

Обратные задачи хаотической динамики и проблема предсказуемости хаоса

О.Я. Бутковский, Ю.А. Кравцов

Владимирский государственный университет

Институт космических исследований РАН

Аннотация

Решение обратной задачи нелинейной динамики, т.е. задачи восстановления динамических уравнений хаотической системы из временных рядов, подразумевает подгонку дифференциального уравнения определенного класса к наблюдаемым временным рядам. Наиболее распространенным видом нелинейных функций являются полиномы, коэффициенты которых подлежат определению. Процедуры восстановления включают в себя следующие элементы: определение коэффициентов, селекция надежных коэффициентов, испытание восстановленного уравнения на глобальную устойчивость. Предложен критерий выявления динамических закономерностей, использующий понятие степени предсказуемости и сводящийся к условию, чтобы время предсказуемости превышало интервал корреляции. Описана динамическая версия "дискриминантного" подхода, которая способна не только восстановить динамические уравнения, но и выявить нестационарность параметров системы. Указано, что малоразмерные модельные системы могут служить удобным диагностическим инструментом для выявления изменений в реальных высокоразмерных системах. В заключение указаны перспективные области применения процедур восстановления.

1 Введение

Под хаосом или, точнее, под динамическим хаосом, в физике принято понимать динамические процессы, демонстрирующие сложное поведение, визуально воспринимаемое как случайное, и высокую чувствительность к начальным условиям.

Классический пример хаоса демонстрирует известная система Лоренца, которая описывается тремя дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned}\partial_t x &= -\sigma(x - y), \\ \partial_t y &= rx - y - xz, \\ \partial_t z &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1}$$

Эти уравнения включают в себя нелинейные члены низшего (второго) порядка – это слагаемые xy и xz во втором и третьем уравнениях системы (1). Несмотря на очень простую структуру, система Лоренца демонстрирует весьма сложное поведение, которое проявляется, в частности, в нерегулярном числе пиков на графиках функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Нерегулярность временного хода функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ является отличительной чертой и многих других хаотических процессов, хотя эти функции подчиняются

уравнениям, которые вовсе не содержат случайных слагаемых. Такое нерегулярное поведение переменных x, y и z , резко отличающееся от периодических закономерностей и получило название хаотического. Отметим, что греческое слово "хаос" отвечает не столько беспорядку, нерегулярности, сколько отсутствию гармонии; недаром "правильные" тригонометрические функции $\sin(t)$ и $\cos(t)$ известны в математике под названием гармонических.

Другая особенность хаоса – экспоненциально высокая чувствительность переменных к начальным условиям [1, 2]. Если Δx_0 – возмущение начального значения, то после начала наблюдения возмущение достигнет величины

$$\Delta x = \Delta x_0 e^{\lambda_+ \tau}, \quad (2)$$

где $x_0 = x(t^0)$ и λ_+ – наибольший из Ляпуновских показателей исследуемой системы. Соотношение (20) показывает, что каким малым ни было бы начальное возмущение, за конечное время оно достигнет макроскопического значения, сравнимого с типичной амплитудой колебаний A , т.е. с размером аттрактора. Это время оценивается из формулы

$$\tau = \frac{1}{\lambda_+} \ln \frac{A}{\Delta x_0}, \quad (3)$$

вытекающей из (20) и играющей центральную роль в последующем анализе.

Экспоненциальный рост возмущений связан со свойством локальной неустойчивости хаотических систем: под действием малейших возмущений траектория системы, то есть кривая $x(t), y(t), z(t)$ в пространстве (x, y, z) (для определенности мы будем говорить о траекториях в трехмерном пространстве), довольно быстро, по экспоненциальному закону (20), отклонится от невозмущенной траектории $x^0(t), y^0(t), z^0(t)$.

Свойство локальной неустойчивости чрезвычайно затрудняет предсказание течения хаотических процессов, с которыми мы имеем дело не только в науке и технике, но также в природе, экономике, обществе.

Колоссальный интеллектуальный прорыв, совершенный в XX в. и подготовленный всем развитием науки в предшествующие столетия, не мог не создать иллюзию о всемогуществе научных знаний, о способности науки решить сколь угодно сложные проблемы техники, медицины и т.д. Наука и сейчас продолжает оставаться фундаментальным фактором прогресса. Однако по одному вопросу научный прогресс явно замедлился и наука едва ли может продемонстрировать свое прежнее могущество, несмотря на безусловно возросшие возможности регистрировать, накапливать и анализировать данные с помощью современных компьютеров. Таким вопросом является проблема предсказуемости хаотического поведения. Можно ли восстановить динамические уравнения из экспериментальных временных рядов? Можно ли на основе восстановленных уравнений делать эффективные прогнозы? Что ограничивает время прогноза? Почему возможностей современных ЭВМ часто недостаточно, чтобы обрисовать даже ближайшее будущее? Чего именно не хватает современному научному подходу для эффективного прогноза?

В данной работе мы кратко обсудим достижения в области решения обратных задач хаотической динамики, т.е. задач восстановления дифференциальных уравнений из экспериментальных данных. В разд.2 мы затронем общие вопросы прогнозирования. Излагаемая здесь концепция частичной предсказуемости ляжет затем в основу оценок времени предсказуемости и качества восстановления в разд.3 и 4: разд.3 посвящен понятию горизонта предсказуемости для хаотических процессов, а разд.4 – описанию конкретных алгоритмов восстановления уравнений. В этот раздел мы поместили как уже известные результаты, так и два новых подхода: дискриминантный подход, который позволяет выявлять нестационарности в хаосе (разд.4.5), и применение малоразмерных

моделей для анализа нестационарностей в высокоразмерных системах (разд.4.6). В заключении (разд.5) мы приведем краткий список проблем, решение которых облегчается при помощи алгоритмов восстановления динамических уравнений.

2 Частичная предсказуемость физических процессов

2.1 Реальный, наблюдаемый и модельный процессы

Любой прогноз начинается с анализа наблюдаемого процесса $y(t)$, под которым мы будем подразумевать процесс, регистрируемый физическими приборами. Наблюдаемый процесс $y(t)$ отнюдь не тождествен реальному, физическому процессу $x(t)$. Дело в том, что наблюдение (измерение) всегда вносит искажения в регистрируемый процесс. Прежде всего, физические приборы обычно осуществляют фильтрацию сигнала, т.е. вносят определенные спектральные искажения. При сильном сигнале или при использовании неадекватного измерительного устройства могут проявиться нелинейные искажения. Далее, принципиальную роль играют шумы и помехи при измерениях, которые ради краткости мы будем называть просто измерительными шумами и обозначать $\nu(t)$. Измерительные шумы ограничивают возможности измерять, а в некоторых случаях – даже обнаруживать слабые сигналы. Наконец, совокупность наблюдаемых данных $y(t)$ может иметь меньшую размерность q_y , чем размерность реального процесса q_x , поскольку число измеряемых параметров q_y всегда меньше, чем общее число степеней свободы, вовлекаемых в движение. Такие искажения можно назвать размерными. В простейшем случае, когда спектральные, размерные и нелинейные искажения малы, а шум имеет аддитивный характер, наблюдаемый процесс $y(t)$ связан с реальным процессом $x(t)$ соотношением

$$y(t) = x(t) + \nu(t), \quad (4)$$

где $\nu(t)$ – измерительный шум.

