Физика открытых систем: I. Энтропия, информация и функционалы Ляпунова

Ю.Л.Климонтович

Физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Аннотация

Известны два, предложенные Клодом Шенноном определения понятия "информация". Одно из них совпадает с энтропией Больцмана и является фактически мерой неопределенности при статистическом описании. Второе выражается через разность значений безусловной и условной энтропий. Конкретизация второго определения позволяет ввести меру информации открытых систем в зависимости от значений управляющих параметров.

Выделен класс систем, для которых возможно равновесное состояние и имеет место закон сохранения информации и энтропии. Для равновесного состояния таких систем информация равна нулю, а энтропия максимальна. В процессах самоорганизации по мере удаления от равновесного состояния информация возрастает.

Выделен и другой класс систем, для которых равновесное состояние невозможно. Для них вводится понятие "нормы хаотичности" и рассматриваются два рода процессов самоорганизации. Дается соответствующее определение информации.

Установлена связь информации открытых систем с функционалами Ляпунова. Последние определяются либо через разность энтропий, либо свободных энергий состояний.

Общие определения энтропии и информации используются при анализе результатов медико-биологического исследования.

Содержание

1 Немного истории. Некоторые идеи и понятия Физики открытых систем

Людвиг Больцман назвал XIX столетие веком Дарвина. Он полагал, тем самым, что теория эволюции Дарвина, основанная на принципе естественного отбора, является наиболее значительным открытием прошлого века. Такой вывод может показаться неожиданным.

Действительно, XIX век очень богат великими открытиями в естествознании, в частности, в физике. Ведь XIX век это – век термодинамики, созданной в значительной мере трудами Сади Карно, Рудольфа Клаузиуса и Вильяма Томсона. Это век электромагнитной теории Майкла Фарадея и Джеймса Максвелла. В XIX веке были заложены и основы современной молекулярно-кинетической теории материи. Одним из ее основателей был сам Людвиг Больцман. Именно он предложил первое кинетическое уравнение для описания необратимых процессов в газах. Оно описывает, в частности, установление равновесного состояния в газе. Больцман впервые ввел и статистическое определение одной из основных характеристик термодинамики – энтропии. Именно он доказал знаменитую "H-теорему" о возрастании энтропии в замкнутой системе. Наконец, именно Больцман понял, что энтропия может служить мерой неопределенности (хаотичности) при статистическом описании. И все же именно Больцман определил XIX век, как век Дарвина. Тем самым на первое место он поставил принцип биологической эволюции.

В чем же дело? Во времена Больцмана не существовало каких-либо математических моделей биологической эволюции. Больцман, однако, был уверен, что развитая им теория временно́й эволюции газа будет обобщена и на открытые системы.

Таким образом, уже на пороге XX столетия стало ясно, что развитие теории неравновесных процессов в физических и биологических системах является одной из важнейших задач естествознания. Однако от понимания важности проблемы до ее даже далеко неполного решения потребовалось почти целое столетие.

Первым принципиальным шагом в этом направлении была развитая в начале XX столетия А. Эйнштейном, М. Смолуховским и П. Ланжевеном теория броуновского движения. После этого лишь по прошествии почти полувека, в статистической теории открытых систем были сделаны последующие принципиальные шаги. Для этого понадобились новые идеи, новые образы и понятия и, что также очень важно, переосмысливание "старых" понятий: хаоса и порядка, деградации и самоорганизации и ряда других. Это привело к развитию нового междисциплинарного научного направления "Физики открытых систем". Ее создание было подготовлено трудами многих замечательных ученых. Среди них Л. Больцман и А. Пуанкаре – основоположники статистической и динамической теории открытых систем, А. М. Ляпунов – создатель теории устойчивости движения, А.Н.Колмогоров, Л.И.Мандельштам, А.А.Андронов, Н.С.Крылов, Н.Н.Боголюбов и многие другие. К их числу относится, несомненно, и В. И. Вернадский – создатель учения о ноосфере (сфере разума).

Благодаря сложности открытых систем в них возможно образование различного рода структур. Заметим, что диссипация играет при образовании структур конструктивную роль. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, Илья Пригожин – один из основателей современной теории самоорганизации – ввел термин "диссипативные структуры". Это чрезвычайно емкое и точное название объединяет все виды структур: временны́е, пространственные и, наконец, наиболее общие пространственно-временные структуры.

Сложность открытых систем создает и широкие возможности для существования в них коллективных явлений. С целью подчеркнуть роль коллектива, роль кооперации при образовании диссипативных структур, Герман Хакен возродил термин "Синергетика". Цель синергетики – выявление общих идей, общих методов и общих закономерностей в самых разных областях естествознания, а также социологии и экономики.

Эволюция может вести как к деградации, так и к самоорганизации, в ходе которой возникают более сложные и более совершенные диссипативные структуры. Существенно при этом, что ни в физических, ни даже в биологических системах не заложено "внутреннее стремление" к самоорганизации. Эволюция может вести и к деградации. Физическим примером последней служит эволюция к равновесному состоянию, которое, согласно Больцману и Гиббсу, является наиболее хаотическим. Это состояние физических систем может быть принято за начало отсчета относительной степени хаотичности.

Таким образом, самоорганизация – лишь один из возможных путей эволюции. Для ответа на вопрос по какому пути будет развиваться процесс надо иметь критерии самоорганизации. Для этого необходим сравнительный анализ относительной степени упорядоченности различных состояний рассматриваемой открытой системы. Только такой анализ может дать ответ на вопросы: Как же отличить порядок от хаоса? Является ли рассматриваемый в открытой системе процесс самоорганизацией или деградацией?

Результаты анализа на основе критерия самоорганизации объективны и дают дополнительную информацию. Основная информация состоит в установлении некоторой "нормы хаотичности", а также в установлении отклонений от нормы (в ту или иную сторону) под влиянием тех или иных воздействий. В биологии это могут быть различные стрессы, которые и вызывают отклонения степени хаотичности от нормы. При этом отклонения и в ту и другую стороны могут означать "болезнь" и, следовательно, представлять собой процесс деградации.

Таким образом, далеко не всегда констатация (по выбранному критерию) уменьшения степени хаотичности означает наличие самоорганизации и наоборот, увеличение степени хаотичности не означает наличие деградации. Такие выводы правомерны только в тех физических системах, когда за начало отсчета степени хаотичности можно принять состояние теплового равновесия, т.е. равновесное состояние.

Поскольку нормальное функционирование организма возможно лишь при некоторой норме хаотичности, которая отвечает существенно неравновесному состоянию, то указанная выше точка отсчета для биологических систем не существует. По этой причине в биологии, а также в экономике и социологии объективная информация об изменении степени хаотичности еще недостаточна, чтобы делать вывод о наличии процесса самоорганизации или деградации.

