

# Математическая теория роста населения Земли

С.П. Капица

Институт физических проблем РАН

Точные науки не объясняют, они редко даже обсуждают явления, и в основном предлагают модели. Под моделью подразумевают математическую конструкцию, которая описывает наблюдаемые явления. Смысл таких математических конструкций состоит исключительно в том, что они должны работать.

*Джон фон Нейман*

## Аннотация

На основе представлений демографии, истории и антропологии поставлена демографическая проблема роста населения Земли. Посредством методов нелинейных динамических систем развита феноменологическая теория роста. Намечены некоторые исследовательские задачи, которые приведут к развитию математических подходов к решению демографической проблемы.

## 1 Постановка демографической задачи

Рост народонаселения Земли, которое в настоящее время достигает 6 миллиардов, до последнего времени рассматривался в демографии как результат развития отдельных стран и регионов. Однако более глубокое рассмотрение этого процесса показало, что население всей Земли следует рассматривать как единую, открытую динамическую систему, развитие которой на протяжении всей истории человечества описывается общим процессом. Этот все ускоряющийся рост начался 1,6 миллионов лет тому назад и сегодня завершается демографическим переходом. Переход приведет к очень быстрому, почти внезапному, прекращению роста и стабилизации населения мира на уровне 12–13 миллиардов в течении ближайшего столетия. Переживаемая нами демографическая революция стала фундаментальной перестройкой всего хода истории, где до сих пор доминировал количественный рост, на новую парадигму развития.

Феноменологическая теория показала, что скорость роста пропорциональна квадрату численности населения мира. Такой нелинейный процесс приводит к режиму с обострением [12, 13] и завершается демографическим переходом, который интерпретируется как неравновесный фазовый переход [14]. Развитые представления находят свое подтверждение в данных антропологии, истории и демографии и дают количественное описание развития человечества на всем пути его эволюции [3].

В данной статье при постановке демографической проблемы основное внимание будет уделено ее математическому оформлению. Несмотря на то, что первоначальное рассмотрение было по возможности упрощено, но мы не будем упускать из виду те принципиальные предположения, которые, при всей элементарности изложения, стоят за развитым подходом. Затем мы укажем на те задачи, которые поставлены теорией для ее развития.

При таком подходе все время следует иметь в виду близость и сложность исследуемого объекта и, что затрудняет наше отношение к нему, – желание, часто неосознанное, искать непосредственное объяснение происходящего через наглядные и, казалось бы, очевидные соображения. Этот подсознательный редукционизм делает более отвлеченное рассмотрение трудным и парадоксальным, особенно тогда, когда мы обращаемся к поиску и применению общих законов развития системы человечества как комплексной междисциплинарной проблемы.

Население мира в момент времени  $T$  мы будем характеризовать числом людей  $N(T)$ , что будет ведущей аддитивной переменной, когда в первом приближении можно пренебречь всеми остальными переменными. В этом состоит принцип подчинения, ставший одним из основных представлений синергетики. Для демографической задачи асимптотический принцип подчинения следует рассматривать как математическое выражение предложенного нами принципа демографического императива [2]. Вследствие этого принципа рост глобального населения следует собственным, имманентным закономерностям развития открытой системы и не зависит от ресурсов. Принцип демографического императива противоположен популяционному принципу Мальтуса, утверждавшего, что рост ограничивается ресурсами, будь то пищи или энергии.

В основе рассмотрения лежат асимптотические решения, полученные при усреднении соответствующих уравнений и переменных. При усреднении всех переменных кроме главной, возникает существенное упрощение задачи, поскольку число переменных сокращается до двух. Таким путем исключаются все быстро меняющиеся переменные и в уравнении роста остается самая медленно меняющаяся величина:

$$\frac{\partial N}{\partial T} = \overline{F(N, T, X, Y, K, \tau, \nabla^2 N, \dots)} \rightarrow \frac{dN}{dT} = f(N, K, \tau), \quad (1)$$

где  $K$  – параметр порядка,  $\tau$  – масштаб времени.

Такое исключение других переменных – пространственных и внутренних системных – стало одним из основных методов решения нелинейных задач и привело к широкому применению асимптотических решений. Как всякий приближенный метод, оно ограничено определенными пределами. В демографической проблеме это соответствует тому, что рост рассматривается на большом числе поколений. Тогда можно ожидать, что в первом приближении сама длительность поколения, продолжительность жизни человека, не будет явно входить в расчет, равно как и изменения распределений людей по возрасту, полу и пространству, и тому множество процессов, происходящих в системе, которые имеют меньшую временную протяженность, чем основное развитие.

Только в следующем приближении процессы рождаемости и смертности, которыми оперирует демография, следует учесть путем введения конечной жизни человека и его репродуктивного периода, что и оказалось решающим шагом в построении теории.

## 2 Статистика и автомодельность роста

Полученные в результате усреднения – так называемые укороченные уравнения роста – имеют статистическую природу и описывают поведение в среднем. Это означает, что усреднены не только сами данные, но и те функции от них, которые в совокупности описывают поведение системы. Поясним это примером из физики, которым послужит представление о давлении газа. Как феноменологический параметр состояния газа в кинетической теории, давление определяется в результате усреднения всех скоростей и всех видов молекул, которые как индивидуальные характеристики, больше не рассматриваются. Эта аналогия интересна и тем, что состояния идеального газа самоподобны и

уравнение состояния описывается степенной функцией. Учет же конечного размера молекул и их взаимодействий в модели неидеального газа Ван-дер-Ваальса ограничивает асимптотику автомодельности состояний идеального газа, подобно тому как в демографической проблеме учет протяженности жизни человека определяет пределы асимптотики. Заметим, что, подобно Ван-дер-Ваальсовому, взаимодействие, ответственное за рост, пропорционально  $N^2$ .