Прогноз всегда составляется на основе модельных представлений и возникает как результат упрощенного (приближенного, идеализированного) описания реальной системы. Дифференциальное уравнение, которому подчиняется реальная динамическая система, символически запишем в виде :

$$M_x(d/dt, x; a_k, f_i) = 0, \quad (5)$$

где M_x – оператор, отвечающий данной системе, d/dt – символ дифференцирования, x – набор переменных, существенных для данной задачи при принятом уровне описания, a_k – параметры реальной системы, $f_i(t)$ – все несущественные, малозначащие и флуктуационные переменные. В разбиении переменных на существенные и несущественные уже содержится определенный произвол. В зависимости от того, как он решается, возникает то или иное приближенное модельное уравнение:

$$M_z(d/dt, z; \alpha_k, 0) = 0. \quad (6)$$

Здесь α_k – оценки параметров a_k (в идеале $\alpha_k = a_k$), а символ "0" поставлен там, где в реальной системе (5) находились малозначительные факторы f_i . Пренебрежение этими факторами и составляет существо идеализации. При рассмотрении проблемы предсказуемости мы вынуждены иметь дело фактически с двумя процессами: наблюдаемым $y(t)$

и модельным $z(t)$, тогда как реальный процесс $x(t)$ остается как бы на заднем плане: он не подвергается прямой регистрации и подвержен влиянию флуктуационных факторов $f_i(t)$. Все три процесса схематически изображены на рис.1. В качестве начального условия z^0 для модельного процесса $z(t)$ естественно взять значение y^0 наблюдаемого процесса $y(t)$ в начальный момент времени t^0 :

$$z^0 = y^0, \quad z^0 \equiv z(t^0), \quad y^0 \equiv y(t^0) \quad (7)$$

Именно в силу этого соотношения измерительные шумы $\nu(t)$ оказывают существенное влияние на прогноз. Действительно, из (7) и (4) следует, что начальные значения модельного и реального процессов отличаются как $z^0 = x^0 + v^0$, и если уравнение (5) для $x(t)$ обладает свойством локальной неустойчивости, как для большинства реальных динамических систем, то начальная невязка $v^0 = z^0 - x^0$ породит экспоненциально нарастающую разницу $|z - x| \sim \nu^0 \exp(\lambda_+ \tau)$, где, как и выше, λ_+ – наибольший Ляпуновский показатель, а $\tau = t - t^0$ – интервал времени после начала наблюдения.

Вторая причина погрешности прогноза – действие флуктуационных сил $f_i(t)$. Даже в отсутствие измерительных шумов флуктуационные силы $f_i(t)$ вызывают слабое начальное расхождение между процессами z и x , которое испытывает затем гигантское усиление в силу экспоненциального роста возмущений. Этот механизм появления погрешностей прогноза присущ всем без исключения хаотическим системам.

Третий, не менее важный источник погрешности прогноза – неточность модельного оператора M_z относительно реального оператора M_x . Удачный выбор модельного оператора M_z в значительной мере определяет успех прогноза.

Из каких соображений следует выбирать оператор M_z ? Что ограничивает время предсказуемого поведения? Почему прогноз так редко бывает удачным? Чтобы ответить на эти вопросы, введем количественную меру качества прогноза и обсудим ряд понятий, связанных с предсказуемостью динамических процессов: степень предсказуемости, время предсказуемого поведения, горизонт предсказуемости и др.

2.2 Степень предсказуемости и время предсказуемости

Общепринятой характеристикой качества прогноза служит средний квадрат ошибки $\eta = y - z$:

$$\langle \eta^2 \rangle = \langle (y - z)^2 \rangle \quad (8)$$

Угловые скобки означают здесь эмпирическое усреднение. Если $y_j = y(t_j^0 + \tau)$ – значение процесса $y(t)$ спустя время τ после момента t_j^0 начала j -го наблюдения, а $z_j = z(t_j^0 + \tau)$ – соответствующий прогноз на интервале $(t_j^0, t_j^0 + \tau)$, удовлетворяющий начальному условию (7) ($z_j^0 = y_j^0$), то средний квадрат ошибки (8) дается выражением

$$\langle \eta^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [y(t_j^0 + \tau) - z(t_j^0 + \tau)]^2. \quad (9)$$

Считается, что чем больше проведено наблюдений, тем надежнее оценка погрешности (9).

Для того чтобы характеризовать потенциальную предсказуемость, вместо погрешности $\langle \eta^2 \rangle$ удобнее использовать безразмерную характеристику – степень предсказуемости [3]:

$$D(\tau) = \frac{yz}{\sqrt{\langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle}} \quad (10)$$

Степень предсказуемости (10) представляет собой коэффициент корреляции между прогнозом и наблюдением спустя время τ после начала наблюдения. Эта величина равна единице при $\tau = t - t^0$, поскольку начальное значение прогноза z^0 берется равным y^0 . Если значения y и z отсчитывать от среднего уровня, то с течением времени величина D будет уменьшаться до нуля. Степень предсказуемости D однозначно связана с абсолютной погрешностью прогноза $\langle \eta^2 \rangle$ следующим образом:

$$D(\tau) = \frac{\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle}{2\sqrt{\langle y^2 \rangle \langle z^2 \rangle}} \left[1 - \frac{\langle \nu^2 \rangle}{\langle y^2 \rangle + \langle x^2 \rangle} \right].$$

По сравнению с абсолютной погрешностью $\langle \eta^2 \rangle$ она имеет ряд преимуществ как мера качества предсказуемости, в чем мы убедимся ниже.

Общий ход зависимости $D(\tau)$ показан на рис.2. Значения $D(\tau)$, близкие к единице, отвечают удовлетворительному прогнозу, тогда как малые значения $D(\tau)$ соответствуют несогласованному ходу наблюдения и прогноза. Время, за которое $D(\tau)$ падает до уровня $1/2$, естественно назвать временем предсказуемого поведения.

Это время определяется из уравнения:

$$D(\tau_{\text{предск}}) = \frac{1}{2}. \quad (11)$$

Времени предсказуемого поведения $\tau_{\text{предск}}$ отвечает абсолютная погрешность $\langle \eta^2 \rangle$ порядка $(\langle y^2 \rangle + \langle z^2 \rangle)/2 \approx \langle y^2 \rangle$, т.е. порядка дисперсии наблюдаемого процесса.

2.3 Случайность как непредсказуемость. Концепция частичной предсказуемости

С общей точки зрения степень предсказуемости $D(\tau)$ можно рассматривать как степень сходства между наблюдением и прогнозом. Если высокую степень сходства $D \approx 1$ рассматривать как свидетельство определенного, детерминированного поведения $y(t)$ по отношению к модельному процессу $z(t)$, а малые значения $D(\tau)$ приписать непредсказуемому, случайному поведению $y(t)$, то степень предсказуемости $D(\tau)$ можно трактовать и как степень детерминированности наблюдаемого процесса $y(t)$ по отношению к модельному процессу $z(t)$. Именно такая трактовка была принята в статье [3].

