

# Об одном парадоксе симметрии в гидродинамике струйных течений

В.П.Карликов, О.В.Трушина

Механико-математический факультет

Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

## Аннотация

Работа посвящена малоизвестному и практически неизученному феномену в механике жидкостей, который можно отнести к числу так называемых парадоксов симметрии. Представлены результаты исследования автоколебательных режимов фонтанирования плоских струй жидкости из-под свободной поверхности. Относительно недавно было установлено, что такие течения жидкости возникают в весьма широких диапазонах значений скоростей истечения, глубин затопления и ширины струй.

Использование анализа размерностей позволило на основе результатов проведенных экспериментов установить ряд нетривиальных особенностей этого наблюдаемого в природе и технологических процессах класса течений. Объяснен механизм возникновения и устойчивого существования изученного явления, а также указаны алгоритм построения и вид простого приближенного решения задачи определения периода автоколебаний, находящегося в хорошем соответствии с данными экспериментов.

Одним из основных результатов исследований является вывод о вероятной неустойчивости всех известных многочисленных симметричных стационарных точных решений задачи о плоских фонтанах в широком диапазоне определяющих параметров, что и объясняет причину имеющего место парадокса симметрии. Указан также пример возможного практического использования полученных результатов.

Авторы работы, учитывая междисциплинарный характер сборника сочли целесообразным дать предварительно краткую информацию общего характера о гидродинамических парадоксах и их роли в научных исследованиях. Такая возможность существенно облегчается в связи с наличием двух прекрасных книг, в которых анализу гидродинамических парадоксов уделяется основное внимание. Одной из них является классическая монография известного математика Г.Биркгофа "Гидродинамика" [1], который первым обратил внимание на первостепенное значение парадоксов и предложил возможный вариант их классификации. Автор предисловия к русскому переводу этого труда академик Л.И.Седов отметил полезность проведенного Г.Биркгофом анализа известных парадоксов для понимания смысла многих гидромеханических теорий, их связи с экспериментом и выявления важных физических особенностей описываемых движений.

Другим фундаментальным исследованием, содержащим обсуждение еще большего числа гидродинамических парадоксов и в котором также дана более современная и полная их классификация, является монография [2].

Для выполнения указанной предварительной задачи авторы считают достаточным процитировать ряд утверждений из этих книг, дополнив их лишь кратким описанием некоторых из приводимых в них и других известных гидродинамических парадоксов.

Если Г.Биркгоф под парадоксом понимает "такой вывод из теории, который расходится с физическими наблюдениями, создавая кажущееся противоречие", то авторы второй книги говорят о *парадоксах моделирования*, связанных с особенностями используемой теоретической модели (парадоксы физической модели) или с постановкой соответствующей математической задачи (парадоксы математической модели), и об *эффектах*, имея в виду обнаруженные в опытах ситуации, являющиеся неожиданными, противоречащими ортодоксальной интуиции.

Г.Биркгоф отмечает важную роль гидродинамических парадоксов в научном познании, подчеркивая, что они "имеют очевидное философское значение как иллюстрация глубокого проникновения методов дедуктивной и индуктивной логики в научные исследования".

Обращая внимание на нетривиальный характер наблюдаемых эффектов и выводов из научных теорий, парадоксы способствуют формированию более адекватного существу дела научного мировоззрения. "Возбуждая воображение исследователей, они служат мощным импульсом для дальнейшего развития науки".

"Со временем парадоксы перестают казаться таковыми, они входят составной частью в основы знания и деформируют сам способ мышления". В современной физике, например, так называемый "здоровый смысл" терпит неизменное фиаско, и наоборот, торжествуют "парадоксальные истины". Квантовая механика, теория элементарных частиц или специальная теория относительности вначале выглядели парадоксально, но потом стали привычным рабочим инструментом физиков, способствовали выработке нового релятивистского стиля мышления [2].

Исключительно важное значение имеют парадоксы в гидродинамике. "Искусством применения гидродинамических теорий," – считает Г.Биркгоф, – "можно овладеть лишь изучив парадоксы". Это относится и к механикам и к математикам-теоретикам, поскольку парадоксы "открывают множество явлений, не предвиденных классическими математическими теориями", о чем "говорит даже поверхностная попытка математической классификации: существуют парадоксы переопределенности, парадоксы особых точек, парадоксы аппроксимации, парадоксы топологических переупрощений и др."

Предлагаемый в [2] вариант классификации парадоксов показан на рис.1.

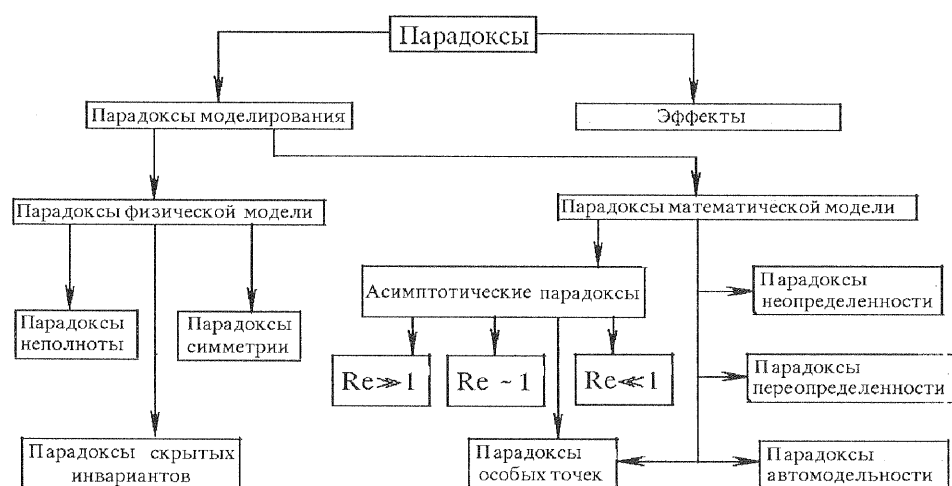


Рис.1.

Как указывалось, этот вариант кроме *парадоксов моделирования* включает также так

называемые *эффекты*. Приведем сначала примеры некоторых из эффектов.

