Динамические системы: хаотичность и управляемость

А.Ю. Лоскутов

Физический факультет Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова

Аннотация

Дан обзор современного состояния теории динамического хаоса и его описания в рамках теории динамических систем. Представлены результаты, относящиеся к развитию хаоса в таких системах и рассмотрены основные свойства хаотических динамических систем. Описаны наиболее распространенные методы стабилизации хаотического поведения и управления динамикой хаотических систем.

Содержание

1 Введение

Говоря о таком всеобъемлющем явлении как хаос в настоящее время имеют ввиду не только принципиальные и фундаментальные вопросы статистической физики, но и всевозможные приложения и конкретные задачи механики, астрофизики, физики плазмы, оптики, биологии и т.д. Появление хаотичности в той или иной системе не связано с действием каких-либо априори случайных сил. Природа хаотического поведения полностью детерминированных систем кроется в свойстве приобретать при определенных значениях параметров экспоненциально сильную неустойчивость траекторий. Фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они вскрывают природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности.

Впервые на связь между статистикой и неустойчивостью обратил внимание еще А.Пуанкаре [1]. В то же время статистический подход к описанию систем со многими степенями свободы был предложен Л.Больцманом [2]. Он выдвинул предположение, что движение частиц в разряженном газе следует рассматривать как случайное, и каждой частице доступна вся энергетически разрешенная область фазового пространства. Такое представление о системах многих частиц известно как эргодическая гипотеза [2-4], которая стала основой классической статистической механики. Однако ее строгое обоснование долгое время не находило подтверждения. Некоторое продвижение в этом направлении было достигнуто благодаря исследованиям П.Эренфеста [5, 6] (см. также [7, 8]), которые позволяли в том числе установить рамки применимости законов статистической механики. Однако известная работа Э.Ферми, Дж.Паста и С.Улама [9] (более подробно см. [10, 11]), где впервые была предпринята попытка проверки эргодической гипотезы, вновь выдвинула проблему обоснования статистической физики на первый план.

Частичное разрешение этой проблемы можно получить, опираясь на работы А. Пуанкаре (см. [12]), в которых он показал, что в окрестности неустойчивых неподвижных точек движение имеет чрезвычайно сложный характер. Это явилось первым указанием на то, что нелинейные динамические системы могут проявлять хаотические свойства. Впоследствии Д.Биркгоф [13] показал, что при рациональном отношении частот (резонанс) всегда существуют устойчивые и неустойчивые неподвижные точки. Резонансы более высокого порядка последовательно изменяют топологию фазовых траекторий и приводят к образованию цепи островов в фазовом пространстве. Теория возмущений, как оказалось, не описывает такие резонансы, поскольку регулярные решения вблизи них сильно возмущены, а это влечет появление малых знаменателей и расходимость рядов.

Первое глубокое исследование природы статистических законов было проведено Н.С.Крыловым [14]. Он показал, что в ее основе лежит свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость почти всех траекторий соответствующих динамических систем. В этой же связи М.Борн [15] (см. также [16]) высказывал предположение о непредсказуемости поведения систем классической механики. Позднее динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, стала называться динамической стохастичностью или детерминированным (динамическим) хаосом.

Физически осмысленное понятие детерминированного описания заключается в том, что начальное состояние процесса задается в силу неизбежных флюктуаций некоторым вероятностным распределением. Задача состоит в том, чтобы на основании известного начального распределения предсказать его эволюцию. Если малые возмущения начального условия с течением времени не нарастают (т.е. имеет место устойчивость), то поведение такой системы является предсказуемым. В противном случае процесс может быть описан только вероятностным образом. По-существу именно эти соображения легли в основу современного представления о динамическом хаосе.

