развития теории вероятностей (в том числе о частотном подходе к построению теории вероятностей, предложенном фон Мизесом, и алгоритмическом подходе Колмогорова) можно прочесть, например, в [10], [11].

Заканчивая введение, отметим, что ныне значение теории вероятностей не исчерпывается только лишь накопленными результатами и развитыми методами, позволяющими решать действительно важные, а не игрушечные задачи (например, отделять полезный сигнал от шума, распознавать образы и т.д.). Появляется возможность на "вероятностном языке" решать многие "неслучайные" задачи (см., напр., [12]). Ярким примером такого рода является нахождение ограниченного решения задачи Дирихле (подробнее см., напр., [13]):

$$\Delta u(x) = 0, \text{ для } x \in D, \quad u|_{\partial D} = f, \quad (1)$$

где Δ – оператор Лапласа, $u = u(x)$ – действительно-значная функция, ∂D – граница области $D \subset \mathbb{R}^n$. А именно, решение задачи (1) дается формулой

$$u(x) = E^x f(W_\tau),$$

здесь τ – момент первого выхода винеровского процесса W (броуновского движения) на границу области D , а E^x обозначает усреднение по мере, являющейся распределением процесса W , начинающегося в момент $t = 0$ в точке $x \in D$.

Таким образом, с одной стороны, подобно геометрии, алгебре и анализу теория вероятностей развивается на собственном фундаменте. С другой стороны, ее методы и результаты имеют междисциплинарное значение, позволяя создавать эффективные модели сложных явлений природы.

2. Вероятность в микромире

Практически в каждом учебнике по квантовой механике дается описание фундаментального опыта по прохождению потока электронов через одну или две открытые щели (см., напр., [14], с. 6). Пусть A_i – событие, состоящее в прохождении электрона через щель с номером i , где $i = 1, 2$. Интерпретация результатов этого и аналогичных экспериментов привела к появлению следующей формулы для вероятности прохождения электрона через две открытые щели:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) + 2\sqrt{P(A_1)P(A_2)} \cos \theta, \quad (2)$$

здесь P – символ вероятности, а θ – определенный параметр. Наличие дополнительного члена $2\sqrt{P(A_1)P(A_2)} \cos \theta$ по сравнению с классической формулой сложения вероятностей обычно объясняется "самоинтерференцией", присущей "волновой природе электрона". Остановимся подробнее на этой удивительной формуле. Напомним высказывание Д'Эспанья ([14], с. 15): "Квантовая механика является, главным образом, статистической теорией. Кроме специальных случаев, она не делает предсказаний, основанных на индивидуальных системах. Скорее, она предсказывает статистические частоты. Другими словами, как правило, предсказывается число n тех случаев, в которых данное событие будет наблюдаться при проведении измерений над N физическими системами одного типа в определенных условиях." Соответственно подсчет частот событий в упомянутом выше опыте с электронами показал заметное отклонение от обычной формулы сложения вероятностей.

Замечательным достижением физики было применение методов теории гильбертовых пространств к описанию квантовомеханических систем. В стандартном формализме (см., напр., [15], с. 63-65) формула (2) выводится с помощью принципа суперпозиции. Однако, этот элегантный вывод, использующий комплексно-значные коэффициенты разложения "вектора состояния" по базису собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающего определенной "наблюдаемой", завуалировал связи с классическими концепциями теории вероятностей. Более того, уже с ранних этапов развития квантовой механики (см., напр., [16] – [18]) ведется дискуссия, можно ли с помощью аксиоматики Колмогорова обосновать формулу (2).

Ключевую роль в вероятностном понимании возникновения формулы (2) дает принцип *контекстуализма*, состоящий в том, что введение случайных величин, описывающих некоторые свойства физической системы или ансамбля систем, должны учитывать класс условий (т.е. *контекст*), при которых определяются значения этих величин. Этот

принцип можно найти в работах А.Н.Колмогорова (см. [3] и [19]): "Таким образом, сказать, что событие A "случайное" или "стохастическое" и приписать ему вероятность $p = P(A|S)$ можно только тогда, когда уже определен класс возможных путей проведения серии экспериментов. Природа этого класса будет предполагаться включенной в условия S " (подробнее см., напр., [10]). В физике принцип контекстуализма был введен в 1934 г. Н.Бором [18], подчеркнувшим, что условия эксперимента играют существенную роль при определении физических наблюдаемых.

В недавней работе [20] показано, что можно рассмотреть простую модель ансамбля физических систем, обладающих двумя свойствами, которые описываются случайными векторами, подверженными случайным изменениям распределений при проведении измерений любой из интересующих нас характеристик (не предполагается, что обе "характеристики" упомянутых свойств можно измерять одновременно, кроме того, измерение одной из них, вообще говоря, приводит к изменению другой). Точнее говоря, в [20] предложена интерпретация формулы (2) на основе простой стохастической модели, базирующейся на аксиоматике Колмогорова.

Значит ли это, что в рамках классической теории вероятностей можно интерпретировать любое квантовомеханическое явление? По-видимому, утверждать этого нельзя. Большинство исследователей примирилось с мыслью, что в физике имеются парадоксы, и что не удастся создать всеобъемлющей картины мира. В статье К.Дарроу ([21], с. 16) проводится аналогия между созданием теории и сооружением средневекового собора: "Люди, молящиеся в одной части собора, вполне могут обходиться без остальной части собора; их часовня может устоять, даже если все остальное здание рухнет." После классических теорем К.Геделя о *неполноте* было осознано, что и "незыблемое здание" математики имеет трещины (точнее говоря, эти теоремы знаменовали неудачу первоначального понимания программы Гильберта в области оснований математики).

Итак, мы снова приходим к идее фон Неймана, считавшего, что смысл математических моделей состоит в том, что "они должны работать". Поэтому, когда в 1846 г. астроном И.Галле на основании вычислений по законам механики Ньютона, произведенных астрономом У.Леверье, открыл планету, названную позднее Нептуном, – это был триумф классической механики. Более того, У.Леверье обнаружил необъяснимое законами Ньютона вековое движение перигелия орбиты Меркурия, которое впоследствии смогла объяснить теория относительности. Когда с опорой на квантовую механику было создано атомное оружие, – это был триумф квантовой теории (правда, омраченный последствиями такого достижения науки).

Теперь почти никого не удивит, что существуют различные аксиоматизации геометрии, предложенные Евклидом, Лобачевским, Риманом. Привычным стало также положение вещей, при котором классическая механика Ньютона сосуществует с теорией относительности Эйнштейна. Поэтому вполне естественной представляется попытка ввести аксиоматику теории вероятностей, ориентированную на явления микромира. Поясним лишь самые начала этого подхода (см., напр., [22]–[25]).