При анализе динамики системы тогда, когда имеется множество степеней свободы и многофакторный процесс, обладающий статистической стационарностью, следует ожидать, что рост происходит самоподобно. При этих условиях в основе системного моделирования лежит предположение о его *автомодельности*, что выражается в масштабной инвариантности, скейлинга, этого процесса. Смысл этой основной гипотезы состоит в том, что утверждается постоянство относительной скорости роста системы:

$$\lim_{\Delta N, \Delta T \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{(N - N_1)} \frac{(T - T_1)}{\Delta T} = \frac{d \ln |N - N_1|}{d \ln |T - T_1|} = \alpha, \quad (2)$$

где  $N_1$  и  $T_1$  – опорные значения численности и времени. В большинстве случаев  $N_1 = 0$  и  $N$  положительно. Соотношение (2) приводит к тому, что самоподобный рост с необходимостью должен описываться степенными законами вида

$$N = C(T_1 - T)^\alpha, \quad (3)$$

где  $C$  и  $\alpha$  суть постоянные, а время отсчитывается от некоего момента  $T_1$ . В таких самоподобных процессах проявляется постоянство отношений изменений численности населения и времени. Простейший, но далеко не единственный пример такого рода – линейный рост, когда  $\alpha = 1$ . В развитой модели мы увидим, что линейным законом можно будет описать начальную эпоху роста.

Условие автомодельности может быть получено из функционального уравнения, выражающего масштабную инвариантность

$$\frac{n(t_a)}{n(t_b)} = n\left(\frac{t_a}{t_b}\right), \quad (4)$$

решением которого является

$$n(t) = t^\alpha, \quad (5)$$

что и дает основную формулу, выражающую самоподобие как динамическую инвариантность роста [10]. В плоскости  $\ln n - \ln t$  все решения (4) изображаются прямыми с наклоном  $\alpha$  и именно логарифмическое пространство лучше всего отображает динамику гиперболического роста системы человечества.

Для демографической проблемы необходимо уже в данных демографии найти аналогичное соотношение, которое описывало бы необходимым образом рост населения мира. Ряд авторов обращали внимание на то, что этому лучше всего отвечает степенной гиперболический рост. Форстер в 1960 году предложил эмпирическую формулу,  $C = (187 \pm 0,4) \cdot 10^9$ ,  $T_1 = 2027 \pm 5$  и  $\alpha = -0,99 \pm 0,009$ , обработав методом наименьших квадратов данные о населении мира от Р.Х. до 1960 г. [5]. Заметим, что точность определения показателя  $\alpha$  представляется несколько преувеличенной. Позднее Хорнер [6] предложил аналогичное выражение

$$N = \frac{C}{T_1 - T} = \frac{200 \cdot 10^9}{2025 - T} \quad (6)$$

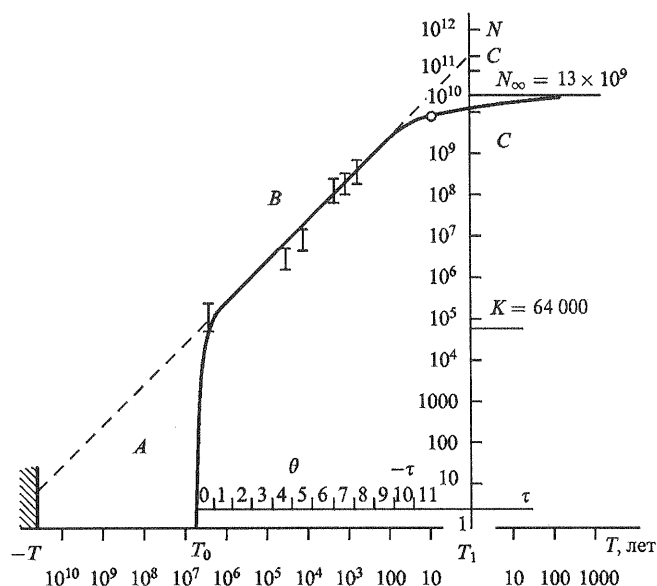


Рис. 1. Рост населения мира в двойном логарифмическом масштабе.

при  $\alpha = -1$ , которое с удивительной точностью описывает рост населения Земли в течение сотен и даже многих тысяч лет. Независимо к такому описанию роста пришел и автор [1].

Однако мы это выражение будем рассматривать не как эмпирическую формулу, а как автомодельное решение, как первый шаг в создании модели. Таким образом, данная формула математически и физически корректно описывает процесс самоподобного развития, следующий гиперболическому закону эволюции.

Несмотря на то, что уравнение (6) имеет необходимые свойства и хорошо согласуется с данными демографии, такие формулы, тем не менее, принципиально ограничены областью, где они применимы. Во-первых, по мере приближения к 2025 году, население мира будет стремиться к бесконечности. Во-вторых, и в далеком прошлом получается столь же абсурдный результат, поскольку при сотворении Вселенной 20 миллиардов лет тому назад уже должно было присутствовать 10 человек.

Таким образом, автомодельное решение ограничено как в будущем, так и в прошлом, и справедливо поставить вопрос: где границы его применимости? Теория автомодельных процессов указывает, что такие степенные решения верны только как промежуточно асимптотические [10].

### 3 Регуляризация решений и построение модели

С одной стороны, по мере прохождения сингулярности демографического перехода и приближения к  $T_1$  должна быть ограничена максимальная скорость роста, когда приращение населения мира за время  $\tau_1$  не может быть больше самого населения. Иными словами, рост ограничивается кинематически, как реакция открытой системы, а не вследствие отсутствия ресурсов. С другой стороны, когда  $N$  мало, в начале развития от  $T_0$  можно предположить, что минимальная скорость роста не может быть меньше появления одного человека, вернее гуманоида, за характерное время  $\tau_0$ . Такого типа предположения обычно вводятся на начальном этапе роста. Например, в химической кинетике постулируется период индукции, предшествующий развитию бимолекулярных реакций.

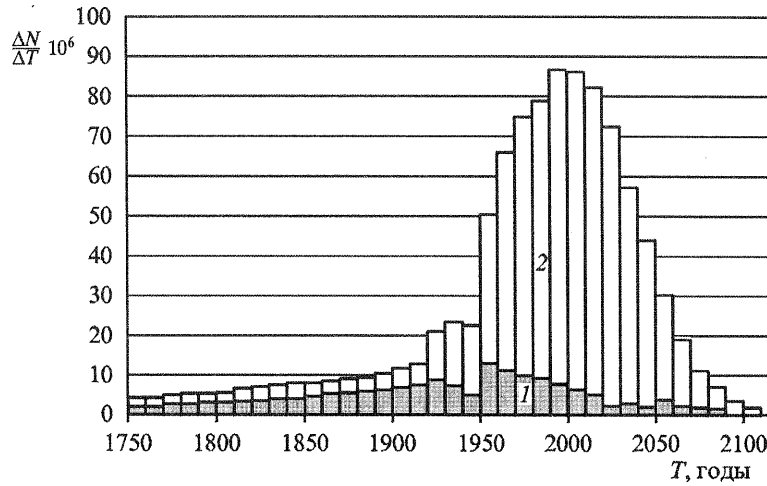


Рис. 2. Демографический переход по данным ООН. Прирост населения мира с 1750 по 2100 гг. усредненный за декады. 1 – развитые страны и 2 – развивающиеся страны. Резкость перехода видна по тому, что начало шкалы времени роста 4,5 миллиона лет тому назад находится в одном километре влево!