Новый этап в развитии понимания хаотичности и ее зарождения в детерминированных системах возник после работ А.Н.Колмогорова и Я.Г.Синая [17-19], где для динамических систем было введено понятие энтропии. Эти работы положили начало созданию теории стохастических динамических систем. Большую роль в развитии теории детерминированного хаоса сыграли разного рода абстрактные математические конструкции. Так, С.Смейл [20], чтобы опровергнуть гипотезу о плотности систем типа Морса-Смейла в пространстве C^r-диффеоморфизмов, построил пример ("подкова Смейла"), показывающий, что если g – диффеоморфизм плоскости, обладающий трансверсальной гомоклинической траекторией, то он должен иметь инвариантное множество типа подковы. В свою очередь из существования подковы вытекает, что отображение g должно иметь бесконечное число как периодических точек различного периода, так и несчетное число апериодических траекторий [20, 21]. Вслед за "подковой Смейла" появились y-системы Аносова [22, 23], которые характеризуются наиболее выраженными свойствами перемешивания. Обобщения таких систем – введение "аксиомы А" Смейла [21] (см. также [24-26] и цитируемую там литературу) и гиперболических множеств [21, 25-27], – выделило важный класс динамических систем, обладающих свойством экспоненциальной неустойчивости траекторий.

Примерно в то же время стали появляться математические работы, где на основе изучения бильярдных систем были предприняты попытки обоснования статистической механики [28-29]. Бильярды впервые появились как упрощенные модели, на которых можно изучать ряд задач статистической физики [13] (см. также ссылки в [30-31]). Используя такие системы, впервые была решена задача Н.С.Крылова о перемешивании в системе упругих шариков [14]. Более того, было показано, что системы, отвечающие бильярдам с рассеивающими границами, имеют много общего с геодезическими потоками в пространствах отрицательной кривизны, т.е. потоками Аносова. Немного позже класс бильярдных систем, которые способны проявлять хаотические свойства, был значительно расширен (см. [31-33] а также цитированную там литературу). Опираясь на обобщение таких систем – модификацию двумерного газа Лоренца, было доказано, что движение в чисто детерминированных системах может быть подобно броуновскому [30-31]. Этот результат явился первым строгим подтверждением проявления хаотичности динамическими (т.е. без какого-либо случайного механизма) системами.

Развитие теории динамических систем и многочисленные исследования нелинейных процессов показали, насколько типичным и всеобщим явлением оказывается хаотическое поведение в системах с небольшим числом степеней свободы. Стало очевидным, что хаотические свойства могут проявлять самые разнообразные нелинейные системы, и если хаос не обнаруживается, то возможно, лишь потому, что либо он возникает в очень малых областях параметрического пространства, либо при нефизических значениях параметров. Проблема предсказуемости, первоначально появившись в достаточно сложных системах (таких как гидродинамические или системы статистической механики), стала общей для многих направлений современной науки. Наряду с этим выяснилось, что хаотические динамические системы легко управляемы при помощи внешних воздействий, что, как оказалось, можно использовать для создания условий контроля над хаотическими системами и подавления в них хаоса, если его развитие нежелательно. Таким образом, появилось новое направление в теории хаотических динамических систем, связанное со стабилизацией и регулированием их неустойчивого поведения посредством внешних воздействий. Позже стало ясно, что посредством слабых возмущений можно найти неожиданные подходы к решению давно известных проблем, таких как инженерия динамических систем, дефибрилляция, обработка информации, явление самоорганизациии и т.п. (см., например, [34-49]). Следовательно, всестороннее изучение хаотических систем с внешними воздействиями может дать ключ к пониманию многих нелинейных процессов, происходящих как в сосредоточенных так и в распределенных системах.

Сейчас имеется большое число работ, посвященных исследованию движения систем с внешними воздействиями (см., например, [50-79] и цитированную литературу в [61-62]). Однако построить теорию регулирования хаотических систем в общем виде пока не представляется возможным. Тем не менее, для достаточно типичных *семейств* динамических систем эта задача вполне разрешима (см. [50, 65-66, 68, 72-73, 75, 78-79, 224]).

В настоящее время существует два качественно различных подхода к управлению поведением динамических систем. Первый основан на использовании обратной связи, т.е. учете текущего состояния системы. В другом (и наиболее приемлемом для большинства приложений) подходе не учитывается обратная связь, и стабилизация хаотических колебаний осуществляется при помощи прямых воздействий. В литературе первый метод обычно называется *контролированием хаоса*, а второй – *подавлением хаоса* без обратной связи. Одновременно, оба подхода могут быть реализованы при помощи параметрических или силовых способов.