С очень давних времен известен эффект Торричелли, состоящий в невозможности поднять с помощью движущегося вверх в трубе поршня (рис.2а) жидкость из открытого водоема на любую высоту, вопреки существовавшему в свое время постулату – ”природа боится пустоты”. Торричелли объяснил, что максимально возможная высота подъема жидкости  $H_{max}$  достигается, когда вес поднятого столба жидкости уравнивается силой, равной произведению площади поперечного сечения трубы на разность давления атмосферного и давления насыщенных паров жидкости в полости, образующейся под поршнем при подъеме его на эту и большую высоту.

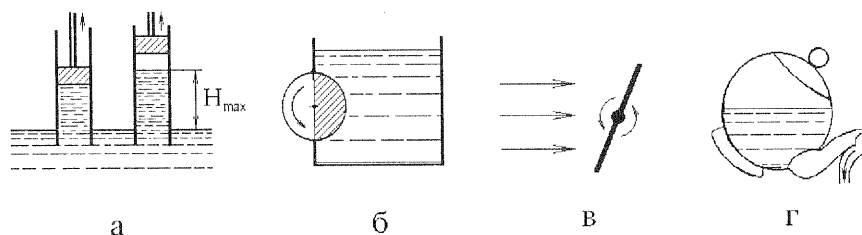


Рис.2.

В качестве еще одного эффекта, называемого парадоксом Жуковского, можно привести пример, демонстрирующий возможность неправильного понимания смысла закона Архимеда. Цилиндр с горизонтальной осью, размещенный в прямоугольном вырезе плоской вертикальной стенки сосуда с жидкостью (рис.2б) не вращается под действием подъемной силы, действующей на погруженную в жидкость половину его, хотя, казалось бы, она должна создавать необходимый для вращения момент. В рассматриваемом случае, однако, закон Архимеда неприменим, поскольку тело не со всех сторон окружено жидкостью, как этого требует его вывод. Сила, действующая на цилиндр со стороны жидкости, проходит через его ось и не создает момента и, следовательно, построить таким образом *perpetuum mobile* (вечный двигатель), т.е. получить работу без затраты энергии, невозможно.

В [2] упоминается изученный Жуковским эффект самовращения поставленного против ветра прямоугольного флюгера, ось вращения которого совпадает с его осью симметрии и которому сообщено начальное вращательное движение в том или ином направлении (рис.2в). Исследование этого эффекта подсказало Н.Е.Жуковскому идею о возникновении подъемной силы крыла за счет образования циркуляции вокруг него.

К числу эффектов можно отнести и описанное Юнгом еще в 1800 году явление, состоящее в том, что свободная или затопленная тонкая струя жидкости, направленная по касательной к криволинейной поверхности, например, поверхности цилиндра, может длительное время двигаться вдоль нее не отрываясь. Этот эффект, называемый эффектом Коанда (или иногда эффектом ”чайника”) можно наблюдать при наливании воды из чайника, когда вытекающая струя не отрывается от носика, а течет вначале вдоль его внешней поверхности (рис.2г). Известным изобретателем и ученым Коанда была предложена и даже реализована модель летательного аппарата, основанная на использовании этого эффекта. Механизм эффекта Коанда продолжает изучаться теоретиками и в настоящее время.

Хорошо известен и эффект Томса. Оказывается, добавление ничтожных количеств высокомолекулярных соединений (полимеров) в турбулентный поток жидкости, текущей в трубе, может существенно (до 80%) снизить гидравлическое сопротивление. Обна-

ружение этого эффекта стимулировало проведение научных и прикладных исследований многими учеными в большом числе научных организаций различных стран мира. Эти исследования продолжаются до настоящего времени, что так же свидетельствует об огромной познавательной роли эффектов.

Значительный период времени гидродинамики занимаются изучением эффекта Грэя, обнаружившим несоответствие энергетических запасов быстроплавающих морских животных (дельфинов, меч-рыбы и др.) тем энергетическим затратам, которые потребовались бы их твердым моделям для преодоления гидродинамического сопротивления при движении со столь же большой скоростью. В частности, применительно к дельфинам изучались различные варианты гипотез, объясняющих этот феномен, и в их числе гипотеза, предполагающая наличие активной деформации кожного покрова дельфина (в виде "бегущей волны") в процессе взаимодействия его с обтекающим потоком, обеспечивающей существенное снижение сопротивления. Проводились многочисленные эксперименты и численный анализ с использованием ЭВМ. И в настоящее время проблему, связанную с возможным механизмом снижения сопротивления, нельзя считать закрытой.

Количество эффектов в гидродинамике огромно. Многие из них в результате последующего изучения получили исчерпывающее объяснение и перестали казаться парадоксальными, но некоторые из них и сейчас остаются предметом изучения для теоретиков и экспериментаторов.

Переходя к *парадоксам моделирования* заметим, что относящиеся к ним *парадоксы математической модели* связаны с некорректностью математической постановки задачи, когда условия задачи (начальные, краевые и др.) не обеспечивают либо существования решения (парадоксы переопределенности), либо его единственности (парадоксы недоопределенности), либо непрерывной зависимости от определяющих параметров и т.п.

*Парадоксы физической модели*, как правило, являются следствием *неадекватности* использованной схематизации явления *физической реальности*.

Появление таких парадоксов вполне естественно, если учесть, что вообще любая модель рассматриваемой среды, привлекаемая для научного описания и исследования реальных явлений или используемая при этом их схематизация, может дать только приближенное отражение действительности.

Приступая к краткому обзору некоторых из известных *парадоксов моделирования*, не можем не согласиться с авторами [2], утверждающими, что предлагаемая ими классификация парадоксов носит достаточно условный характер, поскольку многие из парадоксов могут быть интерпретированы как относящиеся одновременно к нескольким разделам этой классификации.

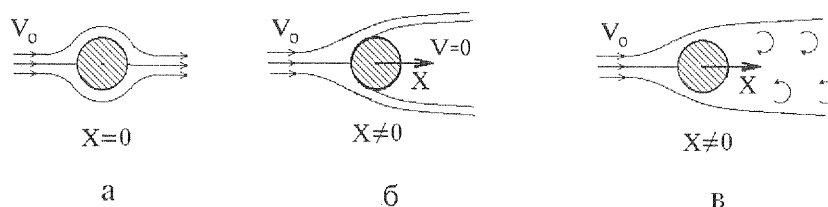


Рис.3

К числу наиболее известных в гидродинамике парадоксов, связанных с выбором модели среды и схематизацией изучаемого явления, следует отнести знаменитый парадокс Эйлера-Даламбера. Суть его в том, что использование модели идеальной несжима-

емой жидкости и предположений о потенциальности течения, безотрывности обтекания (рис.3а) и непрерывности возникающего поля скоростей при решении задачи об обтекании тела поступательным потоком с постоянной скоростью  $V_0$  приводит к противоречащему опыту выводу о равенстве нулю силы, действующей на тело в направлении натекающего потока. Допуская, однако, в рамках той же модели среды возможность нарушения непрерывности поля скоростей, т.е. используя другую схематизацию течения, можно получить отличное от нуля значение этой силы, например, в схемах с каверной за телом, заполненной покоящейся жидкостью (рис.3б), или с вихревым следом за цилиндром в виде дорожки Кармана (рис.3в).

