

# Спектрометрия в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера\*

Р.И. Богданов, И.В. Гайдученко, В.А. Расторгуев, Ю.И. Тарасов

Научно-исследовательский институт ядерной физики

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

## Аннотация

В статье излагаются результаты статистической обработки значений адиабатических инвариантов периодических орбит для отображения плоскости на себя, называемого в литературе "Bogdanov map". Периоды рассмотренных периодических орбит заключены в диапазоне  $1 \div 10^7$ , а их количество составляет  $\approx 2 \cdot 10^3$ . Рассмотрены четыре набора параметров отображения "Bogdanov map", характеризующиеся наличием макросимметрий порядка 6, 5, 4, 3 (макросимметрия порядка 2 готовится к печати). Приведено обсуждение результатов с точки зрения их приложений в математической физике. Авторы выражают благодарность за полезные обсуждения А.И. Плису, В.Г. Сухаревскому и В.А. Садовничему, а также участникам семинара, работающего под его руководством, где результаты статьи неоднократно докладывались.

## 1 Введение

1. Гармонический осциллятор в качестве модели простейшей динамики физической системы пронизывает как классическую, так и квантовую механику (см. [19], [22], [27]). Восходит эта модель к классической механике, являясь простейшей натуральной системой (см. [6]). В окрестности точки локального минимума полной энергии негармонической системы эта модель дает нулевое, причем интегрируемое, приближение в описании динамики системы.

Удаление от точки минимума полной энергии в фазовом пространстве требует в ряде задач учесть следующий член в ряде Тейлора потенциальной энергии в окрестности локального минимума. Таким образом, в качестве первого приближения в описании динамики системы появляется ангармонический осциллятор.

Ангармонический потенциал наряду с локальным минимумом имеет локальный максимум. Удивительным фактом является то, что в большом количестве приложений ангармонический потенциал качественно описывает динамику на сравнительно большом участке фазового пространства, включающем как локальный минимум, так и ближайший к нему локальный максимум.

2. Вместе со сказанным выше вызывает удивление то, что диссипативные возмущения в моделях ангармонического осциллятора изучались недостаточно глубоко.

Объясняется этот факт тем соображением, что в экспериментальной физике учет диссипативных, точнее слабо-диссипативных, возмущений сильно затрудняет и усложняет

---

\*Исследования выполнены при частичной поддержке фонда РФФИ грант № 98-01-00053.

экспериментальные исследования. То же самое можно сказать и про теоретические исследования. Уместно подчеркнуть, что слабо-диссипативные возмущения консервативных систем конечно рассматривались в классической механике (см. [4], [30], [32], [36]). Сегодня можно сказать, что диссипации при этом рассматривались в строгом смысле: трение без возбуждения. Трудности возникали при вырождении диссипативных сил в динамических системах, зависящих от параметров. Таким образом, область слабо-диссипативных возмущений консервативных систем оказалась вне круга глубоких систематических исследований, если не считать ряд попыток в последние десятилетия.

3. Версальные деформации динамических систем на плоскости были введены в 70-е годы в работах В.И. Арнольда и его школы специально с целью исследования локальных качественных свойств динамических систем, зависящих от параметров (см. [4]). Версальные семейства по определению это специальные конечно-параметрические семейства динамических систем, в которых представлены все возможные качественные свойства динамики, получающиеся при возмущении данной вырожденной динамической системы. Именно понятие версального семейства позволило продвинуть анализ слабо-диссипативных возмущений в случае ангармонического осциллятора.

Наиболее удивительным здесь выглядит ответ. С механической точки зрения, т. е. при изучении нелинейных натуральных систем на прямой, в локальных задачах слабо-диссипативные добавки удастся представить в виде силы трения, пропорциональной скорости (импульсу) частицы. В работе [9] этот результат сформулирован и доказан математически строго. Однако коэффициент трения при этом нужно выбирать в виде функции на фазовой прямой. В простейшем случае эта функция является линейной с малыми коэффициентами. Слова "малые коэффициенты" нуждаются в уточнении и, оказывается, такое уточнение можно сделать.

Но прежде необходимо подчеркнуть, что коэффициент трения в случаях появления нетривиальной динамики должен менять знак между локальным минимумом и максимумом ангармонического потенциала. Другими словами, слабо-диссипативное возмущение оказывается возмущением с возбуждением системы (отрицательное трение, добавляющее энергию движущейся частице!).

Теперь приведем уточнение предыдущего абзаца.

4. Классические исследования нетривиальных примеров динамических систем, зачастую обосновывались асимптотическим анализом в окрестности стационаров (точек покоя) системы. При наличии параметров у системы стационары с изменением параметров могут сливаться и исчезать (или рождаться при противоположном изменении параметров). Простейший пример дает ангармонический потенциал, у которого коэффициент жесткости (коэффициент Гука) при изменении параметров обращается в нуль. Это – одно из условий на трехпараметрическом пространстве ангармонических потенциалов (мы не фиксируем точку отсчета энергии).

Оказывается, если у ангармонического потенциала коэффициент жесткости обратился в нуль, то анализ диссипативных возмущений упрощается. Дополнительное вырождение диссипативной системы связано со свойством, что в вырожденном стационаре может обратиться в нуль коэффициент трения, пропорционального скорости.

При отсутствии дополнительных вырождений указанная динамическая система имеет двукратно вырожденный стационар, потому что вышеуказанные два условия независимы между собой. Другими словами, снять вырождение можно с помощью двух малых параметров. Один из них отвечает за расстояние между локальным минимумом и максимумом ангармонического потенциала, если таковые существуют <sup>1</sup>. Второй является

---

<sup>1</sup>В пространстве параметров есть открытая область, которой отвечают возмущенные динамические системы без стационаров в окрестности точки в фазовом пространстве, являющейся стационаром

малой добавкой к диссипации невозмущенной системы, причем его можно выбрать пропорциональным скорости с малым постоянным коэффициентом трения.

Исследование бифуркации Богданова–Тakensа показало, что качественные свойства динамики системы в окрестности <sup>2</sup> двукратно вырожденной точки тем самым полностью описываются локально (см. [1], [23]). Таким образом мы приходим к двумпараметрическому семейству вида

$$\ddot{x} + (\mu + x)\dot{x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x^3}{3} + \varepsilon \frac{x^2}{2} \right), \quad (1)$$

представляющему бифуркацию Богданова–Тakensа в окрестности точки  $x = \dot{x} = 0$  в фазовом пространстве. Параметры  $\mu$  и  $\varepsilon$  при этом меняются в окрестности точки  $\mu = \varepsilon = 0$ .

Этот локальный результат в пространстве параметров и фазовом пространстве заключается в том, что добавка к уравнению (1) слагаемых более высокой степени по переменным  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , (т.е. малых добавок) не меняет качественного поведения решений локально.

5. У бифуркации Богданова–Тakensа есть и специальный глобальный аналог. Уравнение (1) допускает перенормировки. В частности, в области  $\varepsilon < 0$ , ангармонический потенциал имеет локальный минимум и максимум. Можно согласованно "растянуть" ось  $x$  и ось импульсов (независимо) так, что уравнение (1) примет вид слабо-диссипативного возмущения ангармонического осциллятора, у которого локальные минимум и максимум будут находиться на единичном расстоянии на новой оси  $Ox$ . Полная динамическая система переходит при этом в динамическую систему, являющуюся слабо-диссипативным возмущением натуральной потенциальной системы с одной степенью свободы.

6. В работе [1] было предложено изучить дискретную аппроксимацию уравнения (1). Точнее рассматривается дискретизация динамической системы (1) по разностной схеме Эйлера первого порядка. При этом выбирается полуявная схема Эйлера: конечная разность для скорости фазовой точки включает ускорение в узле дискретной решетки, сдвинутом на шаг дискретизации относительно исходного узла. Полуявная схема Эйлера имеет, по крайней мере, два преимущества по сравнению с явной схемой Эйлера. Первое преимущество чисто математическое: полиномиальное дискретное отображение отвечающее сдвигу на шаг дискретизации в конфигурационном пространстве динамической системы при обращении приводит к дробно-рациональному отображению. Этот факт значительно упрощает проверки численных расчетов. Второе преимущество полуявной схемы заключается в предоставлении возможности её содержательной физической интерпретации: она учитывает поток тепла в форме закона Фурье на свободном пробеге частицы на шаге дискретизации (см. [8]). Таким образом, мы рассматриваем движение частицы, которая через шаг дискретизации (постоянный в собственном времени) меняет направление движения, а на пути свободного пробега "взаимодействует с окружающей средой".

7. Семейство отображений, рассмотренное в [1], включает в себя три параметра. Два из них совпадают с параметрами непрерывной динамической системы (1). Третий параметр – шаг дискретизации в схеме Эйлера, описанной в п. 6. Приведём явное выражение для этого семейства:

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + [y + \varepsilon y + kx(x - 1) + \mu xy] \\ y + \varepsilon y + kx(x - 1) + \mu xy \end{pmatrix}. \quad (2)$$

вырожденной (невозмущенной) динамической системы.

<sup>2</sup>В пространстве всех систем.

