

Математические модели квантовых компьютеров и проблема квантовой декогерентности

И. В. Волович

Математический институт им. В.А.Стеклова

Аннотация

Рассматриваются известные модели квантовых компьютеров, в частности квантовая машина Тьюринга и квантовые схемы, и предлагается новая, более общая модель, которая включает в себя ранее известные как частные случаи. Одна из основных нерешенных проблем, стоящих на пути построения практически полезного квантового компьютера – это проблема потери квантовой когерентности. Предлагается возможное решение этой проблемы при помощи управления параметрами, описывающими взаимодействие квантового компьютера с окружающей средой. Это решение основано на детальном исследовании динамики системы.

1 Введение

Стремительное развитие компьютерной технологии приводит к появлению все более быстродействующих и миниатюрных компьютеров, и в настоящее время мы уже на пороге, когда необходимо учитывать квантовые эффекты. Классические концепции теории информации и вычислительной математики должны быть пересмотрены с точки зрения квантовой механики. Переход от классических компьютеров к квантовым может привести к радикальному прогрессу в решении многих практических задач.

В настоящее время уже существуют малые экспериментальные квантовые компьютеры, работающие с несколькими кубитами. Во многих научных центрах ведутся исследования, направленные на создание практически полезного квантового компьютера. Хотя нет принципиальных ограничений на создание квантового компьютера, никто не может гарантировать, что практически полезный квантовый компьютер будет построен.

Квантовые вычисления затрагивают основы математики и физики. Различные аспекты квантовых вычислений и квантовых компьютеров обсуждаются в многочисленных работах, см. например [1]–[7]. В частности, Р. Фейнман отметил, что не существует эффективного метода моделирования квантомеханической системы на классическом компьютере и предположил, что, возможно, компьютер, действующий на основе квантовых принципов, сможет быть использован для эффективного моделирования.

Квантовый компьютер отличается от классического в такой же степени как квантовая механика отличается от классической механики. Это касается как хранения информации – единица квантовой информации есть кубит, т.е. двумерное комплексное пространство, в отличие от классического бита, – так и переработки информации. Квантовое вычисление – это последовательность унитарных матриц специального вида. Мы имеем дело здесь не с классической математической логикой, а с квантовой логикой.

Известны две модели квантовых компьютеров – квантовая машина Тьюринга и квантовые схемы. Их математическая формулировка дана ниже. В настоящей работе предлагается более общая математическая модель, которая включает в себя вышеуказанные как частные случаи.

Одна из основных нерешенных проблем, стоящих на пути построения практически полезного квантового компьютера – это проблема квантовой декогерентности, т.е. потери квантовой когерентности системы при взаимодействии с окружающей средой. Более точно квантовую декогерентность можно определить как быстрое убывание с течением времени недиагональных матричных элементов оператора плотности в вычислительном базисе. Проблема декогерентности квантовых компьютеров обсуждалась в ряде работ [8]-[12], однако, до настоящего времени убедительного решения предложено не было. Для анализа проблемы декогерентности использовалась модель спиновой системы, взаимодействующей с квантовым полем. В. Унру [8] обнаружил, что в этой модели происходит быстрая потеря квантовой когерентности. В [13] был предложен новый подход к этой проблеме, использующий управление параметрами системы для того, чтобы нейтрализовать эффекты декогерентности. Это предложение опиралось на предшествующий анализ динамики спин-бозонного гамильтониана, выполненный в стохастическом пределе [14]. Исследования проблемы декогерентности в квантовых компьютерах в работах [8]-[12] использовали специальный случай спин-бозонного гамильтониана, когда нет переходов с переворотом спина, и показано, что этот член играет решающую роль в редукции декогерентности. Отметим, что недавно Л. Виола и С. Ллойд также предложили использовать процессы с переворотом спина для динамического подавления декогерентности [15]. В их схеме процедура контроля параметров системы осуществляется при помощи последовательности высокочастотных импульсов.

В следующих разделах описаны математические модели квантовых компьютеров – квантовая машина Тьюринга, включая машину с многомерной лентой, квантовые схемы, а также новая, более общая модель. Далее рассмотрена проблема квантовой декогерентности и обсуждается ее возможное решение на основе управления параметрами системы.

Мне приятно посвятить эту работу Виктору Антоновичу Садовничему с благодарностью за поддержку исследований по квантовым компьютерам.

2 Квантовая машина Тьюринга

Квантовая машина Тьюринга (КТМ) получается квантованием классической машины Тьюринга (ТМ). Для того, чтобы дать точное описание машины Тьюринга, вводятся следующие определения. Пусть Σ – алфавит, т.е. конечное множество символов, тогда Σ^* обозначает набор слов над Σ . Пусть Q и Q – два различных алфавита.