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, \mathcal{F}, P) и пространство $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, состоящее из комплекснозначных функций (классов эквивалентности), являющихся ограниченными и измеримыми. В пространстве $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ введем оператор M_f умножения на функцию $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Тогда $\mathcal{A} = \{M_f : f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)\}$ есть коммутативная алгебра фон Неймана операторов на $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и $\varphi : M_f \mapsto \int_\Omega f dP$ есть точное нормальное состояние на \mathcal{A} . Напомним, что алгебра фон Неймана на гильбертовом пространстве H состоит из ограниченных (линейных) операторов $A : H \rightarrow H$, она содержит единичный оператор 1 и замкнута в сильной операторной топологии. Состоянием на \mathcal{A} называется линейный функционал $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ такой, что $\varphi(1) = 1$ и выполнено свойство положительности: $\varphi(A^*A) \geq 0$ для любого $A \in \mathcal{A}$, где A^* обозначает оператор, сопряженный к A . Состояние φ называется *точным*, если $\varphi(A^*A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = 0$; состояние φ называется *нормальным*, если $\lim \varphi(A_n) = \varphi(A)$ для любой последовательности $A_n \uparrow A$ при $n \rightarrow \infty$ (т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n f - A f\| = 0$ для каждого $f \in H$, здесь $\|\cdot\|$ – норма в H и $A_{n+1} - A_n = B_n^* B_n$, где B_n – ограниченные операторы, $n \geq 1$).

Обратно, любая коммутативная алгебра фон Неймана с точным нормальным состоянием изоморфна описанной выше алгебре \mathcal{A} для некоторого вероятностного пространства (Ω, \mathcal{F}, P) .

Заметим, что при таком подходе события и вероятностная мера, по сути дела, выделяются указанием класса $\tilde{\mathcal{F}} = \{E \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) : E = E^2 = E^*\}$ и введением отображения $\tilde{P} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow [0, 1]$, при котором $E \mapsto \varphi(E)$. Другими словами, каждое событие характеризуется своей индикаторной функцией, а его мера есть интеграл от этой функции. Поскольку функции, совпадающие п.н. отождествляются, то происходит и соответствующее отождествление событий.

Поэтому следующий естественный шаг на пути обобщений вероятностного пространства – это введение пары (\mathcal{A}, φ) , где \mathcal{A} – некоторая алгебра фон Неймана, а φ – состояние, заданное на ней. Более того, можно в качестве \mathcal{A} рассмотреть произвольную $*$ -алгебру (т.е. алгебру с инволюцией) и ввести состояние как положительный нормированный функционал.

Пара (\mathcal{A}, φ) называется *алгебраическим вероятностным пространством* (квантовым, если \mathcal{A} – некоммутативная и классическим, если \mathcal{A} – коммутативная $*$ -алгебра). Чтобы не усложнять изложение, пусть далее \mathcal{A} – алгебра фон Неймана. Событие определяется как ортогональный проектор $E \in \mathcal{A}$, т.е. $E^2 = E = E^*$. События E и Q называются *совместными*, если EQ является событием, т.е. E и Q коммутируют. Случайной величиной² на (\mathcal{A}, φ) называют $*$ -гомоморфизм j из \mathcal{B} в \mathcal{A} , где \mathcal{B} – алгебра фон Неймана, при котором единичный оператор из \mathcal{B} переходит в единичный оператор из \mathcal{A} . Состояние $\psi = \varphi \circ j$ на \mathcal{B} называется *распределением вероятностей* величины j .

Пользуясь теоремами фон Неймана и Стоуна (см., напр., [26]), можно описывать действительно-значные наблюдения как самосопряженные операторы, как проекторно-

²Здесь видим отличие от классического определения случайной величины X , заданной на (Ω, \mathcal{F}, P) и принимающей значения в \mathbb{R} .

значные меры, а также как однопараметрические полугруппы.

Говорят, что стохастический эксперимент моделируется некоммутативным вероятностным пространством, если утверждения о результате эксперимента (который можно производить сколь угодно часто с установлением измерительных приборов) можно описывать с помощью ортопроекторов из \mathcal{A} . По образному выражению Г.Макки, события имеет смысл рассматривать как вопросы, которые могут задаваться системе, отвечающей "да" или "нет". "Вопросы" могут задаваться в разных опытах, разделенных процедурами измерения, или в одном опыте, но тогда несовместные "вопросы" (события) должны следовать друг за другом. При этом "ответы" могут зависеть от уже заданных "вопросов".

Квантовая механика может быть описана в рамках некоммутативной теории вероятностей, но у нее есть и свои собственные структуры. Она имеет дело с *частицами*, *полями*, использует *наблюдаемые* типа положения, момента, углового момента, энергии, спина и т.д., а также понятия состояний системы. Состояния изменяются во времени согласно динамическому правилу, т.е. согласно уравнению Шредингера. Конечно, можно использовать и двойственное представление Гейзенберга, т.е. изучать динамику наблюдаемых (см., напр., [27], [28]).

В 1982 г. Л.Аккарди, А.Фрижеро и Дж.Льюис [29] ввели понятие квантового стохастического процесса. Замечательно, что в их формализме (т.е. при рассмотрении процесса как семейства инъективных $*$ -гомоморфизмов j_t , где $t \in T \subset \mathbb{R}$) квантовые стохастические процессы - это почти то же самое, что *открытые системы*.

Далее мы вернемся к проблематике квантовой вероятности, когда будем обсуждать стохастические дифференциальные уравнения. Здесь же заметим, что часто задача, не разрешимая с помощью одних средств, может стать разрешимой, если обратиться к другим средствам (возможно, видоизменив и саму постановку задачи). В работе [8] содержится много интересных идей, связанных, в частности, с моделями, использующими несамосопряженные операторы и переход от гильбертовых пространств к оснащенным гильбертовым пространствам. Более того, очень важным представляется анализ операторов, действующих на распределения вероятностей.

В заключение этого раздела уместно процитировать И.Р.Пригожина: "Конечно, можно сказать, что очень жаль, что мы не можем все предвидеть, но если бы мы могли все предвидеть, то не было бы места для нового, для творчества, а я думаю, что способность к творчеству – это самое главное в человеке" ([8], с. 22).

3. От микромира – к макромиру

В 1827 г. ботаник Р.Броун обнаружил под микроскопом хаотическое движение частиц цветочной пыльцы, помещенных в воду. Долгое время причина этого явления, получившего название *броуновского движения*, оставалась невыясненной. Только к концу XIX –

началу XX века было понято, что оно (и аналогичные явления) обусловлено тепловым движением атомов и молекул вещества. Иначе говоря, частицы пыли как бы подвергаются хаотическим ударам со стороны молекул воды. Математические модели этого процесса и более общих физических процессов *диффузии* были созданы благодаря трудам М.Смолуховского, А.Эйнштейна, А.Фоккера, И.Планка, П.Ланжевена, Н.Винера, П.Леви, А.Н.Колмогорова, М.А.Леонтовича и других ученых. Интересно отметить, что первая математическая модель процесса такого рода возникла в экономике. Точнее говоря, в работе Л.Башелье [30] 1900 года использовался процесс, теперь называемый винеровским, для описания флуктуаций цен акций.

Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ – *стандартный винеровский процесс* (броуновское движение), принимающий действительные значения (см., напр., [31]). Напомним, что с вероятностью единица траектории процесса W непрерывны на $[0, \infty)$ и недифференцируемы ни в одной точке $t \geq 0$, что очень хорошо отражает природу хаотического движения. Имеются обобщения броуновского движения на векторно-значные процессы. Кроме того, винеровский процесс можно строить на основе понятия "белого шума", т.е. отправляясь от обобщенного случайного процесса. Это же дает возможность выйти в бесконечномерные пространства.