Не менее известен парадокс Стокса, относящийся к обтеканию тел очень медленным потоком вязкой жидкости. В предположении, что силами инерции в уравнениях движения можно пренебречь по сравнению с силами вязкости, Стокс, используя полученную линейную систему уравнений гидродинамики, нашел решение задачи о стационарном обтекании сферы. Он получил, в частности, для силы, действующей на сферу со стороны жидкости, формулу, которая находится в хорошем соответствии с экспериментальными данными. Оказалось, однако, что найденное решение в целом даже при сколь угодно малых значениях числа Рейнольдса  $Re = \frac{Vd}{\nu}$  ( $V$  – скорость потока;  $d$  – диаметр сферы;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости) является неудовлетворительным, поскольку было установлено, что вдали от сферы проведенная Стоксом линеаризация уравнений неправомерна, ибо в этой области отброшенные при линеаризации члены не являются малыми по сравнению с оставленными. Выяснилось далее, что задача о стационарном обтекании бесконечного цилиндра в постановке Стокса вообще не имеет решения. Этот факт и получил название парадокса Стокса. Причиной его является неправомерность проводимой линеаризации в случае течений, рассматриваемых в бесконечных областях.

Интересным парадоксом является также относящийся к движению тел в вязкой жидкости парадокс Эффеля, который Г.Биркгоф формулирует следующим образом. "Вблизи критического числа Рейнольдса  $Re_{кр} \approx 150000$  сопротивление жидкости, испытываемое сферой, фактически уменьшается, когда скорость возрастает". Действительно, кажется удивительным существование очень узкого диапазона значений числа Рейнольдса  $0.5 \cdot 10^5 \leq Re \leq 10^5$ , в котором с ростом скорости сопротивление движения уменьшается, а не растёт. В настоящее время хорошо известно, что указанный эффект, называемый "кризисом сопротивления", связан с турбулизацией бывшего до этого ламинарного пограничного слоя на сфере, приводящей к резкому смещению линии отрыва его к задней части сферы и сужению турбулентного следа. Для математиков в связи с этим возникает важный вопрос исследования возможности внезапного изменения топологического характера всего решения при изменении одного из коэффициентов дифференциальных уравнений в частных производных в весьма узком диапазоне его значений.

Существенное место в классе *парадоксов моделирования* занимают *парадоксы симметрии*. Эти имеющие принципиальную значимость парадоксы связаны с нарушением непрерывной зависимости решения от данных задачи. Классическим примером такого парадокса является парадокс всплывающего пузырька. Обладающий осевой симметрией пузырек воздуха в жидкости под действием архимедовой силы должен подниматься по вертикали вверх. Однако опыт показывает, что при числах  $Re > 50$  он поднимается по спирали.

Еще одним классическим примером является парадокс турбулентности. Ламинарный режим течения жидкости, например, в круглых трубах с диаметром  $d$ , называемый течением Пуазейля, обладающий осевой симметрией и параболическим профилем скоростей со средней скоростью  $V_{ср}$ , наблюдается лишь до определенных значений чис-

ла Рейнольдса, близких к  $Re = \frac{V_{ср}d}{\nu} \approx 2200 - 2400 = Re_{кр}$ . При значениях  $Re > Re_{кр}$  происходит спонтанное нарушение симметрии – мгновенное поле скоростей перестает обладать пространственной и временной симметрией. Такой режим течения называют турбулентным. Аналогичные процессы происходят и в пограничном слое в окрестности обтекаемых вязкой жидкостью тел, как в описанном выше случае обтекания сферы, когда наблюдается "кризис сопротивления".

Явления спонтанного нарушения симметрии можно наблюдать и при поперечном обтекании протяженного цилиндра. В определенном диапазоне чисел Рейнольдса симметрия течения в следе отсутствует и наблюдаются цепочки вихрей с противоположными знаками циркуляции (вихревые дорожки Бенара-Кармана).

Можно было бы привести значительное число и других обнаруживаемых в экспериментах примеров потери симметрии в первоначально симметричных потоках.

По мнению Г.Биркгофа, одной из причин возникновения парадоксов симметрии является "применение некоторых правдоподобных аргументов, часто плодотворных при физическом рассуждении, но, оказывается, далеко не всегда верных". Например, в соответствии с *принципом достаточного основания* Лейбница часто ожидают, что "симметричные причины вызывают симметричные действия". Парадоксы симметрии – исключение из этого правила.

Г.Биркгоф приходит к заключению, что, "хотя симметричные причины должны вызывать симметричные действия, *почти* симметричные причины не необходимо вызывают почти симметричные действия", т.е. "симметричная задача не обязательно имеет *устойчивое* симметричное решение", что и является основной причиной парадоксов симметрии. "Правильнее считать" – пишет он, – что "задачи с симметричными условиями могут и не иметь устойчивых симметричных решений". Правда, – продолжает Г.Биркгоф, – "анализ устойчивости какого либо математического решения – гораздо более трудное дело, чем получение самого решения. Поэтому в будущем можно ожидать большого числа новых парадоксов симметрии, когда математическое доказательство неустойчивости того или иного решения будет запаздывать по сравнению с экспериментальным".

Следующее ниже описание нового парадокса симметрии является хорошим подтверждением этих слов Г.Биркгофа. Парадокс имеет отношение к процессу истечения весомай жидкости либо из плоского источника, расположенного на некоторой глубине под свободной поверхностью жидкости, либо к истечению ее из вертикального затопленного плоского канала.

Исследование процесса фонтанирования жидкости из-под поверхности жидкости давно привлекает внимание многих ученых-механиков. Оно продолжается и в настоящее время. Представление об этом дает краткое перечисление в хронологическом порядке лишь нескольких работ на эту тему с указанием их авторов, места и года публикации.