Семейство, описанное в п. 6, допускает, точно также как и семейство (1), ренормировки. После подходящего растяжения независимых переменных мы приходим к новому трехпараметрическому семейству (2) отображений фазовой плоскости. Новое семейство является малым возмущением "консервативной" динамической системы, точнее системы сохраняющей элемент площади на фазовой плоскости. Невозмущенная система при этом имеет две неподвижные точки на оси  $Ox$ , отстоящие друг от друга на отрезок единичной длины: эллиптическая особая точка  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  и гиперболическая  $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ . Эти неподвижные точки отвечают стационарам динамической системы с непрерывным временем (1).

Уместно подчеркнуть при этом, что шаг дискретизации допускает простую физическую интерпретацию: это ни что иное как время "свободного" пробега частицы в поле внешних сил, причем при "свободном" пробеге учитывается радиационное взаимодействие с окружающей средой. Можно сказать, что мы получаем одну из моделей броуновского движения частицы. В отличие от "чисто" броуновской кинематики мы не ставим целью получения "чисто" стохастического "белого шума" (см. [28], [34]). Ниже мы увидим, что взамен получаются вполне приемлемые свойства кинематики с физической точки зрения.

8. В работе [1] исследовалось семейство (2) при значениях диссипативных параметров порядка  $\mu, \varepsilon \sim 10^{-2}$  (напомним, что единица отвечает расстоянию между неподвижными точками. Таким образом, диссипации получаются порядка  $\sim 10^{-5}$ ). Интересным наблюдением авторов работы [1] был тот факт, что в семействе (2) при таких параметрах появляются периодические орбиты с периодом  $\sim 10 \div 20$  шагов.

Авторы с коллегами изучали пример (2) при параметрах диссипации  $\sim 10^{-5}$ . Было выяснено, что картина периодических орбит становится очень богатой, если шаг дискретизации меняется в диапазоне  $0.6 \div 4.8$  (см. [8], [14], [16]).

Ниже подробнее излагаются качественные свойства найденных периодических орбит.

9. Одно из самых удивительных свойств периодических орбит заключается в поведении их численных характеристик в зависимости от периода орбиты.

Численные характеристики здесь понимаются в соответствии с консервативной динамикой невозмущенной динамической системы (1): полная энергия, кинетическая составляющая и потенциальная, импульс и т.п. Вдоль периодической орбиты определены средние значения этих величин, их дисперсии и прочие статистические характеристики.

Оказывается средние значения разбивают множество периодических орбит на отдельные подмножества – кортежи. Внутри кортежа эти численные величины обнаруживают тенденцию сходиться к предельному значению.

Ниже мы описываем поведение численных характеристик внутри кортежа.

10. Периодические орбиты в слабо-диссипативном семействе (2) бывают трех видов: асимптотически устойчивые (в физической интерпретации состояния "out"); асимптотически неустойчивые (состояния "in"); гиперболические (рассеивающие состояния).

В наших расчетах мы обнаруживали до  $10^3$  орбит типа "in" и "out", на каждый вид из которых приходится приблизительно половина названного числа.

В окрестности каждой орбиты типа "in" или "out" мы находим гиперболическую орбиту с таким же периодом. Гиперболические орбиты, зачастую, гомоклинические или гетероклинические. Таким образом, в этих случаях появляется счетное число гиперболических орбит. Мы заметили согласие численных характеристик периодических орбит типа "in" или "out" с соответствующими им гиперболическими в пределах 10%.

Найденные периодические орбиты типа "in" или "out" разбивались на кортежи в количестве от одного до пяти, шести и более. Соответственно, разбивались на кортежи гиперболические орбиты. Таким образом, мы можем высказать гипотезу о разбиении

странного аттрактора в этом примере на отдельные части с разной динамикой на них.

11. Свойства периодических орбит внутри кортежа, как отмечалось выше, стабилизируются с ростом периода орбиты внутри кортежа.

В частности, средние энергии кортежей получают хорошее разрешение на оси энергий. Расстояние между кортежами на два, три порядка больше полуширины кортежа. Это свойство одинаково относится к средней длине пробега, кинетической энергии и потенциальной составляющей полной энергии.

Сопоставление кортежей "in" и "out" показывает, что на шкале энергий между ними имеется "большое" расстояние (так называемая в ряде физических приложений "массовая щель"). Таким образом, одни из них группируются на "дне" потенциальной ямы, а другие около локального максимума – барьера ангармонического осциллятора.

12. Флюктуационный анализ численных характеристик можно выполнить с помощью вычисления дисперсии числовых величин вдоль периодических орбит.

В рассмотренных нами примерах дисперсии оказываются большими и сравнимы со средними значениями соответствующих физических величин. Длина среднего пробега, кинетическая энергия и в рассматриваемом нами случае полная энергия заведомо положительные величины. Поэтому большие значения дисперсий показывают, что распределения этих величин скорее устроены как равномерные распределения на отрезке. Таким образом, динамика вдоль периодических орбит оказывается своеобразной с точки зрения ее статистических свойств.

В прикладных физических задачах, связанных с исследованием динамики в окрестности гиперболических стационаров динамических систем, флюктуационный анализ ведет к пониманию физических феноменов (типа критической опалесценции). Уместно подчеркнуть, что сделанное выше замечание, в слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера одинаково относится к состояниям "in" и "out", т. е. структурно устойчивым орбитам.

Результаты нашей численной обработки, прилагаемые в виде таблиц в конце статьи, обнаруживают следующий факт. Средние значения диссипаций вдоль периодических орбит в разобранных примерах (см. табл. 1)  $\approx 10^{-5}$  (численные данные показывают их возрастание с уменьшением порядка макросимметрии (см. табл. 1 и приложение)). Дисперсии диссипаций вдоль периодических орбит превышают эти средние значения. Этот факт одинаково относится не только к гиперболическим орбитам, но и к орбитам типа "in" или "out". Учитывая близость численных данных периодических орбит типа "in" или "out" и подходящих гиперболических орбит мы имеем возможность по-новому интерпретировать исследования, посвященные динамике в окрестности гиперболических орбит. Таким образом возникают новые подходы в флюктуационном анализе.

13. Сорбционные характеристики асимптотически устойчивых орбит (или неустойчивых при  $t \rightarrow -\infty$ ) связаны с якобианом отображения (2). Точнее определителем матрицы Якоби отображения (2). Мы имеем возможность вдоль периодической орбиты посчитать среднее значение якобиана, указанного выше. Другими словами, если  $k$  – период орбиты и  $\mathbf{X}_0$  – ее начальная точка, то, обозначая через  $g(\mathbf{X})$  отображение (2), получаем  $g^k(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0$ . Тогда, рассматривая якобиан отображения  $g^l(\mathbf{X}_0)$ , ( $1 \leq l \leq k$ ) получаем среднее сорбционное значение орбиты.

Внутри кортежа сорбционные величины ведут себя линейно в зависимости от периода орбиты. В области низких периодов они уходят с линейной зависимости. Интересный вопрос об их поведении в области высоких периодов, скажем  $\geq 10^8$ .

14. В заключение отметим, что наличие странных аттракторов гиперболического типа у динамических систем было открыто в численных исследованиях Lorenz (50-60 г.г., см. [29]). Тот факт, что такие странные аттракторы являются типичным явлением

восходит к работам Аносова (см. [3]).

Появление отображения (2) повлекло систематическое развитие слабо-диссипативной версии теории Колмогорова–Арнольда–Мозера (см. [1], [8], [12], [14], [15], [16]). Стало доступным получать с помощью ЭВМ богатые наборы орбит типа "in" и "out". Слова "богатые наборы" означают, что их можно подвергать статистической обработке.

Вместе с этим стало ясно, что в слабо диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера в окрестности гиперболического аттрактора имеются более традиционные структуры, образуемые орбитами типа "in" и "out". Их структурная грубость не вызывает никакого сомнения. По сравнению с гиперболическим аттрактором эти структуры являются структурами с положительной полной мерой в фазовом пространстве. Тем самым их исследование значительно упрощается. Эти структуры типа "in" и "out" несут информацию о динамике на странном аттракторе. Тем самым мы получаем возможность с новой точки зрения исследовать динамику на странных аттракторах динамических систем.

## 2 Описание численной обработки

В работе [8] приведены численные данные, отвечающие периодическим орбитам основного отображения (2), указанного во введении.

С использованием более производительного процессора IBM PC типа Pentium-200 цифровые данные, приведенные в [8] были дополнены. Таким образом стало возможно вычислять периодические орбиты с периодом  $\lesssim 10^7$ . Следовательно качество представительности выборок до периодов  $\lesssim 10^6$  резко улучшилось, поэтому число периодических орбит, подлежащих анализу и обработке, возросло до  $\sim 2 \cdot 10^3$ :  $\sim 10^3$  – гиперболических орбит;  $\sim 5 \cdot 10^2$  – асимптотически устойчивых орбит (состояния "out");  $\sim 5 \cdot 10^2$  – асимптотически неустойчивых (состояния "in").

Ниже описываются результаты предварительной статистической обработки вышеуказанных выборок.