Введение обратной связи является определенным преимуществом, поскольку в большинстве случаев такой способ управления приводит к требуемому результату: выбранный заранее седловой предельный цикл стабилизируется и, таким образом, исследуемая система выводится на требуемый режим движения. Однако этот метод эффективен, если только изображающая точка находится вблизи выбранного цикла. В противном случае необходимо использовать дополнительные способы воздействия [80-82]. В то же время, методы стабилизации без обратной связи не требуют введения постоянного компьютерного слежения за состоянием системы и менее подвержены воздействиям шумов, что существенно упрощает их использование в приложениях [83].

Данная работа состоит из четырех основных частей. Поскольку хаотическое поведение в динамических системах как правило устанавливается через ряд качественных перестроек, то после настоящего Введения приводятся основные результаты теории бифуркаций. В следующем разделе изложены некоторые важные свойства хаотических динамических систем, рассмотрены методы их описания и даны некоторые положения эргодической теории таких систем. Современные способы стабилизации хаотической динамики и ряд важных утверждений, касающихся поведения возмущенных динамических систем, представлены в последней части.

2 Бифуркации и развитие хаоса в динамических системах

Пусть M – метрическое пространство с определенным расстоянием между точками и $\{T^t\}$ – множество однопараметрических преобразований пространства M в себя такое, что $T^{t_1+t_2} = T^{t_1} \circ T^{t_2} = T^{t_2} \circ T^{t_1}$ для любых t_1, t_2. Тогда T^t, M и $\{T^t\}$ называются отображением сдвига, фазовым пространством и динамической системой соответственно. В метрической теории динамических систем рассматривается также *пространство с мерой*, т.е. тройка $\{M, \mathcal{S}, \mu\}$, где $\mathcal{S}$ – σ-алгебра подмножеств M и μ – мера, определенная тем или иным образом на $\mathcal{S}$. При этом мера μ называется инвариантной мерой относительно преобразования T, если $\mu(C) = \mu(T^{-1}C)$ для любого $C \in \mathcal{S}$. Когда $\{t\}$ имеет дискретный ряд значений, $t \in \mathbf{Z}$, $t \equiv k$, то $\{T^k\}$ называется динамической системой с дискретным временем или *отображением*. Известным примером такой системы является преобразование интервала I в себя: $T_a : I \to I$, $I = [\alpha, \beta]$, $T_a = f(x, a)$, где a – некоторый параметр и $[\alpha, \beta] = M$. Тогда траектория отображения T_a^k определится как $T_a^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ раз}}$ для каждого k. В общем случае задание закона преобразования $T_a = \mathbf{f}(\mathrm{x}, a)$ определяет *траекторию* точки x из M по отношению к $\mathbf{f}$ как подмножество $\{T_a^k |\ k \in \mathbf{Z}\}$.

Когда множество $\{t\}$ принимает непрерывный ряд значений, то преобразование $\{T^t\}$ называется динамической системой с непрерывным временем или *потоком*. В этом случае рассматривается преобразование $T : \mathbf{R} \to Diff(M)$, $t \mapsto T^t$. Поток $T^t : M \to M$ определяет на M касательное векторное поле, т.е. для любого $\mathrm{x} \in M$ равенство $(dT^t(\mathrm{x})/dt)\big|_{t=0} = \mathrm{v}(\mathrm{x}, a)$ определяет касательный вектор $\mathrm{v}(\mathrm{x}, a) \in \Sigma_{\mathrm{x}}(M)$ в точке $\mathbf{x} \in M$, где $\Sigma_{\mathbf{x}}(M)$ касательное к M пространство. Следовательно, динамическая система с непрерывным временем задает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которые можно записать в более привычном виде как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) \ , \tag{1}$$

$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $a \in \mathbf{R}$, с начальными условиями $\mathbf{x}(t_0) \equiv \mathbf{x}_0$. Для такой системы действие отображения сдвига T^t заключается в том, что любая точка $\mathbf{x}_0 \in M$ под действием T^t преобразуется в точку $\mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$, которая, очевидно, является решением системы (1). Таким образом, $T^t \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(\mathbf{x}_0, t)$.

