

# Теория параметрического резонанса: новые результаты

А.А. Майлыбаев, А.П. Сейранян

Институт механики

Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова

## Аннотация

Рассматривается линейная колебательная система со многими степенями свободы с периодическими коэффициентами, зависящая от трех независимых параметров: частоты и амплитуды периодического воздействия и параметра диссипативных сил, причем последние две величины предполагаются малыми. Исследуется неустойчивость тривиального решения (параметрический резонанс). Получены общие выражения для областей основного и комбинационного резонансов. Исследована геометрия области резонанса, которая для наиболее распространенных видов периодического воздействия имеет вид конуса в трехмерном пространстве параметров. В качестве примеров рассмотрены задачи устойчивости упругих балок под действием периодических нагрузок.

## Введение

Исследуется неустойчивость (параметрический резонанс) линейной колебательной системы с периодическими коэффициентами. Выделены три независимых параметра, описывающие частоту и амплитуду периодического воздействия и величину диссипативных сил. Параметры амплитуды и диссипации предполагаются малыми. Для произвольной матрицы периодического воздействия и положительно определенной матрицы диссипативных сил получены общие выражения для областей основного и комбинационного резонансов.

Выделены два частных случая матрицы периодического воздействия, часто встречающихся в приложениях: симметрической матрицы и стационарной матрицы, умноженной на скалярную периодическую функцию. Доказано, что в первом случае система подвержена лишь основному и комбинационному резонансам суммарного типа, а во втором случае – основному резонансу и комбинационному резонансу суммарного или разностного типа в зависимости от знака некоторой константы. Показано, что в обоих случаях области резонанса в первом приближении представляют собой конусы в трехмерном пространстве параметров. Полученные соотношения позволяют проанализировать влияние возрастания частот собственных колебаний и номера резонанса на области неустойчивости. В частности, показано, что с увеличением номера резонанса конус неустойчивости сужается, а ось конуса выпрямляется. В большинстве работ по

параметрическому резонансу делается предположение о равенстве нулю среднего по периоду значения периодической матрицы. Настоящая работа свободна от этого ограничения. Наличие ненулевого среднего значения существенно влияет на область резонанса, отклоняя оси конусов от вертикали.

Формулы для областей комбинационного резонанса содержат две частоты и две соответствующие формы колебаний невозмущенной консервативной системы, отвечающие резонансной частоте возбуждения. В случае основного резонанса требуются лишь одна частота и форма колебаний. Это позволяет трактовать параметрический резонанс как парное взаимодействие частот (форм) колебаний консервативной системы при периодическом воздействии с определенной частотой.

В случае нерезонансных частот возбуждения малые диссипативные силы стабилизируют систему, то есть делают ее асимптотически устойчивой. При заданных диссипативных силах граница области параметрического резонанса в первом приближении описывается гиперболой; найдены минимальные (критические) значения амплитуды периодического воздействия, при которых возникает резонанс, и соответствующие частоты возбуждения. Выведены формулы для резонансных зон при стремлении к нулю параметра диссипации, и обсуждается известный парадокс дестабилизации системы бесконечно малыми диссипативными силами.

В качестве примера развитой теории рассмотрена задача о динамической устойчивости плоской формы изгиба балки, нагруженной периодическими моментами. Найдены области комбинационного резонанса суммарного типа, проведено сравнение с численным решением, свидетельствующее о высокой точности приближенного решения.

Из предшествующих исследований отметим, прежде всего, книгу [1], в которой рассматривались системы, близкие к гамильтоновым, а также [2, 3, 4, 5], в которых изучались системы, приведенные к нормальным координатам консервативной системы (требуя знание матрицы перехода). Настоящая работа отличается от предыдущих постановкой задачи, методом исследования, полученными результатами, а также сравнительной простотой и компактностью изложения.

Метод исследования областей параметрического резонанса, представленный в данной работе, является строгим. Он основан на анализе поведения мультипликаторов и использует производные матрицы монодромии по параметрам [6, 7]. Система с одной степенью свободы и тремя независимыми параметрами рассматривалась в [8].

## 1 Постановка задачи

Рассмотрим линейную колебательную систему с периодическими коэффициентами

$$M\ddot{y} + \gamma D\dot{y} + (C + \delta B(\Omega t))y = 0 \quad (1)$$

где  $M$ ,  $D$  и  $C$  – симметрические положительно определенные матрицы масс, демпфирования и потенциальных сил размерности  $m \times m$ ;  $B(\tau)$  – кусочно-непрерывная  $2\pi$ -

периодическая матрица параметрического возбуждения;  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$  – вектор обобщенных координат; точкой обозначается производная по времени  $t$ .

Исследуем устойчивость тривиального решения  $\mathbf{y} \equiv 0$  системы (1) в зависимости от вектора трех параметров  $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ , описывающих величину диссипативных сил, амплитуду и частоту периодического возбуждения в предположении о малости величин  $\gamma$  и  $|\delta|$ . Это предположение отвечает близости системы (1) к автономной консервативной системе. На параметры  $\gamma$  и  $\Omega$  накладываются естественные ограничения  $\gamma \geq 0, \Omega > 0$ .

Запишем (1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\Omega t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{y}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(\Omega t) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{C} + \delta\mathbf{B}(\Omega t)) & -\gamma\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица  $\mathbf{A}(\Omega t)$  размерности  $2m \times 2m$  является вещественной периодической функцией с периодом  $T = 2\pi/\Omega$ . Матрицантом системы (2) называется матрица  $\mathbf{X}(t)$  размерности  $2m \times 2m$ , удовлетворяющая уравнению и начальным условиям

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\Omega t)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{I} \quad (3)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Значение матрицанта при  $t = T$  называется матрицей монодромии  $\mathbf{F}$  [1]

$$\mathbf{F} = \mathbf{X}(T) \quad (4)$$

Согласно известной теореме о зависимости решения дифференциального уравнения от параметров, матрица монодромии является гладкой функцией вектора параметров  $\mathbf{p}$ . Собственные значения (мультипликаторы)  $\rho$  и собственные векторы  $\mathbf{w}$  матрицы монодромии определяются из уравнения

$$\mathbf{F}\mathbf{w} = \rho\mathbf{w} \quad (5)$$

Система (2) является асимптотически устойчивой, если все мультипликаторы лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости  $|\rho| < 1$ . Наличие хотя бы одного мультипликатора вне единичного круга  $|\rho| > 1$  означает неустойчивость системы [1].