1. Сретенский Л.Н. ПММ, т. XXIX, вып. 4, 1965г.
2. Петухов Ю.П. Изв. АН СССР, МЖГ, N 5, 1966г.
3. Peregrine D.H. Univ. Wisconsin Math. Res. Conter Tech. Samm. Rep. V.1248, 1972г.
4. Гузевский Л.Г. Изв. СО АН СССР, вып. 1, N 3, 1976г.
5. Vanden-Boeck J.-M. Proc. Roy. Soc. London, Ser A, V.361, 1978г.
6. Tuck E.O., Vanden-Broeck J.-M. J. Austral. Math. Soc. Ser. B, V.25, 1984г.
7. Hacking G.C. J. Austral. Math. Soc. ser. B, V.26, 1985г.
8. Котляр Л.М., Троепольская О.В., Тр. сем. по краев. зад., Казань, вып. 22, 1985г.
9. Vander-Broeck J.-M., Keller J.B. J. Fluid Meck, V.178, 1987г.
10. Hocking G.C. J. Austral. Math. Soc. ser. B, V.29, 1988г.
11. Mekias H., Vanden-Broeck J.-M. Phys. Fluids. A.I, N 11, 1989г.

12. Гольдштик М.А., Степанов Г.Ю. Аннот. докл. Изв. РАН МЖГ. N4, 1990г.
13. Mekias H., Vanden-Broeck J.-M. Phys. Fluids, A 3, N 11, 1991г.
14. Hocking G.C., Forbes L.K. J.Austral.Math.Soc., ser.B, V.34, 1993г.
15. Маклаков Д.В. Докт.дисс., Казань, 1995г.
16. Шерыхалина Н.М. Канд., дисс., Уфа, 1996г.

В каждой из этих (а также в других известных работах) описаны только *стационарные* решения, полученные в аналитической точной или приближенной постановке, либо с использованием численных методов. При этом все рассмотренные течения обладают *симметрией* относительно плоскости, проходящей через точечный источник, либо совпадающей с плоскостью симметрии канала.

В экспериментах, выполненных одним из авторов доклада еще в 60-е годы, было обнаружено существование широкого диапазона значений определяющих параметров (скорости истечения, глубины затопления канала, его ширины и др.), в которых режим фонтанирования затопленных плоских струй носит четко выраженный устойчивый автоколебательный характер, и, следовательно, является существенно нестационарным и не обладающим свойством симметрии.

Любопытно, что присутствовавший при сообщении Л.И.Седову об этом факте академик М.А.Лаврентьев рассказал, что ему довелось на одном из сибирских озёр наблюдать именно такое поведение даже трёх плоских фонтанов различной высоты и колеблющихся с различной частотой. Эти фонтаны, предположил он, могли возникнуть при истечении родниковых вод из плоских трещин в дне прибрежной части озера.

Очевидно, что рассматриваемое явление представляет еще один *парадокс симметрии*, когда задача с симметричными условиями может не иметь устойчивого симметричного решения. Это означает, что все известные стационарные решения не описывают во многих случаях наблюдаемую в действительности картину течения. Несмотря на публикации (1978 г. [3] и 1991 г. [4]), где сообщалось об этом феномене, продолжался теоретический и численный анализ только симметричных стационарных режимов фонтанирования, что видно также из приведенного выше списка работ.

Это заставило авторов доклада провести обширную серию систематических экспериментов, в которых были изучены механизм возникновения автоколебательных режимов фонтанирования, диапазоны их существования и их основные физические особенности. Кроме того, на основе полученного представления о механизме явления были найдены простые приближенные формулы для определения периода автоколебаний в широком диапазоне значений определяющих параметров. Результаты этих исследований опубликованы в 1998 г. (см. [5] и [6]). Краткое их описание представлено далее и в настоящей работе.

Общий вид использованных экспериментальных установок при двух возможных автоколебательных режимах фонтанирования показан схематически на рис.4а и 4б. Все установки имели две параллельные прозрачные стенки, укрепленные на плоском основании, в центральной части которого устанавливалась сменная деталь, содержащая плоский канал шириной  $\delta$  и подводящий к ней трубопровод с краном для регулирования расхода воды через канал. На концах основания могли размещаться сменные вертикальные вкладыши в форме водослива с острой кромкой. Изменением высоты вкладышей  $h_0$  создавалась различная глубина начального погружения выходного сечения канала.

Установки отличались различной длиной основания  $L$  (от 0.3 м до 1.2 м). Ширина основания  $S$  (расстояние между стенками) была равна 0.01 м, 0.04 и 0.05 м. В каждой установке ширина канала  $\delta$  устанавливалась равной 1 мм, 2 мм, 3 мм и 4 мм. Высота вкладышей менялась в диапазоне  $0 \leq h_0 \leq 0,12$  м, а скорость истечения  $V_0$  в диапазоне  $0.01 \text{ м/сек} \leq V_0 \leq 18 \text{ м/сек}$ .

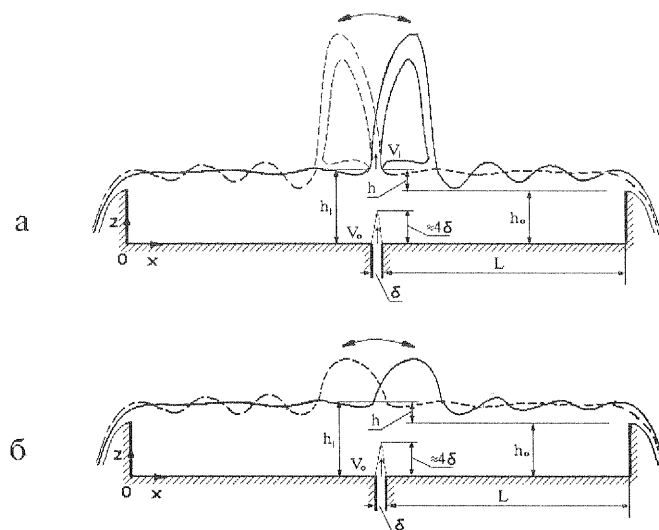


Рис.4.

Опыты показали, что при очень малой подаче воды в канал наблюдаются стационарные симметричные течения с относительно небольшим возвышением уровня воды над каналом и растеканием ее в обе стороны от него в водосливном или волновом режиме [7]. Вид этих течений находится в соответствии с известными стационарными решениями (рис.5а). С ростом средней скорости истечения воды из канала  $V_0$  эти течения становятся вначале квазистационарными, но с близким по форме к стационарному возвышением поверхности воды над каналом, которое покрыто мелкими возмущениями и колеблется с большой частотой (рис.5б).