Важным понятием теории диссипативных динамических систем является аттрактор. В настоящее время имеется несколько определений аттрактора, которые, по-видимому, не сводятся друг к другу (обзор по этому вопросу можно найти в публикациях [84-87]). Следуя [87], будем опираться в определении аттрактора на понятие поглощающей области. Область $U \subset M$ называется поглощающей, если $T^t \bar{U} \subset U$ для $t > 0$, где $\bar{U}$ – замыкание U. При этом множество $\bigcap\limits_{t>0} T^t U$ называется *максимальным аттрактором* в поглощающей области U. Множество $\mathcal{A}$ называется *аттрактором*, если существует поглощающая область U, в которой $\mathcal{A}$ является максимальным аттрактором. Область $B(\mathcal{A})$ называется *областью притяжения* аттрактора $\mathcal{A}$, если она состоит из таких точек, через которые проходят положительные полутраектории, стремящиеся к $\mathcal{A}$. Согласно этому определению, очевидно, устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы и устойчивые торы являются аттракторами системы (1).

Установление в динамической системе хаотического поведения в результате той или иной последовательности бифуркаций принято называть *картиной* или *сценарием* развития хаоса.

Широко известным типом бифуркации являются бифуркации устойчивых стационарных точек (т.е. положений устойчивого равновесия динамических систем). Среди них наиболее распространенная – бифуркация Андронова-Хопфа (см., например, [86-92]), возникающая при потере устойчивости стационарной точки типа фокус. Допустим, что поле $\mathbf{v}$ имеет стационарную точку $\mathbf{x}_0(a)$ для $a = a_0$, т.е. $\mathbf{v}(\mathbf{x}_0(a_0)) = 0$. Определим оператор линеаризации как непрерывное отображение касательного к M пространства в себя: $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0) : \Sigma_{\mathbf{x}_0} M \to \Sigma_{\mathbf{x}_0} M$, где $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0) = (\partial v_i / \partial x_j)\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$. При этом линеаризованное уравнение будет иметь вид: $\dot{\vec{\xi}} = d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)\vec{\xi}$, $\vec{\xi} \in \Sigma_{\mathbf{x}_0} M$, и отображение $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$ координатно независимо. Ответ на вопрос об устойчивости точки $\mathbf{x}_0$ дает известная теорема Ляпунова (см., например, [87, 89, 92-93]). Согласно этой теореме, если совокупность собственных значений (спектр) $\vartheta = \{\lambda_i\}$ оператора $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$ принадлежит левой полуплоскости, $\vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)) \subset \{z \in \mathbf{C} \big| \ \mathrm{Re} z < 0\}$, то точка $\mathbf{x}_0$ является устойчивой; если существует $\lambda \in \vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0))$, для которого найдется $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то точка $\mathbf{x}_0$ неустойчива. Наконец, возможно, что $\vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)) \subset \{z \in \mathbf{C} \big| \ \mathrm{Re} z \leq 0\}$ и существует $\lambda \in \vartheta(d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0))$ с $\mathrm{Re}\lambda = 0$. Такая ситуация является нетипичной, и устойчивость точки $\mathbf{x}_0$ не определяется по спектру собственных значений оператора $d\mathbf{v}(\mathbf{x}_0, a_0)$. В этом случае необходимо использовать дополнительные методы исследования (см., например, [93-95]).