Более естественной является указанная выше классификация, при которой самоорганизация соответствует самовыздоровлению. При этом можно контролировать выбор методики "лечения". При этом снова вступает в игру критерий относительной степени упорядоченности. По нему можно контролировать эффективность "лечения": отвечает ли оно самоорганизации или ведет к дальнейшей деградации.

Из широкого круга проблем в данной работе выделены лишь те, для понимания и решения которых необходимо четкое определение и выявление глубокой связи трех важнейших понятий физики открытых систем: энтропии, информации, функционалов Ляпунова.

Начнем с понятия "энтропия", которая в статистической теории служит мерой неопределенности рассматриваемых состояний. Это откроет путь для формулировки критерия относительной степени упорядоченности состояний открытых систем и выявления связи трех выделенных фундаментальных характеристик открытых систем.

2 Энтропия в термодинамике

Среди различных термодинамических функций только *энтропия* обладает совокупностью свойств, позволяющих использовать ее в качестве меры неопределенности (хаотичности) при статистическом описании процессов в макроскопических системах. Энтропия S первоначально была введена в термодинамике, как *функция состояния* изменение которой определяет количество переданного системе тепла $dQ = TdS$. Это равенство выражает второй закон термодинамики для квазистатических, т.е. настолько медленных процессов, что их можно считать обратимыми.

При обратимом адиабатическом процессе, когда $dQ = 0$, энтропия неизменна. Однако при необратимом адиабатическом процессе энтропия возрастает и при достижении равновесного состояния остается неизменной.

Законы термодинамики не зависят от конкретной структуры рассматриваемых объектов. В этой общности их несомненное достоинство. При этом, однако, остается скрытым физическое содержание термодинамических характеристик, в частности, энтропии. Для более глубокого понимания физического смысла законов термодинамики надо обратиться к статистической теории.

Современное статистическое понимание смысла и роли энтропии было достигнуто в значительной мере благодаря работам создателей статистической физики Дж. Максвелла, Л. Больцмана и Д. Гиббса, а также одного из создателей теории информации К. Шеннона.

Статистические определения энтропии, данные Больцманом и Гиббсом, основаны на модельных представлениях о структуре макроскопических систем.

Выделим три этапа на пути к современному статистическому определению энтропии. Начнем с результата Больцмана.

Рассмотрим разреженный газ. Он занимает объем V и состоит из N атомов. В простейшем случае атомы представляются в виде шариков диаметра r_0. Газ называется разреженным, если объем атома (по порядку величины он равен r_0^3) много меньше объема, приходящегося на один атом $v = V/N \equiv 1/n$. Здесь n – среднее число атомов в единице объема. Введем безразмерный "параметр плотности" ε. По определению он равен отношению объемов,

$$\varepsilon = \frac{r_0^3}{v} \equiv n r_0^3. \tag{1}$$

Для газа при нормальных условиях параметр плотности равен приблизительно 10^{-4}.

В механике состояние газа в любой момент времени характеризуется полным набором координат и импульсов частиц:

$$X(t) = r_1(t), r_2(t), ..., r_N(t), p_1(t), p_2(t), ..., p_N(t). \tag{2}$$

Здесь введено обозначение $X(t)$ для $6N$-мерного вектора всех координат и импульсов.

3 Разреженный газ. Энтропия Больцмана

Больцман, не делая на этом акцента, радикально изменил модель системы. Именно, вместо системы из частиц N, совершающих движение в $6N$-мерном фазовом пространстве координат и импульсов, он ввел 6-мерную сплошную среду координат и импульсов

$$x = r, p. \tag{3}$$

При этом состояние газа характеризуется не набором частиц, а распределением их в 6-мерной сплошной среде. Введем обозначение $drdp$ для бесконечно малого объема, охватывающего точку среды r, p. Тогда выражение

$$nf(r, p, t)drdp \tag{4}$$

определяет долю частиц из общего их числа N, которые в момент t находятся в объеме $drdp$, включающем точку r, p. Множитель n выделен для удобства записи дальнейших соотношений. Так, условие нормировки (интеграл по всему 6-мерному пространству) имеет при этом вид

$$n \int f(r, p, t)drdp = N. \tag{5}$$

В 1873 году Больцман, опираясь в большей степени на физическую интуицию, чем на строгий математический анализ, опубликовал работу, в которой предложил уравнение для функции распределения (относительной плотности) $nf(r, p, t)$ частиц разреженного газа в шестимерной сплошной среде координат и импульсов – *кинетическое уравнение Больцмана.* При условии замкнутости системы уравнение Больцмана описывает установление равновесного состояния. Последнее характеризуется распределением Максвелла - Больцмана

$$f(r, p) = C \exp\left(-\frac{H(r, p)}{k_B T}\right), \quad H(r, p) = \frac{p^2}{2m} + U(r). \tag{6}$$

Здесь использовано обозначение $H(r, p)$, соответствующее в сплошной среде функции Гамильтона частицы в потенциальном силовом поле. Постоянная C определяется из условия нормировки.

Для описания изменения степени хаотичности в процессе временной эволюции Больцман ввел определение *энтропии неравновесного процесса.* Она выражается через плотность распределения частиц газа сплошной среды в шестимерном пространстве координат и скоростей $nf(r, p, t)$ следующим образом:

$$S(t) = -k_B n \int \ln\left(nf(r,p,t)\right) f(r,p,t) dr dp. \tag{7}$$

Здесь снова $n = N/V$ – среднее число частиц газа в единице объема.

Определение энтропии по Больцману справедливо для разреженного (идеального с точки зрения термодинамики) газа как для равновесных, так и для неравновесных состояний. Основываясь на кинетическом уравнении, Больцман доказал знаменитую H-теорему. Она выражается неравенством

$$\frac{dS(t)}{dt} \geq 0. \tag{8}$$

Это можно выразить следующими словами: при временной эволюции замкнутой системы к равновесному состоянию энтропия возрастает и остается неизменной при достижении равновесного состояния. Поскольку, как мы увидим, энтропия обладает набором свойств, необходимых для меры степени неопределенности (хаотичности), то степень хаотичности монотонно возрастает и достигает максимального значения в состоянии равновесия.

При этом, однако, надо уточнить понятие *"замкнутая система"*. Дело в том, что при описании временной эволюции в замкнутой (изолированной от внешних тел) системе на основе уравнения Больцмана остается неизменной не полная энергия E системы, а лишь ее среднее значение $\langle E \rangle$. Возможны тем самым флуктуации энергии, т.е. отклонения от среднего значения. Это означает, что имеет место *"внутренняя незамкнутость"*. Она возникает благодаря тому, что в теории Больцмана газ представляется в виде *сплошной среды*. При этом теряется информация о движении частиц на масштабах порядка размера "точки". Этим и обусловлено проявление *"внутренней незамкнутости"* при описании неравновесных процессов в газах на основе уравнения Больцмана.