Машина Тьюринга M задается следующим набором данных:

$$M = \{Q, \Sigma, \delta\},$$

где Q – набор состояний, включающий начальное состояние q_0 и конечное состояние q_1 ; Σ – внешний алфавит, включающий "пустой" символ a_0 . Программа задается функцией перехода

$$\delta : (Q \setminus q_1) \times \Sigma \rightarrow Q \times \Sigma \times \{R, L, N\}$$

Лента МТ представляет собой набор ячеек, т.е. одномерную решетку \mathbf{Z} . Каждая ячейка ленты содержит буквы из алфавита Σ . Вначале вводные данные $x = (x_1, \dots, x_n)$ записаны в ячейках $0, \dots, n-1$, все остальные ячейки заполнены "пустыми" символами a_0 .

В каждый момент времени машина находится в определенном состоянии $q \in Q$. Начальное состояние определяется q_0 . У машины имеется головка, которая может считать одну ячейку и сдвинуться с ячейки $i \in \mathbf{Z}$ на ячейку $i + 1$ или $i - 1$. Головка стартует из состояния q_0 . Если машина находится в состоянии q и читает a и если $\delta(q, a) = (q', a', \sigma)$, тогда машина меняет содержимое ячейки на a' , новое состояние машины – q' , и головка машины смещается на один шаг в направлении σ (R= право, L= лево, N= не двигается). Вычисления прекращаются в состоянии q_1 . Результат вычисления считывается последовательно начиная с 0 до первой ячейки содержащей букву a_0 .

Пусть на вход МТ подается слово x . Обозначим $t(x)$ число шагов, совершаемых МТ до достижения конечного состояния, а $s(x)$ будет числом различных ячеек, которые были считаны машиной. Время вычислений t и пространство s МТ определяются

$$t(n) = \max\{t(x) | |x| = n\},$$

где $|x|$ – длина x и

$$s(n) = \max\{s(x) | |x| = n\}$$

Конфигурация МТ есть вектор

$$K = (i, q, a_{j_1}, \dots, a_{j_p}),$$

где $i \in \mathbf{Z}$ – положение головки на ленте, $q \in Q$ – текущее состояние и $a_j \in \Sigma$ – содержимое ячейки j . Эквивалентно конфигурация может быть записана как

$$K = (i, q, F), \quad (1)$$

где $F : \mathbf{Z} \rightarrow \Sigma$ есть функция, имеющая конечное множество значений, отличных от a_0 . Многомерная МТ имеет d -мерную ленту \mathbf{Z}^d . Головка d -мерной МТ может двигаться в $2d$ направлениях.

Квантование классической машины Тьюринга осуществляется следующим образом. Пусть Σ и Q будут описанные выше алфавиты. Гильбертово пространство \mathcal{H} состояний квантовой машины Тьюринга (КТМ) состоит из векторов $\psi = \{\psi_K\}$, $\psi_K \in \mathbf{C}$, где K пробегает множество всех конфигураций классической машины Тьюринга. Скалярное произведение имеет вид

$$(\psi, \phi) = \sum_K \bar{\psi}_K \phi_K$$

В \mathcal{H} имеется ортонормированный базис $\{e(K)\}$, $(e(K), e(P)) = \delta_{KP}$, где $e(K)_{K'} = \delta_{K'K}$. Принимая во внимание (1) мы можем записать $e(K) = e(i, q, F)$.

Квантовой машиной Тьюринга называется набор $M = \{Q, \Sigma, \mathcal{H}, U\}$, где гильбертово пространство \mathcal{H} имеет указанный выше вычислительный базис $\{e(K)\}$ и U – унитарный оператор в \mathcal{H} , удовлетворяющий следующему условию: существуют три функции

$$u_\sigma : Q \times \Sigma \times Q \times \Sigma \rightarrow \tilde{\mathbf{C}}, \quad \sigma = 0, \pm 1$$

такие, что выполняется соотношение

$$(e(i, q, F), Ue(i', q', F')) = [\delta_{i'}^{i+1} u_1(z) + \delta_{i'}^{i-1} u_{-1}(z) + \delta_{i'}^i u_0(z)] \prod_{j \neq i} \delta_{F'(j)}^{F(j)} \quad (2)$$

для всех конфигураций (i, q, F) и (i', q', F') . Здесь $z = (q, F(i), q', F'(i))$. Произведение $\prod_{j \neq i} \delta_{F'(j)}^{F(j)}$ не исчезает только в том случае, если функции F и F' принимают различные значения лишь в точке i .

Здесь \tilde{S} есть поле комплексных чисел, вычислимых за полиномиальное время. Можно доказать, что можно ограничиться только полем рациональных чисел. Фундаментальная роль рациональных чисел подчеркивается также в p -адическом подходе в математической физике [16]. Будет очень интересно исследовать взаимосвязь между этими двумя подходами.