Отождествление детерминизма с предсказуемостью, а случайности с непредсказуемостью лежит в основе концепции частично детерминированных (частично предсказуемых) процессов и полей, которая была развита одним из авторов данной статьи в работах [3, 4, 5, 6, 7]. Согласно этой концепции, процесс $y(t)$ рассматривается как полностью детерминированный (полностью предсказуемый) на малых по сравнению со временем предсказуемого поведения $\tau_{\text{предск}}$ временах, как полностью случайный – на больших временах $\tau \gg \tau_{\text{предск}}$ и как частично детерминированный (частично предсказуемый) – на промежуточных временах $\tau \approx \tau_{\text{предск}}$.

Трактовка случайности как непредсказуемости является лишь одним из многих соображений о случайности, принятых в современном научном обиходе. Упомянем лишь самые употребительные из них. Теоретико-множественный подход, составляющий основу современной теории вероятности, связывает случайность с существованием вероятностной меры (вероятностных распределений), относя к случайным любые величины, процессы и поля, снабженные вероятностной мерой. Предложенный Колмогоровым алгоритмический подход основан на идее, что случайность отождествляется со сложностью алгоритма, описывающего данный процесс. В экспериментальной физике случайность

часто связывают с потерей корреляции. Так, для процесса $y(t)$, характеризуемого коэффициентом (степенью) корреляции

$$K_y(\tau) = \frac{\langle y(t)z(t) \rangle}{\sqrt{\langle y^2(t) \rangle \langle z^2(t) \rangle}}, \quad (12)$$

значения процесса, разделенные временем, превышающим время корреляции $\tau_{\text{кор.}}$, считаются случайными в том смысле, что они потеряли корреляционную связь между собой. Теория частичной предсказуемости [3, 4, 5, 6, 7] имеет дело с иным соглашением о случайности, которое объявляет случайным все, что заметно отклоняется от прогноза.

Не все соглашения о случайности идентичны между собой. Более того, на практике сплошь и рядом приходится сталкиваться с тем, что один и тот же процесс может быть случайным с точки зрения одного соглашения и детерминированным – в рамках другого. Пример двойственного поведения дают хаотические процессы, у которых время предсказуемого поведения $\tau_{\text{предск.}}$ может превышать время корреляции $\tau_{\text{кор.}}$. В интервале $\tau_{\text{кор.}} < \tau_{\text{предск.}}$ хаотический процесс $y(t)$ следует классифицировать как случайный, если действовать в рамках соглашения, отождествляющего случайность с потерей корреляции, и как детерминированный (т.е. предсказуемый) если исходить из теории частичной детерминированности, отождествляющей случайность с непредсказуемостью.

2.4 Соотношение между степенью предсказуемости и степенью корреляции

Соотношение $\tau_{\text{предск.}} > \tau_{\text{кор.}}$ является довольно типичным для многих динамических систем (несколько примеров будут приведены ниже). Более того, по отношению к системам, допускающим хотя бы в принципе динамическое прогнозирование, можно утверждать, что время корреляции $\tau_{\text{кор.}}$ является наименьшим (наихудшим) временем прогнозируемого поведения, а коэффициент корреляции $K_y(t)$ – наименьшей (наихудшей) степенью предсказуемости. Нижний предел $\tau_{\text{предск.}} = \tau_{\text{кор.}}$ реализуется в условиях, когда мы не располагаем динамическим уравнением и для прогноза используем принцип "завтра будет как сегодня" (так называемый консервативный подход). В этом случае в качестве прогноза $z(t) = z(t^0 + \tau)$ берется значение $y(t^0)$, наблюдаемое в данный момент t^0 :

$$z(t^0 + \tau) = y(t^0) \quad \text{или} \quad z(t) = y(t - \tau). \quad (13)$$

В итоге степень предсказуемости (10) превращается в коэффициент корреляции (12). Очевидно, все сказанное справедливо и в отношении степени и времени когерентности, поскольку мерой когерентности служит как раз коэффициент корреляции (refeq12).

Отметим попутно тщетность попыток получить время предсказуемости $\tau_{\text{предск.}}$ с помощью статистических методов прогноза, опирающихся на линейные алгоритмы авторегрессионного типа. Сопоставимость $\tau_{\text{предск.}}$ со временем корреляции $\tau_{\text{кор.}}$ можно установить из весьма общих соображений [10]. В качестве примера рассмотрим линейный прогноз размерности $m + 1$:

$$z(t^0 + \tau) = a_0 y(t^0 - m\tau), \quad (14)$$

составленный из $m + 1$ предшествующих значений наблюдаемого процесса. Если выбрать коэффициенты a_m в авторегрессионной модели (14) из условия минимальности среднего квадрата ошибки прогноза (8) или, что то же самое, из условия максимума степени предсказуемости (10), то все коэффициенты a_m выразятся через значения функции корреляции $K_y(n\tau)$, $n = 0, 1, \dots, m$. В то же время степень предсказуемости (10) выражается

через те же самые значения $K_y(n\tau)$. В итоге уравнение $D(\tau) = 1/2$, из которого надлежит определить время $\tau_{\text{предск.}}$, содержит только значения функции корреляции и не может дать значения $\tau_{\text{предск.}}$ существенно отличные от $\tau_{\text{кор.}}$ [10]. Нам представляется, что эти простые соображения еще не осознаны в должной мере разработчиками статистических предикторов, несмотря даже на то, что в литературе имеются убедительные свидетельства ограниченности их возможностей.

2.5 Изменение степени предсказуемости по мере совершенствования прогностической модели

Представленные выше соображения позволяют составить общую картину изменения степени предсказуемости по мере совершенствования прогностической модели $z(t)$. На малых временах, не превышающих время корреляции $\tau_{\text{кор.}}$, удовлетворительный прогноз дается принципом "завтра как сегодня" (14). Степень детерминированности (10) в этом случае совпадает с коэффициентом корреляции (12), временной ход которого изображается кривой 1 на рис.3. При некотором улучшении (не более, чем на 10 – 20%) могут дать линейные статистические модели авторегрессионного типа (14) [10], но радикальное преодоление порога предсказуемости возможно только за счет модельных процессов, получаемых на основе динамических уравнений (см. ниже разд.4).

По мере совершенствования модели степень предсказуемости, а вместе с нею и время предсказуемого поведения увеличиваются (см. рис.3). На этом этапе процесс $y(t)$ может превратиться из случайного, непредсказуемого (точка А на кривой 2, отвечающей модели $z_1(t)$ в детерминированный, предсказуемый (точка В на кривой 3, отвечающей улучшенной модели $z_2(t)$). Переход из случайного в детерминированное состояние возможен только в рамках концепции частично детерминированных процессов, отождествляющей случайное с непредсказуемым, и характерен для практики физического эксперимента. В сущности, речь идет о переходе "непонятого" в "понятое". В рамках аксиоматической теории вероятностей такой переход невозможен в принципе, поскольку в теории вероятностей случайный процесс остается таковым независимо от того, существуют или нет модели для его предсказания.

Наконец, существует предельное время предсказания – горизонт предсказуемости $\tau_{\text{гор.}}$, начиная с которого никакая модель не может обеспечить удовлетворительное предсказание (см.разд.3). Предельная степень предсказуемости изображена на рис.3 кривой 4.