В [7] дано количественное определение физически бесконечно малых масштабов для газа Больцмана и, как следствие, объема "точки" сплошной среды и соответствующего среднего числа частиц. Это даст возможность получить количественную оценку степени приближенности описания, которое имеет место при замене системы частиц шестимерной сплошной средой.

Сохранение средней энергии в процессе эволюции не является, однако, общим свойством всех кинетических уравнений. Так, например, при броуновском движении средняя энергия в процессе эволюции меняется. По этой причине H-теорема Больцмана здесь неприменима. Роль энтропии при броуновском движении играет другая термодинамическая функция – *свободная энергия*. Она, однако, не обладает набором необходимых свойств, чтобы служить мерой неопределенности состояний открытых систем.

Интересно, что название H-теорема (где H происходит от английского слова *"heat"*) было введено английским физиком Берберы в 1894 и позднее было принято Больцманом. Этим названием подчеркивается, что в процессе временной эволюции во "внешне замкнутой" системе происходит установление теплового (отсюда *"heat"*) равновесия. При анализе процессов самоорганизации ниже будет введен критерий "S-теорема". Буква "S" от слова "*Self-organization*".

4 Функционал Ляпунова Λ_S для газа Больцмана

Итак, в руководствах по статистической физике и кинетической теории имеется, как правило, утверждение, что H-теорема Больцмана справедлива для замкнутой системы.

Выше было отмечено, что это утверждение нуждается в корректировке. Именно, имеет место лишь "внешняя незамкнутость". Это означает, что нет обмена энергией и веществом (частицами газа) с окружающими телами.

Однако, поскольку теория Больцмана основана на модели "сплошной среды", то теряется информация о движении частиц в "точках" сплошной среды. Это означает, что имеющаяся, правда только в принципе, возможность полного описания системы на основе уравнений движения всех частиц используется лишь в малой степени. Следовательно, при использовании модели сплошной среды выделенная система "внутренне незамкнута", так как имеет место "термостат" очень большого числа неучтенных степеней свободы рассматриваемой системы N частиц.

Внутренняя незамкнутость проявляется, в частности, в том, что в процессе эволюции к равновесному состоянию остается неизменной не сама энергия системы, как это следует из механики, а лишь ее среднее (в расчете на одну частицу) значение:

$$\langle E \rangle \equiv \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = const. \tag{9}$$

При этом условии возможны флуктуации и, следовательно, описание эволюции системы посредством уравнения Больцмана (при условии "внешней замкнутости") не является полным.

Оценим число используемых и теряемых степеней свободы при переходе от системы частиц к приближению сплошной среды. Для газа Больцмана из N бесструктурных атомов полное число степеней свободы равно $6N$. Обозначим через N_{ph} среднее число частиц в физически бесконечно малом объеме – "точке" сплошной среды. Тогда число используемых степеней свободы при описании Больцмана можно оценить как N/N_{ph}. Поэтому количество "невостребованных" степеней свободы определяется как $6N\left(N_{ph}-1\right)/N_{ph}$ и, следовательно, составляет "львиную долю" полного числа степеней свободы газа Больцмана.

Это и является оценкой степени "внутренней незамкнутости" при использовании уравнения Больцмана.

С учетом условия $\langle E \rangle = const$ H-теорему Больцмана можно переформулировать на языке функционала Ляпунова. Для газа Больцмана искомый функционал Ляпунова представляется в виде разности энтропии равновесного состояния S_0 и энтропии в некоторый момент t при временной эволюции $S(t)$. Таким образом, по определению функционал Ляпунова есть

$$\Lambda_S = S_0 - S(t). \tag{10}$$

Нижний индекс "S " показывает, что функционал Ляпунова выражается именно через разность энтропий, а не каких-либо других термодинамических функций.

Чтобы установить положительность Λ_S, подставим в последнее соотношения выражения для энтропий $S_0, S(t)$, используем условие постоянства средней энергии (9), а также известное неравенство $\ln a \geq 1 - 1/a$ при $a = f/f_0$. В результате приходим к неравенству

$$\Lambda_S = S_0 - S(t) = k_B n \int \ln \frac{f(r,p,t)}{f_0(r,p)} f(r,p,t) \frac{dr dp}{(2\pi\hbar)^3} \geq 0. \tag{11}$$

Второе неравенство

$$\frac{d\Lambda_S}{dt} = \frac{d}{dt}\left(S_0 - S(t)\right) \leq 0 \tag{12}$$

есть следствие H-теоремы в форме (8).

Таким образом, величина Λ_S, которая определяется разностью энтропий равновесного и неравновесного состояний, удовлетворяет двум приведенным неравенствам. Это и дает основание называть Λ_S функционалом Ляпунова.

В соответствии с теорией устойчивости Ляпунова наличие такого рода функционала означает, что состояние равновесия является глобально устойчивым. Следовательно, при любом отклонении внешне замкнутой системы от равновесного состояния она вновь возвращается к равновесию. При этом энтропия монотонно возрастает и достигает максимума при достижении равновесия.

Основателям статистической физики Максвеллу и Больцману представлялось естественным, что равновесное состояние является наиболее хаотическим. Поскольку энтропия в состоянии равновесия максимальна, то есть основание предполагать, что при статистическом описании процессов в макроскопических телах энтропия может служить мерой хаотичности (неопределенности).

Такого рода вывод был сделан на примере идеального газа. Покажем, что он остается справедливым при любом взаимодействии между частицами, но лишь для равновесного состояния. Этот результат принадлежит Гиббсу и может быть сформулирован как "теорема Гиббса".

5 Энтропия и теорема Гиббса

В знаменитом трактате одного из основоположников статистической физики Д.В.Гиббса "Основные принципы статистической механики", опубликованном в 1902 году, дано общее определение функции распределения значений полного набора частиц $f_N(X, a, T)$ при произвольном взаимодействии между ними, но лишь для *равновесного состояния*. Энтропия при этом также выражается через равновесное распределение Гиббса.

Гиббс предложил два конкретных определения функции распределения $f_N(X)$, которые отвечают двум разным физическим условиям. Одно из них $f_N(X, a, E)$ – *микроканоническое распределение Гиббса* – справедливо при условии замкнутости рассматриваемой системы, когда задано значение полной энергии системы E. Буквой a здесь и ниже определяется набор заданных внешних параметров. В равновесном состоянии это, например, объем системы, давление, внешнее поле и т.д.