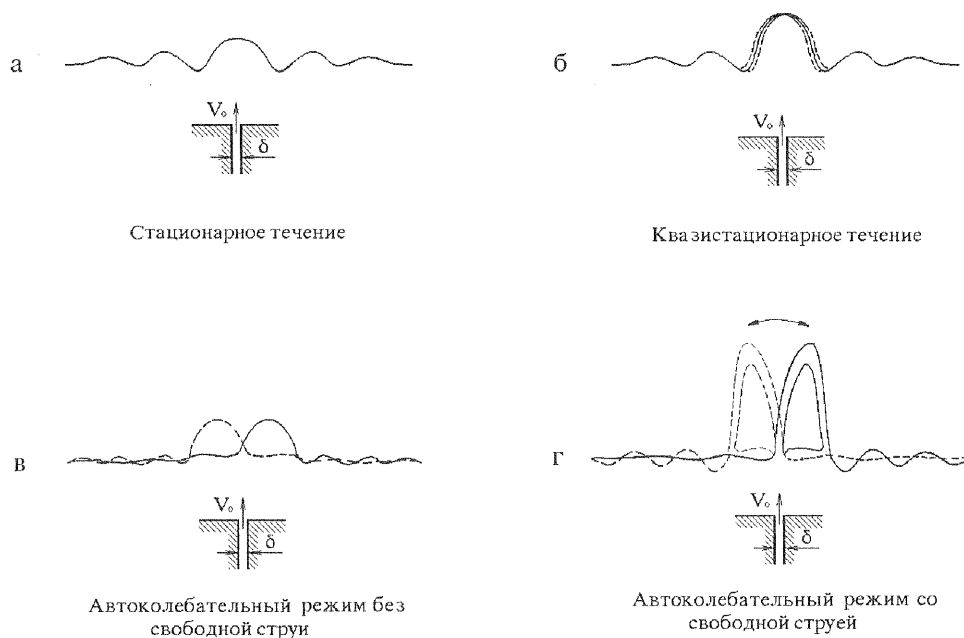


Рис.5.

Когда число Фруда  $F = \frac{V_0}{\sqrt{g\delta}}$  достигает определенного значения  $F = F_i$ , зависящего



от величины относительного начального заглубления выходного сечения канала  $p_i = \frac{h_{0i}}{\delta}$ , вид течения резко изменяется и приобретает четко выраженный автоколебательный характер со значительной величиной поперечного перемещения поверхности воды над каналом. При этом фонтанирование с ростом  $F$  сначала происходит лишь с изменением формы свободной поверхности (рис.56), а затем – с образованием вытекающей из-под нее свободной струи (рис.52). Такие режимы фонтанирования наблюдаются в пределах широкого диапазона значений числа Фруда. За его правой границей регулярность автоколебаний начинает сначала лишь временами нарушаться, а затем исчезает совсем и далее наблюдаются существенно нестационарные течения без четко выраженных колебаний и большой высотой свободной струи.

Было установлено, что основной причиной существования устойчивых автоколебаний является возникновение в окрестности выходного сечения канала или затопленного участка вытекающей струи периодически меняющих направление на противоположное поперечных перепадов давления, сообщающих вытекающим из канала частицам воды соответствующий импульс. Эти перепады давления в случае свободного фонтанирования вызываются импульсами, приходящими с места падения свободной струи на поверхность воды, а при режимах, когда свободное фонтанирование отсутствует, связаны с отличием в значениях гидростатической составляющей давления из-за разницы глубины воды по обеим сторонам от выходного сечения канала.

Появление первоначального из указанных выше поперечных перепадов давления может быть следствием либо несимметрии возникающего при подаче воды из канала течения из-за несимметрии формы канала, профиля скорости в нем или наличия незначительного отклонения его от вертикали, либо быстрой потери устойчивости первоначально симметричного течения из-за возмущения, имеющего случайный характер. В любом случае, описанный устойчивый автоколебательный режим устанавливается очень скоро.

Подробное описание физических особенностей автоколебательных режимов фонтанирования сделано в [6].

Основное внимание в опытах уделялось определению периода установившихся автоколебаний  $\tau$ . При обработке результатов экспериментов предполагалось, что его зависимость от определяющих параметров имеет вид:

$$\tau = f(V_0, h_0, \delta, g, L, \rho, \mu, S, l_i).$$

Здесь  $\mu$  – динамический коэффициент вязкости,  $g$  – ускорение силы тяжести,  $\rho$  – плотность воды,  $l_i$  – геометрические параметры, характеризующие, наряду с  $\delta, L, h_0$  и  $S$  конструктивные особенности использованных установок. Эффекты, связанные со смачиваемостью стенок, после соответствующих оценок с учетом масштабов использованных установок не учитывались.

Согласно П-теореме теории размерностей можно записать:

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{\delta/g}} = \varphi\left(\frac{V_0}{\sqrt{g\delta}}, \frac{h_0}{\delta}, \frac{L}{\delta}, \frac{S}{\delta}, \frac{\rho g^{1/2} \delta^{3/2}}{\mu}, \frac{l_i}{\delta}\right).$$

Исследование показало, что в опытах с водой на описанных установках в рассмотренных диапазонах определяющих параметров безразмерный период автоколебаний  $T$  зависит главным образом лишь от двух первых аргументов данного соотношения, т.е. от числа Фруда и относительного заглубления  $p$ , а остальные не являются существенными.

Найденные в экспериментах зависимости периода  $T$  от числа Фруда  $F$  для шести значений  $p_i = \frac{h_{0i}}{\delta} = 0, 5, 10, 20, 30, 30$  и 40 при различных  $\delta$  показаны на рис.6.