При  $\gamma = \delta = 0$  система (1) является консервативной

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{C}\mathbf{y} = 0 \quad (6)$$

Отыскивая решение уравнения (6) в виде  $\mathbf{y} = \mathbf{u} \exp(i\omega t)$ , приходим к задаче на собственные значения

$$\mathbf{C}\mathbf{u} = \omega^2\mathbf{M}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} = 1 \quad (7)$$

где второе равенство является условием нормировки. Из этих уравнений определяются действительные величины: собственные частоты  $\omega$  и формы колебаний  $\mathbf{u}$ . Предположим, что все частоты  $0 < \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_m$  различны. Обозначим соответствующие собственные векторы через  $\mathbf{u}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ).

Матрицант и матрица монодромии (3), (4) при  $\gamma = \delta = 0$  имеют вид [1]

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{A}_0 t), \quad \mathbf{F}_0 = \exp(\mathbf{A}_0 T), \quad \mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_0$ , а также соответствующие правые и левые собственные векторы  $\mathbf{w}$  и  $\mathbf{v}$  определяются соотношениями

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{A}_0 = \lambda \mathbf{v}^T, \quad \mathbf{v}^T \mathbf{w} = 1 \quad (9)$$

где последнее равенство представляет собой условие нормировки. Из соотношений (7)–(9) следует, что собственные значения матрицы  $\mathbf{A}_0$  равны  $\lambda_j, \bar{\lambda}_j = \pm i\omega_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ). Правые и левые собственные векторы, отвечающие  $\lambda_j = i\omega_j$ , имеют вид

$$\mathbf{w}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_j \\ i\omega_j \mathbf{u}_j \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{M}\mathbf{u}_j/2 \\ \mathbf{M}\mathbf{u}_j/(2i\omega_j) \end{pmatrix} \quad (10)$$

Из теории матриц [1] известно, что мультипликаторы матрицы монодромии  $\mathbf{F}_0 = \exp(\mathbf{A}_0 T)$  равны

$$\rho_j, \bar{\rho}_j = \exp(\pm i\omega_j T) = \exp(\pm i2\pi\omega_j/\Omega), \quad j = 1, \dots, m \quad (11)$$

причем собственные векторы для матриц  $\mathbf{F}_0$  и  $\mathbf{A}_0$  совпадают. Таким образом, векторы  $\mathbf{w}_j$  и  $\mathbf{v}_j$  из (10) являются правым и левым собственными векторами, отвечающими мультипликатору  $\rho_j$  матрицы монодромии  $\mathbf{F}_0$  и удовлетворяющими соотношениям

$$\mathbf{F}_0 \mathbf{w}_j = \rho_j \mathbf{w}_j, \quad \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_0 = \rho_j \mathbf{v}_j^T, \quad \mathbf{v}_j^T \mathbf{w}_j = 1 \quad (12)$$

Комплексно сопряженным мультипликаторам  $\bar{\rho}_j = \exp(-i\omega_j T)$  отвечают комплексно сопряженные собственные векторы  $\bar{\mathbf{w}}_j$  и  $\bar{\mathbf{v}}_j$ .

Поскольку все мультипликаторы  $\rho_j$  из (11) лежат на единичной окружности  $|\rho| = 1$ , устойчивость системы (1) при ненулевых  $\gamma$  и  $\delta$  определяется возмущениями всех мультипликаторов  $\rho_j$ . В случае общего положения все  $\rho_j$  различны. Кратные мультипликаторы возникают при критических значениях частоты  $\Omega$ , равных

$$\Omega = 2\omega_j/k, \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$\Omega = (\omega_j \pm \omega_l)/k, \quad i, j = 1, \dots, m; \quad j > l; \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Случаи (13) и (14) называются соответственно основным (простым) и комбинационным резонансами [1] и отвечают наличию двукратных мультипликаторов  $\rho = (-1)^k$  и  $\rho = \exp(i\omega_j T)$  соответственно. Эти мультипликаторы являются полупростыми, так как им отвечают два линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{w}}_j$  в случае (13) и  $\mathbf{w}_j, \bar{\mathbf{w}}_l$  (либо  $\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_l$  при отрицательном знаке) в случае (14). Близость частоты  $\Omega$  к критической может привести к неустойчивости системы. Поэтому критические случаи представляют особый интерес. Мультипликаторы более высокой кратности возникают только при наличии рациональных соотношений между величинами  $\omega_j \pm \omega_l$  ( $j, l = 1, \dots, m; j \geq l$ ), где  $j \neq l$  в случае  $\omega_j - \omega_l$ . Эти случаи не являются типичными и не будут рассматриваться в настоящей работе, хотя могут быть исследованы аналогично.

## 2 Поведение простых мультипликаторов

Рассмотрим простой мультипликатор  $\rho_j = \exp(i\omega_j T_0)$  ( $T_0 = 2\pi/\Omega_0$ ), отвечающий матрице монодромии  $\mathbf{F}_0$  при  $\gamma = \delta = 0$  и некотором значении  $\Omega = \Omega_0$ . Случай мультипликатора  $\bar{\rho}_j = \exp(-i\omega_j T_0)$  исследуется аналогично. Как известно, простой мультипликатор гладкого семейства матриц  $\mathbf{F}(\mathbf{p})$  является гладкой функцией вектора параметров  $\mathbf{p}$ . Производная мультипликатора  $\rho_j$  по параметру  $p_k$  имеет вид [9]

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial p_k} = \mathbf{v}_j^T \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} \mathbf{w}_j \quad (15)$$

где производные матрицы монодромии определяются выражением [6, 7]

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_k} = \mathbf{F} \int_0^{T_0} \mathbf{X}^{-1} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{X} dt + \mathbf{A}(T_0) \mathbf{F} \frac{\partial T}{\partial p_k} \quad (16)$$

Используя формулы (8), (9), (12), (16), запишем (15) в виде

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial p_k} = \rho_j \left( \int_0^{T_0} \mathbf{v}_j^T \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial p_k} \mathbf{w}_j dt + i\omega_j \frac{\partial T}{\partial p_k} \right) \quad (17)$$