Допустим, что стационарная точка $\mathbf{x}_0$ поля $\mathbf{v}$ устойчива для $a < a_0$ и неустойчива для значения $a > a_0$. Тогда при $a = a_0$ некоторые из собственных значений $\{\lambda_i\}$ перейдут в правую полуплоскость. В этом случае имеет место бифуркация потери устойчивости точки $\mathbf{x}_0$, и основной вопрос состоит в исследовании поведения системы при $a > a_0$. Бифуркационная теорема Андронова-Хопфа утверждает, что если два комплексно сопряженных ненулевых собственных значения $(\lambda,\ \lambda^*)$ удовлетворяют условию $\mathrm{Re}\lambda(a)\Big|_{a<a_0} < 0$, $\mathrm{Re}\lambda(a)\Big|_{a=a_0} = 0$, $\mathrm{Re}\lambda(a)\Big|_{a>a_0} > 0$, $\big[d(\mathrm{Re}\lambda(a))/da\big]\Big|_{a=a_0} > 0$, а остальная часть спектра остается в левой полуплоскости, то происходит рождение предельного цикла с периодом $\tau_0 = 2\pi/|\lambda(a_0)|$ и радиусом, растущим как $\sqrt{a-a_0}$. Вопрос об устойчивости рождающегося при этом цикла решается путем определения знака первой ляпуновской величины L_1, процедура вычисления которой достаточно сложна и подробно описана в работах [88-89, 96]. Если $L_1 < 0$, то цикл устойчив. Если же $L_1 > 0$, то рождающийся цикл является неустойчивым. В случае, когда $L_1 = 0$, то при выполнении условия $\big[d(\mathrm{Re}\lambda(a))/da\big]\Big|_{a=a_0} > 0$ имеет место локальная единственность рождающегося цикла, устойчивость которого определяется знаком второй ляпуновской величины L_2 [87-88, 96]. Если же $L_i = 0,\ i = 1, 2, ...,$ то при $a = a_0$ существует семейство неизолированных циклов [88, 97].

С физической точки зрения интерес представляют лишь устойчивые предельные циклы, поскольку неустойчивые циклы обычно ненаблюдаемы. Поэтому будем полагать, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа родился устойчивый предельный цикл. Бифуркации фазовых портретов динамических систем в окрестности устойчивого цикла полностью описываются бифуркациями соответствующего преобразования монодромии отображения трансверсальной циклу площадки в себя. Такое преобразование часто называют отображением Пуанкаре. Для его построения рассмотрим устойчивый цикл $\gamma(a)$ потока, порождаемого векторным полем $\mathbf{v}(\mathbf{x}, a)$. Выберем точку $\mathbf{x}_0 \in \gamma(a)$ и некоторую трансверсальную секущую S, проходящую через $\mathbf{x}_0$. Отображение Пуанкаре P_a переводит любую точку $\mathbf{x}$ из малой окрестности точки $\mathbf{x}_0 \in S$ в ту точку, где поток T_a^t пересекает S. Цикл $\gamma(a)$ потока T_a^t является устойчивым, если $\vartheta(dP_a(\mathbf{x}_0)) \subset \{z \in \mathbf{C}\big|\ |z| < 1\}$ и неустойчивым, если найдется $\lambda \in \vartheta(dP_a(\mathbf{x}_0))$ такое, что $|\lambda| > 1$. Стало быть, последующая эволюция динамической системы определяется характером собственных значений (мультипликаторов) преобразования dP_a цикла в себя. Здесь возможны три основных случая, когда на единичную окружность выходят либо один мультипликатор, равный $+1$ или -1, либо два комплексно сопряженных мультипликатора. В первом случае в отображении имеет место рождение или исчезновение пары неподвижных точек, устойчивой и седловой, что в пространстве M соответствует появлению или исчезновению устойчивого и седлового предельных циклов. С бифуркацией рождения (исчезновения) предельного цикла с мультипликатором $+1$ связано рождение хаоса через перемежаемость (см. ниже).

При появлении мультипликатора, равного -1, реализуются два качественно различных случая. Если первоначально в границу области притяжения исходного цикла периода τ_0 входил седловой цикл приблизительно удвоенного периода $2\tau_0$, то с прохождением мультипликатора через -1 эти циклы сливаются. При этом в рассматриваемой области не остается устойчивых траекторий, а исходный цикл становится седловым. В отображении dP_a этот процесс выглядит как слияние устойчивой и двух седловых точек в одну седловую. В другом случае от теряющего устойчивость цикла периода τ_0 ответвляется цикл приблизительно удвоенного периода, $\tau_1 = 2\tau_0$, который является устойчивым. Дальнейшее увеличение управляющего параметра может привести к ситуации, когда на конечном интервале изменения параметра произойдет бесконечное число бифуркаций удвоения периода устойчивого предельного цикла. Этот каскад бифуркаций имеет место в типичном семействе, и приводит систему от устойчивого периодического режима к хаосу (см. ниже).