Унитарный оператор эволюции U_t задается произведением операторов U , $U_t = U \dots U$, $t = 0, 1, \dots$. Вычисления при помощи квантовой машины Тьюринга производятся следующим образом. Условимся, чтобы $i = 0$ и q_0 соответствовало начальному слову F_0 . Пусть $e(0, q_0, F_0)$ - соответствующий базисный вектор. Обозначим $\psi_t = U_t e(0, q_0, F_0)$. Если вектор ψ_t допускает разложение вида

$$\psi_t = \sum_F c(F) e(0, q_1, F)$$

по базисным векторам $e(0, q_1, F)$, каждый из которых имеет индекс q_1 , и вектор ψ_τ не допускает такого разложения ни при каком $\tau < t$, то вычисление считается законченным за время t и вектор ψ_t является итогом вычисления. При этом вероятность получения результата F есть $|c(F)|^2/N$, где $N = \sum |c(F)|^2$.

Классическая МТ может рассматриваться как частный случай КМТ, когда функции u_σ принимают значения 0 и 1.

Мы рассмотрели КМТ с одномерной лентой \mathbf{Z} . Важным свойством унитарного оператора эволюции U является свойство локальности (2). КМТ дает, возможно, не лучшую модель для квантовых вычислений. Имеются соображения в пользу того, что квантовые вычисления с локальным гамильтонианом и нелокальным оператором эволюции более реалистичны.

Чтобы увеличить интенсивность квантовых вычислений, мы можем рассмотреть КМТ с многомерной лентой. Известно, что классическая МТ с многомерной лентой полиномиально эквивалентна МТ с одномерной лентой. С другой стороны, свойства одномерной и многомерных спиновых моделей существенно различны. Следовательно, имеет смысл изучить многомерную КМТ. Мы определим КМТ M с многомерной лентой с помощью квантования классической МТ с многомерной лентой

Квантовой машиной Тьюринга M с многомерной лентой \mathbf{Z}^d является квадруплет $M = \{Q, \Sigma, \mathcal{H}, U\}$, где \mathcal{H} гильбертово пространство с базисом $\{e(i, q, F)\}$, $i \in \mathbf{Z}^d$, $q \in Q$ и $F : \mathbf{Z}^d \rightarrow \Sigma$. Условие локальности имеет вид

$$(e(i, q, F), U e(i', q', F')) = \left[\sum_{\sigma: |i-i'+\sigma| \leq 1} \delta_{i+\sigma}^{i'} u_\sigma(z) \right] \prod_{j \neq i} \delta_{F(i)}^{F'(j)}$$

для всех конфигураций (i, q, F) и (i', q', F') . Здесь $z = (q, F(i), q', F'(i))$.

Квантовые машины Тьюринга M с 2-х и 3-х мерными лентами имеют, возможно, большие шансы быть реализованными по сравнению с квантовыми компьютерами, связанными с одномерными моделями,

Что касается сложности модели Изинга, известно [17], что нахождение основного состояния в антиферромагнитном случае является P -сложным, а в ферромагнитном случае NP -сложным для произвольного графа и P -сложным для планарного графа.

Операторы эволюции с некоторыми специальными условиями локальности на двумерной решетке изучались в теории квантовых интегрируемых моделей [18].

Рассмотрим следующий пример КМТ. Пусть \mathcal{H} гильбертово пространство с базисом $e(i, \alpha)$, где $i \in \mathbf{Z}$ и $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Пусть U оператор в \mathcal{H} , удовлетворяющий условиям

$$(e(i, \alpha), U e(i', \alpha')) = \delta_{i+1, i'} A_{\alpha \alpha'} + \delta_{i-1, i'} B_{\alpha \alpha'}$$

для всех i, i', α, α' . Здесь $A = (A_{\alpha\alpha'})$ и $B = (B_{\alpha\alpha'})$ некоторые $n \times n$ матрицы. Тогда оператор U унитарен тогда и только тогда, когда матрицы A и B удовлетворяют следующим условиям:

$$AA^* + BB^* = I, A^*A + B^*B = I, AB^* = 0$$

Квантовое вычисление есть последовательность унитарных преобразований. Любая унитарная матрица может быть приближенно представлена как произведение унитарных матриц некоторого простейшего вида. Это представление является квантовым аналогом представления рекурсивной функции через примитивные функции. Известно, что множество $\{e^{2\pi i n \theta} | n \in \mathbb{Z}\}$, где θ – фиксированное рациональное число, плотно в единичной окружности. Можно сказать, что 1×1 матрица $e^{2\pi i \theta}$ является универсальной для всех унитарных 1×1 матриц.

Унитарная $d \times d$ -матрица U является матрицей *простейшего вида*, если (после возможного переупорядочения) она имеет вид блок-диагональной матрицы, такой, что каждый блок является или 2×2 -матрицей вращения

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

или числом $e^{i\theta}$ при некотором θ .

QMT_θ обозначает подкласс КМТ, для которых оператор эволюции имеет вышеописанный вид.