Второе $f_N(X, a, T)$ – *каноническое распределение Гиббса.* Оно справедливо при условии, что рассматриваемая макроскопическая система находится в термостате с заданной температурой T. По форме такое распределение совпадает с распределением *Максвелла-Больцмана* (6). Разница лишь в том, что теперь рассматривается функция распределения полного набора координат и импульсов всех частиц системы

$$X = r_1, r_2, ..., r_N, p_1, p_2, ..., p_N. \tag{13}$$

Рассматривается, таким образом, распределение не в 6-мерном фазовом пространстве, как в теории Больцмана, а в $6N$-мерном фазовом пространстве. Соответственно этому используется и функция Гамильтона $H(X, a)$ совокупности всех частиц системы. Как и выше, a – набор внешних параметров.

С учетом введенных соотношений каноническое распределение Гиббса можно записать в виде

$$f_N(X, a, T) = C \exp\left(-\frac{H(X, a)}{k_B T}\right), \quad \int f_N(X, a, T) dX = 1. \tag{14}$$

Зависимость величины C от внешних параметров a и температуры T определяется условием нормировки.

Используя каноническое распределение Гиббса, можно дать статистическое определение основных термодинамических функций, которые используются при математической формулировке первого и второго закона термодинамики. За деталями отсылаем к учебникам по статистической физике. Здесь приведем лишь необходимые для дальнейшего соотношения.

Внутренняя энергия определяется как среднее значение функции Гамильтона

$$U(a, T) = \int H(X, a) f_N(X, a, T) dX. \tag{15}$$

Свободная энергия определяется следующим интегралом

$$F(a, T) = -\, k_B T \int \exp\left(-\frac{H(X, a)}{k_B T}\right) dX. \tag{16}$$

Это позволяет записать каноническое распределение Гиббса в удобной для приложения форме:

$$f_N(X, a, T) = C \exp\left(\frac{F(a, T) - H(X, a)}{k_B T}\right). \tag{17}$$

Наконец, энтропия, как и в формуле Больцмана, определяется средним значением логарифма функции распределения

$$S_G(a, T) = -\, k_B \int \ln\left(f_N(X, a, T)\right) f_N(X, a, T) dX. \tag{18}$$

Индекс "G " указывает, что это выражение определяет энтропию Гиббса. Энтропия определяется с точностью до постоянной, которая зависит от выбора единиц.

В квантовой теории мы имеем дело с дискретными значениями переменных, характеризующих состояние системы. Пусть n – набор квантовых чисел и E_n – собственные значения энергии (собственные значения оператора Гамильтона). Тогда квантовое каноническое распределение Гиббса имеет вид

$$f_n = C \exp\left(-\frac{E_n}{k_b T}\right), \quad \sum_n f_n = 1. \tag{19}$$

Запишем и соответствующее выражение для энтропии

$$S = -\, k_B \sum_n f_n \ln f_n. \tag{20}$$

Из приведенных формул нетрудно получить известное в термодинамике соотношение Гельмгольца, которое связывает внутреннюю энергию со свободной энергией и энтропией:

$$U(a, T) = F(a, T) - T S_G(a, T). \tag{21}$$

Сформулируем теперь теорему Гиббса. Она сводится к утверждению, что при определенном условии равновесное состояние отвечает максимуму энтропии и является, тем самым, наиболее хаотическим.

Итак, в равновесном состоянии используем каноническое распределение Гиббса $f_N(X, a, T)$. Через $f_N(X, t)$ обозначим "произвольное" стационарное или нестационарное распределение переменных рассматриваемой системы. Предположим, что оно, как и распределение Гиббса, нормировано на единицу. Слово *произвольное* поставлено в кавычки, поскольку приведенный ниже результат Гиббса справедлив лишь при дополнительном ограничении: сравнение значений энтропий равновесного и неравновесного состояний проводится при одинаковых значениях средней энергии $\langle H(X, a)\rangle$.

Теорема Гиббса утверждает, что при одинаковости нормировки и средней энергии энтропия равновесного состояния $S_G(a, T)$ максимальна, т.е.

$$S_G(a,T) - S(t) = k_B \int \ln \frac{f_N(X,t)}{f_N(X,a,T)} f_N(X,t) dX \geq 0. \tag{22}$$

Знак равенства отвечает случаю, когда распределение $f_N(X, t)$ совпадает с каноническим распределением Гиббса $f_N(X, a, T)$.

Итак, при условии одинаковости средней энергии энтропия максимальна для равновесного состояния. Поскольку, как мы убедимся, энтропия служит мерой степени неопределенности при статистическом описании, то равновесное состояние по теореме Гиббса является наиболее хаотическим. Повторим, что сравнение производится при условии одинаковости средних энергий, а в остальном для системы частиц с произвольным взаимодействием.

Отличие от результата Больцмана состоит в том, что для уравнения Больцмана условие постоянства средней энергии является естественным свойством этого уравнения. При доказательстве же теоремы Гиббса постоянство средней энергии $\langle H(X, a)\rangle$ есть дополнительное условие, ограничивающее класс "произвольных" функций $f_N(X, t)$.

6 Теория информации. Немного истории

Основы современной теории связи заложены в классических работах К.Шеннона [1,2]. В них даны два определения информации. В первом определение информации фактически совпадает с определением энтропии Больцмана. Тем самым, так определяемая информация служит, как и энтропия Больцмана, мерой степени неопределенности при выбранном уровне статистического описания рассматриваемой системы. По этой причине используется термин S-информация. Такое определение информации, хотя и широко используется в литературе, все же не является достаточным при исследовании открытых систем. Для таких систем более адекватным является другое, также предложенное К.Шенноном определение информации. Суть его состоит в следующем.

Пусть имеется функция распределения двойного набора некоторых переменных $f(X, Y)$ рассматриваемой системы. Это открывает возможность для определения информации об объекте "X" относительно "Y" и наоборот. В обоих случаях информация определяется разностью безусловной и условной энтропий и связана, таким образом, с соответствующим изменением степени неопределенности состояния выделенной системы.

Научное значение работ К.Шеннона в теории информации прекрасно охарактеризовал А.Н.Колмогоров в предисловии к русскому изданию сборника К.Шеннон "Работы по теории информации и кибернетике" М: ИЛ, 1963. А.Н. Колмогоров писал: "Значение работ Шеннона для чистой математики не сразу было достаточно оценено. Мне вспоминается, что еще на международном съезде математиков в Амстердаме (в 1951 г.) мои американские коллеги, специалисты по теории информации, считали мой интерес к работам Шеннона несколько преувеличенным, так как это более техника, чем математика.