3 Горизонт предсказуемости хаоса

Теперь мы располагаем всем необходимым, чтобы высказать количественные суждения о предсказуемости хаоса. Пусть λ_+ – наибольший положительный показатель Ляпунова. В соответствии с формулой (20) средний квадрат ошибки прогноза нарастает по экспоненциальному закону [3, 11]:

$$\langle \eta^2 \rangle = (\sigma_\nu^2 + \sigma_f^2 + \sigma_{\Delta M}^2) \exp 2\lambda_+ \tau, \quad (15)$$

где величины $\sigma_\nu^2, \sigma_f^2, \sigma_{\Delta M}^2$ отражают соответственно вклад инструментальных шумов $\nu(t)$, вклад физических шумов в системе $f(t)$ и влияние неточности модели, символически изображаемой разностью $\Delta M = M_x - M_z$. Последнее слагаемое можно интерпретировать как вклад "шумов незнания" (термин используется в теории обнаружения

слабых сигналов). Приравнивая средний квадрат ошибки (15) дисперсии наблюдаемого процесса $\langle y^2 \rangle \approx A^2$, получим оценку времени предсказуемого поведения

$$\tau_{\text{пред.}} = \frac{1}{2\lambda_+} \ln \frac{A^2}{\sigma_\nu^2 + \sigma_f^2 + \sigma_{\Delta M}^2}. \quad (16)$$

По порядку величины $1/(2\lambda_+)$ отвечает времени корреляции системы $\tau_{\text{кор.}}$. Поэтому отношение $\tau_{\text{пред.}}/\tau_{\text{кор.}}$ характеризуется значением величины, стоящей под знаком логарифма. Если, например, шумовые слагаемые σ_ν, σ_f и $\sigma_{\Delta M}$, составляют одну тысячную от среднеквадратичной амплитуды $A \approx \langle y^2 \rangle^{1/2}$, то $\tau_{\text{пред.}} \approx \tau_{\text{кор.}} \ln 10^3 \approx 7\tau_{\text{кор.}}$, т.е. в 7 раз превышает время корреляции. Если же шумовые слагаемые составляют одну миллионную долю (10^{-6}) от A , то время предсказуемости возрастает до $14\tau_{\text{кор.}}$.

Важным является понятие горизонта предсказуемости $\tau_{\text{кор.}}$. Дж. Лайтхилл ввел это понятие [12] для обозначения времени, в течение которого микроскопически малое различие в начальных условиях нарастает до макроскопических величин порядка A . Мы будем трактовать горизонт предсказуемости несколько иначе – как предельное время предсказуемого поведения, которое нельзя превзойти ни усовершенствованием измерительных приборов, ни усовершенствованием предсказательной модели $z(t)$ [3]. Иными словами, горизонт предсказуемости $\tau_{\text{зоп.}}$ отвечает пределу пренебрежимо малых измерительных шумов и шумов незнания.

В случае зашумленного динамического хаоса этому условию отвечает пренебрежение вкладами σ_ν^2 и $\sigma_{\Delta M}^2$ по сравнению с вкладом физических шумов σ_f^2 , влияние которых невозможно устранить полностью ни при каких условиях:

$$\tau_{\text{зоп.}} = \frac{1}{2\lambda_+} \ln \frac{y^2}{\sigma_f^2}. \quad (17)$$

Это время и устанавливает принципиальный порог предсказуемости.

Оценка предельного времени предсказания $\tau_{\text{зоп.}}$ имеет принципиальное значение: бессмысленно даже пытаться строить прогнозы на времена, превышающие $\tau_{\text{зоп.}}$. Такие прогнозы могут привести разве что к потерям времени и средств, не говоря уже о моральном ущербе от несбывшихся прогнозов.

Если окажется, что все испытанные модельные процессы $z(t)$ не в состоянии вывести степень предсказуемости $D(\tau)$ за контуры коэффициента корреляции $K_y(\tau)$, т.е. если $\tau_{\text{пред.}} \leq \tau_{\text{кор.}}$, то попытки построить динамическую модель исследуемого процесса $y(t)$ следует признать безуспешными, а сам процесс $y(t)$ целесообразно квалифицировать как шум. С точки зрения теории частично предсказуемых процессов шум – это случайный (в обычном теоретико-вероятностном смысле) процесс, для которого не удастся подобрать динамическую предсказательную модель. В то же время процессы, допускающие предсказания на времена, превышающие время корреляции, следует отнести к классу частично детерминированных (частично предсказуемых) процессов.

4 Обратные задачи хаотической динамики

4.1 Общая стратегия

Для того, чтобы предсказать поведение хаотического процесса $y(t)$, наблюдаемого до момента $t = t^0$, в последующие моменты времени $t = t^0 + \tau$, необходимо построить прогностическое динамическое уравнение, т.е. решить обратную задачу хаотической динамики.

Стратегия решения обратных задач хаотической динамики в основных чертах совпадает с подходом, развитым в 50-х годах для нехаотических динамических процессов. Этот подход подразумевает подгонку дифференциального уравнения определенного класса к данному экспериментальному временному ряду. Наиболее часто используются уравнения, нелинейные члены которых представляют собой полиномы с неопределенными коэффициентами, которые должны быть найдены из сравнения с экспериментальным временным рядом. Иными словами, проблема состоит в параметризации модельного уравнения заданного класса путем подгонки его к временному ряду. Для нехаотических систем этот подход повсеместно используется после пионерских работ А.Н.Колмогорова и Д.Габова.

Особенностью хаотических систем, которые стали предметом общего интереса в 80-х и 90-х годах, является их высокая чувствительность к шумам и возмущениям, которые присутствуют в любых физических системах. В силу этой особенности время предсказуемости данного хаотического процесса на основе восстановленного динамического уравнения оказывается гораздо более коротким, чем время предсказуемости нехаотических динамических систем.

Ранние попытки восстановить динамические уравнения были предприняты Бридемом и Хублером [13], Гусбэ [14], Брашем и Кадтке [15], Анищенко и Смирновой [16] для случая, когда анализу подвергались не зашумленные временные ряды. Статьи [17] - [20] были посвящены восстановлению хаотической системы из зашумленных данных. Общие подходы к проблеме обсуждались в статьях [8, 9, 21] (последние две статьи помещены в книгу [12], которая целиком посвящена проблеме предсказуемости сложных динамических систем). Упомянем еще недавний обзор [22], посвященный анализу сердечной деятельности. Рассмотрим кратко основные алгоритмы, используемые при решении обратных задач хаотической динамики.

4.2 Алгоритм восстановления динамических уравнений

Определение размерности. Существует много рецептов определения размерности динамической системы, т.е., по-существу, рецептов оценки числа существенных степеней свободы исследуемой системы. Наиболее удобными и распространенными являются алгоритмы Грассбергера и Прокаччиа [23] и Брумхеда и Кинга [24], опирающиеся на анализ корреляционной матрицы.

Рассмотрим значения наблюдаемого процесса $y(t)$ в моменты времени $t^k, t^k + \Delta, \dots, t^k + (n-1)\Delta$ и составим "корреляционную матрицу" размерности $n \times n$

$$C_{kl} = \sum_{j=1}^n y_j^k y_j^l \quad (18)$$

из значений $y_j^k = y(t^k + (j-1)\Delta)$ наблюдаемого процесса. Согласно [23], логарифм наибольшего собственного значения λ_{max} корреляционной матрицы C демонстрирует изменение наклона ("излом" кривой $\lambda_{max}(n)$) при некотором значении размерности вложения (длины выборки) n . Это значение и рекомендуется принимать в качестве оценки размерности системы N .