Эти условия могут быть выражены неравенствами:

$$\left( \frac{dN}{dT} \right)_{\min} \bigg|_{\substack{N \rightarrow 1 \\ T \rightarrow T_0}} \geq \frac{1}{\tau_0} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\tau_1} \geq \left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)_{\max} \bigg|_{T \rightarrow T_1} \quad (7)$$

которые указывают, что предельный переход в (2) невозможен, так как непрерывность числа людей ограничена целыми числами и в пределе – одним человеком, а время характерным интервалом – временем человека –  $\tau_0$  и  $\tau_1$ , причем одно время относится к современности, а другое – к далекому прошлому и имеет размерность [время/человек]. В дальнейшем мы увидим, что численно их можно принять равными.

Для вывода уравнений, в которых учитываются ограничения в скорости роста в начале развития, следует обратиться к выражениям для основного, гиперболического роста, и внести в это выражения член с начальной скоростью  $1/\tau$ . Для учета конечной скорости роста при достижении момента времени  $T_1$  соответственно в знаменателе следует добавить  $\tau^2$ . Таким способом математические особенности развития автомодельного роста устраняются подобно тому, как в теоретической физике регуляризуются решения вблизи сингулярности поля. В дальнейшем мы увидим, что оба способа устранения особенности приводят к одинаковому виду при переходе к безразмерным переменным. Итак, скорость роста последовательно описывается тремя дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dN}{dT} = \frac{N^2}{C} + \frac{1}{\tau}, \quad (8a)$$

$$\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2} \quad \text{и} \quad (8b)$$

$$\frac{dN}{dT} = \frac{C}{(T_1 - T)^2 + \tau^2}. \quad (8c)$$

Таким образом, если ввести в модель характерное время жизни человека как микроскопический параметр феноменологии, то удастся не только определить пределы применимости (2), но и продолжить это решение как в прошлое, охватывающие всю историю человечества от  $T_0$  до  $T_1$ , так и дальше, в предвидимое будущее.

Таблица 1. Сравнение роста населения мира с расчетом

Год	$10^{-6} N$	$10^{-6} N_m$	Год	$10^{-6} N$	$10^{-6} N_m$
$-4,4 \cdot 10^6$	(0)	0	1960	3019	3226
$-1,6 \cdot 10^6$	0,1	0,1	1965	3336	3467
-35000	1–5	2	1970	3698	3737
-15000	3–10	8	1975	4080	4037
-7000	10–15	17	1980	4450	4370
-2000	47	43	1985	4854	4735
0	100–230	89	1990	5292	5132
1000	275–345	181	1995	5765	5555
1500	440–540	362	2000	6251	6000
1650	465–550	515	2005	6729	6454
1750	735–805	715	2010	7561	6909
1800	835–907	885	2025	8504	8174
1850	1090–1170	1158	2050	10019	9683
1900	1608–1710	1661	2075	10841	10563
1920	1811	1998	2100	11185	11094
1930	2020	2218	2125	11390	11437
1940	2295	2486	2150	11543	11675
1950	2416–2515	2816	2200	11600	11980
1955	2752	3009	2500	UN data	12539

Значения постоянных, определяющих решение, получаются на основе сравнения современных демографических данных с расчетами по формуле, полученной интегрированием (8с):

$$N = \frac{C}{\tau} \arctg \left( \frac{T_1 - T}{\tau} \right), \quad (9)$$

описывающей эпоху **В** до демографического перехода и сам переход.

Наилучшее приближение из того ряда вариантов, которые представлены на рис.2, дается моделью при значения постоянных, определенных с точностью до нескольких процентов:

$$C = (185 \pm 1) \cdot 10^9, \quad T_1 = 2005 \pm 1, \\ \tau = 45 \pm 1 \quad \text{и} \quad K = \sqrt{\frac{C}{\tau}} = 64\,100 \pm 1000 \quad (10)$$

В принципе можно было бы ввести два значения для  $\tau$  – одно для начальной эпохи и другое – для эпохи демографического перехода. Но оценка начала развития  $T_0 = 4,5$  миллиона лет тому назад, полученное при значении  $\tau_0 = \tau_1 = 45$  годам, вполне удовлетворительно отвечает данным палеоантропологии. Поэтому нет смысла во введении второго значения для феноменологической постоянной времени и можно ограничиться одним значением для  $\tau$ .

Расчеты показывают, что значения  $T_1$  и  $C$  от величины  $\tau$  зависят слабо. Выбор же  $\tau$  определяется, по существу, ростом населения мира вблизи  $T_1$ , т.е. практически после 1960 г. [2]. Для этого, помимо самих значений  $N(T)$ , следует обратиться к значениям абсолютной скорости (8с) и относительной скорости роста

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dT} = \frac{\tau}{[(T_1 - T)^2 + \tau^2] \arctg \frac{T_1 - T}{\tau}}, \quad (11)$$

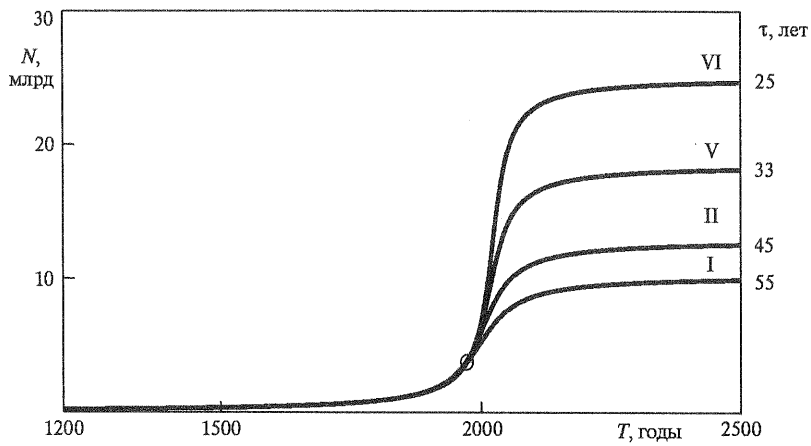


Рис. 3. Рост населения Земли при различных значениях  $\tau$

которая проходит через свое максимальное значение

$$\left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)_{\max} = \frac{72,5}{\tau} \% \quad (12)$$

в год при  $T_m = T_1 - 0,43\tau$ , и достигает 1,6% в 1986 году (без учета короткого времени усиленного роста после войны с 1950 по 1970г.).