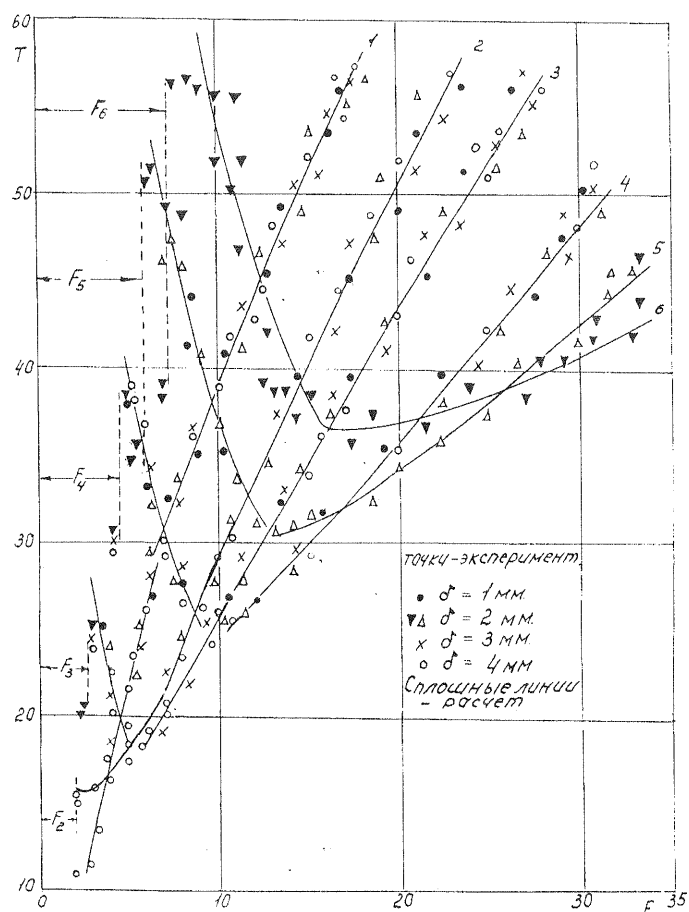


Рис.6.

Выяснилось, что они имеют нетривиальный характер. Действительно, если с ростом числа Фруда при  $p = 0$  и  $p = 5$  наблюдается монотонный рост  $T$  (точки в окрестности кривых 1 и 2), то уже при  $p \geq 10$  безразмерный период сначала убывает до некоторого значения  $T_{min}$ , а затем снова растет (точки в окрестности кривых 3, 4, 5, 6). Для каждого из рассмотренных значений относительного заглубления в диапазоне  $2 \leq p_i \leq 40$  на этом рисунке пунктирной вертикальной линией указана граница существенной перестройки течения, т.е. то значение  $F_i$ , начиная с которого возникают устойчивые автоколебательные режимы фонтанирования. Оказалось, что в рассмотренном диапазоне  $p_i$  связь между  $F_i$  и  $p_i$  с достаточной точностью может быть представлена в виде:

$$F_i \cong 0.15p_i + 1.25,$$

т.е. с ростом относительного заглубления канала диапазон существования стационарных и квазистационарных режимов расширяется по линейному закону. Вблизи нижних концов пунктирных линий на рис.6 находятся значения периода  $T$ , которые он имел непосредственно перед резким переходом от квазистационарного к устойчивому автоколебательному режиму фонтанирования, а точки в окрестности верхних концов этих линий соответствуют уже автоколебательному режиму фонтанирования.

Еще более удивительный вывод позволила сделать обработка результатов экспериментов для рассмотренных случаев  $p_i \geq 10$  в виде зависимостей между  $T_1 = \frac{\tau}{\sqrt{h_0/g}}$  и

$F_1 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}}$ , показанных на рис.7 (кривые 3, 4, 5 и 6). Оказалось, что значение минимального возможного периода  $T_{1min}$  не зависит от  $\delta$  и близко к 5.7. Это означает, что величина

размерного периода  $\tau = \tau_{min}$  может быть найдена по формуле

$$\tau_{min} \cong 5.7 \sqrt{h_0/g}$$

и, следовательно, при фиксированном  $g$  в исследованных диапазонах  $F$  и  $p_i \geq 10$  максимально возможная частота автоколебаний зависит только от глубины начального затопления  $ka$

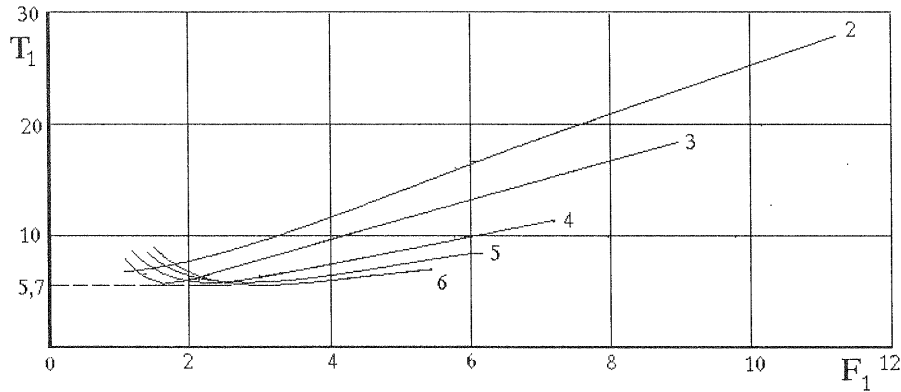


Рис.7.

Теоретический и даже численный анализ описанных течений в точной постановке едва ли возможен в настоящее время, поскольку он требует решения очень сложной нестационарной краевой задачи в области с неизвестной границей.

В основу приближенного решения задачи определения периода автоколебаний было положено предположение о том, что главный вклад в него дают промежутки времени, пропорциональные длительности перемещения частиц жидкости в затопленном участке струи, вытекающей из канала, и времени нахождения их в свободной струе или, при ее отсутствии, над условным уровнем  $h_1 = h_0 + h$  (рис.4), где  $h$  – высота уровня жидкости над кромкой водослива далеко от него, через единицу длины которого в стационарном режиме протекает жидкость с секундным объемным расходом  $Q = V_0 \delta / 2$ . Из соображений теории размерностей имеем:

$$h = q V_0^{2/3} \delta^{2/3} g^{-1/3},$$

где  $q = const$ . Специальные опыты на использованной установке показали, что в исследованных диапазонах режимов  $q \approx 1.27$ .