В модели Башелье цены акций задавались формулой

$$S(t) = S(0) + \mu t + \sigma W(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Однако, в реальной жизни цены акций не могут быть отрицательными, поэтому более адекватная математическая модель была предложена П.Самуэльсоном [32] в 1965 году:

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W(t) \right\}, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

здесь $\mu \in \mathbb{R}$ и $\sigma > 0$ – некоторые параметры. Так введенный процесс $S = \{S(t), t \geq 0\}$ был назван им *экономическим броуновским движением*.

Обратимся к модели Блэка – Мертона – Шоулса *стандартного диффузионного* (B, S) -рынка, в которой цены акций (точнее говоря, одной акции данного вида) определяются согласно (3), а эволюция во времени банковского счета описывается соотношением $B(t) = B(0) \exp\{rt\}$, $t \geq 0$, r – положительный параметр.

Рассмотрим интересную и важную задачу нахождения в рамках указанной модели *справедливой цены опциона-колл Европейского типа*. А именно, пусть на бирже в момент времени $t \geq 0$ покупатель заключает сделку, дающую ему право купить (если он захочет) акцию в фиксированный момент $T > 0$ по заранее назначенной цене K . Тогда доход покупателя в момент T выражает *функция выплат* $f(T) = (S(T) - K)^+$, где $x^+ = \max\{x, 0\}$. За указанную сделку продавцом с покупателя взимается плата. Спрашивается, какова "справедливая цена" $C(T, K)$ такой сделки, которая устроила бы и покупателя и продавца?

Оказывается, что ответ нетривиален. Он дается (см., напр., [5], т.2, с. 913) знаменитой формулой Блэка – Шоулса:

$$C(T, K) = S(0)\Phi\left(\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + T\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) - Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln \frac{S(0)}{K} + T\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right), \quad (4)$$

здесь параметры μ и σ входят в (3), параметр r описывает эволюцию во времени *банковского счета*, а функция распределения стандартного нормального закона

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{u^2}{2}\right\} du, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Заметим, что исследования Р.Мертона и М.Шоулса были отмечены в 1997 году Нобелевской премией (Ф.Блэк скончался, а посмертно Нобелевские премии не присуждаются).

О различных обобщениях моделей с опционами и, вообще, о моделях стохастической финансовой математики можно прочитать в [5], где имеется обширная библиография. Поскольку речь идет о моделях, описывающих движение капиталов, составляющих миллиарды долларов, и о выработке стратегий управления портфелем ценных бумаг, то повышенный интерес к данной проблематике становится легко объяснимым. В настоящее время существенные трудности представляет разработка теории "неполных рынков". Здесь же заметим, что все более изощренные модели ведут к развитию методов компьютерного моделирования сложных стохастических систем и оценке их параметров.

Интересные примеры стохастических моделей, возникающих в макромире, дают модели страхования. Рассмотрим *модель Крамера – Лундберга*, в которой капитал страховой компании в момент времени $t \geq 0$ определяется формулой

$$X(t) = x_0 + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} \eta_k, \quad (6)$$

где константа $x_0 > 0$, $c > 0$ – это скорость поступления взносов, а последовательность неотрицательных, независимых и одинаково распределенных величин η_1, η_2, \dots описывает выплаты клиентам, совершающиеся в случайные моменты скачков пуассоновского процесса $N = \{N(t), t \geq 0\}$ интенсивности $\lambda > 0$. Предполагается, что $\{\eta_k\}$ не зависит от процесса N . Как обычно, сумма по пустому множеству индексов (когда $N(t) = 0$) считается равной нулю. Введем (случайный) момент разорения компании

$$\tau = \inf\{t > 0 : X(t) < 0\}.$$

При весьма широких условиях справедливо неравенство $P(\tau < \infty) \leq \exp\{-r_0 x_0\}$, где r_0 явно указываемый положительный параметр, а x_0 – начальный капитал компании (см., напр., [31], гл. IV).

Заметим, что пуассоновский процесс, широко используемый в физике и технике, был введен в 1903 году в диссертации Лундберга, посвященной проблемам страхования.

Модель (6) допускает различные обобщения, например, когда процесс N заменяется на процесс Кокса, имеющий случайную интенсивность (см., напр., [33]). Исследование процессов риска типа (6) представляется важным как для приложений, так и для дальнейшего развития теории суммирования случайного числа случайных величин (см., напр., [34]). В недавних работах [35] – [37] начато исследование функциональных предельных теорем для процессов риска.

Подчеркнем, что обширное поле деятельности представляют стохастические модели, описываемые случайными полями, т.е. случайными процессами $X = \{X_t, t \in T\}$, где параметрическое множество T имеет произвольную структуру (необязательно $T \subset \mathbb{R}$). Чаще всего $T \subset \mathbb{R}^d$, где $d > 1$. В частности, пуассоновские случайные поля используются в моделях астрофизики. Интересно, что к таким полям можно придти, рассматривая ансамбль M независимых равномерно распределенных в кубах $[-L, L]^d$ случайных величин ("частиц") и совершая предельный переход при $L \rightarrow \infty$ и $M \rightarrow \infty$ таким образом, чтобы сохранялась "плотность частиц", т.е. $M/(2L)^d \rightarrow 1/\lambda$.

Гиббсовские случайные поля применяются в моделях статистической физики. Отметим, что ситуация, когда по условным распределениям возможно построить неединственную меру в пространстве реализаций, интерпретируется как наличие у изучаемой системы фазового перехода (см., напр., [38]).

В 1977 г. Барндорф-Нильсен [39] ввел для объяснения некоторых эмпирических закономерностей в геологии так называемые *обобщенные гиперболические распределения*. Далее эти распределения нашли применение в теории турбулентности, а также в финансовой математике (о "турбулентности" финансового рынка см., напр., [40]). В этой же связи в последнее время заметно усилился интерес к устойчивым вероятностным законам и процессам Леви (см., напр., [41], [42]).

Самые разнообразные явления природы описываются с помощью *автомодельных процессов*. Для процесса $X = \{X_t, t \geq 0\}$ со значениями в \mathbb{R}^m автомодельность означает, что для любого $a > 0$ найдется $b = b(a) > 0$ такое, что изменение временной шкалы $t \mapsto at$ приводит к тому же результату, что и изменение фазовой шкалы $x \mapsto bx$. Точнее говоря, совпадают распределения процессов $\{X_{at}, t \geq 0\}$ и $\{bX_t, t \geq 0\}$. Если при этом $b(a) = a^H$, то параметр H называется *показателем Харста*³. Заметим, что имеются и другие определения (применимые к случайным полям) автомодельности, основанные на ренорм-группах.

Типичный пример систем, в которых возникают автомодельные процессы, дает турбулентность. Согласно *закону двух третей*, установленному А.Н.Колмогоровым в 1941 году, в турбулентном потоке несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса средний квадрат разности скоростей в двух точках, находящихся на расстоянии r (r не слишком мало и не слишком велико) пропорционален $r^{\frac{2}{3}}$. Более точную формулировку и обсуждение можно найти, например, в [44].