### 2.1 Численные данные периодической орбиты

2.1.1. Обозначения. Напомним, что мы рассматриваем основное отображение фазовой плоскости вида

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + [y + \varepsilon y + kx(x-1) + \mu xy] \\ y + \varepsilon y + kx(x-1) + \mu xy \end{pmatrix}. \quad (3)$$

где  $\varepsilon, \mu$  – малые параметры,  $k$  – параметр, пробегающий значения на вещественной оси. Все величины в (3) вещественные.

Через  $\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}\mathbf{X}}g(x, y)$  обозначим матрицу Якоби отображения  $g(x, y)$ , через  $J$  – определитель матрицы Якоби. Через  $\lambda_1, \lambda_2$  обозначим собственные числа матрицы Якоби.

2.1.2. Определение. Точка  $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^2$  называется периодической точкой отображения  $g(\mathbf{X}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  тогда и только тогда, когда  $g^k(\mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_0$ ,  $g^j(\mathbf{X}_0) \neq \mathbf{X}_0$ ,  $0 < j < k$ .

Периодическая орбита  $\{\mathbf{X}_0, g(\mathbf{X}_0), \dots, g^{k-1}(\mathbf{X}_0)\}$  называется:

- а) гиперболической, если  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ :  $\lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$ ;
- б) асимптотически устойчивой, если  $\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2 < 1$ ;
- в) асимптотически неустойчивой, если  $\operatorname{Re} \lambda_1, \operatorname{Re} \lambda_2 > 1$ ,

где  $\lambda_1, \lambda_2$  – собственные числа матрицы Якоби отображения  $g^k(\mathbf{X}_0)$  в точке  $\mathbf{X}_0$ .

2.1.3. Обозначения. Для каждой периодической орбиты основного отображения  $g(\mathbf{X})$  мы вычисляем 20 вещественных чисел<sup>3</sup>:

- 2)  $k$  – период орбиты,  $k \in \mathbb{Z}^+$ ;
- 3-6)  $(x_0, y_0), g^k(x_0, y_0)$ ;
- 7)  $\bar{E}$  – средняя энергия вдоль орбиты;
- 8)  $\bar{v}$  – средний импульс вдоль орбиты (в (3)  $v = y$ );
- 9)  $\bar{x}$  – среднее значение фазовой переменной;
- 10)  $\bar{v}^2$  – среднее значение удвоенной кинетической энергии;
- 11)  $\bar{l}$  – средний пробег в фазовом пространстве;
- 12)  $\bar{d}$  – средняя диссипация;
- 13)  $\bar{J}$  – средний якобиан;
- 14-20) дисперсии предыдущих семи величин;
- 21)  $\varepsilon_{xy} = \bar{E}/\delta x \cdot \delta y$  – отношение средней энергии к произведению дисперсий фазовой координаты и импульса;
- 22)  $\varepsilon_{ly} = \bar{E}/\delta l \cdot \delta y$  – отношение средней энергии к произведению дисперсий свободного пробега в фазовом пространстве и импульса.

Здесь в уточнении нуждается лишь величина  $\bar{J}$

$$\bar{J} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k J \left( \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}(x, y)} g^j(x, y) \right) \Big|_{(x_0, y_0)}. \quad (4)$$

В отдельном файле хранятся оценки площадей областей захвата асимптотически устойчивых и неустойчивых орбит (см. п. 2.1.4 ниже).

Уместно так же пояснить, что под энергией мы понимаем энергию невозмущенной системы в непрерывном времени. Точнее<sup>4</sup>

$$E(\mathbf{X}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x), \quad (5)$$

где потенциальная энергия

$$U(x) = k \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right). \quad (6)$$

Таким образом,  $E(\mathbf{X})$  – полная энергия. Вычисление удвоенной кинетической энергии, т.е. среднего значения  $v^2$  позволяет сравнивать распределение средней полной энергии вдоль периодической орбиты на кинетическую и потенциальную составляющую. Для гармонического осциллятора эти составляющие равны между собой и, следовательно, равны половине полной энергии. В нашем случае мы находим их различие в пределах 10%. Таким образом, нелинейность нашей модели относительно слабая на уровне макро-величин.

2.1.4. Определение. Областью захвата асимптотически устойчивой (соответственно, неустойчивой) орбиты с периодом  $k$  называется множество точек в фазовом пространстве, которые при  $n \rightarrow +\infty$  (соответственно,  $n \rightarrow -\infty$ ) сходятся к периодической орбите  $\{\mathbf{X}_0, g(\mathbf{X}_0), \dots, g^{k-1}(\mathbf{X}_0)\}$ .

Область захвата имеет нетривиальную теоретико-множественную природу. Вместе с этим она допускает сравнительно простую оценку своей площади снизу на фазовой плоскости.

<sup>3</sup>Нумерация смещена на единицу, потому что в электронном виде имеется одно контрольное техническое число, не имеющее прикладного смысла. В выходных данных в ряде случаев подразумевается указанная нумерация.

<sup>4</sup>Здесь в предыдущих обозначениях  $\dot{x} = y$ .

2.1.5. Замечание. При  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$  отображение (3) сходится к консервативному. Точнее, при  $\varepsilon, \mu = 0$  мы имеем тождество  $J\left(\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{D}(x,y)}g(x,y)\right) \equiv 1$ . Этот факт позволяет разбить область захвата периодической асимптотически устойчивой (или неустойчивой) орбиты периода  $k$  на  $k$  подмножеств равной между собой площади (в пределе при  $\varepsilon, \mu \rightarrow 0$ ). Мы вычисляем оценки площади такой  $1/k$  компоненты области захвата.

Заключение. Ниже описывается обработка и анализ вышеуказанных числовых характеристик периодических орбит отображения (3) (подробнее физические мотивировки см. в [8], [10], [11]), приводится результат обработки, описываемых ниже, четырех групп данных. Эти группы отвечают следующим значениям параметров (см. табл. 1).

Здесь  $h$  – безразмерный шаг дискретизации:  $h^2 = k$ . Величины  $\varepsilon$  и  $\mu$  те же самые, что и в (3). Величина  $x_0$  показывает точку на фазовой плоскости где коэффициент трения меняет знак. Другими словами, величина  $x_0$  отделяет область с возбуждением от области с трением.

Таблица 1.

№	$\varepsilon$	$k$	$h = \sqrt{k}$	$\mu$	$x_0 = -\varepsilon/\mu$	Макросимметрия
1	-1.0E-5	1.26150	1.123	5.80E-5	0.17000	6
2	-1.0E-5	1.53000	1.237	9.80E-5	0.10204	5
3	-1.0E-5	2.02955	1.425	2.85E-4	0.03500	4
4	-7.0E-6	2.83910	1.685	2.53E-4	0.02767	3

Вышеуказанный выбор параметров мотивируется одним соображением: наличие у отображения (3) достаточного числа периодических орбит для их последующего статистического анализа.

Столбец "макросимметрия" отражает следующий факт. Область захвата периодической орбиты типа "in" или "out", описанная в п. 2.1.4, сопоставляет периодической орбите вес: площадь области захвата. Вес позволяет сравнивать (частично упорядочивать) периодические орбиты типа "in" или "out" в естественном смысле. Столбец "макросимметрия" показывает период периодической орбиты с наибольшим весом. В частности, поэтому этот период и называется "макросимметрией".

## 2.2 Кортежи периодических орбит

2.2.1. Замечание. Рассмотрим плоскость с декартовой системой координат. По оси  $Ox$  отложим период  $k$ -периодической орбиты. По оси  $Oy$  отложим одну из числовых величин, характеризующую периодическую орбиту, описанную в п. 2.1.2. Все физические средние величины:  $\bar{E}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{v}^2$ ,  $\bar{l}$ ,  $\bar{J}$  – проявляют на этой плоскости удивительное свойство. Они при возрастании периода  $k$  группируются вдоль определенных прямых на вышеуказанной плоскости. В области низких периодов  $k \lesssim 100$  такого упорядочения не видно. Точки причудливо располагаются на плоскости. Тем не менее, если отправляться от прямых из области высоких периодов  $k \gtrsim 1000$ , то их можно разбивать на группы, пользуясь экстраполяцией в области низких периодов.

2.2.2. Замечание. Лишь одна величина  $\bar{J}$  приводит к прямым, непараллельным оси  $Ox$ , выходящим из точки  $k = 0$ ,  $\bar{J} = 1$  под различными углами наклона. Подчеркнем, что прямые с положительным наклоном отвечают асимптотически неустойчивым орбитам (состояния "in"), а с отрицательным наклоном – асимптотически устойчивым орбитам (состояния "out").



Все остальные величины отвечают прямым с нулевым наклоном, т.е. параллельным оси  $Ox$ , и лежащим на разной высоте. В области низких периодов они имеют "хвостики". Другими словами, мы получаем набор кривых с "насыщением". В области периодов  $0 < k \lesssim 10^3 \div 10^4$ , такая кривая имеет плавное изменение, переходя затем к своей горизонтальной асимптоте – значению "насыщения".

2.2.3. Наблюдение. Наборы периодических орбит, выстраивающихся вдоль прямых, коррелируют очень сильно между собой вне зависимости от того какую переменную на оси  $Oy$  из указанных мы отложили.