Составляющую  $\tau_1$  периода автоколебаний, пропорциональную времени нахождения частицы в свободной струе или над уровнем  $h_1$  при ее отсутствии, можно определить по формуле  $\tau_1 = A V_1 / g$ , где  $A = const$ , а  $V_1$  – начальная скорость частицы, которая считается вертикальной и равной максимальной скорости в затопленной струе на уровне  $h_1$ . Взаимодействием частиц в свободной струе и сопротивлением воздуха здесь, естественно, пренебрегается. В случае, когда длина ядра затопленной струи, равная примерно  $4\delta$  [8], превышает или равна величине  $h_1$ , очевидно,  $V_1 = V_0$  и  $\tau_1 = A V_0 / g$ . Если  $4\delta \leq h_1$ , можно принять, что после участка струи длиной  $4\delta$ , скорость частиц убывает обратно пропорционально корню квадратному из расстояния  $z$  до выходного сечения канала [8], т.е. равна

$$V(z) = 2 V_0 \delta^{1/2} / z^{1/2},$$

откуда для  $V_1$  получается соотношение

$$V_1 = V(h_0 + h) = 2 \frac{\delta^{1/2} V_0}{\left( h_0 + q V_0^{2/3} \delta^{2/3} g^{-1/3} \right)^{1/2}}.$$

Составляющую  $\tau_2$  периода автоколебаний, пропорциональную длительности пребывания частиц в затопленной струе, можно определить, используя указанные законы изменения скорости вдоль нее. В случае  $h_1 \leq 4\delta$  имеем  $\tau_2 = B(h_0 + h)/V_0$ , а при  $h_1 > 4\delta$

$$\tau_2 = B \left[ 4\delta/V_0 + \int_{4\delta}^{h_0+h} \frac{dz}{V(z)} \right],$$

где  $B = \text{const}$ . В результате период  $\tau$  находится по формуле:  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ .

После перехода к безразмерной форме для безразмерного периода автоколебаний  $T$  при  $h_1 \leq 4\delta$  получаем

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{\delta/g}} = nF + \frac{c(p + qF^{2/3})}{F},$$

а при  $h_1 > 4\delta$  –

$$T = \frac{nF}{(p + qF^{2/3})^{1/2}} + \frac{c[4 + (p + qF^{2/3})^{3/2}]}{F},$$

где  $n = \text{const}$  и  $c = \text{const}$ . Здесь первое слагаемое играет доминирующую роль при относительно малых заглублениях канала и начальных скоростях  $V_0$ , приводящих к образованию свободной струи, а второе, наоборот – при значительных заглублениях и скоростях  $V_0$ , вызывающих лишь деформацию поверхности жидкости над каналом. С ростом числа Фруда первое слагаемое монотонно возрастает, а второе убывает. Зависимости  $T = T(F)$ , полученные из этой формулы при  $n = 8$ ,  $c = 0.8$ , показаны на рис.8 для  $p = 0, 5, 10, 20, 30$  и  $40$  (кривые 1-6). Они находятся в хорошем качественном соответствии с данными опытов, приведенными на рис.6.

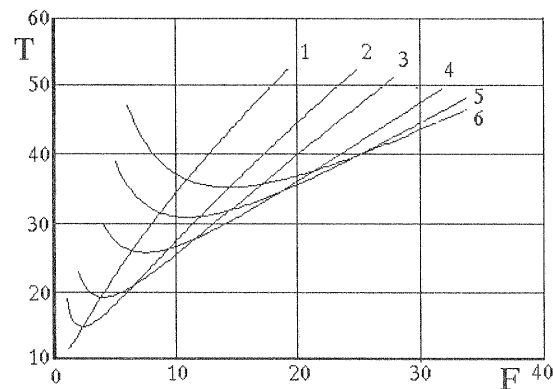


Рис.8.

Вместе с тем, анализ каждого из слагаемых и их суммы в формуле для периода автоколебаний свидетельствует о невозможности добиться хорошего количественного совпадения расчетных и экспериментальных данных только за счет выбора двух конкретных значений коэффициентов  $n$  и  $c$ . Одной из причин этого является принятое допущение о вертикальности скорости  $V_1$ . В опытах часто наблюдаются режимы, при которых поперечные импульсы, действующие на частицы струи на затопленном участке ее, приводят к весьма значительному изменению их траекторий и отклонению направления  $V_1$  от вертикального (рис.9а). Это уменьшает высоту подъема частиц жидкости над уровнем  $h_1$  и, следовательно, значение периода автоколебаний.

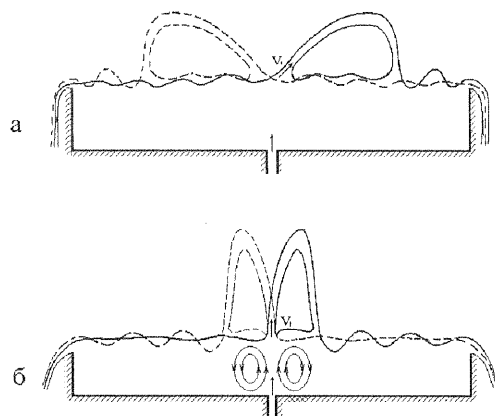


Рис.9.

При построении теории не учтен ряд других особенностей течений, наблюдаемых при автоколебательных режимах фонтанирования. Отметим лишь некоторые из них.

При относительно малых затоплениях канала но значительной скорости истечения струй, вытекающих из него, имеет место очень сильное эжектирование воды из их окрестности, что существенно сокращает затопленный участок струй. Как правило, при значительном заглублении выходного сечения канала по обеим сторонам затопленного участка струи формируются области течения водоворотного типа с противоположным направлением вращения, интенсивность циркулирования жидкости в которых периодически возрастает после падения свободной струи в их сторону, а затем убывает (рис.9б). Такие течения возникают в связи с ускорением жидкости с одной стороны этих областей за счет взаимодействия с затопленной струей, а с другой – с проникающей в жидкость падающей свободной струей.

Переход от режима фонтанирования без образования свободной струи к режиму со свободной струей может включать такой промежуточный режим, когда по обеим сторонам струи фонтана периодически образуются замкнутые кольцевые потоки жидкости с воздушной полостью внутри них.

Очень часто при падении свободной струи на поверхность жидкости вместе с ней в жидкость внедряется значительное количество пузырьков воздуха.

Наконец, в зависимости от вида установки, режима истечения, глубины затопления и ширины канала на некотором удалении от него можно наблюдать всевозможного вида поверхностные волны и в том числе бегущие волны и участки с почти стационарным волновым режимом течения.

Наилучшее количественное соответствие теории данным экспериментов достигается, если при  $p \geq 10$  выбор коэффициентов  $n$  и  $c$  производится отдельно для нисходящих и восходящих ветвей зависимостей  $T = T(F)$ , а при  $p = 0$  и  $p = 5$  – в двух различных последовательных диапазонах значений  $F$ . Результаты расчета по такой методике показаны на рис.6 сплошными линиями; в таблице 1 приведены значения использованных при этом коэффициентов  $n$  и  $c$  и соответствующие им диапазоны чисел Фруда.

