Оценка наилучшего приближения решений уравнения Штурма–Лиувилля частичными суммами асимптотических рядов

В.А. Садовничий, А.Ю. Попов

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Институт математических исследований сложных систем МГУ

На отрезке $-a \le x \le a$, $a > 0$, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' - q(x)y = \lambda^2 y\,, \quad \lambda > 0\,, \tag{1}$$

с потенциалом q, аналитическим в некоторой окрестности отрезка $[-a, a]$.

Уравнения (1) не решаются в квадратурах. Точнее говоря, оператор

$$A_\lambda\,:\; q \mapsto (y_0(q,x,\lambda), y_1(q,x,\lambda))\,,$$

где $y_0(q,x,\lambda) = y_0(x,\lambda)$, $y_1(q,x,\lambda) = y_1(x,\lambda)$ – фундаментальная система решений (ФСР) уравнения (1), удовлетворяющая начальным условиям

$$y_0(0,\lambda) = 1\,,\; y_0'(0,\lambda) = 0\,, \qquad y_1(0,\lambda) = 0\,,\; y_1'(0,\lambda) = \lambda i\,, \tag{2}$$

не выписывается в сколько-нибудь "конструктивном" виде. (Мы будем довольно часто вопреки традициям писать в качестве аргумента $q : y(q,x,\lambda)$ для того, чтобы подчеркнуть зависимость решений и других функций, которые появятся ниже, от потенциала q.) Только в редких случаях решения уравнения (1) удаётся записать через элементарные функции или "стандартные" специальные функции.

Требуется строить приближённые решения. Существуют различные методы приближённого решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В их числе разностные схемы, итерационный метод, поиск решений в виде начальных отрезков степенных рядов и т. д. Мы исследуем другой метод, который приспособлен для вычисления собственных значений краевых задач, связанных с уравнением (1).

Основной наш результат заключается в следующем.

Нами установлено, что некоторое семейство операторов B_λ, значения которых на потенциалах q относительно просто вычисляются, приближает искомые операторы A_λ, разрешающие уравнение (1), с высокой степенью точности, а именно, погрешность экспоненциально убывает с ростом λ. К тому же (это особенно важно!) упомянутый алгоритм можно рекомендовать даже при "небольших" значениях λ.

(При решении уравнений в частных производных (УРЧП) методом Фурье "большие гармоники" на практике всегда остаются невостребованными. Следовательно, знание поведения решений (1) при небольших λ зачастую важнее асимптотик при $\lambda \to \infty$.)

Остановимся в докладе на уравнениях (1) с потенциалами, аналитическими в круге $|z| \le R$, $R > a$.

Перейдём к точным формулировкам результатов – какой алгоритм мы имеем в виду и какова оценка погрешности.

Сначала – некоторые предварительные сведения. Из классических работ Биркгофа и Тамаркина начала нашего века известно, что функции, образующие ФСР уравнения (1) с начальными условиями (2) разлагаются в формальные ряды, которые являются асимптотическими рядами (АР) при $\lambda \to +\infty$:

$$y_j(x,\lambda) \sim e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}(-i\lambda)^{-k}b_{k,j}(x) + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}(i\lambda)^{-k}b_{k,j}(x)\,,\ j=0,1\,. \tag{3}$$

Коэффициенты рядов (3) $b_{k,j}(x) = b_{k,j}(q,x)$ вычисляются по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} &b_{0,0}(x) = b_{0,1}(x) \equiv 1/2\,,\\ &b_{n+1,j}(x) = \frac{1}{2}\left(b'_{n,j}(x) + (-1)^{n+j}b'_{n,j}(0) + \int\limits_0^x b_{n,j}(t)q(t)dt\right)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Ряды (3) являются асимптотическими для функций $y_j(q,x,\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$ даже в случае $q \in C^\infty([-a,a])$. Сказанное означает, что при любых $q \in C^\infty([-a,a])$, $n \in \mathbb{N}$, $j=0,1$, справедлива равномерная по $x \in [-a,a]$ асимптотика

$$y_j(q,x,\lambda) = S_{n,j}(q,x,\lambda) + O_{q,n}(\lambda^{-n-1})\,,\quad \lambda \to +\infty\,, \tag{5}$$