Сейчас такие мнения вряд ли нуждаются в опровержении. Правда, строгое математическое "обоснование" своих идей Шеннон в сколь-либо трудных случаях предоставлял своим продолжателям. Однако его математическая интуиция изумительно точна."

Работы К.Шеннона послужили стимулом для появления работ, в которых был дан прочный математический фундамент теории информации. Отметим лишь первые работы такого рода, которые были опубликованы на страницах журнала "Успехи математических наук" и в ДАН СССР [3,4]. В первой из них дано доказательство основных теорем теории информации для дискретного случая, а во втором – наиболее общее определение энтропии и информации для непрерывных распределений.

В последующем потоке книг по теории информации (см., например, [5-13], [19]) выделяется монография Р.Л. Стратоновича [5]. В ней, наряду с традиционным к тому времени изложением основных результатов теории информации Шеннона, излагается и разработанная Р.Л.Стратоновичем теория ценности информации. Прослеживается также глубокая аналогия математического аппарата теории информации и статистической термодинамики.

Необходимо отметить также следующее. В 1997 году редакция журнала "Успехи физических наук" опубликовала книгу Бориса Борисовича Кадомцева "Динамика и информация" [6]. Опубликована также книга [19]. Эти книги содержат существенные результаты, разъясняющие ряд принципиальных вопросов и понятий как классической, так и квантовой физики.

7 Энтропия Больцмана-Гиббса-Шеннона – мера неопределенности при статистическом описании

Пусть $f(X)$ есть некоторая безразмерная функция распределения значений безразмерной случайной величины X. В качестве последней может выступать набор величин, составляющих некоторый вектор. S-информация и энтропия определяются тогда формулами

$$I[X] = S[X] = -\int f(X)\ln f(X)dX; \quad \int f(X)dX = 1. \tag{23}$$

Соответствующее определение для случая дискретной переменной имеет вид

$$I[n] = S[n] = -\sum_n f_n \ln f_n; \quad \sum_n f_n = 1. \tag{24}$$

Иногда (см., например, [6], [13]) приводятся аргументы в пользу существования закона сохранения суммы энтропии и информации. Это утверждение в наших обозначениях выражается равенством

$$I[X] + S[X] = const. \tag{25}$$

Оно не следует, однако, из приведенных определений S-информации и энтропии. Мы увидим, что при некоторых условиях закон сохранения суммы информации и энтропии действительно существует. Но соответствующее равенство может быть получено лишь на основе более общего определения информации Шеннона.

8 Информация Шеннона

Более естественно в качестве определения информации использовать разностную характеристику – разность безусловной энтропии (энтропии Больцмана) и условной энтропии [2-9]

$$I[X,Y] = S[X] - S[X|Y]. \tag{26}$$

Здесь $S[X]$ есть обычная (безусловная) энтропия Больцмана-Шеннона

$$S[X] = -\int f(X)\ln f(X)dX, \tag{27}$$

а $S[X|Y]$ – условная энтропия. Она определяется через соответствующую условную функцию распределения $f[X|Y]$ $(f(X,Y) = f[X|Y]f(Y))$ следующим образом:

$$S[X|Y] = -\int f(X|Y)\ln f(X|Y)dXdY. \tag{28}$$

Выражение (26) можно переписать в явно симметричном виде

$$I[X,Y] = I[Y,X] = \int \ln\frac{f(X,Y)}{f(X)f(Y)}f(X,Y)dXdY \geq 0. \tag{29}$$

Знак равенства относится к случаю, когда величины X, Y статистически независимы. По этой причине функцию $I[X,Y]$ можно назвать "корреляционная информация". Она задает информацию о состоянии с двойным набором переменных X, Y, которая определяется их статистической корреляцией.

9 Информация открытых систем

Конкретизируем общее выражение Шеннона для корреляционной информации с целью выявления зависимости от управляющих параметров. Простейший способ решения этой задачи состоит в следующем [9]. Нарушим симметрию формулы Шеннона. Именно, предположим, что функция распределения $f(Y)$ набора переменных Y полностью характеризуется соответствующим набором первых моментов

$$f(Y) = \delta(Y-a); \quad \langle Y\rangle = a. \tag{30}$$

Примем набор параметров (или хотя бы один из них) в качестве управляющих параметров. Подставим последнее выражение в формулу Шеннона и выполним интегрирование по Y. В результате получим выражение для информации о совокупности X при заданном значении управляющих параметров a:

$$I[X|a] = S[X] - S[X|a] \equiv S[X] + \int f(X|a)\ln f(X|a)dX. \tag{31}$$

Заметим, что такое определение информации не может быть использовано во всех случаях. Действительно, по определению информация всегда положительная величина. Последнее же выражение может быть в общем случае и отрицательным. Чтобы обеспечить его положительность, т.е. выполнить неравенство $I[X|a] \geq 0$, необходимо ввести дополнительное условие. Суть этого дополнительного условия проще всего выяснить на конкретном примере открытой системы.

10 Информация и функционал Ляпунова Λ_S. Закон сохранения суммы информации и энтропии

Рассмотрим выражение (31). Пусть управляющий параметр a может принимать лишь положительные значения и безусловная энтропия $S[X]$ отвечает его нулевому значению $S[X]$:

$$a \geq 0, \; S[X] = S[X|a = 0]. \tag{32}$$

При этих условиях информация равновесного состояния

$$I[X|a = 0] = 0 \tag{33}$$

и безусловная энтропия $S[X]$ совпадает с энтропией равновесного состояния.

Используем общее равенство (31) для определения информации газа Больцмана. В этом случае роль управляющего параметра можно "возложить" на текущее время t. Тогда значения управляющего параметра будут заключены в пределах $0 \leq t \leq \infty$. Значение $t = \infty$ соответствует равновесному состоянию. Таким образом, информация газа Больцмана определяется выражением

$$I[r,p,t] = \Lambda_S = S_0 - S(t) = k_B \int \ln \frac{f(r,p,t)}{f_0(r,p)} f(r,p,t) \frac{drdp}{(2\pi\hbar)^3} \geq 0. \tag{34}$$

Согласно изложенному в разделе 4, условие положительности информации обеспечивается постоянством средней энергии $\langle E \rangle = const$. Оно есть следствие структуры интеграла столкновений Больцмана и, следовательно, является естественным (не дополнительным) условием. Следовательно, в процессе временной эволюции газа Больцмана к равновесному состоянию сумма информации и энтропии остается постоянной

$$I[r,p|t] + S(t) = S_0 = const. \tag{35}$$

При этом константа определяется энтропией равновесного состояния, а информация этого состояния

$$I[r,p|t = \infty] = \Lambda_S(t = \infty) = 0. \tag{36}$$

Итак, для газа Больцмана положительность информации суть естественное свойство системы. В то же время, для выполнения неравенства $I[X|a] \geq 0$ потребуется, как мы увидим, выполнение некоторого дополнительного условия.