Выбор модельного уравнения. После того, как определена размерность N , можно записать модельное уравнение для исследуемой системы, представив его в форме полинома от исходной переменной $z(t) \equiv z_0(t)$, ее производной первого порядка $z_1(t) \equiv dz/dt$, и т.д., до производной N -го порядка $z_N(t) \equiv d^N/dt^N$. Переменные z_0, z_1, \dots, z_N удобно объединить в единую векторную переменную $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_N)$. Тогда модельное уравнение запишется в виде

$$F(\mathbf{z}, A) |_{\mathbf{z}=\mathbf{y}(t_j)} = \sum m A_m G_m(\mathbf{z}) |_{\mathbf{z}=\mathbf{y}(t_j)} = 0, \quad (19)$$

где $G_m(z)$ – мономы (произведения степеней переменных z_0, \dots, z_N), а A_m – неопределенные пока коэффициенты, совокупность которых тоже удобно записать в виде вектора $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_m)$.

Коэффициенты A_m находятся из условия, чтобы уравнение (19) удовлетворялось на массиве экспериментальных данных $y(t_j^k)$. Очевидно, число отсчетов n в выборке t_j^k , должно соответствовать числу M коэффициентов, подлежащих определению.

Полное число неопределенных коэффициентов M довольно быстро растет с увеличением размерности N и степени нелинейности s . Так, уравнение третьего порядка ($N = 3$) с кубической нелинейностью ($s = 3$) имеет форму

$$\begin{aligned} F(z, A) = & A^0 + A_0 z_0 + A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 z_3 + A_{00} z_0^2 + \\ & + A_{01} z_0 z_1 + \dots + A_{33} z_3^3 + \dots + A_{000} z_0^3 \\ & + A_{001} z_0^2 z_1 + \dots + A_{333} z_3^3 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

и содержит 35 коэффициентов (один из них может быть выбран произвольным образом; чаще всего полагают $A_3 = 1$). При $N = s = 4$ число неопределенных коэффициентов M увеличивается до 126 а при $N = s = 5$ – уже до 462. Из-за быстрого роста числа неопределенных коэффициентов при увеличении порядка N и степени нелинейности s на практике целесообразно использовать любую априорную информацию, которая могла бы уменьшить число этих коэффициентов.

Еще один вариант получения модельных уравнений предусматривает использование "оптимального" базиса, соответствующего собственным векторам корреляционной матрицы (18) [8].

Дополнительные процедуры. Кроме упомянутых применяются также другие процедуры: усреднение коэффициентов по нескольким выборкам, отбрасывание "ненадежных" коэффициентов, флуктуации которых превышают их среднее значение, испытание восстановленного уравнения на глобальную устойчивость, предварительная фильтрация наблюдаемого процесса (чтобы избавиться от высокочастотных шумов) и др. [8, 9, 12, 21, 22].

Критерий выявления динамики. Используя соображения, высказанные в разд.3, мы можем сформулировать простой критерий выявления динамики из временных рядов. Если восстановленное дифференциальное уравнение процесса обеспечивает прогноз лишь на времена, не превышающие время корреляции, $\tau_{\text{предск.}} < \tau_{\text{кор.}}$, восстановленное уравнение следует признать неудачным для динамического прогноза. Напротив, если $\tau_{\text{предск.}}$ несколько превышает $\tau_{\text{кор.}}$, $\tau_{\text{предск.}} > \tau_{\text{кор.}}$, и тем более если $\tau_{\text{предск.}} \gg \tau_{\text{кор.}}$, то следы динамики можно считать выявленными. При $\tau_{\text{предск.}} \gg \tau_{\text{кор.}}$ речь идет не только о выявлении динамики, но и о надежном восстановлении динамических уравнений, управляемых хаотическим процессом.

4.3 Примеры

В качестве первого примера рассмотрим зашумленный аттрактор Ресслера, который описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \partial_t x_1 &= -x_1 - x_3 + f_1, \\ \partial_t x_2 &= x_1 + ax_2 + f_2, \\ \partial_t x_3 &= b - cx_3 + x_1 x_2 + f_3, \end{aligned} \quad (21)$$

где $f_{1,2,3}$ – шумовые компоненты. Уравнение третьего порядка, эквивалентное системе Ресслера (21), имеет вид (в отсутствие шума, т.е. при $f_j = 0$):

$$(-\partial_{t^3}^3 z + a\partial_{t^2}^2 z - z)(z - c - a) + (c + a)(a\partial_t z - \partial_{t^2}^2 z - z - b) - b(z - c - a)^2 + (z - c - a)(z - c)(a\partial_t z - \partial_{t^2}^2 z - z - b) = 0. \quad (22)$$

Описанная выше процедура позволяет восстановить уравнение (22) и тем самым определить коэффициенты a, b и c для системы (21). Так, для зашумленной системы Ресслера с параметрами $a = 0,15$, $b = 0,2$ и $c = 10,0$ при среднеквадратичном значении шума $f_1(t) = 10^{-2}$ восстановленная система имела параметры $a = 0,149$, $b = 0,228$ и $c = 9,904$. Восстановленная система обеспечивает время предсказуемости $\tau_{\text{предск.}}$, превышающее время корреляции $\tau_{\text{кор.}}$ в 3,5 раза.

В качестве второго примера на рис.4 приведены x, y и z компоненты процесса для незашумленной системы Ресслера (кривые 1), для зашумленной системы (кривые 3) и для процесса (кривая 2), восстановленного из зашумленных данных. Заметное расхождение между тремя представленными процессами наступает примерно на 20–ом—30–ом тактах, так что время предсказуемости в данном случае составило 20–30 единиц. Интересно отметить, что кривые 2, восстановленные из зашумленных данных, лучше согласуются с исходными кривыми (1), чем с кривыми 3, отвечающими зашумленной системе. Это означает, что процедура восстановления осуществляет частичную нелинейную фильтрацию шумов, воздействующих на систему Ресслера. Этот факт требует дополнительного анализа и осмысления.

На рис.5 представлены фазовые портреты исходной (верхний рисунок) и восстановленной (нижний рисунок) систем в координатах x, y, z . Этот рисунок демонстрирует удовлетворительное сходство двух фазовых портретов на временах, не превышающих время предсказуемости.

Читатель может найти другие иллюстративные примеры в статьях [8, 9, 12], [16] – [22].

4.4 Оптимальная длина выборки и ограничения на количество восстанавливаемых коэффициентов

Как известно, точность определения параметров обычных (т.е. нехаотических) сигналов можно повысить за счет увеличения длины выборки n . В случае же сигналов хаотической природы увеличение длины выборки сверх определенного оптимального значения $n_{\text{онм.}}$ не только не улучшает, но даже ухудшает точность восстановления параметров. Объясняется это свойством локальной неустойчивости хаотических систем: при $\Delta t > t_{\text{пред.}}$ малые флуктуации нарастают до размеров аттрактора и тем самым существенно искажают сигнал $y(t)$, из которого "извлекаются" коэффициенты A_m .