³Г.Харст [43] экспериментально обнаружил эффект автомодельности с показателем $H = 0,7$ при изучении "размаха колебаний" годовичных уровней Нила и других рек

Важную роль в ряде стохастических моделей финансовой математики играют процессы *фрактального броуновского движения* $B^{(H)} = \{B^{(H)}(t), t \geq 0\}$. Напомним, что процесс $B^{(H)}$ вводится как непрерывный центрированный действительный гауссовский процесс с ковариационной функцией

$$EB^{(H)}(s)B^{(H)}(t) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}), \text{ где } s, t \geq 0, H \in [0, 1].$$

Легко видеть, что этот процесс является автомодельным с показателем H . В частности, при $H = 1/2$ получается винеровский процесс W . Процессы $B^{(H)}$ впервые были использованы А.Н.Колмогоровым в работе [45], где они назывались *спиралями Винера*. Термин *фрактальное броуновское движение* введен в 1968 г. в статье Б.Мандельброта и Дж. ван Несса [46], содержащей представление $B^{(H)}$ в виде стохастического интеграла по винеровскому процессу.

В химии процессы случайного блуждания (когда изучаются суммы независимых одинаково распределенных случайных векторов и, в частности, проблемы самопересечения их траекторий) используются в моделях полимеров. О вероятностных моделях и методах в физике интересно прочитать книгу М.Каца [47].

Во все времена важную роль играли модели, относящиеся к окружающей природной среде. Даже в экологии, по мнению Э.Петерса ([48], с. 62), теорию "естественного баланса" сменило понимание того, что природа находится в состоянии непрерывных флуктуаций. Хорошо известны работы, инициированные А.Н.Колмогоровым и развитые А.М.Обуховым и А.С.Мониным соответственно при анализе атмосферных процессов и в океанологии. В последнее время появился ряд исследований, в которых марковские случайные поля применяются для описания геологических структур (см., напр., [49]). Марковские процессы и поля используются в различных моделях физики и химии (см., напр., [50], [51]). Любопытно отметить, что сам А.А.Марков ввел такие процессы ("цепи Маркова"), отправляясь не от технических задач, а анализируя чередование букв в тексте поэмы "Евгений Онегин".

Среди важных проблем упомянем также построение и анализ моделей редких и *экстремальных* событий. Мы уже рассматривали выше проблему разорения страховой компании, т.е. проблему оценки вероятности выхода процесса $X = \{X(t), t \geq 0\}$ на нулевой уровень. В то же время имеется много интересных задач, относящихся к выходам случайного процесса (или случайного поля) на высокий уровень. Представим себе, что речь идет о переполнении уровня плотины. В вероятностной интерпретации многие проблемы такого рода могут быть сформулированы как задачи о поведении максимумов $M_n = \max\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$, $n \geq 1$, где ξ_1, ξ_2, \dots – некоторые случайные величины или как задачи о поведении величины $\sup\{X(t), t \in T\}$, где $X = \{X(t), t \in T\}$ – некоторый случайный процесс (поле).

Напомним красивые результаты, восходящие к классическим работам Б.В.Гнеденко и относящиеся к анализу асимптотического поведения величин $Y_n = a_n^{-1}(M_n - b_n)$, где M_n определены выше, a_n – положительные и b_n – действительные константы ($n \geq 1$), а

случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots независимы и одинаково распределены. Оказалось (см., напр., [52]), что все предельные законы для Y_n при $n \rightarrow \infty$ описываются следующим однопараметрическим семейством *экстремальных законов*, имеющих функцию распределения

$$G_\gamma(x) = \exp\left\{-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right\}, \quad x \in \mathbb{R},$$

а параметр γ , называемый *экстремальным индексом*, может быть любым действительным числом (при $\gamma = 0$ считаем, что $G_0(x) = \exp\{-\exp\{-x\}\}$, $x \in \mathbb{R}$).

Удалось найти необходимые и достаточные условия принадлежности функции распределения $F(x) = P(\xi_1 \leq x)$ области притяжения данного экстремального закона (см., напр., [53], с. 139). Иначе говоря, имеется полное описание F , для которых найдутся нормирующие последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, приводящие при $n \rightarrow \infty$ к соотношению $a_n^{-1}(M_n - b_n) \xrightarrow{D} Z_\gamma$, где \xrightarrow{D} обозначает сходимость по распределению, Z_γ – случайная величина с функцией распределения G_γ .

Очень интересной и важной для приложений является задача статистической оценки параметра γ . Оценки Хилла, Пикандса, Чёргё и другие обсуждаются в работе [52]. В той же статье можно прочитать об оценке экстремального индекса в модели, описывающей сильные скорости ветра в тех или иных районах суши.

Проблемы анализа событий малой вероятности привели также к построению удивительно стройной теории больших уклонений. А именно, для многих семейств мер P_ε , $\varepsilon > 0$, заданных на борелевской σ -алгебре метрического пространства S , справедлив *принцип больших уклонений*, из которого вытекает, что

$$P(B) = \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon}(I(B) + o(\varepsilon))\right\} \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0+,$$

здесь "функция уклонений" $I : S \rightarrow [0, \infty]$, $I(B) = \inf_{x \in B} I(x)$ и B – должные множества в S . В частности, для мер $P_\varepsilon(B) = P(\sqrt{\varepsilon}W(\cdot) \in B)$, где $W = \{W(t), t \in [0, T]\}$, B – борелевское множество в пространстве $S = C[0, T]$, по теореме Шильдера

$$I(x) = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{x}(t))^2 dt,$$

если функция $x = x(t)$ из S входит в пространство Камерона – Мартина, в противном случае $I(x) = \infty$. Об этих результатах и их разнообразных приложениях можно прочитать, например, в [34] и [54].

С проблемами нахождения параметра распределения, как бы аккумулирующего информацию о распределении после должного масштабирования наблюдений, также связаны модели наблюдений, обладающих достаточно сильной зависимостью ("long-range dependence"). Можно сказать, что стационарный процесс $X = \{X_n, n \in \mathbb{Z}\}$ обладает сильной зависимостью, если его ковариационная функция не является суммируемой. Однако, удобнее предполагать, что ковариационная функция

$$\text{cov}(X_k, X_{k+n}) = n^{-\beta} \mathcal{L}(n), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $\beta \in (0, 1)$ и \mathcal{L} – функция, медленно меняющаяся в смысле Карамата. Для стационарных процессов и полей с непрерывным временем определение сильной зависимости аналогично, см., напр., недавнюю книгу [55].

Подчеркнем, что построение, использование и анализ вероятностных моделей, описываемых семействами зависимых случайных величин, является очень важным, поскольку далеко не всегда естественно ограничиваться концепцией независимости. В теории вероятностей для этого имеется ряд возможностей. Прежде всего, напомним, что выделяются обширные классы случайных процессов (и полей), зависимость которых описывается в определенных терминах. Так, вводятся процессы с независимыми приращениями, гауссовские, марковские, мартингалы и др. Кроме того, вводятся коэффициенты зависимости (перемешивания).

Часто весьма привлекательными являются модели, степень зависимости которых выражает ковариационная функция (например, гауссовские модели). С этой же точки зрения интерес представляют модели с положительной или отрицательной ассоциированностью (см., напр., [56] – [58]). Заметим, что упоминавшееся пуассоновское случайное поле, обладает свойством ассоциированности. Это же свойство проявляется и в некоторых моделях, описываемых ветвящимся броуновским движением. В физических моделях (например, ферромагнетиков) известны FKG-неравенства ([59]), влекущие свойство ассоциированности.

Отметим глубокую идею, восходящую к П.Л.Чебышеву, согласно которой существенную роль играют не только предельные закономерности, но и скорость сходимости к предельным законам. Это позволяет оценивать точность той или иной аппроксимации при конечном числе наблюдений. Для иллюстрации этого положения упомянем обширные исследования, относящиеся к оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме. Для случайных полей, обладающих свойством квазиассоциированности, весьма точные оценки нормального приближения получены в [60].