2.2.4. Следствие. Наблюдение 2.2.3. позволяет разбивать состояния "in" или "out" на кортежи в соответствии с поведением средних величин вдоль орбиты п. 2.1.2. в зависимости от периода  $k$  орбиты.

Ниже мы описываем статистическую обработку кортежей для 4-х групп данных, отвечающих табл. 1. Отметим сразу же, что число кортежей различное при переходе от одной группы к другой.

2.2.5. Замечание. Неожиданное, на первый взгляд, наблюдение 2.2.3. не кажется удивительным, если продумать топологию расположения в фазовом пространстве периодических орбит типа "in" или "out" (подробнее см. п. 3.2 ниже). Единственный нетривиальный вопрос, сколько различных прямых "выживают" в области высоких частот?

## 2.3 Обработка численных данных в кортеже

2.3.1. Обозначения. Нами была составлена программа "нарезка кортежей" для группы данных. На входе она получает файл числовой информации для набора периодических орбит типа "in" или "out", или "hyperb." (гиперболические периодические орбиты).

После прорисовки на экране одной из переменных, указанных в п. 2.2.1., в зависимости от частоты, программа позволяет "вырезать" кортеж. Для этого задается парой точек прямая вдоль которой располагается кортеж. В кортеж включаются периодические орбиты, отвечающие сектору заданного раствора вдоль указанной прямой. На рис 3, 5 эти секторы хорошо видны. Они нумеруются последовательно в порядке появления.

Затем программа позволяет увеличить масштаб при проходе в область низких периодов, показывая вдоль какой прямой выбирается кортеж. Далее процедура повторяется до тех пор, пока вдоль прямой не будут выбраны все точки (периодические орбиты). Все данные о нарезке кортежей запоминаются. Возможен повторный вход в программу и продолжение "нарезки" кортежей. Таким образом, для группы данных  $N$  получается  $gr.j$  ( $j$ -й кортеж).

2.3.2. Частотный анализ. Если кортежи "нарезаны", то программа позволяет выполнить анализ периодов, попавших в кортеж периодических орбит.

Для каждой орбиты ее период  $k$  разлагается в произведение простых сомножителей

$$k = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5} \cdot 13^{\alpha_6} \cdot 17^{\alpha_7} \dots \quad (7)$$

Затем на экран (принтер) выводятся гистограммы для величин  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  и  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  по дополнительному требованию. Гистограммы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  располагаются в столбец снизу вверх. Столбец для  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  располагается слева и имеет высоту на единицу меньшую предыдущего. Если  $\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$  не выводятся, то следующий столбец дает гистограммы величин  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  для следующего кортежа.

Теневыми точками изображается "теоретическое распределение" величин  $\alpha_1, \dots$  в отрезке натурального ряда целых чисел, отнормированное соответствующим образом.

2.3.3. Гистограммы непрерывных величин. Другая возможность обработки связана с построением гистограмм периодической орбиты внутри выбранного кортежа следующих величин:

- 1) средняя энергия  $\bar{E}$ ;
- 2) квадрат импульса  $\bar{v}^2$ ;
- 3) средняя длина свободного пробега  $\bar{l}$ ;
- 4) средняя диссипация  $\bar{d}$ ;
- 5) средний якобиан  $\bar{J}$ ;
- 6) дисперсия  $E$ ;
- 7) дисперсия  $v^2$ ;
- 8) дисперсия длины свободного пробега  $l$ ;
- 9) дисперсия диссипации  $d$ ;
- 10) дисперсия среднего якобиана;
- 11) величина  $\bar{E}/\delta x \delta y$ .

Слева в столбец снизу вверх печатаются минимальное и максимальное значения указанных величин. Справа снизу вверх и затем справа налево печатаются соответствующие гистограммы.

2.3.4. Браковка "выбросов". После построения, описанного в п.2.3.3. программа позволяет по любой из указанных выше величин удалить "выпрыгивающие" из гистограммы точки. Эта процедура "обрезания хвостов" одинаково удобна для "развала двугорбых" распределений (а тем самым и в случае большего числа пиков распределения). Удалить можно только часть точек с левой стороны и (или) правой стороны гистограммы (т.е. можно "обрезать" хвосты распределения). Других ограничений на браковку нет.

## 3 Обсуждение численных результатов

### 3.1 Постоянная Планка

3.1.1. Распределение Больцмана–Гиббса (см. [21], [27], [28], [34]). Средние энергии описанные в п.2.1.3, связаны со статистическими весами периодических орбит распределения Больцмана–Гиббса

$$S_j \cong Const \cdot e^{-\beta_j \bar{E}_j}, \quad (8)$$

где  $S_j$  – площадь захвата одной точки из периодической орбиты,  $\bar{E}_j$  – средняя энергия вдоль периодической орбиты  $\{\mathbf{X}_0, g(\mathbf{X}_0), \dots, g^{k-1}(\mathbf{X}_0)\}$ ,  $j$  – период орбиты, и в математической физике  $\beta = 1/kT$ , где  $T$  – абсолютная температура,  $k$  – постоянная Больцмана.

Таким образом, факт сходимости  $\bar{E}_j$  внутри кортежа к значению  $E_\infty(l)$ , где  $l$  – номер кортежа, показывает с учетом (8) следующую интерпретацию  $E_\infty(l)$ . Величина  $E_\infty(l)$ , подставленная в (8) влечет соотношение

$$S_j \cong Const \cdot e^{-\beta_j E_\infty(l)}. \quad (9)$$

Но отсюда следует что  $E_\infty(l)$  играет роль постоянной Планка. Анализ приведенной обработки показывает, что для различных кортежей мы получаем различные  $E_\infty(l)$ , где  $l$  – номер кортежа.

Таким образом, мы приходим к выводу, что разным кортежам отвечает определенная абсолютная температура. Другими словами, необходима перенормировка  $\beta E_\infty(l) = \hbar \tilde{\beta}$ , где  $\tilde{\beta} = \frac{E_\infty(l)}{\hbar} \frac{1}{kT}$ , т.е.  $T_{\text{эфф}} = T \cdot \hbar / E_\infty(l)$ .

3.1.2. Принцип неопределенности в квантовой механике (см. [19], [20], [22], [28], [34]). Распределение Больцмана–Гиббса, представленное в виде (9) связывает локальную величину вдоль периодической орбиты –  $S_j$  с интегральной "полной энергией" –  $j \cdot E_\infty(l)$

в виде

$$S_j \cdot e^{-\beta j E_\infty(l)} \cong Const. \quad (10)$$

Таким образом интеграл динамики в виде (10) позволяет говорить, что если известна "точно" полная энергия вдоль орбиты, то положение частицы "достоверно" определяется с точностью до  $S_j = S_{total}/k$ , где  $k$  – период орбиты, а  $S_{total}$  – полная площадь области захвата периодической орбиты типа "in" или "out", то есть интеграл (10) оставляет произвол в местонахождении частицы.

Далее заметим, что величина  $E_\infty(l)$  – в пределах 10% совпадает с величиной  $v^2$ . Таким образом, соотношение неопределенности, вытекающее из (10), может быть представлено в классическом виде: неопределенность координаты коррелирует с неопределенностью импульса.

Наконец, более естественная форма неопределенности – время, энергия (как сопряженные переменные в непрерывной динамике) связана с периодом орбиты  $j$ , дающим характерное время  $j \cdot h$ , где  $h$  – шаг дискретизации по времени. Именно это соображение было мотивировкой вычисления величины  $\varepsilon_{xy} = \bar{E}/\delta x \delta y \gtrsim \hbar$ . Мы видим, что это выражение также насыщается внутри кортежа.

Таким образом, квантование энергии, естественно, возникает в слабо-диссипативной теории Колмогорова–Арнольда–Мозера.

3.1.3 Термы Бальмера, Пашена и т. д. (см. [19], [22], [35]). Отметим также, что насыщение кривой энергии  $E$  с частотой происходит в области высоких периодов. В области низких частот заметна монотонная динамика выхода этой величины на ее асимптотическое значение. Как объяснено выше этот переходный процесс можно отобразить на кривой абсолютной температуры.

Другая возможность заключается в изучении асимптотик кортежей в области низких и высоких частот. Наши расчеты показали, что на этом пути можно получить асимптотики типа уровней возбуждения электрона в атоме водорода, т. е. термы Бальмера, Пашена и т. п.

## 3.2 Топология периодических орбит

3.2.1. Эквиливантность периодических орбит заключена в насыщении величины среднего пробега  $\bar{l}$  с ростом периода периодической орбиты в кортеже. Как видно из обработки величины  $l_\infty(j)$ , где  $j$  – номер кортежа, хорошо разрешаются на оси средних пробегов между собой.

Таким образом состояния "in" или "out" внутри кортежа указывают дискретную сетку с постоянным шагом на фазовой прямой по которой блуждает "регулярно" точка. Таким образом мы получаем возможность интерпретировать нашу модель как движение частицы в твердом теле с периодическим полем.

Это даёт возможность сравнивать численные результаты с моделями физики твердого тела.