с постоянной в символе O, зависящей только от потенциала q и номера n. Через $S_{n,j}(q,x,\lambda)$ обозначена n-я частичная сумма асимптотического ряда (3):

$$S_{n,j}(x,\lambda) = e^{i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}(-i\lambda)^{-k}b_{k,j}(x) + (-1)^j e^{-i\lambda x}\sum_{k=0}^{n}(i\lambda)^{-k}b_{k,j}(x)\,.$$

Возникает естественный вопрос: если потенциал q аналитичен в какой-либо окрестности отрезка $[-a,a]$, то можно ли пользоваться рядами (3) для приближённого вычисления значений $y_j(q,x,\lambda)$ при $\lambda \geq 1$, $x \in [-a,a]$? Если окажется, что ряды (3) сходятся, то, взяв частичную сумму из должного количества слагаемых, мы получили бы приближённое решение с любой наперёд заданной степенью точности.

Но сходятся ли ряды (3)? При каких q, x, λ? Почти ничего неизвестно. Это – открытая проблема. К этой проблеме приводит и следующая важная задача – обоснование метода приближённого вычисления первых собственных значений с помошью формулы следов. Этот метод мог бы быть применён, например, к вычислению первых собственных чисел задачи Орра–Зоммерфельда, описывающей плоскопараллельное течение жидкости и тем самым к доказательству устойчивости этого течения, т. е. к решению задачи, которой занимались многие математики, такие как Нейман, Рэлей и др.

О чём идёт речь? Как известно, например, для задачи Штурма–Лиувилля

$$-y'' + q(x)y = \Lambda y\,,\qquad y(0) = y(\pi) = 0\,,$$

собственные значения в случае гладкой функции $q(x)$ асимптотически ведут себя так:

$$\Lambda_n \sim n^2 + c_0 + \frac{c_2}{n^2} + \frac{c_4}{n^4} + \cdots\quad (n \to \infty)\,.$$

Коэффициенты c_0, c_2, … выражаются в явном виде через функцию $q(x)$. Тогда можно сосчитать первый регуляризованный след (И.М. Гельфанд и Б.М. Левитан)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n - n^2 - c_0) = \frac{1}{2}c_0 - \frac{q(0)+q(\pi)}{4}\,.$$

Точно так же известны формулы регуляризованных следов всех порядков:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n^k - A_n(k)) = B(k)\,, \quad k = 1, 2, \dots\,,$$

где $A_n(k)$ – отрезки асимптотических разложений Λ_n, обеспечивающие абсолютную сходимость указанных рядов, а $B(k)$ – величины, выражающиеся в конечном виде через потенциал $q(x)$. Важно, что вычисление всех этих величин может быть алгоритмизировано.

И.М. Гельфанд предложил новый метод приближённого вычисления первых собственных значений, который и был реализован Л.А. Диким в 1957 году. В указанной системе удерживаются только N уравнений и N слагаемых в круглых скобках, т. е. записывается алгебраическая система

$$\sum_{n=1}^{N}(\Lambda_n^k - A_n(k)) = B(k)\,, \quad k = 1, 2, \dots, N\,,$$

которая и решается относительно $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$. Л.А. Дикий осуществил конкретный счёт для потенциала $q(x) = \cos x$ (уравнение Матье) и получил значения первых трёх собственных чисел с тремя верными знаками после запятой.

Заметим, что никакого строго математического обоснования данного метода не было дано.

Продумывая эту ситуацию с В.Б. Лидским применительно к уравнению Орра–Зоммерфельда, мы пришли к уверенности, что основным шагом, позволяющим обосновать этот метод, должно быть решение задачи по изучению поведения $b_{k,j}(x)$, $j = 0, 1$, в зависимости от номера k.

Участник нашего семинара С.А. Шкарин изучил поставленную задачу о бесконечной системе формул следов и доказал интересный результат.

Если числа Λ_n считать неизвестными и решать эту систему $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\Lambda_n^k - A_n(k)) = B(k)$ относительно Λ_n, то у неё существует континуум решений, причём мы можем заранее совершенно произвольно задать любое конечное число различных Λ_n, $n = 1, 2, \dots, M$, и всегда существует решение с этими заданными числами.

Таким образом, метод вычисления первых собственных чисел, применённый Л.А. Диким, не может быть обоснован для потенциалов общего вида из класса C^∞.