Скорость роста (8с) пройдет через максимум при  $T_1$ , чему соответствует относительная скорость роста

$$\left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)_{T_1} = \frac{2}{\pi\tau} = \frac{63,6}{\tau} \% \quad (13)$$

в год при максимальном значении до 92 миллионов в год, которое ожидается к 2005 году. Из-за введения  $\tau$  значение критической даты максимума роста  $T_1$  смещается от 2025 к 2005 году – сдвиг, который следует ожидать и который связан с расщеплением особенности полюса при  $T_1$ .

В Таблице 1 значения для населения мира  $N$  приведены в миллионах. На период от 1950 до 1995 года представлены данные ООН. Прогнозы после 2000г. следуют последней вероятностной проекции IIASA В.Лутца и С.Щербова [8]. Данные, предшествующие 1950 году, взяты из литературы и представляют наиболее достоверные оценки. Согласие последних расчетов демографов и модели впечатляюще и находится в пределах точности. Заметим, что точность даже современных демографических данных составляет 3–5%. Приведено, однако, больше значащих цифр, что имеет смысл тогда, когда есть числовой ряд и по нему вычисляют разности для определения скорости изменений.

Для описания демографического перехода Шене [7] ввел понятие демографического мультипликатора  $M$ , которое в рамках модели можно определить как

$$M = \frac{N(T_1 + \tau)}{N(T_1 - \tau)} = \frac{\arctg 1}{\arctg -1} = 3,00 \quad (14)$$

где  $T_1 - \tau$  и  $T_1 + \tau$  определяют момент начала и конца демографического перехода как время наибольшей скорости роста и уменьшения населения Земли. Для этой интегральной характеристики мирового демографического перехода обработка демографических данных дает  $M = 2,95$ .

## 4 Безразмерные переменные

Для того, чтобы лучше понять смысл предложенных решений, целесообразно перейти к безразмерным переменным:

$$t = \frac{T - T_1}{\tau} \quad \text{и} \quad n = \frac{N}{K}, \quad (15)$$

где время измеряется в единицах  $\tau$ , а население – в единицах  $K$ . Основной и единственной динамической характеристикой системы является константа  $K$ , равная 64 000. Но этот параметр явится и внутренним масштабом численности когерентной группы людей, определяющей коллективный характер того взаимодействия, которым описывается рост. Обратим внимание на то, что при извлечении корня (10) одному  $K$  следует приписать размерность [число людей], как вводится размерность числа частиц, а другое значение  $K$  безразмерно.

Как большой параметр теории,  $K$  определяет тот значительный диапазон времени и численности в асимптотических выражениях, которыми на трех участках последовательно описывается рост – **А**, **В** и **С** (рис.1). Первая – эпоха **А** – представляет линейный рост, переходящий затем в гиперболический рост эпохи **В**, завершающийся взрывным развитием режима с обострением. В результате демографического перехода решение перейдет к асимптотически стабилизированному режиму роста населения (эпоха **С**).

При введении  $t$  и  $n$ , уравнения (7 а, б, в) и их решения примут вид

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2 + 1}{K}, \quad n = -\operatorname{ctg} \frac{t}{K} \quad (16 \text{ а})$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2}{K}, \quad nt = -K \quad (16 \text{ б})$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{K}{t^2 + 1}, \quad n = -K \operatorname{arc} \operatorname{ctg} t \quad \text{или} \quad (16 \text{ в})$$

$$\frac{dt}{dn} = \frac{t^2 + 1}{K}, \quad t = -\operatorname{ctg} \frac{n}{K}, \quad (16 \text{ г})$$

откуда видна сопряженность переменных при замене  $n$  на  $t$  и как (соответственно одинаковым образом) они стремятся к 0.

Подчеркнем, что вблизи перехода независимой переменной становится  $n$ , которая и определяет ход времени  $t$ , что видно при замене переменных в (16 г). Так системное время становится как бы зависимой переменной. Физическое время при этом, естественно, не меняется, однако, такая замена независимых переменных характерна для задач с обострением решений. Действительно, момент обострения – время демографического перехода – определяется ростом населения, т.е. самым ходом развития: ср. уравнения (16 а) и (16 г). Сопряженность переменных  $t$  и  $n$  есть следствие нелинейности задачи, в которой как бы нет старшинства независимой переменной, которой полагают внешнее, ньютоновское время. В нашем же случае речь идет об историческом, внутреннем времени системы человечества [15].

Скорость роста в эпоху **В** можно представить в виде

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N^2}{K^2}. \quad (17)$$

Отсюда виден смысл параметра  $K$ , определяющего скорость роста за поколение, как результат бинарного взаимодействия групп по  $K$  человек в каждой. Это нелинейное



выражение для коллективного взаимодействия, которое моделирует все процессы экономической, социальной, культурной и биологической природы и эффективно суммирует все взаимодействия, происходящие в обществе. Оно может быть представлено как некое эффективное поле, действующее на все входящие в систему человечества части, взаимодействием, квадратичным по  $N$ , происходящим в самоорганизующейся системе человечества. Появление коллективного закона обязано информационному взаимодействию и связано с сознанием каждого человека при взаимодействии с результирующим общественным сознанием. Распространение информации происходит по цепной реакции и приводит в первом приближении, к зависимости роста от квадрата численности населения всего мира. Очевидно, что в системе человечества нет аддитивности и модель не применима к отдельным странам и регионам. С другой стороны, в уравнении роста не надо учитывать и миграцию населения.

Из (17) непосредственно следуют пределы его применения, если предположить, что за поколение  $\Delta T = \tau$  или  $\Delta t = 1$ : при начале квадратичного роста численность растет на одного человека, а в конце эпохи **B** – на саму численность населения мира на этот момент, т.е.