Чтобы лучше понять смысл некоторых из упомянутых выше моделей, в следующем разделе мы напомним ряд концепций стохастического анализа.

4. Стохастичность в дифференциальных уравнениях

Рассмотрим движение частицы, помещенной в жидкость. Пусть ее масса равна m , а скорость в момент времени t есть $v(t)$. П.Ланжевенем было предложено классическое уравнение, описывающее движение такой частицы:

$$m\dot{v}(t) = -\beta v(t) + \dot{W}(t), \quad (7)$$

где параметр $\beta > 0$ характеризует вязкость среды, а \dot{W} – "производная" винеровского процесса. Как мы знаем, производная винеровского процесса с вероятностью единица не существует ни в одной точке $t \geq 0$. Поэтому формальное появление \dot{W} в (7) должно

было отражать наличие крайне нерегулярных сил, обусловленных столкновениями частицы с молекулами жидкости. Таким образом, уравнение (7), написанное в духе закона движения Ньютона, отражает эффект торможения частицы в жидкости (член $-\beta v(t)$) и наличие теплового движения (член $\dot{W}(t)$).

Осталось придать строгий математический смысл соотношению (7). Для этого достаточно вспомнить, что дифференциальные уравнения (не содержащие ничего случайного) эквивалентным образом могут быть переписаны в интегральной форме. Применительно к (7) это дает также формальное соотношение

$$v(t) - v(0) = -\frac{\beta}{m} \int_0^t v(s) ds + \frac{1}{m} \int_0^t \dot{W}(s) ds. \quad (8)$$

Если сделать следующий шаг и понимать $\int_0^t \dot{W}(s) ds$ как интеграл $\int_0^t dW(s)$, где последний интеграл берется в смысле Ито и равен $W(t)$, то можно считать процедуру придания точного смысла соотношению (7) законченной. Главное, что было сделано – это переход от дифференциального соотношения, имеющего лишь формальный смысл, к интегральному соотношению, которое допускает строгую трактовку.

Собственно говоря, в (8) был использован очень простой случай, когда достаточно определить интеграл $\int_0^t f(t) dW(t)$ для "хорошей" неслучайной функции f (см., напр., [31], гл. VII).

Заметим, что при должном выборе гауссовской случайной величины в качестве начального условия $v(0)$ решением уравнения Ланжевена является знаменитый процесс Орнштейна – Уленбека, т.е. центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией вида $r(s, t) = c \exp\{-\alpha|s - t|\}$, где c и α – положительные константы, $s, t \geq 0$.

Итак, благодаря К.Ито, стохастическое уравнение вида

$$dX_t = b(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dW_t, \quad t \in [0, T] \quad (\text{или } t \in [0, \infty)) \quad (9)$$

с начальным условием X_0 понимается как интегральное уравнение

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s, s)ds + \int_0^t \sigma(X_s, s)dW_s, \quad (10)$$

где первый интеграл есть потраекторный интеграл Лебега, а последний интеграл – интеграл Ито (здесь и далее мы пишем X_t и W_t соответственно вместо $X(t)$ и $W(t)$, чтобы избежать лишних скобок). Разумеется, надо позаботиться о том, чтобы эти интегралы существовали, т.е. чтобы коэффициенты уравнения (9) были "достаточно хорошие". Тогда можно ставить вопрос о существовании и единственности *сильного* (или слабого) *решения*. Заметим также, что используются стохастические уравнения, для интегральной трактовки которых применяется интеграл Стратоновича. Об этих и многих других вопросах стохастического анализа можно прочитать, например, в книгах [61] – [63].

Отметим лишь, что модель "экономического броуновского движения" (3) на языке стохастических дифференциальных уравнений запишется в виде

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad t \geq 0.$$

Заметим, что имеются глубокие обобщения понятия стохастического интеграла Ито, когда интегрирование ведется не обязательно по броуновскому движению, а по семимартингалу. Используются также кратные стохастические интегралы, см., напр., [64].

Интересно отметить, как уравнение вида (10) переформулируется на языке алгебраических вероятностных пространств, введенных в разделе 2.

Пусть $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная функция класса C^2 . Пусть $X = \{X_t, t \geq 0\}$ – (сильное) решение уравнения (10) с начальным условием $X_0 \in L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), mes)$, где mes – мера Лебега.

Отождествив $f(X_0)$ с оператором умножения на пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и, опуская ряд деталей (см., напр., [65]), введем *-гомоморфизм $j_t(f) := f(X_t)$. Имеем

$$j_t : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{B}(V), \text{ где } V = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\Omega, \mathcal{F}, P),$$

$\mathcal{B}(H)$ обозначает *-алгебру ограниченных операторов на гильбертовом пространстве H . Поскольку любой оператор A , действующий на $L^2(\mathbb{R})$ может быть отождествлен с оператором $A \otimes 1$ на V , то $f(X_t)$ можно рассматривать как операторы, действующие на V . Если существуют унитарные операторы U_t на V такие, что

$$j_t = f(X_t) = U_t f(X_0) U_t^*, \quad (11)$$

то гомоморфизм j_t называется унитарно выполнимым. В этом случае, заменив $f(X_0)$ в (11) на произвольный оператор $A \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$, мы расширим случайную величину X_t , т.е. гомоморфизм j_t до гомоморфизма $\mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}))$ в $\mathcal{B}(V)$.

Заметим, что в силу формулы Ито (см., напр., [5], т. 1, гл. III) $f(X_t)$ также удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению, поэтому естественно предположить, что операторы U_t удовлетворяют стохастическому дифференциальному уравнению. Это оказывается справедливым. Для доказательства используется фундаментальный результат Хадсона и Партасарати [66], а также понятие фоковского броуновского движения, действующего в бозонном пространстве Фока.

Проблема эволюции мер, упомянутая во введении, находит отражение во множестве работ, посвященных асимптотическому поведению решений дифференциальных уравнений в частных производных со случайными начальными данными.

Обратимся к знаменитому многомерному уравнению Бюргерса. Точнее говоря, рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + (v, \nabla_x) v &= \kappa \Delta v, \\ v(0, x) &= v_0(x) = -\nabla_x \xi(x), \\ (t, x) &\in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \quad v(t, x) \in \mathbb{R}^d, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\kappa > 0$ – параметр вязкости, Δ – оператор Лапласа, ∇_x – градиент (по переменной x). Решение ищется в классе потенциальных полей $v(t, x) = \nabla_x \Phi(t, x)$.

Это уравнение и его аналоги описывают эволюцию поля скоростей для многих нелинейных диссипативных физических явлений различной природы – интенсивных акустических, оптических волн, гидродинамических потоков частиц и др., см., напр., [67]. Заметим, что уравнение Бюргерса получается из классического уравнения Навье – Стокса при нулевом давлении.

Уравнение Бюргерса используется для гидродинамического описания возникновения во Вселенной крупномасштабных мозаичных структур типа Вороного (см., напр., [68], [69]). Эти структуры были обнаружены астрономами сравнительно недавно.