Существует классический алгоритм [4] (т.е. классическая МТ), такой, что для заданной $d \times d$ -матрицы U и $\epsilon > 0$ за время полиномиальное по d и $\log 1/\epsilon$ он вычисляет унитарные матрицы простейшего вида U_1, \dots, U_n , где n зависит полиномиально от d , так что

$$\|U - U_1 \cdots U_n\| < \epsilon.$$

Следовательно, чтобы выполнить произвольное квантовое вычисление нужно построить КМТ, выполняющую простые унитарные преобразования. Существует *универсальная* КМТ \mathcal{M} , которая выполняет приближенные вычисления простых унитарных преобразований с произвольно малой погрешностью. Более того, унитарный оператор эволюции КМТ \mathcal{M} содержит только блочные матрицы вращений на фиксированный угол. Гильбертово пространство \mathbb{C}^2 называется *кубитом*. Любая d -мерная унитарная матрица может быть записана как произведение $2d^2 - d$ унитарных матриц (*квантовых логических элементов*), каждая из которых действует только в 2-кубитном подпространстве.

Пусть заданы две КМТ M_1 и M_2 с одинаковым внешним алфавитом Σ . Говорят, что КМТ M_2 приближает КМТ M_1 , если выполняется следующее условие. Пусть M_1 для начальных данных $e(0, q_0, F)$ вычисляет результат ψ_1 за время t . Тогда M_2 для тех же начальных данных вычисляет результат ψ_2 за время полиномиальное по t и, кроме того,

$$\|\psi_1 - \psi_2\| < \epsilon.$$

Универсальная КМТ должна аппроксимировать любую КМТ. С этой целью нужно перечислить и закодировать все КМТ таким образом, чтобы любая КМТ могла рассматриваться как начальное данное для универсальной КМТ. Любая КМТ может быть представлена как конечный набор $\{Q, \Sigma, u_\sigma(q, a, q', a')\}$. Все такие наборы могут быть перечислены с помощью внешнего алфавита $\{0, 1, a_0\}$.

Существует КМТ \mathcal{M} (универсальная КМТ) [4] которая аппроксимирует любую КМТ. Более того, существует универсальная КМТ \mathcal{M} из класса QMT_θ , где $\theta, 0 < \theta < \pi/2$ такое, что $\cos \theta$ и $\sin \theta$ – рациональные числа; в частности, можно взять $\cos \theta = 3/5$, $\sin \theta = 4/5$.

Следовательно, чтобы реализовать квантовый компьютер достаточно имитировать вращения двух кубитных подсистем некоторой квантовой системы.

3 Квантовые схемы

Квантовые схемы являются квантовыми аналогами классических схем, которые вычисляют булевы функции. Классическая схема может быть представлена как ориентированный ациклический граф. Аналогично, квантовая схема – это последовательность унитарных матриц специального вида, связанных с (гипер)графом.

Рассмотрим квантовую систему с гильбертовым пространством \mathcal{H} , состоящим из l кубитов, т.е. $\mathcal{H} = H^{\otimes l}$, где кубит $H = \mathbb{C}^2$. Пусть $L = \{1, 2, \dots, l\}$ и $\mathcal{H} = H^{\otimes l} = H^{\otimes L}$. Если $g \subset L$, тогда $H^{\otimes L} = H^{\otimes g} \otimes H^{\otimes L \setminus g}$. Пусть U – унитарный оператор в $H^{\otimes r}$, $r \leq l$ и число элементов множества $g \subset L$ есть $r = |g|$. Обозначим $U^{(g)}$ соответствующий унитарный оператор в $H^{\otimes g}$ и пусть $\Lambda_g(U)$ его расширение до унитарного оператора в $H^{\otimes L}$ получаемое как $\Lambda_g(U) = U^{(g)} \otimes id|(H^{\otimes L \setminus g})$. Пусть $\mathcal{U} = \{V, W, \dots\}$ – конечный набор унитарных операторов (базис квантовых логических элементов), каждый из которых действует в одном из пространств H^{r_α} , $r_\alpha \leq l$, $\alpha = 1, \dots, q$.

Пара (L, Γ) , где L – множество и Γ – семейство подмножеств из L , называется *гиперграфом*. Если одно из подмножеств этого семейства выделено, тогда такой гиперграф называется сетью или схемой. Мы будем рассматривать гиперграфы (L, Γ) , где $L = \{1, \dots, l\}$ и $\Gamma = \{L_1, \dots, L_T\}$ – семейство из L , $L_i \subset L$.