Здесь использовалось следующее свойство: матрица  $\mathbf{X} = \exp(\mathbf{A}_0 t)$  имеет собственное значение  $\exp(i\omega_j t)$ , которому отвечают правый и левый собственные векторы  $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j$ . Подставив в (17) явный вид матрицы  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\Omega t)$  из (2) и векторы  $\mathbf{w}_j, \mathbf{v}_j$  из (10), найдем производные мультипликатора по компонентам вектора параметров  $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$  в точке  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_j}{\partial \gamma} &= -\rho_j \pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j / \Omega_0 \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial \delta} &= i\rho_j \pi c_0^{(jj)} / (\omega_j \Omega_0), \quad c_0^{(jj)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_j d\tau \\ \frac{\partial \rho_j}{\partial \Omega} &= -i2\rho_j \pi \omega_j / \Omega_0^2 \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда в окрестности точки  $\mathbf{p}_0$  мультипликатор  $\rho_j(\mathbf{p})$  может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \rho_j(\mathbf{p}) &= \rho_j + \frac{\partial \rho_j}{\partial \gamma} \gamma + \frac{\partial \rho_j}{\partial \delta} \delta + \frac{\partial \rho_j}{\partial \Omega} (\Omega - \Omega_0) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) = \\ &= \rho_j \left( 1 - \frac{\pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j}{\Omega_0} \gamma + \frac{\pi c_0^{(jj)}}{\omega_j \Omega_0} \delta i - \frac{2\pi \omega_j}{\Omega_0^2} (\Omega - \Omega_0) i \right) + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) \end{aligned} \quad (19)$$

Из соотношения (19) следует выражение для первого приближения абсолютной величины мультипликатора

$$|\rho_j(\mathbf{p})| = 1 - \frac{\pi \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j}{\Omega_0} \gamma + o(\|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|) \quad (20)$$

Из предположения о положительной определенности матрицы диссипативных сил  $\mathbf{D}$  следует отрицательность коэффициента при  $\gamma$  в (20). Следовательно, условием устойчивости  $|\rho_j| < 1$  в первом приближении является неравенство

$$\gamma > 0 \quad (21)$$

Положим  $\gamma = 0$  и рассмотрим случай, когда  $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$  или  $\mathbf{B}(\tau_0 + \tau) = \mathbf{B}(\tau_0 - \tau)$ , где  $\tau_0$  – некоторое число. Тогда система (1) при  $\gamma = 0$  является гамильтоновой или обратимой соответственно. В этом случае характеристический многочлен матрицы монодромии возвратный [1], т.е., если  $\rho$  мультипликатор, то  $1/\rho$  также является мультипликатором. Следовательно, при  $\gamma = 0$  и малых  $|\delta|$  и  $|\Omega - \Omega_0|$  простые мультипликаторы остаются на единичной окружности. Поэтому плоскость  $\gamma = 0$  является границей области асимптотической устойчивости в окрестности точки  $\mathbf{p}_0$ . Таким образом, введение малых диссипативных сил приводит к сдвигу всех простых мультипликаторов внутрь единичного круга при малых значениях  $|\delta|$  и  $|\Omega - \Omega_0|$ . Это означает, что малые диссипативные силы стабилизируют систему (1) с малой амплитудой параметрического возбуждения при некритических значениях частоты  $\Omega$ .

### 3 Области параметрического резонанса

Неустойчивость может возникать при частотах  $\Omega$ , близких к критическим значениям (13) и (14). При этих условиях на единичной окружности появляются двукратные мультипликаторы. Пусть частота параметрического возбуждения  $\Omega = \Omega_0$  удовлетворяет соотношению

$$\omega_j + \omega_l = k\Omega_0 \quad (22)$$

для некоторых частот  $\omega_j$  и  $\omega_l$  консервативной системы (6) и некоторого натурального числа  $k$ . Заметим, что условие (22) включает случай основного резонанса (13) при  $j = l$  и случай суммарного комбинационного резонанса (14) при  $j > l$ . Критические частоты  $\Omega_0 = (\omega_j - \omega_l)/k$ , отвечающие разностному комбинационному резонансу, будут рассмотрены ниже по аналогии.

Условие (22) означает, что два мультипликатора совпадают

$$\rho_j = \bar{\rho}_l = \exp(i\omega_j T_0), \quad T_0 = 2\pi/\Omega_0 \quad (23)$$

Для удобства обозначим  $\rho_0 = \rho_j = \bar{\rho}_l$ . При  $j = l$  (основной резонанс) имеем  $\rho_0 = (-1)^k$ , а при  $j > l$  (комбинационный резонанс)  $\rho_0$  – комплексный мультипликатор. Во втором случае имеется также двукратный мультипликатор  $\bar{\rho}_0$ . Однако в силу симметрии мультипликаторов относительно вещественной оси достаточно исследовать поведение одного из них. Двукратный мультипликатор  $\rho_0$  является полупростым, поскольку ему отвечают два линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{w}_j$  и  $\bar{\mathbf{w}}_l$ , а также два левых собственных вектора  $\mathbf{v}_j$  и  $\bar{\mathbf{v}}_l$  из (10).

При возмущении параметров происходит бифуркация двукратного мультипликатора  $\rho_0$ , соответствующего точке  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$ , на два простых. Рассматривая возмущения параметров вдоль луча  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{e}\varepsilon$  ( $\varepsilon \geq 0$ ) с направлением  $\mathbf{e}$ , расщепление полупростого мультипликатора описывается выражением

$$\rho = \rho_0(1 + \mu\varepsilon + o(\varepsilon)) \quad (24)$$

Два значения величины  $\mu$  находятся из квадратного уравнения [9]

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j - \rho_0 \mu & \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l \\ \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j & \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l - \rho_0 \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_1 = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{p}_0 + \mathbf{e}\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \gamma} e_1 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \delta} e_2 + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \Omega} e_3$$

где производные вычисляются при  $\varepsilon = 0$  и  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$  соответственно. Уравнение (25) можно записать в виде

$$\mu^2 + (x_1 + ix_2)\mu + y_1 + iy_2 = 0 \quad (26)$$

$$x_1 + ix_2 = -(\mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j + \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l) / \rho_0 \quad (27)$$

$$y_1 + iy_2 = (\mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l - \mathbf{v}_j^T \mathbf{F}_1 \bar{\mathbf{w}}_l \bar{\mathbf{v}}_l^T \mathbf{F}_1 \mathbf{w}_j) / \rho_0^2$$