3.2.2. Периодические орбиты типа "in" и "out" распадаются на кластеры с увеличением периода. Зачастую в окрестности одной точки периодической орбиты лежит  $approx 2 \div 20$  точек другой периодической орбиты. Эти точки хорошо изолированы от прочих инвариантными многообразиями подходящей гиперболической орбиты. В свою очередь, появившаяся таким образом, орбита может "одеться" орбитой с повышением периода в  $k$  раз ( $k \approx 2 \div 20$  в наших исследованиях). Уместно подчеркнуть, что "одевающая орбита" будучи представлением дискретной группы является неприводимым

представлением. Учитывая насыщение длины свободного пробега с ростом периода мы получаем удивительную реализацию высокочастотных орбит.

Отметим также, что макросимметрия может проявляться в наличии дуга орбит типа "in" или "out" в кластере. Периоды в дуге образуют арифметическую прогрессию с шагом, равным периоду макросимметрии. В частности, при макросимметрии порядка 2, мы имеем "большие" дуги типа "чёт", "нечёт".

### 3.3 Проблема Ферми-Паста-Улама

3.3.1. Проблема Ферми-Паста-Улама (см. [35]) получает также новое видение в рамках слабо-диссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. В работе Ферми-Паста-Улама ставился вопрос о возбуждении высокочастотных колебаний в простейших консервативных системах математической физики. Первоначальное исследование Ферми-Паста-Улама дало скорее отрицательный, чем положительный ответ на этот вопрос. Точнее указанные авторы смоделировали переходный процесс, в течение которого высокочастотные моды возбуждаются а затем "затухают", возвращая систему в исходное состояние с точностью до 1%, как отметили авторы работы [35].

Анализ периодов внутри коротежей периодических орбит, описанный выше, позволяет нам проанализировать проблему Ферми-Паста-Улама с новой точки зрения.

Период – дискретное число и допускает интерпретацию в виде частоты. Указание на такую возможность содержится, помимо всего прочего, в распределении Больцмана-Гиббса (см. (8)). Мы сравниваем поведение гистограмм для степеней простых чисел 2, 3, 5, ... со стандартным распределением. Стандартное распределение является распределением этих величин в отрезке натурального ряда  $[1, N]$ .

Как отмечалось выше в обработанных коротежах мы видим смещение пиков распределения  $\alpha_1, \alpha_2$  в точки  $\alpha = 1, 2$  или  $\alpha = 1$ . Более того в разобранных примерах мы видим, что состояния "in" дают стандартные распределения величин  $\alpha_1, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \dots$ . Вместе с этим в состояниях "out" имеют место смещения пиков. Таким образом, мы можем утверждать, что динамика указанной дискретной модели переводит "равномерно шумящий фон" состояний "in" в состояния "out" с выделенными высокочастотными колебаниями.

Это и есть новый подход к решению проблемы Ферми-Паста-Улама в слабо-диссипативных системах с возбуждением и трением на фазовой прямой. Конечно, это ещё достаточно далеко лежит от области практической реализации.

3.3.2. Новый сценарий развития турбулентности в гидродинамике. При интерпретации непрерывной динамической системы (1) и ее дискретизации (2) в гидродинамическом подходе мы получаем новые возможности понимания механизмов возникновения турбулентных течений слабовязкой (слабо сжимаемой) жидкости. Необходимо подчеркнуть, что сорбционные коэффициенты орбит типа "in" или "out" очень малы ( $\leq 1$ ) в проделанных нами вычислениях. На диапазоне частот  $\approx 1 \div 10^7$ , несмотря на их линейный рост, они уходят от единицы не более чем на  $10^{-6} \div 10^{-8}$ .

Отметим также, что дискретная система (2) может интерпретироваться как отображение Пуанкаре трехмерной динамической системы. Прямое произведение системы (1), а вместе с ней и системы (2), можно по-разному вкладывать в  $\mathbb{R}^3$ . С другой стороны,  $\mathbb{R}^3$  можно рассматривать в качестве расширенного фазового пространства для системы (1). В зависимости от реализации системы (1) в  $\mathbb{R}^3$  меняется интерпретация результатов.

Уместно подчеркнуть, что экспериментальное подтверждение предложенного сценария (например, визуализация линий тока или спектроскопические методы экспериментальных исследований, скажем, в звуковом диапазоне), по-видимому, невозможно без

учета выше описанных статистических весов орбит типа "in" или "out". Отметим, что большие возможности представляют резонансные методы исследования динамики жидкости.

Очевидно, что в целях такой интерпретации необходимо вычислять дополнительные величины кроме указанных нами. Это несложно сделать, отправляясь от найденных начальных точек периодических орбит и их периодов, т.е. от данных, содержащихся в нашем выходном файле. Но здесь начинается область молевой, прикладной обработки предъявленных нами данных. Мы остановились, по сути дела, на кинематических характеристиках динамики частицы и провели их предварительный статистический анализ.

## 4 Заключение

Исследование примера, указанного в работе [1], начато сравнительно недавно. Уже первые полученные результаты показывают нетривиальные свойства этого примера. Факты, указанные в предыдущем параграфе начинают лишь перечень полезных результатов. Вместе с этим возникает много новых вопросов. Отметим некоторые из них.

Что можно сказать о динамике в областях вне областей захвата состояний "in" и "out"? Очевидно, это область стохастической диффузии по Арнольду. Мы не имеем пока информации о коэффициентах диффузии в этих областях. Нет информации о диффузионных потоках в этих областях.

Состояния "in" и "out" тесно связаны с бифуркациями эквивариантных векторных полей на плоскости, введенных Арнольдом в [4].

Что здесь является областью низких резонансов?

Состояния "in" и "out" частично упорядочены площадями своих областей захвата. Как этот частичный порядок переносится на область стохастической диффузии Арнольда?

Наконец, самый радикальный вопрос, насколько упрощается (или усложняется) полученная картина динамики в комплексной области? Возможно в комплексной области она более естественная?

Проанализированные величины являются адиабатическими инвариантами. Что указывает на распадение их на группы (вернее какова причина их классификации на конечное ли число классов?)

В области низких частот имеются corteжи с большим наклоном соответствующей прямой на плоскости  $(k, \bar{J})$ . Очевидно, они обрываются с монотонным возрастанием частоты. Возвращаются ли они в разрешенной очевидными соображениями области высоких частот (в каком смысле?)

Перечень этих вопросов можно продолжать. Возможно на ряд из них мы получим ответы в ближайшие годы.

## Список литературы

- [1] Arrowsmith D.K., Gartwright J.H.E., Lansbury A.N., Place C.M. The Bogdanov map: bifurcations, mode locking, and chaos in a dissipative system.- Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1993, v.3, N 4, p 803-842.
- [2] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М. : Наука, 1967.

- [3] Аносов Д.В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. -Тр. МИАН им. В.А. Стеклова, т. ХС, М.: Наука,1967.
- [4] Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука,1967.
- [5] Арнольд В.И. Замечания о теории Морса бездивергентного поля, о методе усреднения и о движении заряженной частицы в магнитном поле. В сб. ст. "Динамические системы и смежные вопросы". К 60-летию со дня рождения академика Д.В. Аносова. М.: Изд-во "Наука" - МАИК "Наука", 1997, 383 с. (Тр. МИАН; Т. 216)
- [6] Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 432 с.
- [7] Биркгоф Дж.Д. Динамические системы. М.: Гостехиздат1941.
- [8] Богданов Р.И. Приложения слабо-диссипативной теории Колмогорова - Арнольда - Мозера. Препринт НИИЯФ МГУ 96-22/429 М.: "Принт", 1996 г.
- [9] Богданов Р.И. Локальная орбитальная эквивалентность векторных полей на плоскости. М.: изд-во МГУ,1993.
- [10] Богданов Р.И. Уравнение теплопроводности. М.: изд-во МГАПП,1995.
- [11] Богданов Р.И., Расторгуев В.А. Уравнение стохастической диффузии. М.: изд-во МЭИ,1997.
- [12] Богданов Р.И. Расторгуев В.А. Принцип неопределенности в классической механике. // В сб. ст. "Математические методы и приложения". Труды пятых математических чтений МГСУ (26 - 31 января 1998). М.: изд-во МГСУ "Союз", 1998
- [13] Богданов Р.И. Сингулярные относительные интегральные инварианты и адиабатические процессы термодинамики. // В сб. Итоги науки и техники: Современные проблемы математики: Динамические системы - 7, ВИНТИ, 1997.
- [14] Богданов Р.И., Расторгуев В.А. Проблема Ферми-Паста-Улама в слабодиссипативной теории Колмогорова-Арнольда-Мозера. М: Препринт МЭИ 12-17, 1997.
- [15] Bogdanov R.I. Dynamic systems on the plane. // Pr. of Int. Conf. on Dynamic systems, Rio de Janeiro, July 29-August 8,1997.p. 32-35.
- [16] Bogdanov R.I. Introduction to weakly dissipative theory by Kolmogorov-Arnold-Mozer. // Abstracts of "Dynamic Systems and Pattern Formation", Leiden, Lorenz Center, 29 September - 1 October, 1997, p. 8 - 9.
- [17] Bogdanov R.I. The Theory of primary measurement by Poincare-Ehrenfest for one-dimensional nonstationary Schroedinger equation. // Trudy Sem. Petrovsk., v. 20, 1997, p. 226-269.
- [18] Bogdanov R.I. Weakly Dissipative Theory by Kolmogorov-Arnold-Mozer. // Abstracts of Int. Conf. On Contemp. Problems in Th. Of Dynamic Systems, Nizny Novgorod, 1- 6 July, 1996, p. 14.
- [19] Валентэн Я. Субатомная физика (ядра и частицы): в 2-х томах, М.: "Мир", 1986.