Оптимальная длина выборки $n_{\text{онм.}}$ оценивается как отношение времени предсказуемости $t_{\text{пред.}}$ к длительности интервала Δ между отсчетами:

$$n_{\text{онм.}} \sim \frac{t_{\text{пред.}}}{\Delta} \quad (23)$$

Как более короткие, так и более длинные по сравнению с $n_{\text{онм.}}$ выборки лишь увеличивают погрешность определения коэффициентов A_m .

Оценка (23) важна потому, что она ограничивает число коэффициентов M , которые можно найти при подгонке модельного уравнения к временному ряду: $M \sim n_{\text{онм.}}$.

Учитывая, что длительность дискрета выбирается равной $(0,2-0,3)\tau_{\text{кор.}}$, заключаем, что оптимальная длина выборки $n_{\text{онм.}}$ в 3–5 раз превышает отношение $\gamma = \tau_{\text{пред.}}/\tau_{\text{кор.}}$:

$$n_{\text{онм.}} \sim (3-5)\gamma \quad (24)$$

В результате при $\gamma \leq 5 - 7$ (это отвечает относительному уровню шумов 10^{-3}) для $n_{\text{опт.}}$ получаем оценку:

$$n_{\text{опт.}} \leq 15 - 35 \quad (25)$$

Таким образом, даже при оптимальной длительности выборки можно рассчитывать на определение не более чем двух или трех десятков коэффициентов A_m . Это требование серьезно ограничивает сложность моделей, которые целесообразно использовать для подгонки к временным рядам.

4.5 Дискриминантная процедура

Для выявления нестационарности в исследуемом хаотическом процессе $y(t)$ необходимо сравнивать характеристики системы в двух смежных временных окнах, скажем, в интервалах $[t-T, t]$ и $[t, t+T]$. С этой целью подвергают анализу так называемую дискриминантную функцию $d(\mathbf{y}, \mathbf{A})$, где $\mathbf{A} = (A_1, \dots, A_p)$ – набор параметров, характеризующих исследуемую систему. Стандартный дискриминантный анализ имеет дело со статическими характеристиками изучаемого процесса $y(t)$, трактуя значения дискриминантной функции d_1 и d_2 как скользящие средние или дисперсии в окнах 1 и 2 соответственно.

В работах [25] – [28] в качестве дискриминантной функции $d(\mathbf{y}, \mathbf{A})$ было предложено использовать нелинейную функцию $F(\mathbf{z}, \mathbf{A})$, равенство которой нулю представляет собой, согласно (2), дифференциальное уравнение хаотической системы в стационарных условиях. Предложенный в работах [25] – [28] метод оказался весьма эффективным: он позволяет выявить зависимость коэффициентов A_m от времени при слабом и даже при умеренном шуме. Численное моделирование, осуществленное в работах [25] – [28] как для логистического отображения (со скачкообразно и синусоидально меняющимся управляющим параметром), так и для системы Ресслера (со скачкообразно меняющимся управляющим параметром) продемонстрировало весьма обещающие результаты.

4.6 Малоразмерные модели хаоса

Малоразмерные модельные уравнения хаоса интересны тем, что они чувствительны к изменениям в исходной системе, даже если последняя имеет более высокую размерность, чем применяемая модель. Это было продемонстрировано анализом сердечных ритмов в условиях увеличивающейся нагрузки [28]. Метод, описанный в работе [28] предполагает измерения длительности между сердцебиениями в сочетании с одновременными измерениями нагрузки, скажем, при помощи велоэргометра. Такой метод позволит выявить так называемый аэробно-анаэробный порог без использования весьма трудоемкой процедуры анализа выдыхаемых газов, как это повсеместно принято сейчас.

Еще одна многообещающая область применения малоразмерных моделей – выявление изменений глобального климата из измеренных значений средней по земному шару температуры. Авторы были бы счастливы найти заинтересованных партнеров в решении этой важной проблемы.

5 Заключение

Мы хотели бы завершить статью перечислением основных проблем, решение которых обегчается при использовании методов, разработанных для решения обратных задач хаотической динамики.

Во-первых, это задача предсказания поведения хаотических систем. К этой задаче примыкает задача идентификации хаотических систем по виду дифференциального уравнения, восстанавливаемого из временных рядов.

Во-вторых, эта проблема выявления нестационарности хаотических систем при помощи дискриминантной процедуры и малоразмерных моделей.

В-третьих, методы решения обратных задач хаотической динамики пригодны для скрытой передачи информации при помощи модулированных хаотических сигналов.

Кроме того, методы решения обратных задач хаотической динамики могут быть полезными для выявления бифуркации в исследуемой системе, для уменьшения шумов динамической природы и др.

Авторы признательны участникам семинара за проявленный ими интерес к проблеме, а также фонду ИНТАС за частичную поддержку исследований по предсказуемости хаоса в рамках гранта 96-0305 и ФПЦ "Интеграция" проект № 144(K025).

Список литературы

- [1] Г.Шустер. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988
- [2] В.С.Анищенко. Сложные колебания в простых системах. М.: Наука, 1990
- [3] Кравцов Ю.А. Случайность, детерминированность, предсказуемость // Успехи физ. наук. 1989. Т.158, N1. С.93-115.
- [4] Илькова Л.Ш., Кравцов Ю.А., Мержелян О.С., Эткин В.С. Степень частичной детерминированности динамического хаоса // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т.28, N7. С.929-932.
- [5] Kravtsov Yu.A. Randomness and predictability in dynamic chaos // Nonlinear waves / Ed. A.V. Gaponov-Grekhov, M.I.Rubinovitch, J.Engelbrecht. Berlin; Heidelberg: Springer, 1989. Vol.2: Dynamics and evolution. P.44-46.
- [6] Ю.А.Кравцов. Фундаментальные и практические пределы предсказуемости. В: Пределы предсказуемости, под ред.Ю.А.Кравцова, М.: Центроком, 1997, стр. 170-200.
- [7] Ю.А.Кравцов. Случайность как непредсказуемость. Концепция частичной детерминированности. Радиотехника и электроника, 1990, Т.35, N1, С.14-118.
- [8] O.L.Anosov, O.Ya.Butkovskii, Yu.A.Kravtsov. In: *Predictability of Complex Dynamical Systems*, Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke (Eds.). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1996), pp.105-121.
- [9] O.L.Anosov, O.Ya.Butkovskii, Yu.A.Kravtsov, E.D.Surovyatkina In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, R.A.Katz (Ed.). AIP Conf.Proc., (1995), v.375, Aip Press, N.Y., , pp.71-91.
- [10] О.Л.Аносов, О.Я.Бутковский, Ю.А.Кравцов. Пределы предсказуемости для линейных авторегрессионных моделей. Радиотехника и электроника, 1995, Т.40, N12, 1866-1873
- [11] Кравцов Ю.А., Эткин В.С. К вопросу о роли флуктуационных сил в динамике автостохастических систем // Изв. вузов. Радиофизика. 1981. Т.24, № 8.С.992-999; Степень динамической корреляции и проблема выявления динамической природы случайных процессов // РЭ. 1984. Т.29. N12. С.2358-2364.
- [12] Lighthill J. The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // Proc. Roy. Soc. London A. 1986.V.407. N.1832. P.35-50.
- [13] J.Breedon, A.Hubler *Phys.Rev.A* **42**(1990)5817-5826.
- [14] G.Gouesbet. *Phys.Rev.A* **43**(1991) 5321-5331.
- [15] J.S.Brush, J.B.Kadtke. *Proc. ICASSP-92, San-Francisco*, (1992) pp.321-325.