Квантовая схема S_l – это 5-плет

$$S_l = \{(L, \Gamma), H^{\otimes L}, \mathcal{U}, U_\Gamma\}.$$

Здесь (L, Γ) , $H^{\otimes L}$ и \mathcal{U} – гиперграф, гильбертово пространство и базис квантовых логических элементов, и U_Γ – унитарный оператор $H^{\otimes L}$ вида

$$U_\Gamma = \Lambda_{L_T}(U_T) \dots \Lambda_{L_1}(U_1),$$

где U_i – унитарные операторы из базиса \mathcal{U} . Предполагается, что гиперграф и базис согласованы в том смысле, что U_i действует в $H^{r_{\alpha(i)}}$ и $|L_i| = r_{\alpha(i)}$, $i = 1, \dots, T$. Здесь α – функция из $\{1, \dots, T\}$ в $\{1, \dots, q\}$.

Если $\{e_a\}$, $a = 0, 1$ – базис в кубите \mathbb{C}^2 , тогда унитарная операция в \mathbb{C}^4 вида $e_a \otimes e_b \rightarrow e_a \otimes e_{a \oplus b}$ играет особую роль. Здесь \oplus означает сложение по модулю 2. Можно показать, что эта операция, вместе с кубитовыми операциями, достаточна для произвольного квантового вычисления.

Используя обозначения Дирака, запишем $|a_1, \dots, a_l\rangle = e_{a_1} \otimes \dots \otimes e_{a_l}$. Базис $\{|a\rangle = |a_1, \dots, a_l\rangle\}$ в $H^{\otimes l}$ называется вычислительным базисом. Здесь $a = \sum_{i=0}^{l-1} 2^i a_i$ – бинарное разложение числа a .

4 Обобщенная модель квантовых компьютеров

В этом разделе будет описана обобщенная модель квантовых компьютеров, включающая в себя квантовую машину Тьюринга и квантовые схемы как частные случаи. Будут использованы результаты А. Н. Колмогорова и В. А. Успенского по классической теории алгоритмов [23].

Пусть задан алфавит A и натуральное число k . (A, k) -*комплексом* G называется конечный связный ориентированный граф с отмеченной начальной вершиной, имеющий

следующую разметку на своих вершинах и ребрах: все вершины помечены буквами из A , и для всякой вершины все исходящие из нее ребра помечены натуральными числами из множества $\{0, \dots, k-1\}$

Пусть r – натуральное число (показатель локальности). r -окрестностью данного (A, k) -комплекса называется (A, k) -комплекс, состоящий из вершин исходного комплекса, достижимых из начальной вершины по ориентированным путям длины не более r , и всех соединяющих эти вершины ребер. Локальные действия в (A, k) -ансамбле преобразуют некоторые (A, k) -комплексы в другие (A, k) -комплексы. Любое r -локальное (A, k) -действие задается указанием числа r и следующего набора данных: $V \rightarrow \langle W, \gamma, \delta \rangle$, где γ и δ суть отображения из $v(V)$ в $v(W)$, причем δ – инъективно. Здесь V и W – некоторые (A, k) -комплексы и $v(G)$ есть множество вершин комплекса G . Применение r -локального (A, k) -действия к (A, k) -комплексу G приводит к переходу от G к новому (A, k) -комплексу G^* , см. описание этого перехода в [24].

Обобщенная модель квантовых вычислений M задается следующим набором данных:

$$M = \{S, r, \Omega, \mathcal{H}, U\}.$$

Здесь S – ансамбль (A, k) -комплексов (состояний); r – натуральное число; Ω – программа, задаваемая конечным набором r -локальных действий $V_i \rightarrow \langle W_i, \gamma_i, \delta_i \rangle$, причем $V_i \neq V_j$, если $i \neq j$; \mathcal{H} – гильбертово пространство, образованное комплексными векторами $\{\psi_G\}$, где $G \in S$; U – унитарный оператор в \mathcal{H} , удовлетворяющий следующему условию локальности:

$$(e(G'), Ue(G)) = 0,$$

если (A, k) -комплексы G и G' не связаны r -локальным действием из программы Ω . Здесь $\{e(G)\}$ – вычислительный базис в \mathcal{H} , $e(G)_{G'} = \delta_{G'}^G$.

Теорема. Квантовая машина Тьюринга и квантовые схемы могут быть представлены как специальные случаи обобщенной модели квантовых вычислений.

5 Декогерентность в квантовых компьютерах

Поддержка квантовой когерентности является ключевым условием того, чтобы квантовые компьютеры были более эффективными, чем классические. Представим среду, окружающую квантовый компьютер, как классический или квантовый белый шум [20]. Для простой модели спина, взаимодействующего с безмассовым квантовым полем, было обнаружено [8], что для квантовых вычислений необходима не только малость взаимодействия с окружением, но и время производства вычислений должно быть меньше тепловой временной шкалы $1/T$, где T есть температура начального состояния среды.