- [20] Вигнер Е. Этюды о симметрии. М.: Мир, 1980.
- [21] Гиббс Дж. В. Термодинамические работы. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950.
- [22] Глимм Дж., Джаффе А. Математические методы квантовой физики. Подход с использованием функциональных интегралов. М.: Мир, 1984.
- [23] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamic Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer: New York, 1983, 453 p.
- [24] Заславский Г.М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, Гл. ред. физ-мат. лит-ры, 1984.
- [25] Крылов Н.М. Работы по обоснованию статистической физики. Л.: изд-во АН СССР, 1950.
- [26] Ландау Л.Д. // ДАН СССР, 1944, т.44, №8, с.339
- [27] Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. М.: Наука, 1983.
- [28] Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [29] Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow. - J. Atmos. Sci. 20, 1963, p. 130-141.
- [30] Ляпунов А.М. Избранные труды. Л.: изд-во АН СССР, 1948.
- [31] Ньютон И. Математические начала натуральной философии. М.: Наука, 1989.
- [32] Пуанкаре А. Избранные труды. Т.3 М.: Наука, 1974.
- [33] Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995. (Современные проблемы математики; вып. 31).
- [34] Уленбек Дж. и Форд Дж. Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965.
- [35] Ферми Э. Научные труды. М.: Наука, 1972, т.11, с.645.
- [36] Четаев Н.Г. Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под воздействием сил лучистого сжатия к центру тяжести. - Изв. Физ.-матем. общ. при Казанск. унив. М., 1926, т. XXVI, с.49-94.

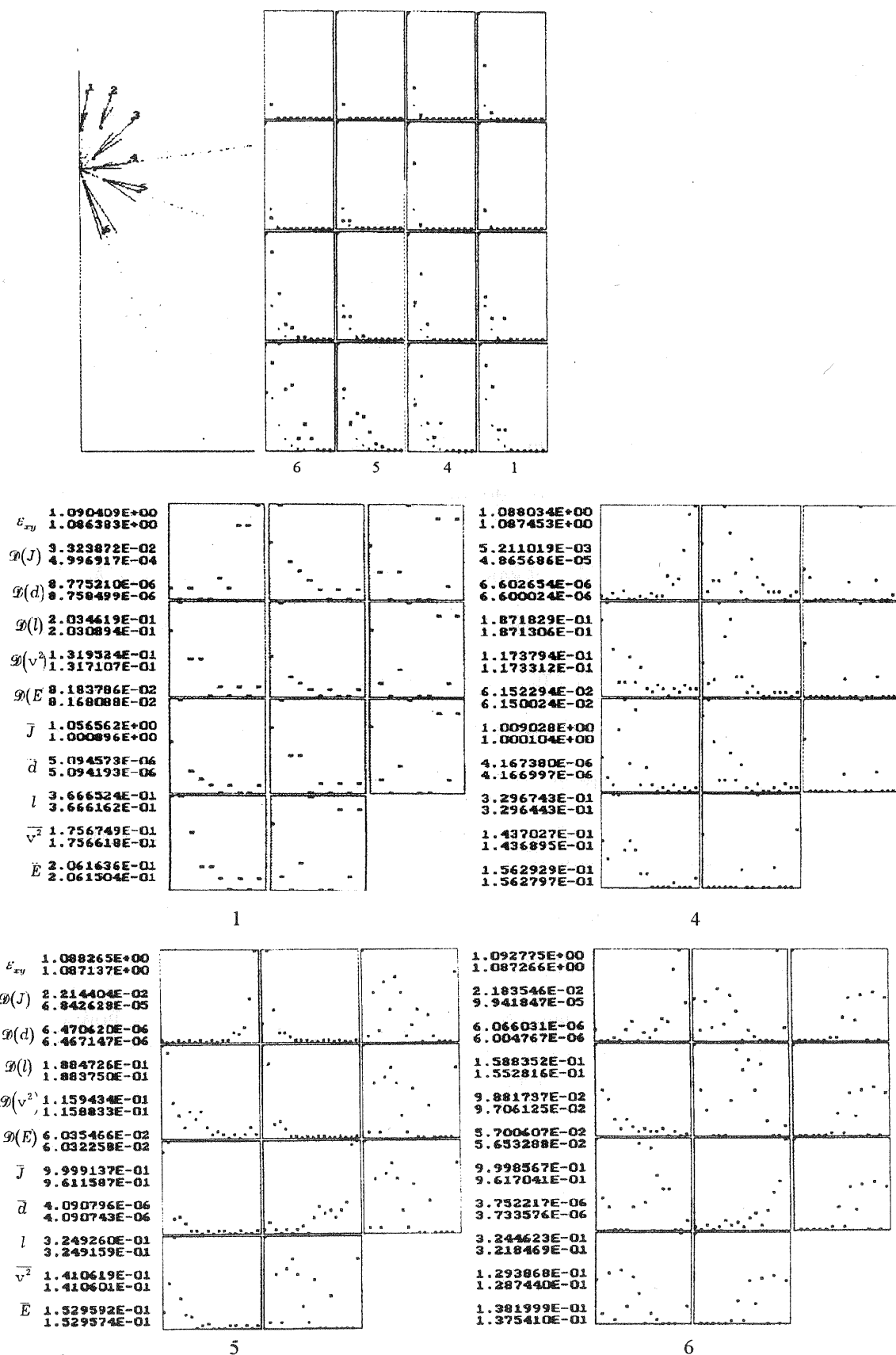


Рис 1. Гиперболические орбиты 1-й группы.