Таблица 1.

NN крив. i	$h_0$ $p = \frac{\quad}{\delta}$	Диапазон значений F	Коефф.		Диапазон значений F	Коефф.		F <sub>1</sub>
			n	c		n	c	
1	0	2,5 ≤ F ≤ 6,5	5,0	0	6,5 ≤ F ≤ 18	9,7	0	
2	5	2,5 ≤ F ≤ 6,5	7,5	0,9	6,5 ≤ F ≤ 25	9,6	0	2,0
3	10	3,5 ≤ F ≤ 5,2	0	1,7	5,8 ≤ F ≤ 28	9,2	0,4	2,7
4	20	5,5 ≤ F ≤ 8,8	0	1,7	11 ≤ F ≤ 32	8,4	0,6	4,2
5	30	7,5 ≤ F ≤ 13	0	1,7	13 ≤ F ≤ 34	7,6	0,8	5,7
6	40	9,5 ≤ F ≤ 15,5	0	1,7	15,5 ≤ F ≤ 34	6,8	1,0	7,3

Хорошее совпадение расчетных и экспериментальных зависимостей позволяет использовать для определения периода  $T$  в случае  $p = 0$  при  $h_1 \leq 4\delta$  и  $h_1 > 4\delta$  соответственно следующие простые формулы:

$$T = 5.0F \text{ и } T = 8.6F^{2/3}.$$

При значениях  $p \geq 10$  хорошее соответствие с результатами опытов для всех нисходящих ветвей зависимостей  $T = T(F)$  дает формула

$$T = 1.7 \frac{4 + (p + qF^{2/3})^{3/2}}{F},$$

а для восходящих ветвей – формула

$$T = \frac{(10 - 0.08p)F}{(p + qF^{2/3})^{1/2}} + \frac{(0.2 + 0.02p) [4 + (p + qF^{2/3})^{3/2}]}{F}.$$

Следует, однако, учитывать, что на вид экспериментальных зависимостей могут влиять также условия проведения опытов и конструктивные особенности использованных установок.

В заключение можно привести один из возможных способов практического использования результатов проведенных исследований.

Полученные простые формулы для периода автоколебаний в случае  $p = 0$ , т.е.  $h_0 = 0$ , могут служить основой для создания нового способа бесконтактного измерения объемного расхода жидкостей, текущих в трубопроводах.

Действительно, из этих формул легко получаются зависимости секундного объемного расхода жидкости  $Q$  от периода автоколебаний  $\tau$  или их частоты  $f = 1/\tau$ . Для определения расхода жидкости в трубопроводе требуются лишь включение в него участка с устройством, возможная принципиальная схема которого понятна из рис.10а, и последующая визуальная регистрация периода автоколебаний или их частоты, что технически осуществимо многими способами. Использование зависимостей  $Q = \Phi(\tau)$  или  $Q = \varphi(f)$  позволяет найти расход жидкости.

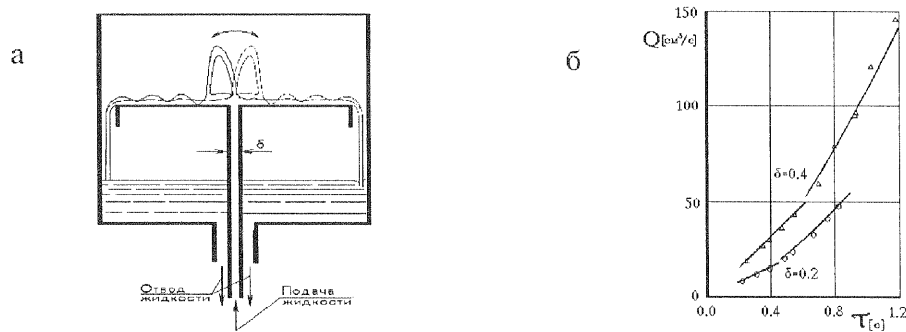


Рис.10.

На том же рис.10б для примера приведены теоретические кривые  $Q = \Phi(\tau)$  (сплошные линии) и хорошо согласующиеся с ними экспериментальные точки, полученные на установках с  $\delta = 0.4$  см и  $\delta = 0.2$  см, что свидетельствует о достаточно высокой точности измерения расхода описанным способом.

Отсутствие движущихся деталей, подвергающихся коррозии, делает использование таких расходомеров целесообразным в трубопроводах, в которых циркулируют агрессивные жидкости, например, кислота.

Очевидно, что возможность изменения ширины щели  $\delta$  позволяет использовать такие устройства в любых диапазонах расходов жидкостей, а обеспечение герметизации и прочности допускает применение их и в высоконапорных трубопроводах.

Авторы благодарят академика В.А. Садовниченко за предоставленную возможность выступить на руководимом им столь представительном семинаре и за интересное его проведение, вызвавшее последующую оживленную дискуссию.

Они выражают надежду, что у присутствовавших на семинаре математиков может возникнуть желание заняться исследованием устойчивости стационарных симметричных решений задач о фонтанировании плоских затопленных фонтанов. Они также благодарны Г.И. Шоломовичу за помощь при подготовке доклада и А.С. Печенцову за его хорошую организацию.

### Литература

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ. 1954. 183 с.
2. Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.Н. Вязкие течения с парадоксальными свойствами. Новосибирск, 1989.
3. Казеннов А.К., Карликов В.П., Хомяков А.Н., Чернявский Ф.Н., Шоломович Г.И. Способ фонтанирования жидкости. Авт. свид. N 603431. 1977.// Бюл. изобретений 1978. N 15.
4. Карликов В.П. Об истечении плоских струй вязкой жидкости из-под свободной поверхности // Аннот. докл. VII Всесоюз. съезд по теоретич. и прикл. механике (Москва, 1991) М.: МГУ, 1991. С. 184
5. Карликов В.П., Трушина О.В. ДАН, 1998, том 361, N 3, с. 340-344.
6. Карликов В.П., Трушина О.В. Труды МИАН, 1998, том 223.
7. Маклаков Д.В. Нелинейные задачи гидродинамики потенциальных течений с неизвестными границами. М.: 1997. 280 с.
8. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. М.: Физматгиз, 1960, 715 с.