Выберем для квантовой машины Тьюринга клетки ленты (память) как квантовые системы с двумя уровнями (кубиты), причем уровни имеют одинаковую энергию и являются собственными состояниями спинового оператора σ_z . Каждое (чистое или смешанное) состояние квантовой схемы S_l может быть описано оператором плотности вида

$$\rho_S(t) = \sum_{a,b=0}^{2^l-1} \rho_{ab}(t) |a\rangle\langle b|, \quad (3)$$

где $\{|a\rangle\}$ есть базис в гильбертовом пространстве H^l . Степень потери когерентности задается внедиагональными элементами $\rho_{ab}, a \neq b$ оператора плотности в вычислительном базисе.

В простой модели квантового компьютера, взаимодействующего с окружением (резервуаром), представляющим из себя квантовое поле (семейство гармонических осцилляторов), предполагается, что общее гильбертово пространство есть $H^l \otimes \mathcal{F}$, где H^l есть пространство состояний l кубитов и \mathcal{F} есть бозонное пространство Фока. Если $\rho_{Tot}(t)$ есть оператор плотности всей системы, тогда для того, чтобы получить оператор плотности $\rho_S(t)$ квантового компьютера, нужно взять частичный след по пространству состояний резервуара

$$\rho_S(t) = \text{Tr}_{\mathcal{F}}(\rho_{Tot}(t)).$$

Гамильтониан, описывающий взаимодействие кубита с окружением (спин-бозонный гамильтониан), имеет вид

$$H_\lambda = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_x + \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z + \int dk \omega(k) a^\dagger(k) a(k) + \lambda\sigma_z(A(g^*) + A^\dagger(g)), \quad (4)$$

где σ_x и σ_z есть матрицы Паули, ϵ и Δ есть вещественные параметры, соответствующие энергии спина и параметру переворота спина. Здесь

$$A^\dagger(g) = \int a^\dagger(k) g(k) dk, \quad A(g^*) = \int a(k) g^*(k) dk,$$

где $a(k)$ и $a^\dagger(k)$ есть бозонные операторы рождения и уничтожения $[a(k), a^\dagger(k')] = \delta(k - k')$, описывающие окружение.

Одночастичная энергия окружения обозначается $\omega(k)$, где мы считаем $\omega(k) \geq 0$. Функция $g(k)$ есть форм-фактор, описывающий взаимодействие системы с окружением, λ есть константа связи. Хорошо известно, что на временах порядка t/λ^2 взаимодействие вызывает эффект порядка t . Таким образом, λ порождает естественную шкалу времени для наблюдаемых эффектов взаимодействия система-резервуар.

Леггет и другие [21] обнаружили весьма богатое поведение динамики гамильтониана (4), простирающееся от неубывающих осцилляций до экспоненциальной релаксации, также предсказывается степенная релаксация и полная локализация. Много качественных свойств динамики системы может быть описано в терминах температуры (то есть начального состояния окружения) и поведения для низких частот ω спектральной функции

$$J(\omega) = \int dk |g(k)|^2 \delta(\omega(k) - \omega). \quad (5)$$

Динамика, порождаемая гамильтонианом (4), в так называемом *стохастическом приближении* была рассмотрена в [14]. Было обнаружено, что режим чистых осцилляций и отсутствия потери когерентности описывается простым уравнением

$$J(\nu\Delta) = 0, \quad (6)$$

где

$$\nu = \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{\Delta}\right)^2}.$$

Основная идея метода стохастического приближения (см. [22]) имеет следующий вид. Если задан гамильтониан в виде

$$H_\lambda = H_0 + \lambda V, \quad (7)$$

тогда стохастический предел оператора эволюции

$$U^{(\lambda)}(t) = e^{itH_0} e^{-itH_\lambda}$$

есть следующий предел (если он существует в смысле сходимости матричных элементов):

$$U(t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} U^{(\lambda)} \left(\frac{t}{\lambda^2} \right).$$

Предельный оператор эволюции $U(t)$ описывает поведение модели в шкале времени t/λ^2 .

Для того, чтобы применить стохастическое приближение к гамильтониану (4), мы представим (4) в виде (7), где

$$H_0 = H_S + H_R.$$

Гамильтониан системы H_S имеет вид

$$H_S = -\frac{1}{2}\Delta\sigma_x + \frac{1}{2}\epsilon\sigma_z$$

и гамильтониан резервуара H_R есть

$$H_R = \int dk \omega(k) a^\dagger(k) a(k).$$

Оператор эволюции $U^{(\lambda)}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU^{(\lambda)}(t)}{dt} = -i\lambda V(t)U^{(\lambda)}(t),$$

где $V(t) = e^{itH_0} V e^{-itH_0}$ имеет вид

$$V(t) = \sigma_z(t)(A(e^{-it\omega} g^*) + A^\dagger(e^{it\omega} g))$$

и

$$\sigma_z(t) = e^{itH_S} \sigma_z e^{-itH_S}. \quad (8)$$

Вычислим (8). Собственные значения гамильтониана H_S есть

$$H_S |e_\pm\rangle = \lambda_\pm |e_\pm\rangle,$$

где

$$\lambda_\pm = \pm \frac{1}{2} \Delta \nu, \quad |e_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\mu_\mp^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_\mp \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mu_\pm = \frac{\epsilon}{\Delta} \pm \nu, \quad \nu = \sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon}{\Delta}\right)^2}.$$