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = 1, \quad N_{A,B} \approx K \quad \text{и} \quad \frac{\Delta N}{\Delta t} = N, \quad N_{B,C} \approx K^2 \quad (18)$$

## 5 Предел и начало роста; число людей, когда-либо живших

На основе полученных выражений легко определить предел, к которому стремится численность человечества в обозримом будущем:

$$N_{\infty} = \pi K^2 = 13 \cdot 10^9, \quad (19)$$

и время начала роста в эпоху **A**:

$$t_0 = -\frac{\pi}{2}K \quad \text{или} \quad T_0 = T_1 - \frac{\pi}{2}K\tau = T_1 - \frac{\pi}{2}\sqrt{C\tau} = -4,5 \cdot 10^6 \quad (20)$$

лет тому назад. Если же проинтегрировать процесс роста от  $T_0$  до  $T_1$ , то можно оценить полное число людей, когда либо живших

$$P_{01} = K \int_{t_0}^{t_{1/2}} \operatorname{ctg} \frac{t}{K} dt + K \int_{t_{1/2}}^0 K \operatorname{arc} \operatorname{ctg} t dt = \frac{1}{2}K^2 \ln K + \frac{1}{2}K^2 \ln(1 + K) \approx K^2 \ln K \quad (21)$$

или соответственно для модели  $P_{01} = 2K^2 \ln K = 90 \cdot 10^9$ . При достижении момента времени  $t_{1/2} = -\sqrt{K}$  или  $T_{1/2} = T_1 - \tau\sqrt{K} \simeq 9000$  лет д.н.э. на свет явилась половина всех людей, которые жили между  $T_0$  и  $T_1$ . Этот момент находится посередине всего пути развития человечества, исчисляемого в логарифмическом масштабе и соответствует, как мы увидим, времени неолита.

В этих оценках  $\ln K = 11$ , а средняя длительность жизни человека принята равной  $\tau/2 = 22,5$  лет, что практически удваивает значения интегралов (21). Так эти оценки приведены в соответствии с продолжительностью жизни 20 лет, принятой в расчетах антропологов и демографов и приведших к значению 80 – 150 миллиардов для числа людей, когда либо живших. Оценка же для  $T_0$  и  $P_{0,1}$  мало зависит от  $\tau$  и варианта модели.

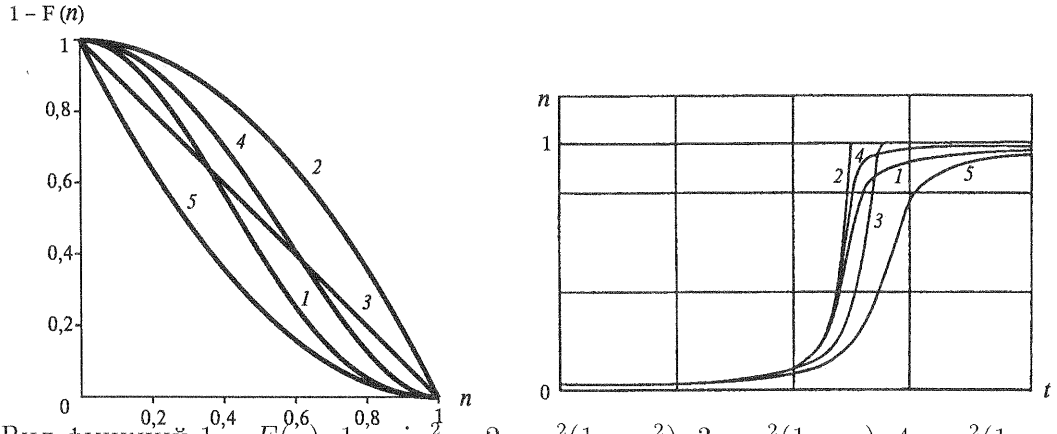


Рис. 4. а: Вид функций  $1 - F(\nu)$ : 1  $-\sin^2 n$ , 2  $-n^2(1 - n^2)$ , 3  $-n^2(1 - n)$ , 4  $-n^2(1 - n^2)^2$ , 5  $-n^2(1 - n)^2$ .

б: Переход при различных функциях  $1 - F(\nu)$

## 6 Асимптотика решений и автономные уравнения

Асимптотический переход одного решения (16 а) в другое (16 с) виден, если обратиться к разложению в ряд выражений для роста от  $T_0$  и  $T_1$

$$n = -\frac{K}{t} \left( 1 - \frac{1}{3t^2} + \frac{1}{5t^4} - \dots \right), \quad t^2 > 1, \quad (22a)$$

и

$$n = -\frac{K}{t} \left( 1 - \frac{t^2}{3K^2} - \frac{t^4}{45K^4} - \dots \right), \quad t^2 < K^2\pi. \quad (22b)$$

Эти функции пересекаются при  $t_{1/2} = -\sqrt{K}$  под углом  $\frac{2}{3}\frac{1}{K}$  путем почти гладкого перехода при больших значениях  $K$ .

Естественно, что начало роста можно отсчитывать от  $T_0$  и строить решение от  $t_0$ , и, исключив  $t$  из (16с), написать одно автономное уравнение роста, в котором скорость роста зависит только от состояния системы – от  $n$  – и не зависит явно от времени:

$$\frac{dn}{dt} = K \sin^2 \frac{n}{K} + \frac{1}{K}. \quad (23)$$

Это автономное уравнение, годное для всех времен, имеет решение, которое уже не сшито из двух решений (16 а) и (16 с):

$$n = K \arctg \left( \frac{1}{\sqrt{K^2 + 1}} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{K^2 + 1}}{K^2} t' \right). \quad (24)$$

При  $K \gg 1$  решению может быть придана симметричная форма

$$\operatorname{tg} \frac{n}{K} = \frac{1}{K} \operatorname{tg} \frac{t'}{K}, \quad (25)$$

где время  $t'$  отсчитывается от  $t'_0 = 0$ , а дифференциальному уравнению (23) соответствует уравнение

$$\frac{dn}{dt} = \frac{K^2 - 1}{K} \sin^2 \left( \frac{n}{K} \right) + \frac{1}{K}, \quad (26)$$

решение которого практически совпадает с (24).

Далее, дифференциальное уравнение роста легко преобразовать в разностное уравнение, связывающее значения  $N_{m+1}$  и  $N_m$  для последующих поколений:

$$N_{m+1} = N_m + K^2 \sin^2 \frac{N_m}{K^2} + 1, \quad (27)$$

которое удобно для численного моделирования, исследования флуктуаций и устойчивости.

При построении переходного режима вид функций был задан исходным дифференциальным уравнением (8). Но можно поставить вопрос о единственности такого описания и рассмотреть другие функции, ограничивающие рост, и приводящие к другому поведению вблизи  $T_1$ .