11 S-теорема и закон сохранения суммы информации и энтропии

Известно, что среди всех термодинамических функций только энтропия S обладает набором свойств, благодаря которым она может быть использована в качестве неопределенности (хаотичности) при статистическом описании процессов в макроскопических системах. Чтобы использовать эту возможность, необходимо перенормировать энтропию более хаотического состояния так, чтобы сопоставление состояний открытой системы в процессах эволюции производилось при одинаковых значениях средней эффективной энергии.

Рассмотрим в качестве относительно простого примера процесс эволюции стационарных состояний генератора Ван дер Поля при изменении параметра обратной связи a. Сравнение относительной степени упорядоченности будем производить по критерию "S-теорема", который впервые был сформулирован на конкретных примерах в работах [14,15] (см. также [16]). Выделим два состояния, отвечающие следующим значениям параметра обратной связи: $a = 0$ (равновесное состояние колебательного контура) и $a = a_1$ для некоторого стационарного, но неравновесного состояния генератора. Обозначим как X выделенную характеристику стационарного состояния. Для генератора роль X будет играть здесь энергия колебаний E. Введем соответствующие обозначения для функций распределения f_0, f_1 и соответствующих энтропий S_0, S_1.

Ренормализация к заданному значению средней энергии сводится здесь к замене температуры равновесного состояния T ее эффективным значением $\tilde{T}$. Оно определяется путем решения уравнения

$$k_B\tilde{T} = \int E\tilde{f}_0(E, a = 0)dE = \int Ef_1(E, a = a_1)dE, \tag{37}$$

и служит дополнительным условием, обеспечивающим положительность энтропии. Решение этого уравнения удовлетворяет неравенству:

$$\tilde{T}(a) \geq T. \tag{38}$$

Знак равенства относится к случаю $a = a_0 = 0$.

Отсюда следует, что для выравнивания значений средней энергии состояние "0" надо "подогреть".

Обозначим через $\tilde{S}_0$ соответствующее перенормированное значение энтропии. Поскольку теперь оба состояния имеют одинаковые значения средней энергии, то разность энтропий $\tilde{S}_0$ и S_1 может служить мерой относительной степени упорядоченности выделенных состояний. С учетом условия

$$\langle E\rangle = const \tag{39}$$

выражение для разности энтропий можно записать в виде:

$$\tilde{S}_0 - S_1 = \int \left(\ln\frac{f_1(E)}{\tilde{f}_0(E)}\right) f_1(E)dE \geq 0. \tag{40}$$

Итак, расчет относительной степени упорядоченности выделенных состояний выражается двумя формулами. Формула (38) подтверждает правильность выбора состояния равновесного "0" в качестве более хаотического. Формула же (40) дает количественную меру их относительной степени упорядоченности.

Теперь, используя общую формулу (31), при всех значениях параметра обратной связи мы можем определить информацию $\tilde{I}(E)$ стационарных состояний генератора как

$$\tilde{I}(E) = \tilde{S}_0 - S_1 = \int \left(\ln\frac{f_1(E)}{\tilde{f}_0(E)}\right) f_1(E)dE \geq 0. \tag{41}$$

Отсюда следует, что при нулевом значении параметра обратной связи состояние совпадает с равновесным и информация равна нулю.

По той же схеме на основе "S-теоремы" можно определить информацию последовательности стационарных состояний при переходе от ламинарного течения к турбулентному. Управляющим параметром служит число Рейнольдса. Расчеты показывают, что по мере увеличения числа Рейнольдса информация возрастает. Это служит еще одним подтверждением, что стационарное турбулентное движение является более упорядоченным по сравнению с соответствующим ламинарным течением [15], [7].

12 Генератор Ван дер Поля. S-информация и информация Шеннона

Итак, на примере генератора Ван дер Поля было показано как меняется информация Шеннона в процессе эволюции стационарных состояний при достаточно медленном изменении параметра обратной связи a_f. При этом оценка относительной степени упорядоченности состояний проводилась по критерию "S-теорема" [7,14].

Продемонстрируем на примере генератора Ван дер Поля принципиальное различие двух приведенных выше определений информации: *S-информации* и *информации Шеннона.*

Уравнение Фоккера-Планка для функции распределения энергии $f(E,t)$ имеет вид [7,8]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial}{\partial E}\left(E\frac{\partial f}{\partial E}\right) + \frac{\partial}{\partial E}\left[(-a+bE)\,Ef\right]. \tag{42}$$

Здесь D – интенсивность шума, $a = a_f - \gamma$, a_f – параметр обратной связи, γ и b – коэффициенты соответственно линейного и нелинейного трения. Стационарное решение $f_0(E)$, справедливое при всех значениях параметра обратной связи, запишем по аналогии с каноническим распределением в виде:

$$f_0(E) = \exp\frac{F_0 - H(E)}{D}; \qquad H(E) = -aE + \frac{1}{2}E^2. \tag{43}$$

Здесь использовано обозначение для эффективной функции Гамильтона $H(E)$; F_0, S_0 – соответствующие свободная энергия и энтропия.

Выделим снова два характерных стационарных состояния.

1. Параметр обратной связи $a_f = 0$. В этом случае распределение (43) совпадает с равновесным распределением Больцмана.

2. Режим развитой генерации: $a_f \gg \gamma$. В этом случае из формулы (43) следует распределение Гаусса

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{2\pi\left\langle\delta E\right\rangle^2}}\exp\left(-\frac{(E-a/b)^2}{2\left\langle\delta E\right\rangle^2}\right); \quad \left\langle\delta E\right\rangle^2 = \frac{D}{b}. \tag{44}$$

Для выделенных состояний получим выражения для значений и "S-информации" – энтропии. Из них следует, что энтропия и "S-информация" возрастают по мере перехода от равновесного состояния к режиму развитой генерации, т.е.

$$S_0 \le S_1; \quad I_0 \le I_1. \tag{45}$$

Первое неравенство можно интерпретировать как уменьшение степени упорядоченности по мере развития генерации. Однако интуитивно ясно, что при переходе к режиму генерации степень упорядоченности должна, напротив, возрастать. Одновременно, второе неравенство показывает, что "S-информация" в процессе развития генерации увеличивается. Эти результаты противоречат закону сохранения энтропии и информации. Таким образом, расчеты энтропии и "S-информации" не могут служить определением относительной степени упорядоченности и информативности выделенных состояний.