Неравенство  $|\rho| < 1$  с учетом (24) принимает вид

$$|\rho| = |\rho_0(1 + \mu\varepsilon + o(\varepsilon))| = 1 + \varepsilon \operatorname{Re} \mu + o(\varepsilon) < 1 \quad (28)$$

Следовательно, условие устойчивости в первом приближении сводится к неравенству

$$\operatorname{Re} \mu < 0 \quad (29)$$

для обоих корней квадратного уравнения (26). Отсюда с использованием условий типа Рауса–Гурвица для полинома второго порядка с комплексными коэффициентами (26) имеем [1]

$$x_1 > 0, \quad (x_1 y_1 + x_2 y_2) x_1 - y_2^2 > 0 \quad (30)$$

Подставим в (30) величины  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y_1$ ,  $y_2$  из (27). В результате элементарных преобразований с использованием выражений для собственных векторов (10), производных матрицы монодромии (16) и соотношений (2), (8), (9), (12), (22), условия устойчивости (30) запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} \pi(\eta_j + \eta_l) e_1 / \Omega_0 &> 0 \\ \pi^4 [e_1^2 (\eta_j + \eta_l)^2 (\eta_j \eta_l e_1^2 - \xi_1 e_2^2 + k^2 (e_3 + \sigma_+ e_2 / k)^2) - \\ - (\xi_2 e_2^2 + k(\eta_j - \eta_l)(e_3 + \sigma_+ e_2 / k) e_1)^2] / \Omega_0^4 &> 0 \end{aligned} \quad (31)$$

где коэффициенты  $\eta_j$ ,  $\eta_l$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $\sigma_+$  являются вещественными величинами и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \eta_j &= \mathbf{u}_j^T \mathbf{D} \mathbf{u}_j, \quad \eta_l = \mathbf{u}_l^T \mathbf{D} \mathbf{u}_l \\ \xi_1 + i\xi_2 &= c_{-k}^{(jl)} c_k^{(lj)} / (\omega_j \omega_l), \quad c_k^{(lj)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_l^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_j e^{ik\tau} d\tau \\ \sigma_+ &= -(\omega_j c_0^{(ll)} + \omega_l c_0^{(jj)}) / (2\omega_j \omega_l) \end{aligned} \quad (32)$$

Заметим, что константы  $\eta_j$  и  $\eta_l$  положительны в силу предположения о положительной определенности матрицы диссипативных сил  $\mathbf{D}$ . Выразив вектор  $\mathbf{e}$  из соотношения  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{e}\varepsilon$ , получим

$$\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) / \varepsilon = (\gamma, \delta, \Delta\Omega) / \varepsilon, \quad \Delta\Omega = \Omega - \Omega_0 \quad (33)$$

Подставив (33) в (31) и сократив в полученных неравенствах положительные множители, найдем уравнение для первого приближения области устойчивости

$$\gamma > 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2(\eta_j + \eta_l)^2 [\eta_j \eta_l \gamma^2 - \xi_1 \delta^2 + k^2(\Delta\Omega + \sigma_+ \delta/k)^2] - \\ & - [\xi_2 \delta^2 + k(\eta_j - \eta_l)(\Delta\Omega + \sigma_+ \delta/k)\gamma]^2 > 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Первое условие (34) означает наличие диссипативных сил. Второе условие определяет форму области устойчивости в пространстве трех параметров  $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ .

Наконец, рассмотрим критическую частоту  $\Omega_0$ , удовлетворяющую условию

$$\omega_j - \omega_l = k\Omega_0, \quad j > l \quad (36)$$

при некотором натуральном числе  $k$  (разностный комбинационный резонанс). В этом случае имеется двукратный мультипликатор  $\rho_0 = \rho_j = \rho_l$ , которому отвечают два линейно независимых собственных вектора  $\mathbf{w}_j$  и  $\mathbf{w}_l$  (10). Проводя аналогичные выкладки и заменяя  $\omega_l$  на  $-\omega_l$  во всех соотношениях, определим в первом приближении область устойчивости в окрестности точки  $\mathbf{p}_0 = (0, 0, \Omega_0)$  в виде

$$\gamma > 0 \quad (37)$$

$$\begin{aligned} & \gamma^2(\eta_j + \eta_l)^2 [\eta_j \eta_l \gamma^2 + \xi_1 \delta^2 + k^2(\Delta\Omega + \sigma_- \delta/k)^2] - \\ & - [\xi_2 \delta^2 - k(\eta_j - \eta_l)(\Delta\Omega + \sigma_- \delta/k)\gamma]^2 > 0 \end{aligned} \quad (38)$$

где вещественные коэффициенты  $\eta_j$ ,  $\eta_l$ ,  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  определяются соотношениями (32), а вещественная константа  $\sigma_-$  равна

$$\sigma_- = (\omega_j c_0^{(ll)} - \omega_l c_0^{(jj)}) / (2\omega_j \omega_l) \quad (39)$$

Замена знака неравенства в (35) и (38) на равенство дает в первом приближении уравнение границы области устойчивости.

Проанализируем геометрию областей неустойчивости (параметрического резонанса) в следующих, наиболее часто встречающихся случаях:

а) Пусть матрица параметрического возбуждения  $\mathbf{B}(\Omega t)$  симметрическая. Тогда величины  $c_{-k}^{jl}$  и  $c_k^{lj}$  являются комплексно сопряженными. Следовательно,  $\xi_2 = 0$ , а величина  $\xi_1$  в (32) имеет вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_{-k}^{(jl)} c_k^{(lj)} / (\omega_j \omega_l) = [(a_k^{(jl)})^2 + (b_k^{(jl)})^2] / (4\omega_j \omega_l) \geq 0 \\ a_k^{(jl)} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_l \cos(k\tau) d\tau, \quad b_k^{(jl)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}_l \sin(k\tau) d\tau \end{aligned} \quad (40)$$

В случае основного и суммарного комбинационного резонансов (22) из условия устойчивости (35) после сокращения положительного множителя получим уравнение области параметрического резонанса