Отметим, что

$$\langle e_\pm | \sigma_z | e_\pm \rangle = \frac{1 - \mu_\mp^2}{1 + \mu_\mp^2}; \quad \langle e_+ | \sigma_z | e_- \rangle = \langle e_- | \sigma_z | e_+ \rangle = 1/\nu.$$

Поэтому

$$\sigma_z(t) = \frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} D D^\dagger + \frac{1 - \mu_+^2}{1 + \mu_+^2} D^\dagger D + \nu^{-1} e^{it\nu\Delta} D + \nu^{-1} e^{-it\nu\Delta} D^\dagger,$$

где

$$D = |e_+\rangle \langle e_-|.$$

Гамильтониан взаимодействия теперь может быть переписан в виде

$$V(t) = \sum_{\alpha=1}^3 (D_\alpha^\dagger \otimes A(e^{-it\omega_\alpha} g^*) + h.c.),$$

где три спектральных частоты соответствуют соответственно переходам вверх, на месте и вниз двухуровневой системы, то есть

$$\omega_1(k) = \omega(k) - \nu\Delta, \quad \omega_2(k) = \omega(k), \quad \omega_3(k) = \omega(k) + \nu\Delta,$$

$$D_1 = \nu^{-1}D^+, \quad D_2 = \frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} DD^+ + \frac{1 - \mu_+^2}{1 + \mu_+^2} D^+ D, \quad D_3 = \nu^{-1}D^+.$$

Спектральные частоты $\omega_2(k)$ и $\omega_3(k)$ положительны.

Следовательно, в стохастическом пределе мы получаем только белый шум. Однако следы взаимодействия остаются, т.к. после предела система эволюционирует с новым гамильтонианом, который равен старому гамильтониану плюс слагаемое, зависящее от взаимодействия и от начального состояния поля. Этот эффект назван в [14] *эффектом Чеширского кота*.

Предельное уравнение эволюции может быть написано в виде

$$\frac{dU(t)}{dt} = Db^+(t)U(t) - D^+U(t)b(t) - (\gamma + i\sigma)D^+DU(t) - i\varphi U(t), \quad (9)$$

где

$$\gamma = \nu^{-2}\pi J(\nu\Delta),$$

$$\sigma = \nu^{-2}(I(-\nu\Delta) - I(\nu\Delta)) + \left(\left(\frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \mu_+^2}{1 + \mu_+^2} \right)^2 \right) I(0),$$

$$\varphi = \nu^{-2}I(-\nu\Delta) + \left(\frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} \right)^2 I(0),$$

и мы обозначаем

$$J(\omega) = \int dk |g(k)|^2 \delta(\omega(k) - \omega) \quad ; \quad I(\omega) = P.P. \int_0^\infty \frac{d\omega' J(\omega')}{\omega' - \omega},$$

где $P.P.$ означает интеграл в смысле главного значения. Операторы $b(t)$, $b^+(t)$ удовлетворяют соотношениям квантового белого шума

$$[b(t), b^+(t')] = \gamma \delta(t - t').$$

В обозначениях квантового стохастического исчисления уравнение (9) имеет вид

$$dU(t) = (DdB_t^+ - D^+dB_t - (\gamma + i\sigma)D^+D - i\varphi)U(t).$$

Отметим, что все параметры γ , σ и φ в эволюционном уравнении (11) выражаются в терминах спектральной плотности $J(\omega)$ и параметров Δ и ϵ исходного гамильтониана.

Для нулевой температуры стохастическое приближение вакуумного ожидания гейзенберговской эволюции σ_z имеет вид

$$P(t) = \langle U^*(t)\sigma_z(t)U(t) \rangle.$$

Из уравнения (9) можно получить уравнение Ланжевена для $P(t)$ с решением

$$P(t) = \nu^{-1}e^{-\gamma t}(D^+e^{i(\sigma-\nu\Delta)t} + De^{-i(\sigma-\nu\Delta)t}) +$$

$$+ D^+D \left(\frac{1 - \mu_+^2}{1 + \mu_+^2} - \frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} \right) e^{-2\gamma t} + \frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2}. \quad (10)$$

Мы получаем чистые осцилляции и сохранение когерентности, если

$$\gamma = \nu^{-2} \pi J(\nu \Delta) = 0. \quad (11)$$

Для ненулевой температуры мы получаем стохастическое эволюционное уравнение той же формы, только с новыми константами γ , σ и φ . Точнее,

$$\gamma = \nu^{-2} \pi J(\nu \Delta) \coth \frac{\beta \nu \Delta}{2},$$

$$\sigma = \left[\left(\frac{1 - \mu_+^2}{1 + \mu_+^2} \right)^2 - \left(\frac{1 - \mu_-^2}{1 + \mu_-^2} \right)^2 \right] (I_+(0) + I_-(0)) +$$

$$+ \nu^{-2} (I_+(-\nu \Delta) - I_+(\nu \Delta) + I_-(-\nu \Delta) - I_-(\nu \Delta)),$$