Так, заменив функцию  $\sin^2 n/K$  на алгебраическое выражение, можно получить уравнение, дающее близкое описание перехода:

$$N_{m+1} = N_m + K^2 \sin^2 \frac{N_m}{K^2} + 1 \approx N_m + \frac{N_m^2}{K^2} \left(1 - \frac{N_m^2}{\pi^2 K^4}\right)^2 + 1 \quad (28)$$

Это выражение имеет вид, сходный с логистическим уравнением, являясь в своей правой части квадратом логистического уравнения для скорости роста (см. вариант 4, рис.4).

Вместо  $\sin^2 n/K$  рассмотрим, как общий случай, зависимость перехода от интерполяционного полинома  $1 - F(\nu)$ , где  $\nu = n/n_\infty$ , ограничивающей рост, и введем это выражение в дифференциальное уравнение роста, являющееся обобщением (21):

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n^2}{K} [1 - F(n/n_\infty)]. \quad (29)$$

При монотонном возрастании функции  $F(\nu)$  от начального значения  $F(0) = 0$  до  $F(1) = 1$ , когда  $\nu$  достигнет своего предельного значения  $\nu_\infty = 1$ ,  $(\frac{d\nu}{dt})_\infty = 0$  уже не зависит от самого вида  $F(\nu)$ . Следовательно, при сохранении основного системного множителя  $n^2$  в правой части дифференциального уравнения роста, мы не получим убывания  $n$  после перехода, а асимптотическое поведение после перехода определяется значением производной  $(\frac{dF(\nu)}{dt})_\infty = F'(\nu_\infty)$  при  $\nu_\infty \rightarrow 1$ . Если  $F'(1) = 0$ , то асимптотика в будущем степенная, а если касания при  $F(1)$  нет, то асимптотика экспоненциальная. В дальнейшем мы увидим, что эти решения устойчивы. В прошлом, при малых  $n$  и  $t \rightarrow -\infty$  асимптотика (29) степенная и все решения идентичны, так как определяются главным членом  $n^2/K$  в правой части (29).

Зависимое поведение времени в будущем, после  $T_1$ , от роста населения хорошо видно по интегральному выражению

$$t - t_1 = K \int_{n_1}^n \frac{dn}{n^2 [1 - F(n/n_\infty)]}, \quad (30)$$

которое при  $t > t_1$  определяется характером особенности полюса от  $1 - F(n/n_\infty)$  при  $n/n_\infty \rightarrow 1$ . Из интегрального представления для времени (30) наглядно видно, как именно время зависит от численности населения при асимптотическом стремлении к предельному значению  $n_\infty$  и как это развитие, пока существует зависимость роста от  $n^2$  и разумных предположений о виде функции  $F(n/n_\infty)$ , невозможно отклонить от пути, ведущего к предельному значению  $n_\infty$ . Эта зависимость времени от  $n$  определит устойчивость развития после  $T_1$ .

При всех представлениях  $F(n/n_\infty)$  ширина области перехода оказывается порядка 1, т.е.  $\tau$ , поэтому в дальнейшем мы будем пользоваться исходными выражениями для

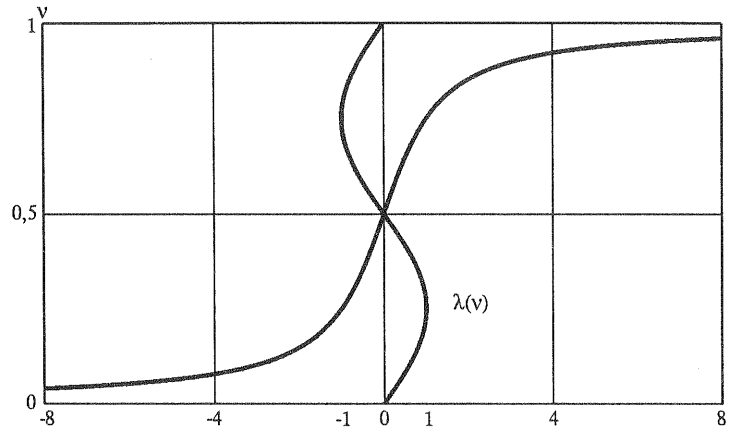


Рис. 5. Показатель Ляпунова для системного роста в эпохи В и С.

роста (8) и (17), при которых все вычисления не только приобретают определенную прозрачность и симметрию, но и отвечают простым предположениям о демографическом переходе.

Сравним решение уравнений (16) с дифференциальным уравнением и логистическим уравнением Ферхюльста, предложенного в 1838 году для описания экспоненциального роста с насыщением:

$$\frac{d\nu}{dt} = \nu(1 - \nu); \quad \nu = \frac{1}{1 + e^{-t}}. \quad (31)$$

Как видно, при сравнении функции  $1/\pi \arctg t$  с логистикой они очень близки в области перехода. Однако их асимптотики в прошлом и будущем существенно разные: у функции  $\arctg t \approx -t^{-1}$  она степенная, а у логистики – экспоненциальная.

## 7 Динамическая устойчивость роста

Представляет интерес анализ устойчивости процесса роста. Если мы обратимся к линейным критериям устойчивости по Ляпунову, рассматривая поведение системы при малом возмущении  $\delta n = \delta n_0 \exp \lambda t$ , то, используя (26) для показателя роста неустойчивости получим

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{dn}{dt} \right) = \sin 2 \frac{n}{K}. \quad (32)$$

Таким образом, от  $T_0$  до  $T_1$  рост по этому критерию неустойчив, и при  $n = \frac{\pi}{4} K$  в 1960 г. или  $t = -1$  достигает  $\lambda_{max} = 1$ . Только после  $T_1 = 2005$  г. с перемены знака  $\lambda$ , рост становится системно устойчивым, асимптотически приближаясь к нулю при  $\lambda < 0$ .

При обобщенной форме переходного режима критерием Ляпунова станет соотношение

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{dn}{dt} \right) = 2 \frac{n}{K} [1 - F(n/n_\infty)] - \frac{n^2}{K} F'(n/n_\infty). \quad (33)$$

При  $n \rightarrow n_\infty$  первый член в  $n$  раз меньше второго и приближается к 0 со стороны положительных величин, а второй член или отрицателен, или при касании  $\frac{dF(n)}{dn} = 0$ .