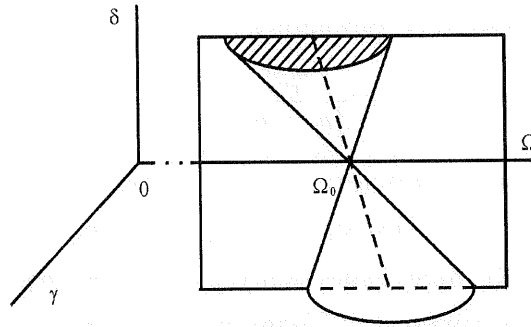
$$\eta_j \eta_l \gamma^2 - \xi_1 \delta^2 + 4k^2 \frac{\eta_j \eta_l}{(\eta_j + \eta_l)^2} (\Delta\Omega + \sigma_+ \delta/k)^2 \leq 0 \quad (41)$$



Так как величины  $\eta_j, \eta_l > 0$  и  $\xi_1 \geq 0$ , то условие (41) при  $\xi_1 \neq 0$  определяет внутреннюю часть конуса в трехмерном пространстве параметров  $\mathbf{p} = (\gamma, \delta, \Omega)$ , фиг. 1. Ось конуса, образованная центрами сечений конуса плоскостями  $\delta = const$ , определяется уравнениями

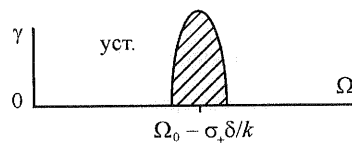
$$\gamma = 0, \quad \Omega - \Omega_0 + \sigma_+ \delta/k = 0 \quad (42)$$

В случае параметрического возбуждения с нулевым средним  $c_0^{(jj)} = c_0^{(ll)} = 0$  имеем  $\sigma_+ = 0$  и, следовательно, ось конуса параллельна оси  $0\delta$ . Область устойчивости соответствует внешней части конуса.



Фиг. 1

При увеличении числа  $k$ , определяющего номер резонанса (22), и фиксированных  $\omega_j$  и  $\omega_l$  коэффициент  $\xi_1$  убывает как квадрат модуля коэффициента ряда Фурье. В результате конус неустойчивости быстро сужается с увеличением  $k$ , а ось конуса (42) выпрямляется. Сечение конуса плоскостью  $\delta = const$  (при фиксированной амплитуде параметрического возбуждения) представляет собой эллипс, который при увеличении  $k$  сплющивается в направлении оси  $O\Omega$ , фиг. 2. Это связано с наличием множителя  $k^2$  в (41). Так как знаменатель в соотношениях (32) содержит произведение частот  $\omega_j \omega_l$ , то с увеличением  $j$  и  $l$  характерно уменьшение величин  $\xi_1$  и  $|\sigma_+|$ . В результате конус неустойчивости сужается, а его ось выпрямляется при увеличении  $j$  и  $l$ , то есть при резонансах на более высоких частотах.



Фиг. 2

В случае, когда периодическая матрица-функция  $\mathbf{B}(\tau)$  имеет конечное число членов в разложении Фурье, то начиная с некоторого  $k$  коэффициент  $\xi_1$  равен нулю. Это означает вырождение первого приближения области параметрического резонанса (41) в прямую (42). Для анализа формы области параметрического резонанса в этом случае необходимо рассмотреть приближения более высокого порядка. Такого рода вырождения хорошо известны для уравнения Матье, где граница области параметрического

резонанса имеет точки возврата различного порядка [10]. Из настоящих результатов следует, что такое вырождение имеет место и в трехмерном пространстве параметров при наличии диссипативных сил (область параметрического резонанса отсутствует либо образует узкие клинья с касательными лучами (42) при  $\delta > 0$  и  $\delta < 0$ ).

Таким образом, явный вид первого приближения области параметрического резонанса (41) с коэффициентами (32) дает ясное представление о влиянии на устойчивость диссипативных сил, амплитуды и частоты параметрического возбуждения, а также чисел  $j$ ,  $l$  и  $k$ .

В случае разностного комбинационного резонанса (36) из условия устойчивости (38) получим область параметрического резонанса

$$\eta_j \eta_l \gamma^2 + \xi_1 \delta^2 + 4k^2 \frac{\eta_j \eta_l}{(\eta_j + \eta_l)^2} (\Delta\Omega + \sigma_- \delta/k)^2 \leq 0 \quad (43)$$

Заметим, что неравенство (43) отличается от (41) только знаком при втором слагаемом и коэффициентом  $\sigma_-$  вместо  $\sigma_+$ . Поэтому при  $\xi_1 \neq 0$  (невыврожденный случай) лишь одно из неравенств (41), (43) определяет конус, а другое неравенство дает точку  $\gamma = \delta = \Delta\Omega = 0$  (отсутствие резонанса). Следовательно, при положительном  $\xi_1$  область разностного комбинационного резонанса отсутствует. Отметим, что для гамильтоновых систем (без диссипации) отсутствие комбинационных резонансов разностного типа было известно ранее [1].

б) Пусть матрица параметрического возбуждения имеет вид

$$\mathbf{B}(\Omega t) = \varphi(\Omega t) \mathbf{B}_0 \quad (44)$$

где  $\mathbf{B}_0$  – произвольная матрица, не зависящая от времени,  $\varphi(\tau)$  –  $2\pi$ -периодическая скалярная функция. В этом случае произведение  $c_{-k}^{jl} c_k^{lj}$  в (32) является действительной величиной. Следовательно,  $\xi_2 = 0$ , а коэффициент  $\xi_1$  равен

$$\begin{aligned} \xi_1 &= c_{jl} [\alpha_k^2 + \beta_k^2] / (4\omega_j \omega_l), \quad c_{jl} = \mathbf{u}_j^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_l \mathbf{u}_l^T \mathbf{B}_0 \mathbf{u}_j \\ \alpha_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \cos(k\tau) d\tau, \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \sin(k\tau) d\tau \end{aligned} \quad (45)$$

Условие устойчивости (35) в случае основного и суммарного комбинационного резонансов (22) приводит к области параметрического резонанса (41). В случае разностного комбинационного резонанса (36) область неустойчивости имеет вид (43). В невырожденном случае  $\xi_1 \neq 0$  знак  $\xi_1$  совпадает со знаком  $c_{jl}$ . В случае основного резонанса  $c_{jj} \geq 0$ , поэтому при  $c_{jj} \neq 0$  существует область основного резонанса, описываемая конусом (41). А наличие областей комбинационного резонанса зависит от знака  $c_{jl}$ : при  $c_{jl} > 0$  существует только область суммарного комбинационного резонанса, а при  $c_{jl} < 0$  имеется лишь область разностного комбинационного резонанса. Форма областей параметрического резонанса (конусов) зависит от номера резонанса  $k$  и частот  $\omega_j$ ,  $\omega_l$  так же, как и в описанном выше случае а). При  $c_{jl} = 0$  область резонанса отсутствует либо вырождена (первое приближение представляет собой прямую).