В нашей работе с В.Е. Подольским мы выделили класс S уравнений, у которых в разложениях (3) для некоторого $k \in \mathbb{N}$ справедливы тождества $b_{k,j}(x) \equiv 0$, $j = 0, 1$, на $[0, \pi]$ (тогда и все следующие $b_{n,j}(x)$ с номерами бóльшими этого k тоже тождественно равны нулю).

Т. е. это класс уравнений с обрывающимися асимптотическими рядами для фундаментальной системы решений (и тем более со сходящимися!).

Для такого класса S нам удалось обосновать метод вычисления первых собственных значений, используемый Л.А. Диким. Это даёт надежду на то, что и для тех уравнений (1), ФСР которых допускает очень хорошее приближение частичными суммами АР (3), метод Гельфанда–Дикого окажется эффективным.

Итак, возникает задача об аппроксимации указанными асимптотическими разложениями фундаментальной системы решений уравнения (1).

А.О. Кравицкий и В.Б. Лидский в 1970 году доказали, что для уравнений (1) асимптотические ряды расходятся для потенциалов $q(x) = x^d$ ($\forall d \in \mathbb{N}$) при всех $x > 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$.

Так как согласно (4) $b_{n,j}(q,x)$ – положительные (но не линейные, а полиномиальные по q) операторы в пространствах функций, аналитических в круге $|z| < R$ (конус – ряды с неотрицательными коэффициентами Тейлора в нуле), то асимптотические ряды (3) расходятся при всех $x > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ для любого q из указанного конуса.

В то же время, для некоторых потенциалов ряды (3) могут и обрываться. Приведём два примера.

1. Уравнение $-y'' - \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^{-2} y = \lambda^2 y$ имеет ФСР $\quad \exp(\pm i\lambda x)\left(1 \pm \dfrac{i \operatorname{th}\frac{x}{2}}{2\lambda}\right)$.

2. Уравнение $-y'' + \dfrac{2y}{(x-x_0)^2} = \lambda^2 y$ имеет ФСР $\quad \exp(\pm i\lambda x)\left(1 \pm \dfrac{i}{\lambda(x-x_0)}\right)$.

Но в общем случае на сходимость АР (3) мало надежды. Условия на потенциал q, обеспечивающие сходимость этих рядов при $x \in [-a, a]$, $\lambda > \lambda_0$, по-видимому, какие-то очень сложные. Даже класс потенциалов, для которых ряды (3) обрываются и то до сих пор не описан. Последний результат на эту тему получен мной совместно с одним из моих учеников В.Е. Подольским в уже упомянутой мной работе. Если существует номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такой, что при любом $n > n_0$ имеем $b_n(q,x) \equiv 0$, то $q(x) = \left(\dfrac{\mathcal{P}'(x)}{\mathcal{P}(x)}\right)'$, где $\mathcal{P}(x)$ – квазимногочлен. (Обратное, вообще говоря, неверно!)

Но расходящиеся асимптотические ряды – не редкость в математическом анализе. Они довольно часто используются для приближённого вычисления значений "своих" функций. Характерен следующий эффект. Частичные суммы АР сначала приближаются к своей функции, а уже потом удаляются от неё. И если они приближаются к вычисляемой функции на достаточно малое расстояние в равномерной метрике, то такие ряды с точки зрения прикладного математика нисколько не хуже сходящихся. Ведь на практике у сходящегося ряда всё равно не вычисляют бесконечную сумму, а ограничиваются аппроксимацией N-ой частичной суммой. К тому же сколь угодно высокая точность приближения, которую теоретически обеспечивает сходящийся ряд, не нужна. Во-первых, само уравнение описывает реальный физический процесс с некоторой погрешностью, а во-вторых, могут возникнуть трудности при вычислении "длинных" частичных сумм.

Если мы хотим приближать решения $y_j(q,x,\lambda)$ с помощью АР (3), то надо понять, до какого номера следует вычислять частичные суммы, затем оборвать разложение и оценить погрешность. Оценки должны быть равномерными на просто описываемых классах потенциалов q в различных функциональных пространствах.

Дадим точную формулировку основного результата.

Через $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda)$ обозначим невязку при приближении решений уравнения (1) $y_j(q,x,\lambda)$ n-й частичной суммой АР (3): $\varphi_{n,j}(q,x,\lambda) = y_j(q,x,\lambda) - S_{n,j}(q,x,\lambda)$. Без ограничения общности можно считать, что $q(0) = 0$. Если $q(0) \neq 0$, то всегда можно перейти к потенциалу $q_1(x) = q(x) - q(0)$:

$$-y'' - q_1(x)y = (\lambda^2 + q(0))y$$

и разлагать решения по параметру $\mu = \sqrt{\lambda^2 + q(0)}$.