В результате можно ожидать линейную устойчивость при всех разумных предположениях о виде функции  $1 - F(n/n_\infty)$ . В случае резкого спада  $1 - F(n/n_\infty)$ , когда  $\lambda < 0$ ,

при экспоненциальной асимптотике может возникнуть колебательный режим вблизи  $n_\infty$ , что подтверждается численным моделированием.

Таким образом, до точки перегиба при  $t = 0$  или  $T_1 = 2005$ г. развитие неустойчиво. Стабилизирующим фактором, несомненно, является динамика пространственного распределения населения, так что расселение народов будет оказывать демпфирующее влияние на рост [4]. Это следует и из того, что добавление к кинетическому уравнению роста пространственного диффузионного члена  $\nabla^2 n$  приводит к стабилизации роста системы, поскольку собственные значения лапласиана отрицательны.

При обсуждении устойчивости развития потеря устойчивости связывалась с распадом системного роста и, как следствие, уменьшением населения, которое затем восстанавливалось, и рост продолжался по прежней, имеющей предельный характер, траектории. Такое системное поведение, свидетельствующее о большой устойчивости роста, проявляется в восстановлении населения Земли после мировых войн XX века. Общие потери населения мира составили 250 миллионов или 10%, но были быстро восстановлены, в результате чего рост численности населения мира вернулась на невозмущенную траекторию [3].

## 8 Время роста и демографические циклы

Существенное свойство модели – это изменение масштаба исторического времени, происходящее по мере роста человечества. Трансформацию времени легко представить, если ввести понятие о мгновенном времени  $T_e$  экспоненциального роста, рассматривая его в зависимости от времени  $T$ , как характеристику времени перемен. Тогда для эпохи **В** получим: (ср.8 с)

$$T_e = \left( \frac{1}{N} \frac{dN}{dT} \right)^{-1} = \frac{1}{\tau} [(T_1 - T)^2 + \tau^2] \arctg \frac{T_1 - T}{\tau} \quad (34)$$

или приближенно

$$T_e(T) \approx T_1 - T. \quad (35)$$

После перехода (при стабилизации численности населения)  $T_e$  станет быстро расти как  $T_e = (T - T_1)^2 / \tau$  при  $T > T_1$ .

Оценим периодичность, которая проявляется в логарифмическом представлении времени и при которой циклы составляют геометрическую прогрессию, представленную как последовательность интервалов

$$\Delta T(\theta) = K\tau e^{-\theta}, \quad (36)$$

где  $\theta$  – целая часть  $\ln t' = \ln |t - t_0|$  и номер периода, начиная с  $\theta = 0$  до  $\theta = 11 = \ln K$  (см. рис.1). Тогда продолжительность  $0^\infty$  периода  $\Delta T_A = K\tau = 2,9$  млн. лет, и для времени развития получим:

$$T_1 - T_0 = K\tau \sum_0^{\ln K} e^{-\theta} = \frac{e}{e-1} K\tau = 1,582 K\tau \approx \frac{\pi}{2} K\tau = 1,571 K\tau. \quad (37)$$

Таким образом, в каждый из  $\ln K = 11$  периодов эпохи **В** жило по  $2K^2 = 8,2$  миллиардов людей, тогда как сама продолжительность циклов изменялась от 1 миллиона до 45 лет, а 8 миллиардов выступает как инвариант системного роста (ср. 18). Небольшая

Таблица 2. История человечества в логарифмическом масштабе

Эпоха	Период	Дата	Число людей	Культурный период	$\Delta T$ лет	История, культура, технология
С		2175	$12 \cdot 10^9$	Стабилизация населения Земли		Переход к пределу $13 \cdot 10^9$ Изменение возрастного распределения
		2050	$10 \cdot 10^9$		125	Глобализация
		2005	$6,5 \cdot 10^9$	Мировой демографический переход	45	Урбанизация
	$T_1$				45	Настоящее время Компьютеры
В	11	1960	$10^9$	И		Мировые войны Электричество
	10	1840		С	125	
	9	1500		О	340	
	8	500 н.э.		Р	1000	
	7	2000 до н.э.	$10^8$	И	2500	Промышленная Революция Книгопечать
	6	9000		Я	1000	
	5	29000			7000	
	4	80000			20000	
	3	0,22 мл	$10^7$	К	51000	Географические Открытия Падение Рима Рождество Христово Греческая Цивилизация Индия, Китай, Будда Междуречье, Египет Письменность, Города Одомашнивание, Сел.хоз.
	2	0,6 мл		А	$1,4 \cdot 10^5$	
	1	1,6 мл		М	$3,8 \cdot 10^5$	
				Е	$1 \cdot 10^6$	
А	$T_0$	4,5 мл	(1)	Н		Заселение Америки  <i>Homo Sapiens</i> Язык, Огонь
				Ы		
				Й		Заселение Европы и Азии Рубила Речь
				В		
				Е		Галечная культура, Чоппер <i>Homo Habilis</i>
				К		
						Отделение Гоминидов от Гоминоидов

разница в оценках продолжительности развития от  $T_0$  до  $T_1$  в формуле (37) связана с тем, что в первом случае движение в прошлое происходит по гиперболе, а в втором случае – по графику  $\lg t'/K$ , который на своем начальном линейном участке описывает развитие в эпоху А – время антропогенеза. Сравнение данных антропологии и истории с расчетным расписанием развития человечества показывает, что в пределах точности данных и неизбежного неполного синхронизма глобальных этапов согласие вполне удовлетворительное.

Это дает наглядное представление о сжатии исторического времени при развитии демографической системы, на которое обращали внимание историки [15]. Отмеченную цикличность формально можно связать с тем, что  $P_B = K^2 \ln t'$  периодична в комплексной плоскости или же с тем, что мы имеем дело с бифуркациями в более полной системе уравнений, описывающих рост.

## 9 Некоторые вопросы, поставленные теорией роста

Развитые представления позволили поставить демографическую проблему и на этой основе дать достаточно полное и согласованное с данными истории, антропологии и демографии описание роста человечества. Таким образом, может быть предложена непро-

тиворечивая теория роста. Ее значение состоит в том, что рассматривается сцепленное в нелинейной системе рост и развитие, причем рост, который измеряется числом на всем протяжении истории, становится функцией развития. По-существу так в историю вносятся количественные и математические методы исследования. Однако для понимания того феноменологического взаимодействия, которое ответственно за развитие, необходимо более полное раскрытие природы сознания человека.