Полученные результаты сформулируем в виде следующего утверждения.

**Теорема 1.** Система (1) при симметрической матрице  $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$  подвержена лишь основным резонансам (13) и комбинационным резонансам суммарного типа (14). В случае матрицы  $\mathbf{B}(\tau) = \varphi(\tau)\mathbf{B}_0$ , где  $\varphi(\tau)$  – периодическая скалярная функция, а  $\mathbf{B}_0$  – стационарная матрица, реализуются основные резонансы (13) и в зависимости от знака константы  $c_{ji}$  в (45) либо суммарные комбинационные резонансы ( $c_{ji} > 0$ ), либо разностные комбинационные резонансы ( $c_{ji} < 0$ ). Области основного и суммарного комбинационного резонансов описываются конусами (41), а области разностного комбинационного резонанса – конусами (43) в трехмерном пространстве параметров  $\gamma, \delta, \Omega$ .

Рассмотренные выше случаи а) и б) соответствуют наиболее распространенным видам параметрического возбуждения. В других случаях можно воспользоваться условиями устойчивости (35) и (38) для построения трехмерных областей параметрического резонанса. Условия (35) определяют область параметрического резонанса (41) (конус) при  $\xi_1 > 0, \xi_2 = 0$ , а условия (38) описывают область резонанса (43) при  $\xi_1 < 0, \xi_2 = 0$ . Условия на коэффициенты системы, гарантирующие выполнение этих соотношений, были сформулированы в [1].

## 4 Влияние диссипативных сил на области параметрического резонанса

Зафиксируем значение параметра  $\gamma > 0$  и рассмотрим случай, когда выполняется условие  $\xi_2 = 0$ , например, случаи а) или б) из предыдущего раздела. Тогда области параметрического резонанса в первом приближении имеют вид (41) и (43). В зависимости от знака величины  $\xi_1$  область параметрического резонанса либо отсутствует, либо заключена внутри гипербол (сечений конуса плоскостью  $\gamma = const$ ) на плоскости двух параметров  $\delta, \Omega$ , фиг. 3. Асимптоты гипербол определяются соотношениями

$$|\xi_1|^{1/2}\delta \pm 2k \frac{(\eta_j \eta_l)^{1/2}}{\eta_j + \eta_l} (\Delta\Omega + \sigma_s \delta/k) = 0 \quad (46)$$

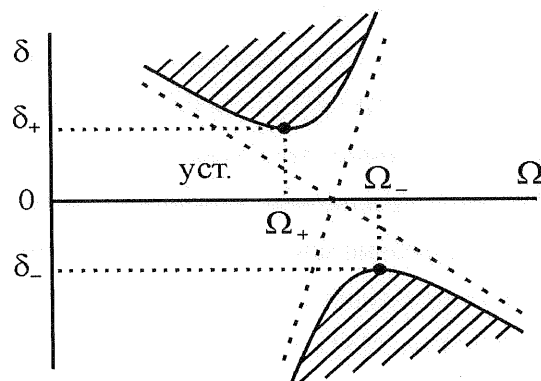
где индекс  $s$  означает  $+$  или  $-$  для резонансов (22) и (36) соответственно. Отметим, что  $\sigma_+ = \sigma_- = 0$  в случае равенства нулю среднего значения матрицы  $\mathbf{B}(\Omega t)$  на периоде. Увеличение параметра  $\gamma$ , определяющего величину диссипативных сил, приводит к уменьшению области параметрического резонанса на плоскости  $\delta, \Omega$ . Используя выражения (41) или (43) в зависимости от типа резонанса, найдем в первом приближении минимальную (критическую) амплитуду возбуждения  $|\delta|$ , при которой возможен параметрический резонанс

$$\delta_{\pm} = \pm |\eta_j \eta_l / \xi_1|^{1/2} \gamma \quad (47)$$

Величины  $\delta_{\pm}$  отвечают соответственно значениям частоты возбуждения

$$\Omega_{\pm} = \Omega_0 - \sigma_s \delta_{\pm} / k \quad (48)$$

где  $\Omega_0$  – резонансная частота (22) или (36), фиг. 3.



Фиг. 3

**Теорема 2.** Граница области параметрического резонанса при малых фиксированных значениях параметра диссипации  $\gamma > 0$  в случае  $\xi_2 = 0$  описывается в первом приближении гиперболой (41), соответствующей основному и суммарному комбинационному резонансам ( $\xi_1 > 0$ ), и гиперболой (43), соответствующей разностному комбинационному резонансу ( $\xi_1 < 0$ ). Наименьшие (критические) значения амплитуды возбуждения и соответствующие частоты определяются соотношениями (47) и (48).

Используя соотношения (41), (43), исследуем предел области параметрического резонанса при  $\gamma \rightarrow +0$ , что означает введение бесконечно малой диссипации. В первом приближении для случая основного резонанса (22) ( $j = l$ ) данная область имеет вид

$$\xi_1 \delta^2 > k^2 (\Delta\Omega + \sigma_+ \delta/k)^2 \quad (49)$$

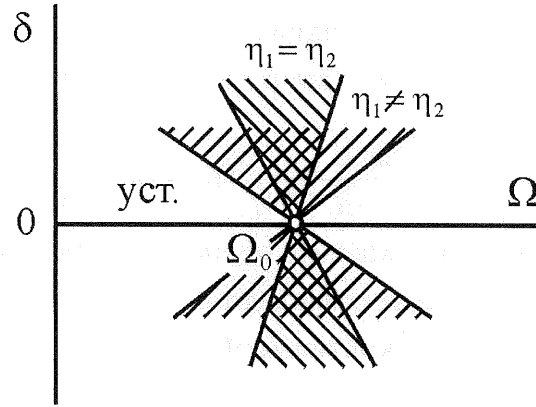
В случае суммарного (22) ( $s = +$ ) или разностного (36) ( $s = -$ ) комбинационного резонансов эта область определяется соотношением

$$s\xi_1 \delta^2 > 4k^2 \frac{\eta_j \eta_l}{(\eta_j + \eta_l)^2} (\Delta\Omega + \sigma_s \delta/k)^2 \quad (50)$$