В чем же причина противоречия? Суть в том, что по мере развития генерации средняя энергия колебаний возрастает:

$$\left\langle E\right\rangle_0 < \left\langle E\right\rangle_1. \tag{46}$$

В то же время, по критерию "S-теорема" сравнение энтропий должно производится при одинаковых значениях средней энергии. Для этого, как мы знаем, необходимо произвести соответствующую перенормировку.

Из изложенного следует, что более адекватные результаты о характере изменения информации открытых систем при изменении управляющих параметров могут быть получены лишь на основе определения информации по Шеннону. Это естественно, так как только при таком определении информация представляется как разностная характеристика. Расчеты на основе "S-информации", как мы убедились на конкретном примере, не приводят при анализе относительной степени упорядоченности состояний открытых систем к физически оправданным результатам.

13 Информация, свободная энергия и функционал Ляпунова Λ_F для броуновского движения

Используем приведенное выше уравнение Фоккера-Планка для функции распределения энергии $f(E,t)$. Величина D играет роль эффективной температуры.

Введем определения для неравновесной свободной энергии и энтропии через функцию распределения в текущий момент времени $f(E,t)$ $(\int f dE = \int f_0 dE = 1)$

$$F(t) = \langle H(E) \rangle_t - DS(t). \tag{47}$$

Теперь мы имеем возможность ввести функционал Ляпунова для броуновского движения. Он определяется разностью свободных энергий $F(t), F_0$ и удовлетворяет двум неравенствам [7,8]:

$$\Lambda_F = F(t) - F_0 = D \int_0^\infty \ln \frac{f(E,t)}{f_0} f(E,t) dE \geq 0, \tag{48}$$

$$\frac{d\Lambda_F}{dt} = \frac{d\,(F(t) - F_0)}{dt} \leq 0. \tag{49}$$

Тем самым мы получили результат, подобный H-теореме Больцмана (см. (11), (12)), представленный с использованием функционала Ляпунова $\Lambda_S = S_0 - S(t)$.

При временной эволюции по уравнению Фоккера-Планка (при заданной интенсивности шума – эффективной температуры) средняя энергия не сохраняется. По этой причине роль Λ_S теперь выполняет функционал Ляпунова Λ_F, определяемый разностью свободных энергий. По аналогии с информацией Шеннона можно ввести меру информации через функционал Ляпунова Λ_F:

$$I_F[E|t] = \Lambda_F = F[E|t]] - F_0[E] = D \int_0^\infty \ln \frac{f(E,t)}{f_0} f(E,t) dE \geq 0. \tag{50}$$

Величина $I_F[E|t]$ служит мерой информации о степени удаленности неравновесного состояния в текущий момент от стационарного состояния при заданном значении параметра обратной связи. Так определенная информация уменьшается по мере приближения к стационарному состоянию и остается равной нулю при его достижении.

Из последнего выражения следует своеобразный закон сохранения: разность свободной энергии неравновесного состояния $F[E|t]$ и информации $I_F[E|t]$ в процессе временной эволюции при заданном значении параметра обратной связи остается неизменной, т.е.

$$F[E|t] - I_F[E|t] = F_0[E]. \tag{51}$$

Константа при любом заданном значении параметра обратной связи определяется величиной свободной энергии стационарного сосотяния. Она минимальна при нулевом значении параметра обратной связи, т.е. в равновесном состоянии. Этот результат аналогичен полученному ранее закону сохранения (35).

14 Оценка информации и относительной степени упорядоченности по экспериментальным данным

Для практического использования S-теоремы необходимо знать эффективную функцию Гамильтона. Ее определение не представляет принципиальных трудностей, если известна математическая модель процесса. Во многих случаях, однако, даже для физических систем не удается найти адекватную математическую модель рассматриваемой открытой системы. Эта задача является еще более сложной при исследовании биологических, социальных и экономических объектов.

В связи с этим надо иметь возможность определения относительной степени упорядоченности открытых систем непосредственно по экспериментальным данным. Необходимая для этого последовательность действий такова.

1. Для рассматриваемой системы выбираются управляющие параметры и два состояния системы при значениях a_0 и $a_0 + \Delta a$.

2. Для выбранных параметров системы экспериментально строятся достаточно длинные временные реализации:

$$X_0(t, a_0), \quad X(t, a_0 + \Delta a) \tag{52}$$

Далее численно находятся соответствующие функции распределения:

$$f_0(X, a_0), \quad f(X, a_0 + \Delta a). \tag{53}$$

Оба распределения нормированы на единицу.

Теперь необходимо действовать по известному уже рецепту.

3. Одно из состояний, например "0", принимается за состояние физического хаоса и определяется эффективная функция Гамильтона:

$$H_{eff} = -\ln f_0(X, a_0). \tag{54}$$

Название "эффективная функция Гамильтона" оправдано тем, что перенормированная к заданному значению $\langle H_{eff} \rangle$ функция распределения имеет форму канонического распределения Гиббса:

$$\tilde{f}_0(X) = \exp \frac{F_{eff}(\tilde{T}) - H_{eff}(X)}{k\tilde{T}}. \tag{55}$$

Здесь $\tilde{T}$ – эффективная температура. Для состояния физического хаоса $\tilde{T} = 1$.

Эффективная свободная энергия как функция $\tilde{T}$ определяется из условия нормировки функции f_0. Зависимость эффективной температуры от изменения управляющего параметра Δa находится, как и выше, из условия постоянства средней эффективной энергии:

$$\int H_{eff} \tilde{f}_0(X, a_0) dX = \int H_{eff} f(X, a_0 + \Delta a) dX. \tag{56}$$

Если решение этого уравнения имеет вид (38), то выбор состояния физического хаоса оправдан.

За начало отсчета информации примем состояние физического хаоса – состояние с $a = a_0$. Тогда "избыточная информация", возникающая при переходе к более упорядоченному состоянию с $a = a_0 + \Delta a$ при том же значении средней эффективной энергии определяется выражением

$$\tilde{I}(X) = \tilde{S}_0 - S = \int \left(\ln \frac{f(X, a_0 + \Delta a)}{\tilde{f}_0(X)} \right) f(X, a_0 + \Delta a) dX \geq 0. \qquad (57)$$

Знак равенства относится к случаю $\Delta a = 0$.

15 Информация медико-биологических и сложных физических объектов

Из изложенного следует, что при расчетах как энтропии, так и информации можно выделить два класса явлений в открытых системах. К первому относятся системы и явления, которые существуют и в состоянии теплового равновесия. В этих случаях отсчет информации, как мы видели, можно производить от наиболее хаотического (равновесного) состояния. Например, в генераторе Ван дер Поля по мере увеличения значения параметра обратной связи происходит переход от состояния тепловых колебаний в электрическом контуре к режиму развитой генерации. Если сравнение состояний производится при одинаковых значениях средней энергии колебаний, то в процессе развития генерации (удаления от равновесного состояния) энтропия уменьшается, а информация возрастает. Это и дает основание рассматривать процесс развития генерации как процесс самоорганизации.