Основная **Теорема.** *Пусть функция* $q(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *аналитична в круге* $|z| < R$, $R > a$, *и следующая норма конечна:*

$$\|q\|_R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n| R^{n+1}}{n+1} = M < +\infty\,; \quad \text{Пусть } M_0 = \int_{-a}^{a} |q(t)| dt\,. \tag{6}$$

Тогда, если в качестве N *взять ближайшее целое число к* $2\lambda(R-a)-1$, $N > 1$, *то справедлива оценка*

$$\sup_{\eta \geq \lambda} \max_{j=0,1} \max_{x \in [-a,a]} |\varphi_{N,j}(q,x,\eta)| \leq C(N-1/2)^{-1/2} \exp\left(\frac{M_0}{\lambda} - 2\lambda(R-a)\right)\,,$$

$$C = C(R,a,M) = \sqrt{2}(M(R-a))^{1/4} \exp\left(2\sqrt{M(R-a)}\right).$$

Замечание. В серии работ, посвящённых доказательству этой теоремы (они выходят в журнале "Дифференциальные уравнения" в номерах 2, 3, 4 за 1999 год), мы доказали этот результат с $C = C(R,a,M) = \sqrt{8}(M(R-a))^{1/4} \exp\left(2\sqrt{M(R-a)}\right)$, но после того, как эти работы были приняты к печати, мы обнаружили, что постоянную $C(R,a,M)$ можно снизить в два раза.

Главное: чем больше радиус голоморфности потенциала q, тем лучше оценка.

Заметим, что нами доказано следующее: в принципе номер $N(\lambda)$ зависит от λ, однако, он обеспечивает данную точность приближения и для $\eta > \lambda$. Поэтому нет необходимости вычислять для $\eta > \lambda$ бо́льшее число коэффициентов $b_{n,j}(x)$.

Оценка наилучшего приближения нужна в основном для того, чтобы определить наименьшее число λ при котором есть данная точность.

Мы боролись за хорошие постоянные в оценках для того, чтобы, во-первых, гарантировать наиболее высокую точность приближения, а во-вторых, максимально снизить границу для λ, начиная с которой можно использовать этот алгоритм, если погрешность задана.

Приведём примеры, демонстрирующие точность приближения предлагаемым методом решений упоминавшегося уравнения Матье

$$-y'' \pm y \cos x = \lambda^2 y\,, \quad x \in [0,\pi]\,.$$

Сделаем замену переменного $x = t - \pi/2$ и получим уравнение

$$-y'' \pm y \sin t = \lambda^2 y\,, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]\,.$$

Здесь $q(t) = \pm \sin t$, $q(0) = 0$.

Таблица

λ	номер приближающей суммы	гарантированная точность
≥ 5	21	0,00021
≥ 6	29	$1{,}7\cdot 10^{-6}$
≥ 7	38	10^{-8}
≥ 8	47	$3\cdot 10^{-11}$

Замечание. Норма $\|q\|_R$ может показаться неудобной для вычислений, но она допускает простые оценки сверху:

$$1)\ \|q\|_R \leq \frac{R}{2}\int\limits_0^{2\pi} |q(Re^{i\theta})|d\theta \quad (\text{неравенство Харди для } q \in H^1(|z| < R))\,,$$

$$2)\ \|q\|_R \leq R \sup_{|z|<R} |q(z)| \quad \text{для } q \in H^\infty(|z| < R)\,.$$

За счёт чего получается основная теорема? Что доказано на самом деле? Известна оценка невязки $\varphi_{n,j}$ через $(n+1)$-й коэффициент асимптотического ряда (Ф. Олвер. Асимптотика и специальные функции. М. Наука, 1990, стр. 353):

$$\max_{j=0,1} \max_{x\in[-a,a]} |\varphi_{n,j}(q,x,\lambda)| \leq 4\exp\left(\frac{M_0}{\lambda}\right) \frac{\max\limits_{j=0,1} \mathcal{V}(b_{n+1,j})}{\lambda^{n+1}}\,, \tag{7}$$

где $\mathcal{V}(f) = \max\left(\operatorname{var} f(x)\big|_0^a,\ \operatorname{var} f(x)\big|_{-a}^0\right)$.