На поведение решения задачи (12) влияют два основных механизма, заложенных в уравнение: нелинейность, выраженная квадратичным членом $(v, \nabla_x)v$, и диссипация, возникающая благодаря наличию вязкости, т.е. гидродинамического трения. Нелинейность влечет возникновение структур типа ударных волн, диссипация сглаживает эти ударные волны, действуя на поле скоростей регуляризирующим образом. Эти два "противоборствующих" эффекта и определяют сложную картину "турбулентности Бюргерса", сопровождающуюся явлениями перемежаемости и перенесением энергии по спектру.

При $\kappa = 0$ уравнение (12) превращается в известное уравнение Римана, описывающее эволюцию поля скоростей в потоке невзаимодействующих частиц.

С математической точки зрения замечательный факт состоит в том, что с помощью, так называемой, *подстановки Хопфа – Коула* $v(t, x) = -2\kappa \nabla_x \log u(t, x)$ можно свести задачу (12) к уравнению теплопроводности.

Поэтому, пользуясь результатами известных работ А.Н.Тихонова и Д.В.Уиддера, находим, что

$$v(t, x) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \frac{x-y}{t} \exp \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left(\xi(y) - \frac{|x-y|^2}{2t} \right) \right\} dy}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left\{ \frac{1}{2\kappa} \left(\xi(y) - \frac{|x-y|^2}{2t} \right) \right\} dy}, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^d, \quad (13)$$

здесь $|\cdot|$ – евклидова норма в \mathbb{R}^d .

Наибольший интерес для нас представляет случай, когда начальный потенциал является случайным полем. Оказалось, что стохастические свойства решений уравнения Бюргерса существенно зависят от типа начальных условий.

Первые строгие математические результаты о предельном поведении случайных решений (одномерного, т.е. при $d = 1$) уравнения Бюргерса были получены М.Розенблаттом. Им была установлена асимптотическая гауссовость интегралов от решений при подходящей нормировке в предположении, что начальные условия обладают свойством сильного перемешивания (см. [70]).

В работе [71] впервые была доказана центральная предельная теорема для параболически масштабированных решений многомерного уравнения Бюргерса, построенных по случайным начальным данным, заданным полем *дробового шума* $\xi(x)$, управляемым

пуассоновским точечным полем $\{x_i\}$:

$$\xi(x) = \sum_i \eta_i \varphi\left(\frac{x - x_i}{\theta_i}\right), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (14)$$

здесь $\varphi(\cdot)$ – действительная измеримая функция на \mathbb{R}^d , называемая функцией влияния, $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ – последовательности независимых случайных величин. Считается, что $\{x_i\}$, $(\eta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и $(\theta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ независимы в совокупности, все величины η_i (соответственно θ_i) распределены так же как величина η (соответственно θ).

При выполнении определенных условий на моменты величин η , θ и на "хвосты интегралов" от функции φ в [71] было установлено, что конечномерные распределения случайного поля

$$V_T(a) = T^{(d+2)/4} v(T, a\sqrt{T}) \quad T > 0, \quad a \in \mathbb{R}^d$$

слабо сходятся к конечномерным распределениям центрированного гауссовского (векторного) случайного поля $V_\infty = \{V_\infty(a), a \in \mathbb{R}^d\}$ с явно указанной ковариационной структурой.

В [72] этот результат был обобщен на серии более сложно преобразованных решений уравнения Бюргерса для начальных потенциалов, описываемых сериями более общих полей дробового шума.

Далее последовал ряд работ, в которых конечномерные распределения преобразованных решений уравнения (12) исследовались для различных классов начальных данных (см., напр., [73]). В частности, для начальных потенциалов, задаваемых гауссовскими случайными полями или преобразованиями гауссовских полей, использовалась техника разложений по многочленам Эрмита – Вика. Здесь существенную роль играют результаты работ Р.Л.Добрушина и П.Майора. В недавней работе [74] рассматриваются предельные теоремы для преобразованных решений уравнения Бюргерса, когда начальный потенциал обладает свойством "сильной зависимости".

Существенный шаг в исследовании преобразованных решений уравнения Бюргерса был сделан Ю.Ю.Бахтиным [75], доказавшим (при определенных условиях) функциональную центральную предельную теорему для параболически масштабированных решений уравнения Бюргерса, построенных по случайным начальным данным, описываемым в терминах ассоциированных случайных мер.

С уравнением Бюргерса связано много других важных задач. Так, Я.Г.Синай, К.Ханин и А.Мазель в [76] построили инвариантную меру для одномерного уравнения Бюргерса с периодической по пространственной переменной случайной силой, заданной гауссовским белым шумом. Ж.Бертуэн ([77]) изучал статистику ударных волн для решений уравнения Бюргерса с устойчивыми начальными данными.

Отметим, что очень перспективную область исследований представляют стохастические дифференциальные уравнения в частных производных. По-видимому, основную стимулирующую роль в развитии этой теории сыграли нелинейная фильтрация сигналов и гидродинамика.

Существенные трудности, возникающие при определении решений такого рода уравнений, демонстрирует (см. [78]) стохастическое уравнение Пуассона $\Delta u = -\dot{W}$ в области $D \subset \mathbb{R}^d$ с нулевыми граничными условиями, где в качестве источника берется d -параметрический "белый шум" \dot{W} . Было бы естественно ожидать, что решение запишется в виде интеграла

$$u(x) = \int_D G(x, y) dW(y),$$

где $G = G(x, y)$ – классическая функция Грина, а интеграл понимается как кратный интеграл Ито. Однако для этого требуется, чтобы квадрат функции G был интегрируем по Лебегу в области D . Поэтому не удастся использовать $d > 3$.

Интересная задача с подвижной границей рассмотрена в [79]. Объясним лишь суть различий в подходах [78] и [79]. Вместо того, чтобы рассматривать стохастический процесс $\omega \mapsto u(\cdot, \omega) \in H^\alpha$, где H^α – пространство Соболева, можно использовать функции $x \mapsto u(x, \cdot) \in (S)_{-1}$, где $(S)_{-1}$ – пространство Кондратьева. Последнее пространство снабжено *виковским произведением*, что позволяет изучать стохастические уравнения с мультипликативным шумом. Мы не будем вдаваться в подробности, поскольку это потребовало бы определения интеграла Скорохода. Заметим также, что изучение случайных обобщенных функций требует существенного изменения многих постановок граничных задач (см., напр., [80]).

5. Заключительные замечания

Не увеличивая чрезмерно объем статьи, невозможно дать даже ссылки на работы, посвященные многим интересным областям исследований, в которых используются стохастические модели. Поэтому упомянем лишь некоторые, не обсуждавшиеся нами.

Прежде всего, напомним о самостоятельном разделе теории вероятностей, называемом математической статистикой. Этот раздел базируется на вероятностных моделях и, главным образом, ориентирован на разработку методов анализа и интерпретации наблюдений, а также на проверку адекватности предложенных моделей. При этом возникают существенные трудности. Они обусловлены, в частности, тем, что не всегда имеются достаточно большие и репрезентативные выборки. Надо сказать также, что имеются и сложности, связанные с интерпретацией полученных результатов. Для иллюстрации полезно обратиться к работе А.Н.Колмогорова [81], в которой он (основываясь на результатах опытных наблюдений сотрудников Т.Д.Лысенко) не опроверг, а подтвердил справедливость законов Менделя. Подробный разбор этой работы можно прочитать в [82]. Литература, посвященная математической статистике, поистине необъятна, ограничимся лишь указанием на книги [83]–[85]. В последние годы очень широко применяются компьютерные методы анализа данных и подбора вероятностных моделей (см., напр., [86]). Здесь же заметим, что в теории случайных процессов существует обширный раздел, именуемый *анализом временных рядов*. Отметим, что в последнее

время классические модели процессов авторегрессии – скользящего среднего дополнились нелинейными моделями GARCH, EGARCH, FIGARCH и др. см., напр., [5], т.1, гл. II и [87].