Мы имеем, таким образом, основание определить процесс самоорганизации в таких системах как переход от более хаотического к менее хаотическому состоянию или как переход от состояния с нулевой информацией (равновесного состояния) в неравновесное состояние – состояние с отличной от нуля информацией. Следуя терминологии И.Пригожина, можно сказать, что в процессе генерации рождается временная диссипативная структура.

Подобное же увеличение информации происходит и при переходе от ламинарного течения в трубе к турбулентному по мере возрастания перепада давления (увеличения числа Рейнольдса). Здесь также за начало отсчета можно принять равновесное состояние жидкости при нулевом перепаде давления, т.е. при нулевом значении управляющего параметра. В этом случае гидродинамическое движение отсутствует и имеет место лишь хаотическое движение молекул жидкости. Оно и является наиболее хаотическим и наименее информативным.

Понимание термина "самоорганизация" как перехода от более хаотического к более упорядоченному состоянию является основой теории образования диссипативных структур. Первое систематическое изложение этого круга вопросов дано в известных работах И.Пригожина и Г.Николиса [9]. Отправным пунктом служат при этом идеи и результаты И.Пригожина по термодинамике необратимых неравновесных процессов.

Ставшее уже традиционным определение самоорганизации не является, однако, общим. Действительно, существует широкий класс систем – это, прежде всего, биологические системы, – для которых состояния как полного хаоса (тепловое равновесие), так и полного порядка не могут быть реализованы. При этих условиях их функционирование просто невозможно. Для таких систем более фундаментальным является понятие "нормы хаотичности", которое уже неоднократно использовалось выше. Его можно сопоставить понятию *"здоровье"*. Тогда *процессом самоорганизации* можно назвать *процесс выздоровления*.

Обратимся в связи с этим к исследованиям откликов на стрессы для мужчин и женщин [16–18,7]. Состояние после стресса условимся называть *"болезнью"*. Но тогда для женщин *переход к норме хаотичности – выздоровление*, которое мы называем процессом самоорганизации, – есть переход от более хаотического состояния к менее хаотическому состоянию. Это отвечает росту информации. Напротив, для мужчин состояние после стресса – "болезнь" – отвечает более упорядоченному состоянию. Следовательно, самоорганизация идет при увеличении степени хаотичности, т.е. сопровождается уменьшением информации.

Обозначим через $\tilde{I}_W$ и $\tilde{I}_M$ нормированные к некоторому значению средней эффективной энергии значения информации, полученные для женщин и мужчин на основе анализа соответствующих кардиограмм. Из экспериментов следует, что для женщин более хаотическим является состояние после $(after)$ стресса, а для мужчин более хаотическим является состояние до $(before)$ стресса. В соответствие с этим $\tilde{S}^{(W)}_{after}$ есть перенормированная энтропия для женщин после стресса, а $\tilde{S}^{(M)}_{before}$ есть перенормированная энтропия для мужчин до стресса (в состоянии с нормой хаотичности). С учетом этих обозначений имеем следующие определения информации

$$\tilde{I}_W = \tilde{S}^{(W)}_{after} - S^{(W)}_{before} \geq 0; \qquad \tilde{I}_M = \tilde{S}^{(M)}_{before} - S^{(M)}_{after} \geq 0.$$

Эти формулы позволяют провести количественную оценку по кардиограммам увеличения информации после стресса для женщин и соответствующее увеличение информации для мужчин в процессе выздоровления.

16 Заключение

Естественно, что в одной статье невозможно полностью осветить даже выделенный круг вопросов, связанных с понятиями "энтропия" и "информация". Остался "за бортом", например, очень интересный и практически важный вопрос о ценности информации. Он требует специального рассмотрения. Отметим лишь, что, по-видимому, первый обзор работ этого направления имеется в известной монографии Р.Л.Стратоновича [5].

[1] Shannon C. *Mathematical Theory of Communication.* Bell System Techn. J. *27* 379 (1948).

[2] Шеннон К. *Работы по теории информации и кибернетике.* (Предисловие и ред. А.Н.Колмогоров.) Москва, И-Л, 1963.

[3] Хинчин А.Я. *Об основных теоремах теории информации.* УМН **11** (1956) 17-75.

[4] Колмогоров А.Н., Гельфанд И.М., Яглом А.М. *К общему определению количества информации.* ДАН СССР **111** (1956) 745.

[5] Стратонович Р.Л. *Теория информации.* Москва, "Сов. Радио", 1975.

[6] Кадомцев Б.Б. *Динамика и информация.* Москва, Редакция журнала "Успехи физических наук", 1997.

[7] Климонтович Ю.Л. *Статистическая теория открытых систем, Т.I* Москва, "Янус" 1995; Т.II Москва, "Янус" 1999; Т.III (в печати).

[8] Klimontovich Yu.L. *Information Concerning the States of Open Systems.* Physica Scripta (1998).

[9] Nicolis G, Prigogine I. *Self-Organization in Non Equilibrium Systems.* Wiley, New York, 1977.

[10] Prigogine I., Stengers I. *Order out of Chaos.* Heinemann, London, 1984.

[11] Haken. H. *Synergetics.* (Springer, Berlin, 1978).

[12] Haken H. *Information and Self-organization.* (Springer, Berlin, 1988).

[13] Волькенштейн М.В. *Энтропия и информация.* Москва, "Наука", 1986.

[14] Климонтович Ю.Л. *Уменьшение энтропии в процессе самоорганизации. S-теорема.* Письма в ЖТФ, **9** (1983) 1089.

[15] Климонтович Ю.Л. *Энтропия и производство энтропии при ламинарных и турбулентных течениях.* Письма в ЖТФ, **10** (1984) 80.

[16] Анищенко Т.Г., Сапарин П., Анищенко В.С. *О критерии относительной степени упорядоченности автоколебательных процессов. Иллюстрации S−теоремы Климонтовича.* Письма в ЖТФ **24** (1993) 195.

[17] Анищенко В.С., Сапарин П.И., Куртс Ю., Витт А., Фосс Ф. *Анализ динамики сердечного ритма человека на основе критерия перенормированной энтропии.* Прикладная нелинейная динамика **2** (1994) 55.

[18] Климонтович Ю.Л. *Критерий относительной степени упорядоченности открытых систем.* УФН **166** (1996) 1231.

[19] Ebeling W., Freund J., Schweizer F. *Komplexe Strukturen: Entropie und Information.* Treubner, Stuttgart, 1998.