Уже обращалось внимание на то, что модель не применима к отдельным странам и регионам, но само мировое развитие оказывает влияние на все его части. Изоляция какой либо части от мирового сообщества неминуемо приведет к отставанию изолята как в численном росте, так и развитии. Причем необходимым ресурсом развития является информация. Иными словами, человечество с самого начала развивалось как глобальная информационная система, только в прошлом время развития  $T_e$  (35) становилось все больше по мере удаления в глубь веков.

Представления о системности и глобальности мировой истории отмечалось многими крупными историками, равно как и изменение эффективного хода времени развития. Недаром антропологи традиционно пользовались логарифмической шкалой для описания развития человечества. Однако только приведенные представления позволяют понять происхождение ряда явлений в истории человечества и описать их в количественной форме. Вместе с этим, сформулируем некоторые задачи, которые возникают в рамках развитой теории.

Во первых, хотелось бы получить более полное представление о происхождении периодичности демографических циклов. Для исследования периодичности и обоснования (40) целесообразно рассмотрение демографической задачи в пространстве частот и исследование разностного уравнения (31), подобное тому, что сделано для логистического отображения.

Исследование пространственного распределения населения Земли можно вести на основе анализа квазилинейных уравнений теплопроводности, где источником является квадратичный рост населения. При этом следует учесть как медленную диффузию по Земле, так и более быстрые процессы концентрации людей в города, приводящие в результате к неравномерному, фрактальному распределению населения, так характерному для населения стран и регионов.

Асимптотически ведущая переменная  $N(T)$  зависит только от времени, а динамика роста не зависит от распределения населения по Земле. Это очень существенное свойство динамики системы населения, и оно связано с разделением переменных при квадратичном росте для автомодельных решений квазилинейных уравнений теплопроводности и рассмотрено в [12, 13]. Тем не менее, устойчивость решения  $N(T)$  требует учета пространственных и внутренних системных переменных, как это делается в синергетике, поскольку без этого трудно понять происхождение стабильности основного движения – роста населения.

С другой стороны, каковы пределы асимптотического подхода, в частности, для независимости в первом приближении скорости глобального роста от распределения населения по пространству и от плотности населения и ресурсного обеспечения человечества в прошлом и будущем?

Неолит приходится точно на середину развития в логарифмическом представлении времени, и к этому моменту прожила половина людей, когда-либо живших. Делают ли эти обстоятельства время неолита, выделенным не только на метаисторическом уровне, но и математически, временем начала конденсации человечества в города, подобно тому, как в космологии рассматривается конденсация вещества в галактики?

Грубая оценка флуктуаций в системе населения мира предложена в [2]. В относитель-

ной мере флуктуации возрастают с приближением к рубежу эпохи **В** и **С**, а в абсолютной степени – с ростом человечества, и в наше время могут достигать

$$\delta N = \sqrt{K N} \approx K \sqrt{K} \approx 20 \cdot 10^6. \quad (38)$$

Эта оценка сделана в предположении того, что флуктуирует  $n$ , а не  $N$ . Иными словами, масштаб флуктуаций связан с параметром  $K$  как меры когерентности. В этом случае в относительной мере флуктуации будут достигать своей максимальной величины порядка  $K$  в начале эпохи **В**, что соответствует представлениям антропологов о характере развития в то далекое время. Представляло бы интерес рассмотреть флуктуации на основе теории неравновесных открытых систем [14].

Наконец, можно ли ввести вместо численности населения распределения по возрасту с учетом рождений и смерти и таким образом перейти к более полной статистической модели роста населения Земли?

Для демографической задачи асимптотические методы оказываются мощным средством исследования явлений, и это в полной мере оказалось верным для проблемы динамики населения Земли. В то же время развитая теория, которая позволяет подробно описать многие черты роста, неизбежно ставит вопрос о том, чем и как эволюционно (в смысле антропогенеза) определяется время  $\tau$  и особенно  $K$ , которые в рамках феноменологической модели вводятся как системные свойства человека и человечества. Если время  $\tau$  определяется не столько физическим развитием человека, сколько временем, необходимым для формирования его разума, то каково происхождение, в том числе эволюционное, значения  $K$  как параметра системной сложности, при которой человек мог самоорганизоваться в человечество?

В заключение следует особо подчеркнуть, что развитая теория использует минимальное число параметров, значения которых устойчивы и избыточно определены по отношению к исходным данным демографии и антропологии. При всей относительной элементарности произведенных вычислений укажем на их соответствие общим требованиям системного подхода, приведшим к постановке и решению в первом приближении демографической проблемы. Таким образом, поставленная и исследованная выше демографическая проблема может дальше рассматриваться уже во всеоружии современных методов нелинейной динамики, синергетики и математики. Это открывает путь к комплексным исследованиям, которые должны привести к развитию последовательной статистической феноменологической теории роста человечества, направления, которое следует назвать теоретической антропологией.

## Библиография

1. *Капица С. П.* Математическая модель роста населения мира, "Математическое Моделирование", Т.4, N. 6, 65-79, 1992.
2. *Капица С. П.* Феноменологическая теория роста населения Земли, "Успехи физических наук", 166, N1, 63-80, 1996.
3. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего, Москва, "Наука", 1997
4. *Белавин В. А., Капица С. П., Курдюмов С. П.* "Журнал вычислительной математики и математической физики", N6, 1998.
5. *Forster, von H. et al* Doomsday: Friday, 13 November, A.D. 2026, "Science", Vol. 132, 1291, 1960. Disc. see Vol. 133, 942. 1961.



6. *Horner von S. J.* of British interplanetary society, v.28, 691, 1975.
7. *Chesnais J. C.* The Demographic Transition, Oxford, 1992.
8. *Lutz W.* Ed. The future population of the world: what can we assume today. Revised edition, IIASA and Earthscan press, London, 1996.
9. *Николис Г., Пригожин И. Р.* Самоорганизация в неравновесных системах, пер. с англ., Мир, М., 1984.
10. *Баренблат Г. И.* Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. М., 1985.
11. *Хакен Г.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах, пер. с англ., Мир, М. 1985.
12. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах квазилинейных параболических уравнений. "Наука", Москва, 1986.
13. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П. и др.* Квазилинейные уравнения теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. "Итоги науки", Соврем. проблемы математики, 28, ВИНТИ, М. 1987
14. *Климонтович Ю.Л.* Статистическая теория открытых систем, т.1, Москва, "Янус", 1995
15. *Савельева И.М., Полетаев А.В.* История и время. В поисках утраченного. "Языки русской культуры", Москва, 1997