Вероятностные модели и статистические методы используются в медицине. Упомянем в этой связи, например, модель развития эпидемий, рассмотренную в [88]. Мы не затрагиваем здесь вероятностных моделей в биологии. Интересно, что методы теории ветвящихся случайных процессов позволяют анализировать динамику развития популяций. Модели точечных случайных процессов и полей находят разнообразные применения в технике. Обширную область исследований представляет теория информации. Исключительно важной для приложений является фильтрация случайных процессов (см., напр., [89]). Модели теории случайных полей играют существенную роль при распознавании образов (см., напр., [90]). Очень важным является анализ сложных сетей (см., напр., [91]). Отдельного рассмотрения требуют задачи, возникающие, например, в социологии (в частности, вероятностно-статистические методы выборочных исследований).

Перефразируя известное высказывание М.В.Ломоносова о химии, можно с полной уверенностью сказать, что широко простирает теория вероятностей руки свои в дела человеческие. Становление и расцвет этой теории, а также появление новых областей ее приложений, во многом обусловлены тем фундаментальным вкладом, который внес в науку XX века Андрей Николаевич Колмогоров.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 03-01-00724.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.А.Садовничий. Предисловие руководителя семинара. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы", М.: Кн. дом "Университет", 1999, вып. 1, 5-7.
- [2] А.Н.Колмогоров. Математика в ее историческом развитии. М.: Наука, 1991.
- [3] А.Н.Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей (3-е изд.). М.: Фазис, 1998.
- [4] В.В.Петров. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
- [5] А.Н.Ширяев. Стохастическая финансовая математика (т. 1,2). М.: Фазис, 1999.
- [6] А.Ю.Лоскутов. Динамические системы: хаотичность и управляемость. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы", М.: Кн. дом "Университет", 1999, вып. 1, 45-100.
- [7] L.Arnold. Six lectures on random dynamical systems. In: Dynamical Systems (R.Johnson ed.), Lect. Notes Math., 1609, Springer-Verlag, Berlin, 1995, 1-43.
- [8] И.Р.Пригожин. Время, хаос и законы природы. Труды семинара "Время, хаос и математические проблемы", М.: Кн. дом "Университет", 1999, вып. 1, 9-22.
- [9] Я.Бернулли. О законе больших чисел (пер. с лат.). М.: Наука, 1986.
- [10] Б.В.Гнеденко. Курс теории вероятностей (6-е изд.), М.: Наука, 1988.

- [11] А.Н.Ширяев. Математическая теория вероятностей. Очерк истории становления. Приложение к книге А.Н.Колмогорова "Основные понятия теории вероятностей", М.: Фазис, 1998.
- [12] R.F.Bass. Probabilistic Techniques in Analysis. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [13] B.Øksendal. Stochastic Differential Equations (5-th ed.). Springer, New York, 2000.
- [14] B. d'Espagnat. Conceptual Foundations of Quantum Mechanics (second ed.). Perseus Books Publishing, L.L.C., 1999.
- [15] B. d'Espagnat. Veiled Reality. An analysis of present-day quantum mechanical concepts. Addison-Wesley, 1995.
- [16] W.Heisengerg. Physical Principles of Quantum Theory. Chicago Univ. Press., 1930.
- [17] P.A.M. Dirac. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford Univ. Press. 1930.
- [18] N.Bohr. The atomic theory and the fundamental principles underlying the description of nature. In: The Atomic Theory and Description of Nature. Cambridge Univ. Press., 1934.
- [19] А.Н.Колмогоров. Теория вероятностей. В кн.: Математика, ее содержание, методы и значение (ред. А.Д.Александров и др.), М.: изд-во АН СССР, 1956, т.2, 252-284.
- [20] A.Bulinski, A.Khrennikov. Nonclassical Total Probability Formula and Quantum Interference of Probabilities. *Reports from Växjö university – Math. natural sci. and technology*, 2002, Nr 13, 1-11.
- [21] К.Дарроу. Физика как наука и искусство. Физики шутят. Сборник переводов, вып. 1, М.: Мир, 1993.
- [22] K.R.Parthasaraty. An Introduction to Quantum Stochastic Calculus. Birkhäuser, Basel, 1992.
- [23] P.-A.Meyer. Quantum Probability for Probabilists. Lect. Notes Math., 1538, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [24] H.Maassen. Quantum physics of open systems. *Preprint*, 1998.
- [25] A.S.Holevo. Statistical Structure of Quantum Theory. Lect. Notes Phys., 67, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [26] М.Рид, Б.Саймон. Методы современной математической физики (пер. с англ.). М.: Мир, 1977.
- [27] J. von Neumann. Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton Univ. Press. Princeton. N.J., 1955.
- [28] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Физматгиз, 1968.
- [29] L.Accardi, A.Frigerio, J.T.Lewis. Quantum stochastic processes. *Publications R.I.M.S.* 1982, 18, 97-133.
- [30] L.Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*. 1900, 17, 21-86.
- [31] А.В.Булинский, А.Н.Ширяев. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2003.
- [32] P.A.Samuelson. Rational theory of warrant pricing. *Industrial Management Review*, 1965, 6, 13-31.
- [33] В.Е.Беннинг, В.Ю.Королев. Обобщенные процессы риска. М.: МАКС – Пресс, 2000.

- [34] B.V.Gnedenko, V.Yu.Korolev. Random Summation: Limit Theorems and Applications. CRC Press, Boca Raton, FL, 1996.
- [35] K.Burnecki. Self-similar processes as weak limits of a risk reserve process. *Probab. Math. Stat.*, 2000, 20, 261-272.
- [36] A.Bulinski, A.Vashevnik. Convergence rates in the FCLT for stochastic processes arising in insurance models. *Ogólnopolska konf. zastosow. matem. Zakopane – Kościelisko, 17-24.09.2002. Abstr. of Commun.*, 17 – 18.
- [37] V.Yu.Korolev, A.A.Kudryavtsev. Functional limit theorems for generalized risk processes. *XXIII Int. Sem. in Stability Problems for Stoch. Models. Pamplona, Spain, 12-17.05.2003*.
- [38] О-Х.Геори. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1992.
- [39] O.E.Barndorff-Nielsen. Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. *Proc. Royal Soc. London, ser. A*, 1977, 353, 401-419.
- [40] O.E.Barndorff-Nielsen. Probability and statistics: self-decomposability, finance and turbulence. In: *Probability Towards 2000* (L.Accardi and C.C.Heyde eds.). *Lect. Notes in Statist.*, 128, New York, Springer, 1998, 47-57.
- [41] J.Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge University Press. Cambridge, 1996.
- [42] K.-I.Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [43] H.Hurst. Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions Amer. Soc. Civil Eng.*, 1951, 116, 770-808.
- [44] У.Фриш. Турбулентность. Наследие А.Н.Колмогорова. (пер. с англ.). Фазис, 1998.
- [45] А.Н.Колмогоров. Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве. *ДАН СССР*, 1940, 26, N2, 115-118.
- [46] B.B.Mandelbrot, J.W.van Ness. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 1968, 10, N4, 422-437.
- [47] М.Кац. Несколько вероятностных задач физики и математики (пер. с польск.). М.: Наука, 1967.
- [48] Э.Петерс. Хаос и порядок на рынках капитала (пер. с англ.). М.:Мир, 2000.
- [49] T.Norberg, L.Rosén, Á.Baran, S.Baran. On modeling discrete geological structures as Markov random fields. *Math. Geology*, 2002, 34, N2, 63-77.
- [50] Н.Г.Ван Кампен. Стохастические процессы в физике и химии (пер. с англ.). М.: "Высшая школа", 1990.
- [51] Т.Лигgett. Марковские процессы с локальным взаимодействием (пер. с англ.). М.: Мир, 1989.
- [52] J.Bierlant, J.L.Teugels and P.Vynckier. Some thoughts on extreme values. In: *Probability Towards 2000* (L.Accardi and C.C.Heyde eds.). *Lect. Notes in Statist.*, 128, New York, Springer, 1998, 58-73.
- [53] N.H.Bingham, C.M.Goldie and J.L.Teugels. *Regular Variation*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [54] F. den Hollander. *Large Deviations*. AMS, Providence, Rhode Island, 2000.
- [55] P.Doukhan et al. eds. *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Birkhäuser, Boston, 2002.