Проблема состояла в том, чтобы оценить сверху коэффициенты асимптотических рядов. Нами получены почти неулучшаемые на широких классах потенциалов оценки коэффициентов АР.

Сделана минимизация по номеру остатка.

Для $q(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ обозначим $\mathcal{P}(q)(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$. Отображение $\mathcal{P}$ не меняет радиус сходимости ряда и $\|\ \|_R$-норму.

Несложно доказать, что неравенство (7) можно преобразовать следующим образом:

$$\max_{j=0,1} \|\varphi_{n,j}(x,\lambda)\|_{C[-a,a]} \leq 4\exp\left(\frac{M_0}{\lambda}\right) \frac{\max\limits_{j=0,1}(b_{n+1,j}(\mathcal{P}(q),a) - b_{n+1,j}(\mathcal{P}(q),0))}{\lambda^{n+1}}\,.$$

Введём класс потенциалов

$$\mathfrak{Q}^0(M,R) = \{q(z) \mid \|q\|_R \leq M\,,\ q(0) = 0\}\,,$$

и экстремальную функцию в оценках коэффициентов

$$\mathfrak{B}_n^0(M,R,a) = \sup_{q\in\Omega^0(M,R)} \max_{j=0,1}\max_{|z|\le a} |b_{n,j}(q,z)|\,.$$

Теорема 1. *При любых $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 3$, справедливы неравенства*

$$\frac{(n-3)!\,MR^{-1}}{2^{n+1}(R-a)^{n-2}} < \mathfrak{B}_n^0(M,R,a) < \frac{(n-1)!uI_1(2u)}{2^n(R-a)^n}\,, \tag{8}$$

где $u = \sqrt{M(R-a)}$, $I_1(2u) = \sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\dfrac{u^{2\nu+1}}{\nu!(\nu+1)!}$ *– модифицированная функция Бесселя с индексом 1.*

Замечание. Для модифицированной функции Бесселя с индексом 1 верны оценки

$$I_1(v) < \frac{1}{2}\,\mathrm{sh}(v)\,,\quad I_1(v) < (2\pi v)^{-1/2}e^v \quad \forall v>0\,.$$

При малых v лучше пользоваться первым неравенством, а при больших v – вторым.

Сопоставление оценок снизу и сверху в неравенстве (8) показывает, что при постоянных M, a, R оценки сверху и снизу экстремальной функции при $n\to\infty$ отличаются на множитель cn^2, который очень мал в сравнении с ростом $\mathfrak{B}_n^0$ – $n!k^n$.

Таким образом, для нецелых $q(z)$ нами найден порядок роста коэффициентов рядов (3) на естественных классах. Более того, для нецелого $q(z)$ из конуса $\mathcal{K}_R$ решена даже "индивидуальная" задача. $\mathcal{K}_R$ – конус в пространстве функций, аналитических в круге $|z|<R$, состоящий по определению из тех функций, все производные которых в точке 0 неотрицательны.

Теорема 2. *Если $q(0)=0$, $q\in\mathcal{K}_R$ и радиус сходимости степенного ряда для $q(z)$ в точности равен R, то при любых $r\in(0,R)$ и $j=0,1$ справедливо предельное соотношение*

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{b_{n,j}(q,r)}{n!}} = \frac{1}{2(R-r)}\,. \tag{9}$$

Подведём некоторые итоги.

Было бы интересно отыскать критерий на потенциал q, при выполнении которого ряды (3) являются конечными суммами, а также найти какое-либо нетривиальное условие, достаточное для того, чтобы ряды (3) равномерно сходились при $|\lambda|>\lambda_0$ в круге $|z|\le r$, то есть выполнялись бы оценки

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\le r}|b_{n,j}(q,z)| = O\left((\lambda_0+\varepsilon)^n\right)\quad \forall\varepsilon>0.$$

Нами была высказана следующая гипотеза. Если для каких-либо r и $\lambda_0>0$ справедливо указанное выше соотношение, то $q(z)$ является производной от логарифмической производной некоторой целой функции, удовлетворяющей некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению бесконечного порядка с постоянными коэффициентами и характеристической функцией конечного экспоненциального типа. О решениях таких уравнений (уравнений свёртки) см. работы А.О. Гельфонда, А.Ф. Леонтьева и В.В. Напалкова.