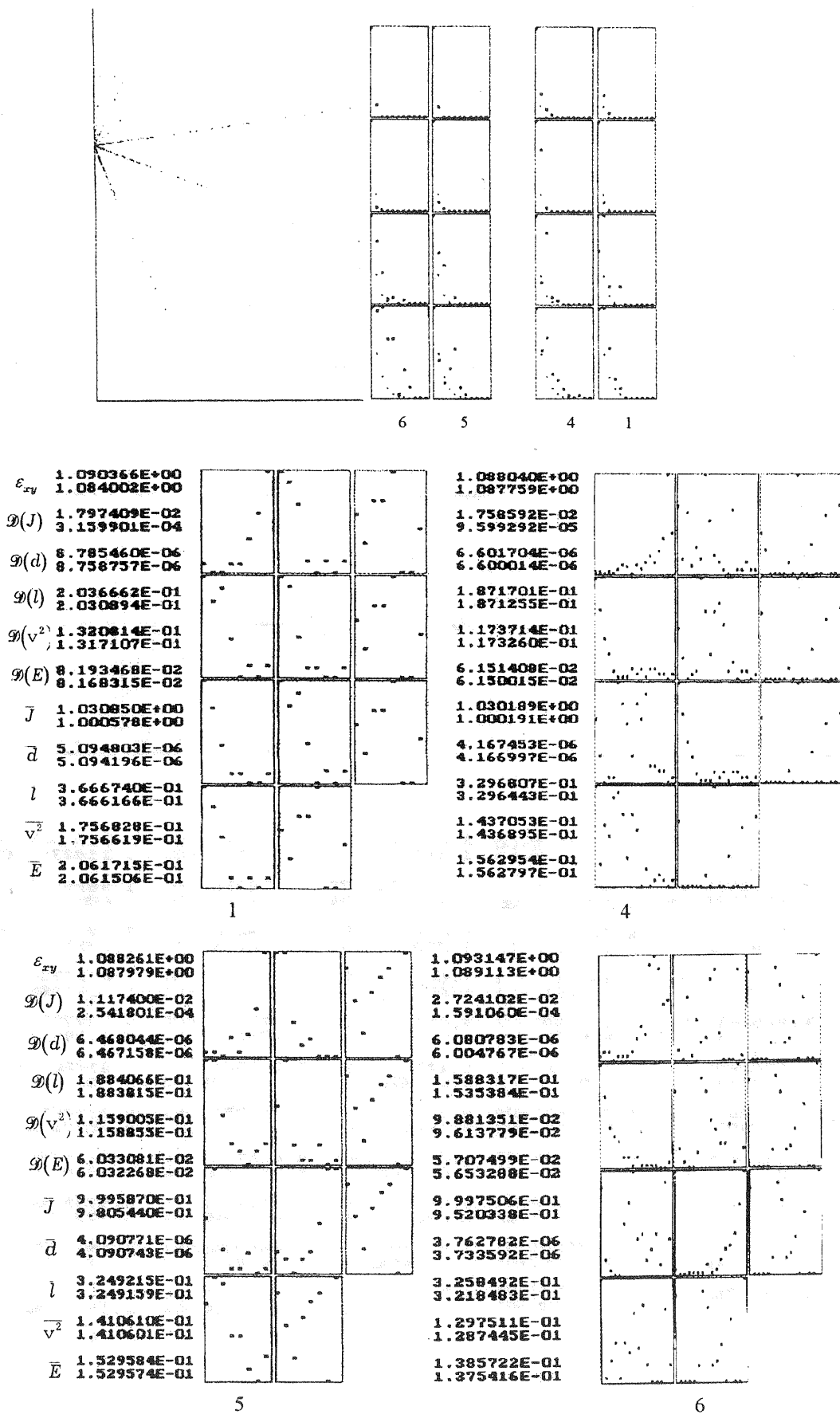
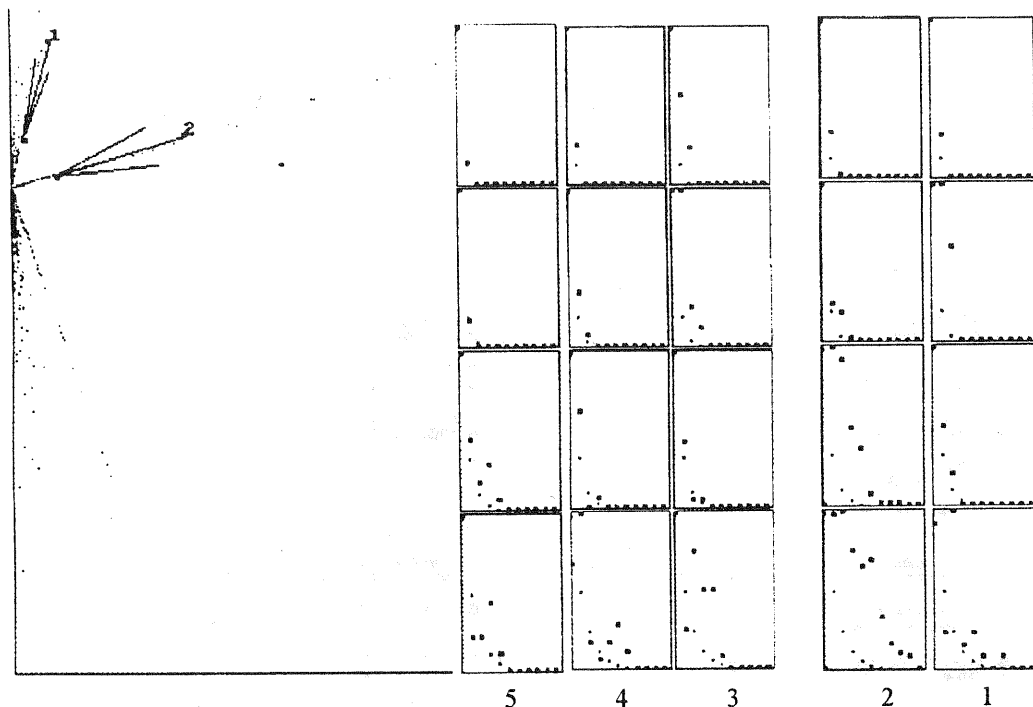
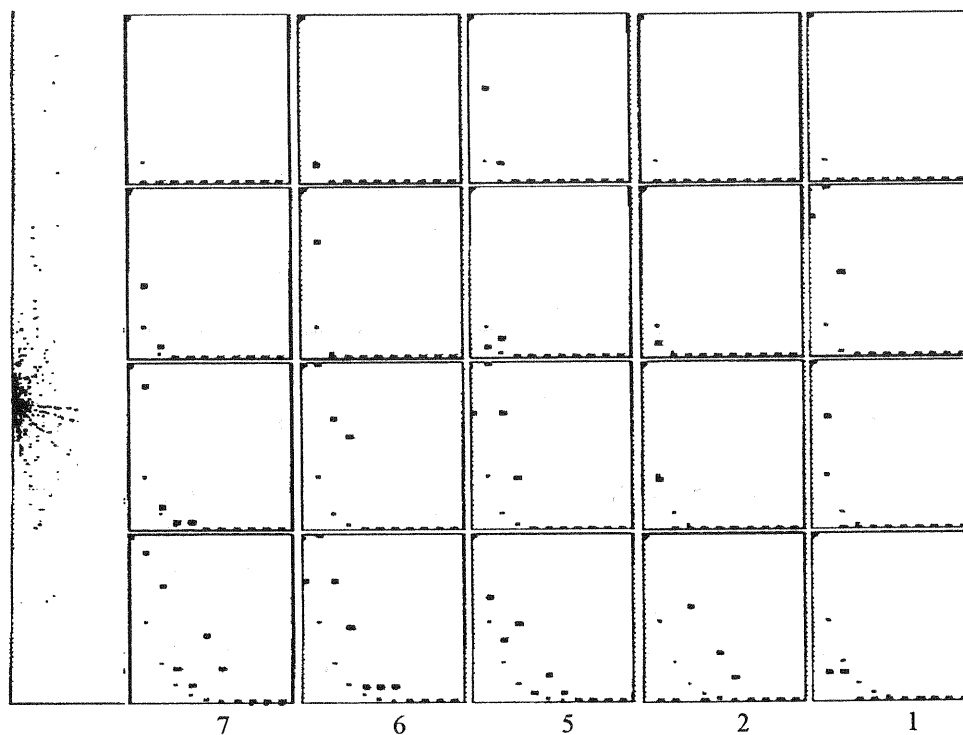


Рис 2. Орбиты типа «in» и «out» 1-й группы.



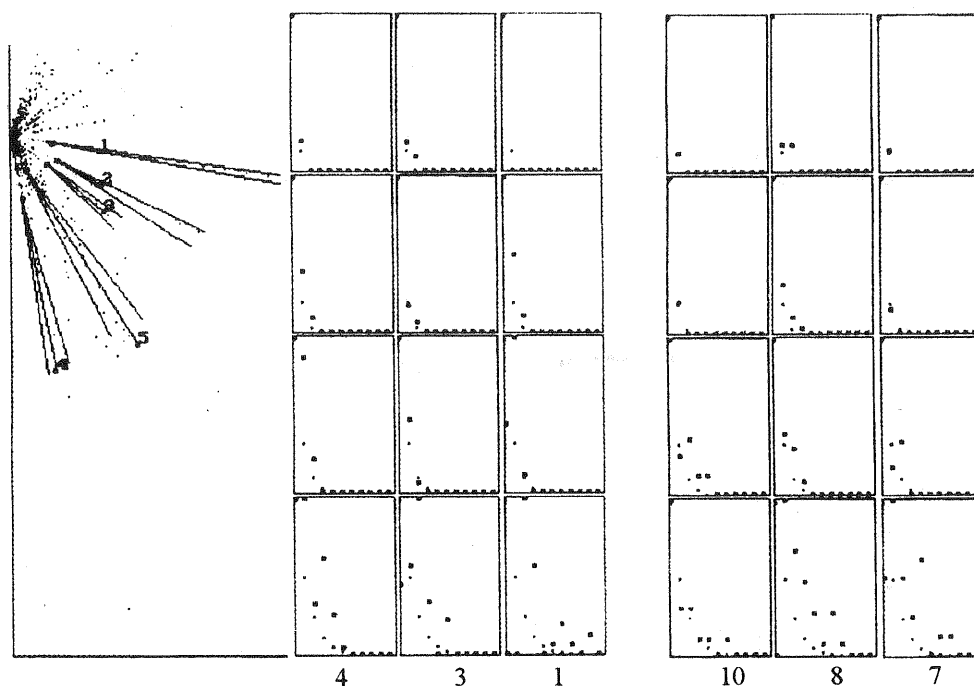
$\varepsilon_{xy}$	1.215933E+00 1.215398E+00	1.216161E+00 1.215993E+00	1.216281E+00 1.215807E+00	1.219248E+00 1.212472E+00	1.216398E+00 1.214238E+00
$\mathcal{D}(J)$	6.634300E-03 1.637832E-04	7.928476E-03 4.663137E-05	1.493802E-02 1.461348E-04	1.274350E-02 1.698912E-04	1.982625E-02 1.605431E-04
$\mathcal{D}(d)$	8.361870E-06 8.359924E-06	8.214740E-06 8.212712E-06	8.082225E-06 8.080631E-06	6.519676E-06 6.280039E-06	7.578747E-06 7.572204E-06
$\mathcal{D}(l)$	1.675655E-01 1.675138E-01	1.661549E-01 1.658961E-01	1.650753E-01 1.650417E-01	1.399358E-01 1.367688E-01	1.615773E-01 1.614298E-01
$\mathcal{D}(v^2)$	9.985061E-02 9.982818E-02	9.821999E-02 9.819743E-02	9.684072E-02 9.682159E-02	7.627746E-02 7.455589E-02	9.227787E-02 9.218953E-02
$\mathcal{D}(E)$	6.330189E-02 6.328749E-02	6.231256E-02 6.230133E-02	6.142680E-02 6.141476E-02	5.216963E-02 5.045603E-02	5.814084E-02 5.809025E-02
$\bar{J}$	1.011466E+00 1.000302E+00	1.013687E+00 1.000082E+00	9.997641E-01 9.739095E-01	9.997751E-01 9.778202E-01	9.997455E-01 9.652715E-01
$\bar{d}$	6.242462E-06 6.242349E-06	6.128678E-06 6.127541E-06	6.024560E-06 6.024524E-06	4.628774E-06 4.492243E-06	5.626904E-06 5.626488E-06
$\bar{l}$	3.151773E-01 3.151639E-01	3.123356E-01 3.121653E-01	3.093729E-01 3.093701E-01	2.752467E-01 2.685530E-01	2.979501E-01 2.979355E-01
$\bar{v}^2$	1.273971E-01 1.273948E-01	1.250750E-01 1.250518E-01	1.229502E-01 1.229494E-01	9.446478E-02 9.167843E-02	1.148347E-01 1.148262E-01
$\bar{E}$	1.328504E-01 1.328481E-01	1.302953E-01 1.302720E-01	1.279700E-01 1.279693E-01	9.722656E-02 9.437260E-02	1.191685E-01 1.191600E-01
	1	2	3	4	5

Рис 3. Орбиты типа «in» и «out» 2-й группы.