- [56] J.Esary, F.Proshan. D.Walkup. Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.*, 1967, 38, 1466-1474.
- [57] K.Joag-Dev, F.Proshan. Negative association of random variables with applications. *Ann. Statist.*, 1983, 11, 286-299.
- [58] C.Newman. Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. In: Y.L.Tong (ed.). *Inequalities in Statistics and Probability*. IMS Lecture Notes – Monograph Ser., 1984, 5. Inst. Math. Statist., Hayward. CA, 127-140.
- [59] C.Fortuin, P.Kasteleyn, J.Ginibre. Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Commun. Math. Phys.*, 1971, 22, 89-103.
- [60] A.Bulinski, C.Suquet. Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.*, 2001, 54, 216-226.
- [61] Ж.Жакод, А.Н.Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов (в двух томах)ю М.: Физматгиз, 1994.
- [62] С.Ватанабэ, Н.Икеда. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы (пер. с англ.). М.: Наука, 1986.
- [63] I.Karatzas, S.Shreeve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2-nd ed.). Springer-Verlag, New York, 1997.
- [64] P.Major. Multiple Wiener–Ito integrals. *Lect. Notes. Math.*, 849, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 1-127.
- [65] L.Accardi, Y.-G.Lu and I.Volovich. Non-linear extension of classical and quantum stochastic calculus and essentially infinite dimensional analysis. In: *Probability Towards 2000* (L.Accardi and C.C.Heyde eds.). *Lect. Notes in Statist.*, 128, New York, Springer, 1998, 1-33.
- [66] R.L.Hudson, K.R.Parthasarathy. Quantum Ito's formula and stochastic evolutions. *Commun. Math. Phys.*, 1994, 93, 301-323.
- [67] С.Н.Гурбатов, А.Н.Малахов, А.И.Саичев. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. М.:Наука, 1990.
- [68] Shandarin S.F., Zeldovich Ya.B. Turbulence, intermittency, structures in the self-gravitating medium: the large scale structure of the Universe. *Rev. Modern Phys.*, 1989, 61, 185-220.
- [69] S.Albeverio, S.A.Molchanov, D.Surgailis. Stratified structure of the Universe and Burgers' equation - a probabilistic approach. *Prob. Th. Rel. Fields*, 1994, 100, 457-484.
- [70] M.Rosenblatt. Scale renormalization and random solution of the Burgers equation. *J.Appl. Probab.*, 1987, 24, 328-338.
- [71] А.В.Булинский, С.А.Молчанов. Асимптотическая гауссовость решения уравнения Бюргерса со случайными начальными даннымию *Теория вероятн. и ее примен.*, 1991, 36, N2, 217-235.
- [72] A.V.Bulinski. Some problems of asymptotical analysis of nonlinear diffusion. *Probab. Theory and Math. Statist.* (eds. A.N.Shiryaev et al.), World Scientific. Singapore, 1992, 32-46.
- [73] N.N.Leonenko, E.Orsingher. Limit theorems for solutions of the Burgers equation with Gaussian and non-Gaussian initial conditions. *Теория вероятн. и ее примен.*, 1995, 40, N2, 387-403.
- [74] D.Surgailis, W.A.Woyczyński. Limit theorems for the Burgers equation initialized

by data with long-range dependence. In: P.Doukhan et al. eds. Theory and Applications of Long-Range Dependence. Birkhäuser, Boston, 2002, 507-523.

[75] Ю.Ю.Бахтин. Функциональная центральная предельная теорема для преобразованных решений многомерного уравнения Бюргерса со случайными начальными данными. *ДАН СССР*, 2000, т. 372, N6, 5-7.

[76] W.E, K.Khanin, A.Mazel, Ya.Sinai. Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing. *Ann. Math.*, 2000, 151, N3, 877-960.

[77] J.Bertoin. Structure of shocks in Burgers turbulence with stable initial data. *Comm. Math. Phys.*, 1999, 203, 729-741.

[78] J.B.Walsh. An introduction to stochastic partial differential equations. In: R.Carmona et al. eds. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIV. Lect. Notes Math., 1180, Springer, Berlin, 1984, 265-437.

[79] H.Holden, B.Øksendal, J.Ubøe, T.Zhang. Stochastic Partial Differential Equations. A Modeling, White Noise Functional Approach. Tech. Report.

[80] Ю.А.Розанов. Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными. М.: Наука, 1995.

[81] А.Н.Колмогоров. Об одном новом подтверждении законов Менделя. *ДАН СССР*, 1940, 27, 38-42.

[82] В.Н.Тутубалин. Теория вероятностей и случайных процессов. М.:изд-во МГУ, 1992.

[83] Г.Крамер. Математические методы статистики. М.:Мир, 1975.

[84] А.А.Боровков. Математическая статистика. М.: Наука, 1984.

[85] Ю.В.Прохоров (гл. ред.). Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. М.:БРЭ, 1999.

[86] Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров. Статистический анализ данных на компьютере. М.: ИНФРА-М. 1998.

[87] T.Mikosch, C.Stăricăa. Long-range dependence effects and ARCH modeling. In: P.Doukhan et al. eds. Theory and Applications of Long-Range Dependence. Birkhäuser, Boston, 2002, 439-460.

[88] G.Reinert. Stein's method for epidemic processes. In: Complex Stochastic Systems (O.E.Barndorff-Nielsen et al. eds.). Chapman and Hall/CRC, Boca Raton etc., 2001.

[89] R.L.Liptser, A.N.Shiryaev. Statistics of Random Processes. v.1. General Theory, v.2. Applications. Springer, 2000.

[90] X.Guyon. Random Fields on a Network. Modeling, Statistics, and Applications. Springer-Verlag, 1995.

[91] A.Feldman, A.Gilbert and W.Willinger. Data networks as cascades: Investigating the multifractal nature of Internet WAN traffic. *Proc. ACM/Sigcomm 98*, 1998, 28, 42-55.