- [16] V.S.Anishchenko, N.B.Smirnova. *SPIE Proc.*, **2098**(1993)137-141.
- [17] Д.А.Грибков, В.В.Грибова, Ю.А.Кравцов, Ю.И.Кузнецов, А.Г.Ржанов. Восстановление структуры динамической системы из временных рядов. Радиотехника и электроника.1994. Т.3. N2. С.241-250.
- [18] Д.А.Грибков, В.В.Грибова, Ю.А.Кравцов, Ю.И.Кузнецов, А.Г.Ржанов Восстановление дифференциальных уравнений автостochasticкой системы на основе временных рядов для одной переменной. ЖТФ,1994. Т.64. N3. С.1-12.
- [19] D.A.Gribkov et al. In: *Dynamical Systems and Chaos* (Proc.Internat.Conf., Tokyo, May 23-27, 1994), **1,2**,(1995), World Scientific, Singapore, pp.378-381.
- [20] N.B.Janson, V.S.Anishchenko. In: *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, R.A.Katz, (Ed.) AIP Conf. Proc., (1995), v.375, AIP Press, N.Y. pp.688-671.
- [21] A.I.Mees, K.Judd. In: *Predictability of Complex Dynamical Systems*, Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke (Eds.). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, (1996), pp.123-142.
- [22] . А.Н.Павлов, Н.Б.Янсон. Применение методики реконструкции математической модели к электрокардиограмме. Изв. ВУЗ-Прикладная нелинейная динамика, 1997, Т.5, N1, 93-108.
- [23] P.Grassberger and I.Proccacia (1984). "Dimensions and Entropies of Strange Attractors from a Fluctuating Dynamics Approach," *Physica V.13-D*. N.1. P.34-54.
- [24] J.L.Breeden, N.H.Packard. A lerning algorithms for optimal representation of chaotic time series. *Phys.Lett. A*.1989. V.142. N1. P.107
- [25] O.L.Anosov et al. In: *Dynamical Systems and Chaos* (Proc.Internat.Conf., Tokyo, May 23-27, 1994), vol.2. World Scientific, Singapore, 1995, pp.370-377.
- [26] O.L.Anosov, O.Ya.Butkovskii. In: *Predictability of Complex Dynamical Systems*, Yu.A.Kravtsov, J.B.Kadtke (Eds.). Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1996, pp.67-78
- [27] O.L.Anosov, O.Ya.Butkovskii, Yu.A.Kravtsov. *Math.Models and Methods in Appl.Scinces*, **7**(1997)49-59.
- [28] O.L.Anosov, O.Ya.Butkovskii, J.Kadtke, Yu.A.Kravtsov, V.V.Protopopescu. *Int. Conf. on Applied Nonlinear Dynamics near the Millenium (ANDM'97)*, San Diego, CA, USA (July 7-11, 1997), pp.359-365

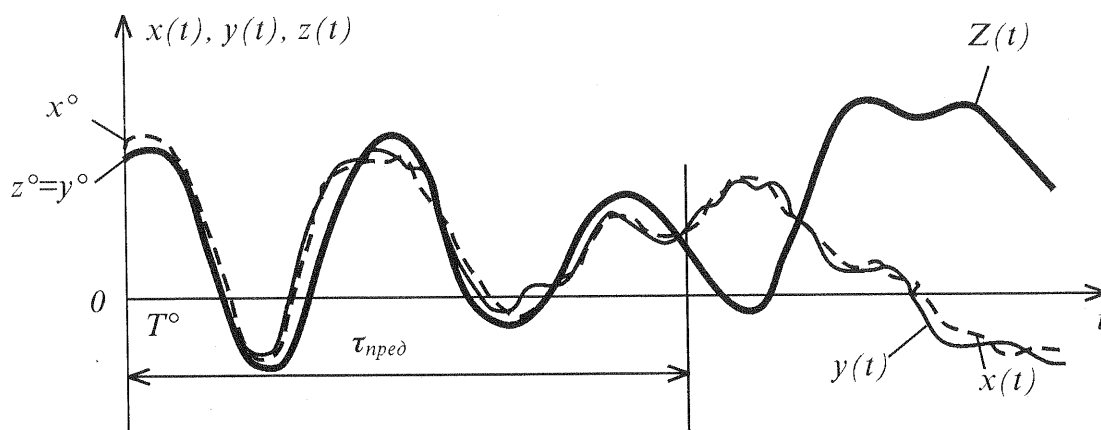


Рис.1. Процессы, рассматриваемые при предсказании $x(t)$ — реальный физический процесс (пунктир); $y(t)$ — наблюдаемый процесс (тонкая линия); $z(t)$ — модельный, предсказываемый процесс (толстая линия).

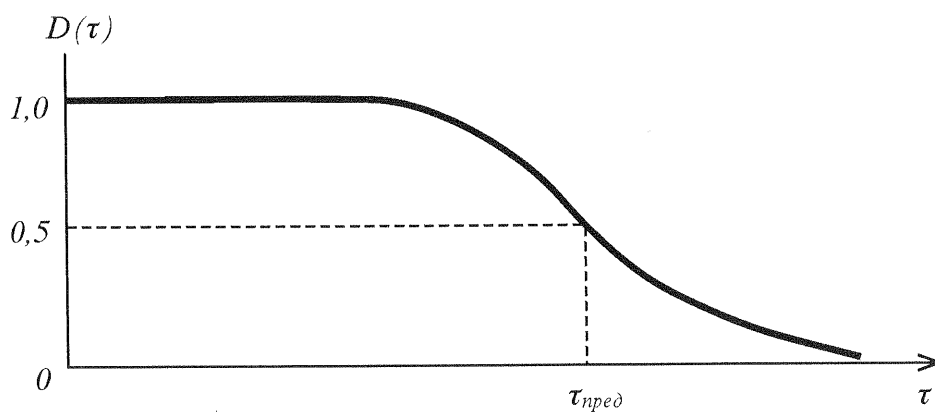


Рис.2. Характер зависимости степени предсказуемости D от времени $\tau = t - t^0$, прошедшего после начала наблюдения.