Насколько нам известно, оценок сверху коэффициентов асимптотических рядов ранее не было. Исследовалось поведение коэффициентов асимптотических рядов при растущем

n в существенно более общей ситуации – для уравнений произвольного порядка, но зато для весьма узкого класса коэффициентов этих уравнений. Вопрос о точности даваемых оценок оставался открытым. А именно, изучались асимптотические ряды решений задачи Коши для уравнений

$$y^{(m)} + \sum_{k=1}^{m} p_k(x,\lambda) y^{(m-k)} = 0\,, \tag{10}$$

где $p_k(x,\lambda) = \sum\limits_{\alpha=0}^{k} \lambda^\alpha p_{\alpha,k}(x)$, причём $p_{k,k}(x) \equiv p_{k,k}$ – константы, и характеристический многочлен $t^m + \sum\limits_{k=1}^{m} t^{m-k} p_{k,k}$ не имеет кратных корней. Уравнение (1) входит в класс уравнений (10): оно получается при $m = 2$, $p_1(x,\lambda) \equiv 0$, $p_0(x,\lambda) = \sum\limits_{\alpha=0}^{2} \lambda^\alpha p_{\alpha,0}(x)$, где $p_{0,0}(x) = q(x)$, $p_{1,0}(x) = 0$, $p_{2,0}(x) = -1$. Его характеристический многочлен равен $t^2 - 1$.

А.О. Кравицкий и В.Б. Лидский показали, что если функции $p_{\alpha,k}(x)$ при $0 \le k \le m-1$, $0 \le \alpha \le k-1$ являются многочленами, то максимумы модулей на $[0,1]$ коэффициентов при λ^{-n} асимптотических рядов решений задачи Коши для уравнения (10) суть $O(n^{m+n\gamma} B^n)$, где $\gamma = (d+1)/(d+2)$, d – наибольшая из степеней полиномов $p_{\alpha,k}$, h – наибольший из модулей их коэффициентов, $B = 6(d+1)^{\gamma+1} m(m+1)h$. Для уравнения (1) цитированный результат означает в точности следующее. Если $q(z)$ – полином степени d, то

$$\max_{j=0,1} \max_{x\in[0,1]} |b_{n,j}(q,x)| = O\left(n^{2+n\gamma}(36h(d+1)^{\gamma+1})^n\right)\,.$$

В этой же работе было установлено, что для $q(x) = x^d$, $d \in \mathbb{N}$ при любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$|b_{n,0}(q,0)| \ge \frac{n^{n\gamma_1}}{2^n} \left(\frac{d+1}{(d+2)e}\right)^{n\gamma_1}\,, \text{ где } \gamma_1 = \frac{d}{d+2}. \tag{11}$$

Таким образом, из результатов А.О. Кравицкого и В.Б. Лидского для $|b_{n,j}(q,z)|$ получаются оценки сверху только в случае, когда q – полином, да и то не точные. А.С. Печенцов показал, что если $p_{\alpha,k}(x)$ – целые функции конечного экспоненциального типа, то максимумы модулей на $[0,1]$ коэффициентов при λ^{-n} асимптотических рядов решений задачи Коши для общего уравнения, рассмотренного выше, суть $O(c^n n^{n+m})$, где c – некоторая эффективная постоянная. Тем самым, для уравнения (1) был разобран случай, когда $q(z)$ является целой функцией конечного экспоненциального типа. Насколько известно авторам, для целых потенциалов бесконечного экспоненциального типа и тем более не целых $q(z)$ оценок сверху $|b_{n,j}(q,z)|$ в общей ситуации при растущих n ранее не было. Доказанная нами теорема 1 не только решила эту общую задачу, но и позволила значительно уточнить упомянутые оценки сверху для коэффициентов асимптотических рядов решений уравнения (1), рассмотренных ранее указанными авторами. При этом наши оценки сверху близки к даваемым в этих работах оценкам снизу.

Укажем несколько следствий из наших результатов.