где спектральные плотности

$$J_+(\omega) = \frac{J(\omega)}{1 - e^{-\beta \omega}} \quad ; \quad J_-(\omega) = \frac{J(\omega) e^{-\beta \omega}}{1 - e^{-\beta \omega}}.$$

Здесь $J(\omega)$ есть спектральная плотность (5) и β есть обратная температура. Функции $I_{\pm}(\omega)$ определяются как

$$I_{\pm}(\omega) = P.P. \int \frac{d\omega' J_{\pm}(\omega')}{\omega' - \omega}.$$

Выражение для $P(t)$ имеет тот же вид, что и для нулевой температуры (10), но с новыми константами γ и σ , зависящими от температуры. Условие для сокращения потери когерентности то же самое (11). Судя по всему, это условие есть весьма слабое требование на параметры взаимодействия между квантовым компьютером и окружением. Таким образом, можно надеяться на использование этого условия для сокращения потери когерентности.

Список литературы

- [1] P. Benioff, *The computer as a physical system: a microscopic quantum mechanical Hamiltonian model of computers as represented by Turing machines*, J.Statist.Phys. 22 (1980) 563-591
- [2] R. Feynman, *Quantum mechanical computers*, Found. Phys. 16 (1986) 11-20
- [3] D. Deutsch, *Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer*, Proc.Roy.Soc.London Ser.A, 400 (1985) 96-117
- [4] E. Bernstein and U. Vazirani, *Quantum complexity theory*, in Proc. of the 25th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, ACM, New York, 1993, pp.11-20.
- [5] P. Shor, *Algorithms for quantum computations: Discrete logarithms and factoring*, in Proc. of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1994, pp.124-134
- [6] A. Barenco, C.H. Bennett, C. Cleve, D.P. DiVincenzo, N. Margolius, P. Shor, T. Sleator, J.A. Smolin and H. Weinfurter, *Elementary gates for quantum computations*, Phys. Rev.A, 52 (1995) 3457-3467

- [7] M. Ohya *NP-complete problems and quantum computing* , preprint, Tokyo Science Univ, 1998.
- [8] W. Unruh, *Maintaining coherence in quantum computers*, Phys. Rev.A, 51 (1995) 992-997
- [9] G.M. Palma, K.-A. Suominen and A.K. Ekert, Proc.Roy.Soc. London Ser.A, 452 (1996) 567-574
- [10] D.P. DiVincenzo and P.W. Shor, Phys.Rev.Lett. 77 (1996) 3260-3265
- [11] P. Zanardi and M. Rasetti, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 3306-3311
- [12] L.M. Duan and G.C. Guo, Phys. Rev. Lett. 79 (1997) 1953-1958
- [13] I.V. Volovich, *Quantum Computers and Neural Networks*, Invited talk at the International Conference on Quantum Information held at Meijo University, 4-8 Nov. 1997
- [14] L. Accardi, S.V. Kozyrev and I.V. Volovich, *Dynamics of dissipative two-state systems in the stochastic approximation*, Phys.Rev.A, 56 (1997) N3
- [15] L. Viola and S. Lloyd, *Dynamical suppression of decoherence in two-state quantum systems*, LANL e-print quant-ph/9803057
- [16] В.С. Владимиров, И. В. Волович и У.И. Зеленов, *p-Адический анализ и математическая физика*, Наука, 1994
- [17] D.J.A. Welsh, *Complexity: Knots, Colouring and Counting*, Cambridge University Press, 1993
- [18] L.D. Faddeev and A.Yu. Volkov, *Algebraic quantization of integrable models in discrete space-time*, LANL e-print hep-th/9710039
- [19] И. В. Волович, *Математические модели квантовых компьютеров*, Лекции прочитанные в МГУ, 1998
- [20] T. Hida, H.-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit, *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*, Kluwer Academic Publishers, (1993)
- [21] A.J. Leggett, S. Chakravarty, A. Garg and L.D. Chang, Rev.Mod.Phys.59 (1987) N 1
- [22] L. Accardi, Y.G. Lu and I.V. Volovich, *Quantum Theory and Its Stochastic Limit*, 1999, Oxford University Press (to be published)
- [23] А.Н. Колмогоров, В.А. Успенский, *К определению алгоритма* , УМН, т.13 (1958) в.4(82) с.3-28
- [24] В.А. Успенский, А.Л. Семенов *Теория алгоритмов: основные открытия и приложения*, Наука, 1987