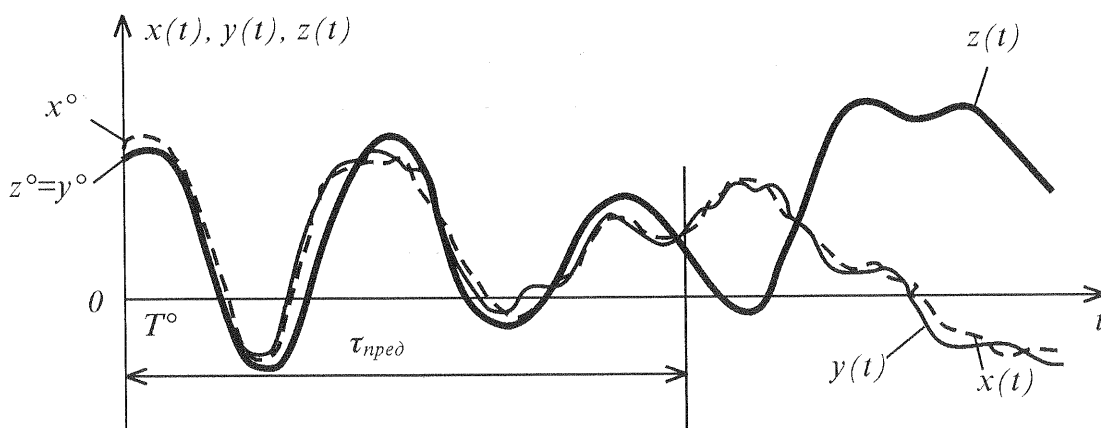


Рис.3. Характер изменения предсказуемости по мере совершенствования модели процесса. Кривая 1 отражает качество прогноза по принципу «завтра как сегодня»; кривые 2 и 3 отвечают более или менее удовлетворительным моделям $z1(t)$ и $z2(t)$, а кривая 4 дает предельно достижимое значение времени предсказуемости («горизонт предсказуемости»). Переход $A \rightarrow B$ от модели $z1$ к более совершенной модели $z2$ переводит процесс из ряда случайных (непредсказуемых) в разряд детерминированных (предсказуемых).

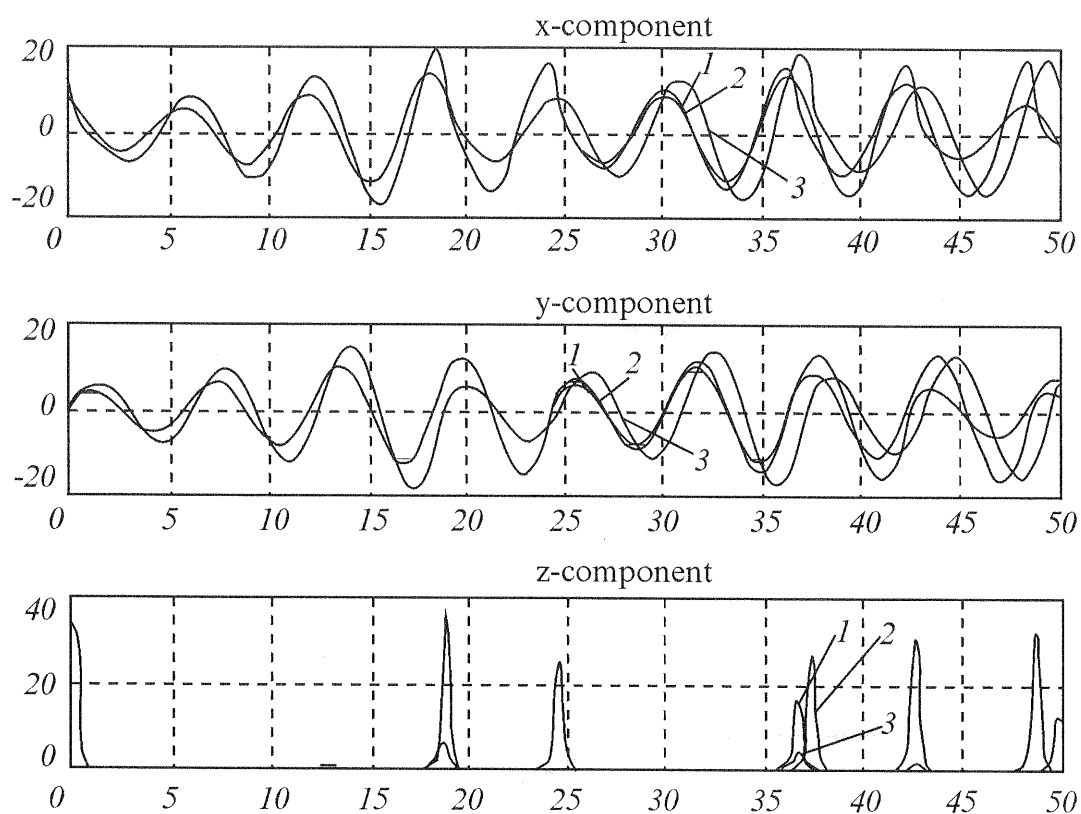
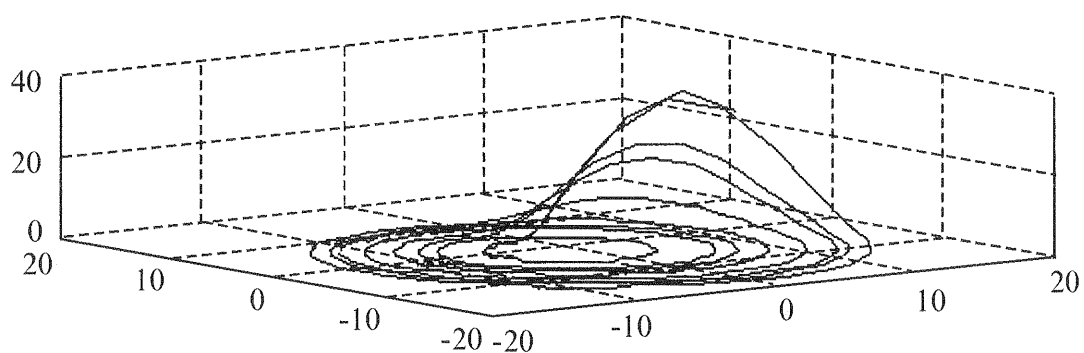


Рис.4. Компоненты Ресслеровского процесса: для исходной незашумленной системы (кривые 1), для зашумленной системы (кривые 3) и для системы, восстановленной из зашумленных данных (кривые 2).

Фазовый портрет исходной системы



Фазовый портрет восстановленной системы

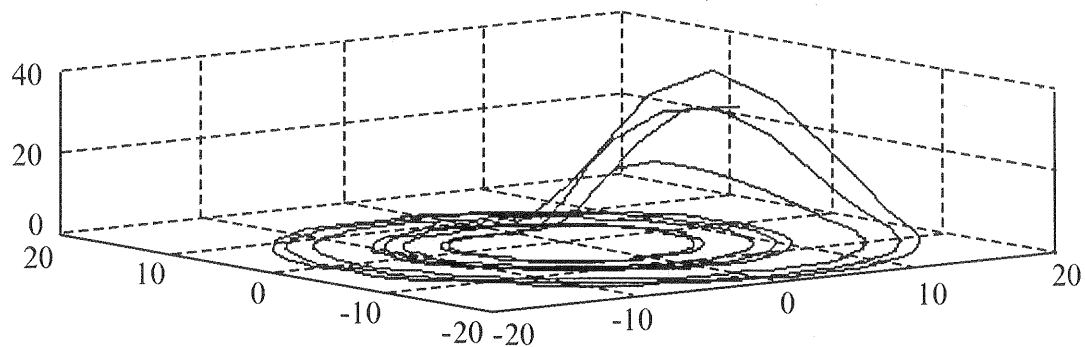


Рис.5. Фазовые портреты исходной (верхний рисунок) и восстановленной систем (нижний рисунок).