Следствие 1. *Пусть* $q(z)$ *– многочлен степени* $d \ge 1$, *а именно* $q(z) = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k z^k$, $H = \sum\limits_{k=0}^{d} \frac{|a_k|}{k+1}$. *Тогда при любых* $r \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge (d+2)\sqrt{H} \left(\frac{r(d+1)}{2\ln(1+d/2)}\right)^{1+d/2}$ *спра-*

ведлива оценка

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\le r}|b_{n,j}(q,z)| \le 2^{n-1}n^{1/2+n\gamma_1}H^{\frac{n}{d+2}}\,, \tag{12}$$

где $\gamma_1 = d/(d+2)$.

Неравенство (12) усиливает оценку, полученную А.О. Кравицким и В.Б. Лидским для полиномиальных потенциалов и почти смыкается с их оценкой снизу (11). Зазор в этом случае имеет порядок C^n, $C > 1$ – некоторая постоянная.

Следствие 2. *Если для целой функции* $q(z)$ *с некоторыми положительными постоянными* A *и* σ *выполнено ограничение на рост,*

$$|q(z)| \le A\exp(\sigma|z|) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

то при любых $r > 0$ *справедливо соотношение*

$$\max_{j=0,1}\max_{|z|\le r}|b_{n,j}(q,z)| = O\left(n!\,\sigma^n\exp(-n\ln\ln n)\right)\,, \quad n \ge 3\,,$$

в котором постоянная O *эффективно зависит от* A, r *и* σ.

Кратко скажем о перспективах дальнейших исследований.

I. Для уравнения $-y'' - q(x)y = \lambda^2 y$.

1. Мы вели рассказ для $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in [-a,a]$. Всё сделано для $\lambda \in \mathbb{C}$, $z = x \in \mathbb{C}$, $|z| \le a$. Оценка ухудшается на множитель $\exp(|\operatorname{Im}(\lambda z)|)$.

2. Мы рассмотрели случай, когда потенциал $q(z)$ аналитичен в круге $|z| < R$, $R > a$. Аналогичные теоремы (но с чуть худшими оценками) нами доказаны для потенциалов, аналитических лишь в ρ-окрестности отрезка $[-a,\ a]$.

II. Предполагается обобщить наши результаты для уравнений $y'' + q(x)y = \lambda^2 p(x)y$ как с точками поворота, так и без них.

III. Перенести оценки коэффициентов на уравнения произвольного порядка, коэффициенты которых полиномиально зависят от λ.

IV. На основе полученных нами результатов предполагается решить задачу о приближении собственных значений упоминавшейся в докладе краевой задачи

$$-y'' + q(x)y = \Lambda y\,, \qquad y(0) = y(\pi) = 0\,,$$

начальными отрезками их асимптотических разложений. Весьма возможно, что наши результаты позволят обосновать некоторую модификацию метода Гельфанда–Дикого приближённого вычисления собственных значений этой краевой задачи.

V. Первый раз мы сделали этот доклад 2 сентября 1998 года на конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения академика Л. С. Понтрягина. В состоявшейся после нашего доклада беседе с член-корреспондентом РАН А. М. Ильиным из Екатеринбурга возникла мысль аппроксимировать ФСР уравнения (1) конструкциями вида

$$e^{i\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{N} b_{k,1}(x)\lambda^{-k} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_{k,1}(x)\lambda^{-k}\right) + e^{-i\lambda x}\left(\sum_{k=0}^{N} b_{k,2}(x)\lambda^{-k} \Big/ \sum_{k=0}^{N} a_{k,2}(x)\lambda^{-k}\right)\,,$$

в АР (3) $a_{0,1} = a_{0,2} = 1$, а при $k \ge 1$ $a_{k,1} = a_{k,2} = 0$. Другими словами, предлагается приближать решения не полиномом от $1/\lambda$, а рациональной функцией от $1/\lambda$. По-видимому, имеет смысл исследовать перспекивность этого пути. Аргументом в пользу этого является то, что иногда функции приближаются рациональными функциями намного быстрее, чем многочленами.

В заключение коснёмся вопроса об аппроксимации ФСР уравнения (1) с непрерывным на $[-a,\ a]$, но не аналитическим потенциалом q. Приблизим q на отрезке $[-a,\ a]$ многочленом p с высокой степенью точности. Тогда ФСР уравнения (1), удовлетворяющая начальным условиям (2), будет мало отличаться в равномерной метрике от ФСР уравнения $y'' + p(x)y = \lambda^2 y$, удовлетворяющей тем же начальным условиям. Аппроксимировав решения нового уравнения нашим методом, получим приближённые решения исходного уравнения.