Из (50) видно, что область комбинационного резонанса в пределе  $\gamma \rightarrow +0$  зависит от соотношения  $\eta_j/\eta_l$  величин диссипативных сил, относящихся к  $j$ -ой и  $l$ -ой формам собственных колебаний невозмущенной системы. При  $\eta_j = \eta_l$  область комбинационного резонанса минимальна, а при  $\eta_j \ll \eta_l$  или  $\eta_j \gg \eta_l$  – максимальна и составляет два вертикальных угла, величина которых стремится к  $\pi$  при  $\eta_j/\eta_l \rightarrow 0$  или  $\eta_j/\eta_l \rightarrow \infty$ , фиг. 4.

Положим  $\gamma = 0$  и рассмотрим случай  $\mathbf{B}(\tau) = \mathbf{B}^T(\tau)$  или  $\mathbf{B}(\tau_0 + \tau) = \mathbf{B}(\tau_0 - \tau)$ , когда характеристический многочлен матрицы монодромии является возвратным [1]. В этом случае система устойчива (не асимптотически) тогда и только тогда, когда все мультипликаторы полупростые (число собственных векторов равно алгебраической кратности мультипликатора) и лежат на единичной окружности. Используя (24), (26) найдем условие устойчивости для резонансов (22), (36) в виде

$$\operatorname{Re} \mu = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad x_2^2 + 4y_1 > 0 \quad (51)$$



Фиг. 4

Подставив значения величин  $x_1, x_2, y_1, y_2$  из (27) и используя соотношения (2), (8)–(12), (16), а также предположение  $\xi_2 = 0$ , найдем первое приближение области параметрического резонанса

$$s\xi_1\delta^2 \geq k^2(\Delta\Omega + \sigma_s\delta/k)^2, \quad (52)$$

где  $s = +$  или  $-$  для резонансов (22) и (36) соответственно.

Из сравнения (49) с (52) видно, что область устойчивости для системы с бесконечно малой диссипацией ( $\gamma \rightarrow +0$ ) и системы без диссипации ( $\gamma = 0$ ) совпадают в случае основного резонанса (22) ( $j = l$ ). Однако в случае комбинационного резонанса области (50) и (52) совпадают только при  $\eta_j = \eta_l$  и различны при  $\eta_j \neq \eta_l$ , причем область комбинационного резонанса системы с диссипацией всегда шире. При равенстве нулю среднего значения периодической матрицы  $\mathbf{B}(\tau)$  величины  $\sigma_+ = 0$  и  $\sigma_- = 0$ . В этих случаях формулы (49), (50) и (52) совпадают с полученными ранее в [1]. Увеличение области комбинационного резонанса при введении бесконечно малой диссипации было обнаружено в различных периодических механических системах [1, 3, 11]. Этот эффект аналогичен известному парадоксу дестабилизации неконсервативной системы малыми диссипативными силами в случае автономных систем [12].

## 5 Система с одной степенью свободы

В случае одной степени свободы ( $m = 1$ ) систему (1) можно записать в виде уравнения Хилла с демпфированием

$$\ddot{y} + \gamma\dot{y} + \omega^2(1 + \delta\varphi(\Omega t))y = 0 \quad (53)$$

Наличие лишь одной собственной частоты  $\omega$  означает отсутствие комбинационных резонансов. Основные резонансы имеют место при  $\Omega_0 = 2\omega/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), а соответствующие трехмерные области основного резонанса (41) принимают вид

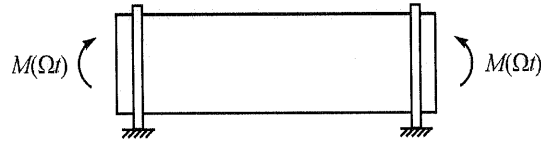
$$\gamma^2 - \frac{\alpha_k^2 + \beta_k^2}{4}\omega^2\delta^2 + k^2(\Delta\Omega - \frac{\alpha_0\omega}{2k}\delta)^2 \leq 0 \quad (54)$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  – коэффициенты Фурье функции  $\varphi(\tau)$  из (45). При фиксированных малых значениях  $\gamma > 0$  критические амплитуды и частоты возбуждения согласно (47), (48) равны

$$\delta_{\pm} = \pm \frac{2\gamma}{\omega(\alpha_k^2 + \beta_k^2)^{1/2}}, \quad \Omega_{\pm} = \Omega_0 + \frac{\alpha_0\omega}{2k} \delta_{\pm} \quad (55)$$

В случае  $\varphi(\tau) = \cos(\tau)$  (уравнение Матье с демпфированием) и  $k = 1$  выражения (54), (55) при некоторых преобразованиях совпадают с приближенными формулами для первой области основного резонанса и критической амплитуды, приведенными в [3].

## 6 Пример



Фиг. 5

Рассмотрим задачу В.В. Болотина [3, 13] о динамической устойчивости плоской формы изгиба балки, фиг. 5. Предполагается, что упругая балка оперта по концам и нагружена в плоскости наибольшей жесткости периодическими моментами  $M(\Omega t) = \delta\varphi(\Omega t)$ , где  $\varphi(\tau)$  –  $2\pi$ -периодическая функция. Изгибно-крутильные колебания, происходящие из этой плоскости, описываются уравнениями [13]

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \gamma m d_1 \frac{\partial w}{\partial t} + EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \delta\varphi(\Omega t) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \\ mr^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \gamma mr^2 d_2 \frac{\partial \theta}{\partial t} + \delta\varphi(\Omega t) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - GI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \quad (56)$$

где  $w(x, t)$  – поперечный прогиб балки,  $\theta(x, t)$  – угол поворота сечения,  $EJ$ ,  $GI$  – жесткости балки на изгиб и кручение соответственно,  $m$  – погонная масса балки,  $r$  – радиус инерции поперечного сечения,  $\gamma$  – параметр диссипативных сил (вязкого трения),  $d_1$ ,  $d_2$  – фиксированные константы, определяющие величину сил трения по отношению к изгибу и кручению. Граничные условия имеют вид

$$x = 0, l: \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \theta = 0 \quad (57)$$