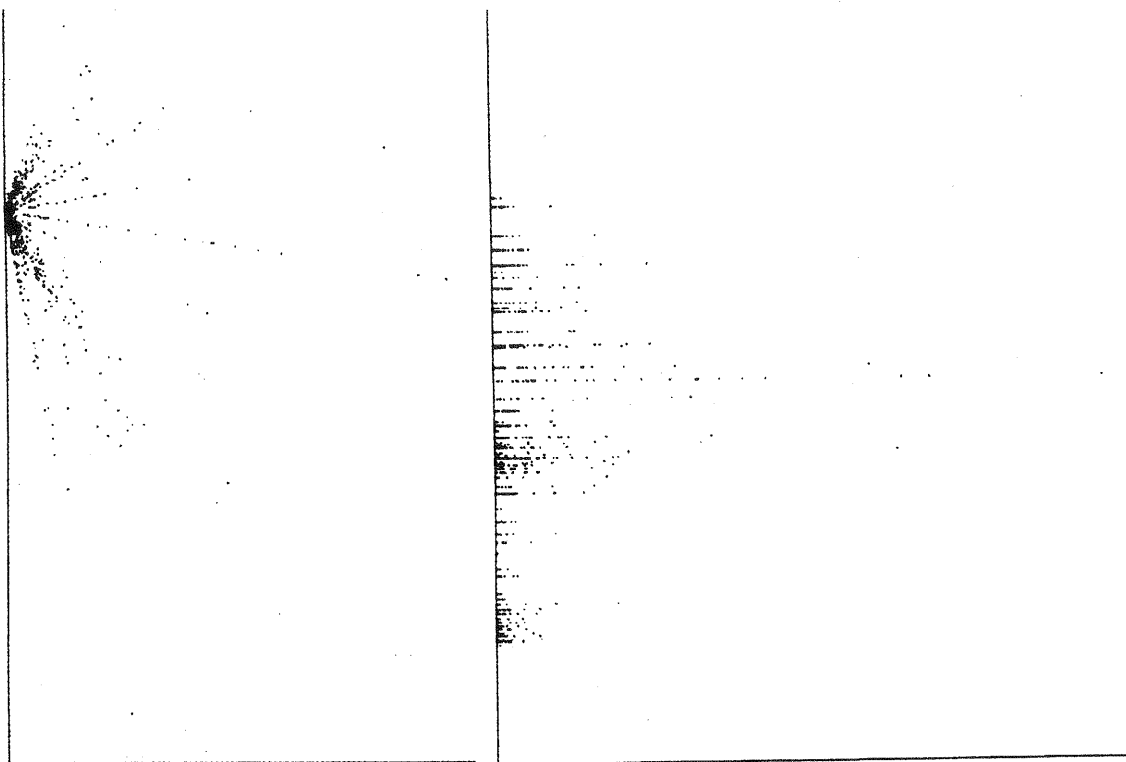
$\varepsilon_{xy}$	1.422494E+00 1.421640E+00	1.422494E+00 1.421601E+00	1.421511E+00 1.421282E+00	1.421402E+00 1.420940E+00	1.420933E+00 1.420328E+00
$D(J)$	1.764397E-01 2.463823E-03	6.394140E-02 6.092471E-04	1.302744E-02 1.648503E-04	3.874534E-02 2.157951E-04	3.668937E-02 5.174737E-04
$D(d)$	1.747632E-05 1.747131E-05	1.416736E-05 1.416403E-05	1.330976E-05 1.330863E-05	1.319378E-05 1.319138E-05	1.275495E-05 1.275206E-05
$D(l)$	1.340208E-01 1.539710E-01	1.391893E-01 1.391567E-01	1.356704E-01 1.356594E-01	1.352190E-01 1.351958E-01	1.334974E-01 1.334677E-01
$D(v^2)$	8.966593E-02 8.963956E-02	7.277909E-02 7.276201E-02	6.876084E-02 6.875513E-02	6.822572E-02 6.821390E-02	6.622063E-02 6.620612E-02
$D(E)$	7.450432E-02 7.448271E-02	6.370809E-02 6.369313E-02	6.085691E-02 6.085178E-02	6.046915E-02 6.045931E-02	5.897427E-02 5.896105E-02
$J$	1.281880E+00 1.004243E+00	1.107053E+00 1.001003E+00	9.997139E-01 9.772195E-01	9.996094E-01 9.312201E-01	9.990694E-01 9.349575E-01
$d$	1.410228E-05 1.410190E-05	1.044918E-05 1.044914E-05	9.476548E-06 9.476463E-06	9.343554E-06 9.343063E-06	8.847705E-06 8.847061E-06
$l$	2.743293E-01 2.743223E-01	2.322996E-01 2.322989E-01	2.193140E-01 2.193123E-01	2.174629E-01 2.174568E-01	2.104148E-01 2.104074E-01
$\overline{v^2}$	9.896337E-02 9.896071E-02	7.332762E-02 7.332730E-02	6.650209E-02 6.650149E-02	6.556880E-02 6.556535E-02	6.208916E-02 6.208463E-02

Рис 4. Орбиты типа «in» и «out» 3-й группы.



$\varepsilon_{xy}$	1.702048E+00 1.700060E+00	1.720332E+00 1.719205E+00	1.720635E+00 1.717310E+00	1.703283E+00 1.703111E+00	1.704341E+00 1.702627E+00	1.713644E+00 1.709313E+00
$\mathcal{D}(J)$	1.009502E-02 6.962299E-03	1.611511E-02 2.689535E-04	1.420149E-02 1.265575E-04	2.640178E-02 1.637878E-04	1.334855E-02 9.300211E-03	1.954160E-02 2.580103E-04
$\mathcal{D}(d)$	1.287487E-05 1.285710E-05	1.062762E-05 1.062412E-05	1.078527E-05 1.077487E-05	1.248915E-05 1.248852E-05	1.216606E-05 1.215386E-05	9.552979E-06 8.433523E-06
$\mathcal{D}(l)$	1.735891E-01 1.733409E-01	1.728531E-01 1.727869E-01	1.746821E-01 1.745114E-01	1.707610E-01 1.707524E-01	1.691997E-01 1.689851E-01	1.527243E-01 1.463036E-01
$\mathcal{D}(v^2)$	9.720701E-02 9.706981E-02	7.722415E-02 7.719870E-02	7.839789E-02 7.832226E-02	9.415084E-02 9.414612E-02	9.158064E-02 9.148699E-02	7.054066E-02 6.298945E-02
$\mathcal{D}(E)$	8.103544E-02 8.092832E-02	6.069536E-02 6.067537E-02	6.136734E-02 6.130815E-02	7.867720E-02 7.867325E-02	7.667558E-02 7.660089E-02	5.935353E-02 5.275648E-02
$\bar{J}$	1.017350E+00 1.000060E+00	1.027660E+00 1.000459E+00	1.024406E+00 1.000211E+00	9.996866E-01 9.534969E-01	9.998144E-01 9.766540E-01	9.994918E-01 9.656868E-01
$\bar{d}$	1.012159E-05 1.010719E-05	1.098488E-05 1.098464E-05	1.125289E-05 1.125278E-05	9.766571E-06 9.766568E-06	9.471032E-06 9.462880E-06	7.595476E-06 7.144611E-06
$\bar{l}$	2.234107E-01 2.232750E-01	2.387092E-01 2.386956E-01	2.418720E-01 2.418672E-01	2.192024E-01 2.192024E-01	2.150953E-01 2.150572E-01	1.917042E-01 1.873096E-01
$\bar{v}^2$	8.001260E-02 7.989875E-02	8.683705E-02 8.683316E-02	8.895570E-02 8.895480E-02	7.720609E-02 7.720607E-02	7.486982E-02 7.480538E-02	6.004329E-02 5.647914E-02
$\bar{E}$	8.018968E-02 8.007583E-02	8.660024E-02 8.659835E-02	8.872210E-02 8.872120E-02	7.732642E-02 7.732640E-02	7.494490E-02 7.488044E-02	5.988560E-02 5.627971E-02
	7	8	10	1	3	4

Рис 5. Орбиты типа «in» и «out» 4-й группы.



**Рис. 6.** Гиперболические орбиты  
4-й группы на плоскости  
(период, средний якобиан)

**Рис. 7.** Гиперболические орбиты  
4-й группы на плоскости  
(период, средняя энергия)