где  $l$  – длина балки. Решение системы (56), (57) ищем в виде рядов [3]

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin(n\pi x/l), \quad \theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) \sin(n\pi x/l) \quad (58)$$

где  $W_n(t)$  и  $\Theta_n(t)$  – неизвестные функции времени. Подставив (58) в уравнения (56), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $W_n(t)$  и

$\Theta_n(t)$  вида (1), где

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \omega_{n1}^2 & 0 \\ 0 & \omega_{n2}^2 \end{pmatrix} \quad (59)$$

$$\mathbf{B}(\Omega t) = \varphi(\Omega t) \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\pi^2 n^2}{l^2 m} \\ -\frac{\pi^2 n^2}{r^2 l^2 m} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} W_n \\ \Theta_n \end{pmatrix}$$

Здесь  $\omega_{n1}$  и  $\omega_{n2}$  – собственные частоты изгибных и крутильных колебаний балки соответственно

$$\omega_{n1} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \quad \omega_{n2} = \frac{n\pi}{rl} \sqrt{\frac{GI}{m}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (60)$$

Собственные векторы, отвечающие частотам  $\omega_{n1}$  и  $\omega_{n2}$ , равны  $\mathbf{u}_{n1} = (1, 0)^T$  и  $\mathbf{u}_{n2} = (0, 1)^T$ .

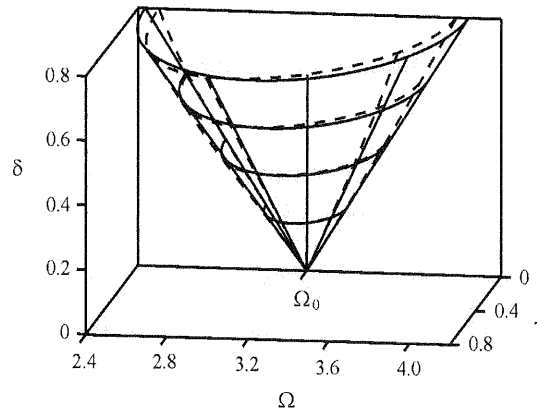
Исследуем устойчивость системы (1), (59) при некотором фиксированном значении  $n$ . Так как  $\mathbf{B}(\Omega t) = \varphi(\Omega t)\mathbf{B}_0$ , где  $\mathbf{B}_0$  – фиксированная матрица, то данная система относится к типу, рассмотренному в пункте б) раздела 3. Величины  $c_{jl}$ , вычисленные по формуле (45), имеют вид

$$c_{11} = c_{22} = 0, \quad c_{12} = \frac{\pi^4 n^4}{l^4 r^2 m^2} > 0 \quad (61)$$

Следовательно, области разностного комбинационного резонанса отсутствуют, а области основного резонанса вырождены (их анализ требует вычисления приближений более высокого порядка). Согласно (41) области суммарного комбинационного резонанса при частотах, близких к  $\Omega_0 = (\omega_{n1} + \omega_{n2})/k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), имеют вид

$$d_1 d_2 \gamma^2 - \frac{c_{12}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)}{4\omega_{n1}\omega_{n2}} \delta^2 + 4k^2 \frac{d_1 d_2}{(d_1 + d_2)^2} \Delta \Omega^2 \leq 0 \quad (62)$$

где величины  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  определены в (45).



Фиг. 6

Для проведения численных расчетов рассмотрим случай  $n = 1$ ,  $\varphi(\tau) = \cos(\tau)$ ,  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $\omega_{n1} = 1^{-1}$ ,  $\omega_{n2} = \sqrt{5}c^{-1}$ ,  $l^2 m = \pi^2/4$ ,  $r^2 = 4/\sqrt{5}^2$ . На фиг. 6 сплошными

линиями изображена граница области первого комбинационного резонанса ( $k = 1$ ) в первом приближении (62). Пунктирные линии обозначают границу области комбинационного резонанса, полученную численно путем вычисления матрицы монодромии при различных значениях параметров  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\Omega$ . Для интегрирования уравнений (3) использовался метод Рунге-Кутты. Из фиг. 6 следует хорошее соответствие точной (полученной численно) и приближенной областей комбинационного резонанса вплоть до значений амплитуды  $\delta \approx 0.8$ .

## Список литературы

- [1] Якубович В.А., Старжинский В.М. Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328с.
- [2] Hsu C.S. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom // J. Appl. Mech. 1963. Vol. 30. P. 367–372.
- [3] Вибрации в технике. Т. 1. Колебания линейных систем. Под редакцией В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 2-е изд. 1999. 504 с.
- [4] Шмидт Г. Параметрические колебания. М.: Мир, 1978. 336 с.
- [5] Челомей С.В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. РАН. 1980. Т. 252. № 2. С. 307–310.
- [6] Seyranian A.P., Solem F., Pedersen P. Stability analysis for multi-parameter linear periodic systems // Archive Appl. Mech. 1999. V. 69. No. 3. P. 160–180.
- [7] Майлыбаев А.А., Сейранян А.П. О границах области параметрического резонанса // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 6. С. 947–962.
- [8] Сейранян А.П. Области резонанса для уравнения Хилла с демпфированием // Доклады РАН. 2001. Т. 376. №1. С. 44–47.
- [9] Сейранян А.П. Анализ чувствительности собственных значений и развитие неустойчивости // Strojnický časopis. 1991. V. 42. No. 3. P. 193–208.
- [10] Арнольд В.И. Замечания о теории возмущений для задач типа Матье // УМН. 1983. Т. 38. Вып. 4. С. 189–203.
- [11] Iwatsubo T., Sugiyama Y., Ogino S. Simple and combination resonances of columns under periodic axial loads // J. Sound Vibration. 1974. Vol. 33. No. 2. P. 211–221.
- [12] Сейранян А.П. О стабилизации неконсервативных систем диссипативными силами и неопределенности критической нагрузки // Доклады РАН. 1996. Т. 348. №3. С. 323–326.
- [13] Bolotin V.V. Dynamic Stability of Structures // In: Non-linear Stability of Structures. Theory and Computational Techniques. (Kounadis A.N., Kratzig W.B., Eds.) Wien, New York: Springer, 1995. P. 3–72.