Допустим, что при $a = a_1$ единичную окружность пересекают два комплексно-сопряженных мультипликатора отображения dP_a, причем $d|\lambda(a)|/da\Big|_{a=a_1} > 0$, а остальная часть спектра $\vartheta(dP_a)$ остается внутри единичной окружности. Тогда при $a > a_1$ в отображении dP_a из теряющей устойчивость неподвижной точки рождается инвариантная относительно отображения окружность. Тем самым в исходной системе рождается инвариантный тор с плотной обмоткой. При изменении параметра, вообще говоря, число вращения на торе меняется, он испытывает резонансы, что приводит к появлению и исчезновению в бесконечном количестве предельных циклов, расположенных на торе. С дальнейшим ростом параметра тор теряет гладкость и может превратиться в странный аттрактор, соответствующий хаотическому поведению динамической системы.

Таким образом, бифуркации даже такого достаточно простого объекта как предельный цикл приводят к рождению нетривиальных множеств (например, инвариантных торов, состоящих из бесконечного множества траекторий). При изменении управляющего параметра исследование возможных бифуркаций таких множеств сильно разветвляется (см. об этом [87]). Однако нас интересуют, в основном, бифуркации, приводящие к возникновению *хаотического* поведения динамических систем.

Прежде всего, остановимся на бифуркации удвоения периода [86-87, 91, 98-100]. Эта бифуркация имеет место при прохождении мультипликатора $\lambda(a_0)$ цикла $\gamma(a_0)$ периода τ_0 через -1: с достижением значения $a = a_1$ цикл $\gamma(a_0)$ становится неустойчивым, и от него ответвляется новое устойчивое периодическое решение $\gamma'(a_1)$ периода $\tau_1 = 2\tau_0$. С дальнейшим увеличением параметра, $a > a_1$, значение $\lambda'(a)$ меняется, но при $a = a_2$ мультипликатор $\lambda'(a_2) = -1$ и появляется цикл периода $\tau_2 = 2\tau_1 = 4\tau_0$. И так далее. Последовательность бифуркационных значений удовлетворяет масштабному соотношению $a_n = a_\infty - \text{const} \cdot \delta^{-m}$ (где $\delta = 4,6692016091...$ – первая постоянная Фейгенбаума) и имеет предел $\lim\limits_{m\to\infty} a_m = a_\infty$. При этом бифурцирующие циклы сходятся к некоторому инвариантному множеству (аттрактору Фейгенбаума), структура которого является канторовской и не зависит от рассматриваемого семейства уравнений. При переходе через предельное значение, $a > a_\infty$, в любой полуокрестности этого параметрического интервала имеются значения параметра a, для которых существует абсолютно непрерывная инвариантная мера, т.е. динамика системы является хаотической.

Универсальность бифуркаций удвоения периода объясняется при помощи ренормгруппового подхода [101-103]. Рассмотрим четное унимодальное отображение интервала I в себя, определяемое семейством $f(a,x)$. Допустим, что в диапазоне изменения параметров от a_k до a_{k+1} производная $\left(df^{(2^k)}(x,a)/dx\right)\Big|_{x=x_a^{(1)}}$ монотонно убывает от 1 до -1, где $x_a^{(1)}$ – одна из точек периодической траектории периода 2^k. Следовательно, в интервале (a_k, a_{k+1}) найдется $\tilde{a}_k$ такое, что $\left(df^{(2^k)}(x,\tilde{a}_k)/dx\right)\Big|_{x=x_{\tilde{a}_k}^{(1)}} = 0$. Это параметрическое значение характеризуется тем, что точки периодической траектории являются сверхустойчивыми. Поэтому в окрестности $x = x_{\tilde{a}_{k-1}}^{(1)}$ график функции $f^{(2^{k-1})}(x,\tilde{a}_k)$ асимптотически выглядит так же, как и график для $f^{(2^k)}(x,\tilde{a}_{k+1})$ при $k \to \infty$ после соответствующего масштабного преобразования. Фактически, однако, совпадают целые семейства: $f^{(2^{k-1})}(x,a)$ в $\tilde{a}_n \le a \le \tilde{a}_{n+1}$ и $f^{(2^k)}(x,a)$ в $\tilde{a}_{n+1} \le a \le \tilde{a}_{n+2}$. Таким образом, последовательно удваивая семейство отображений и производя масштабные преобразования, получим в пределе семейство отображений, инвариантное относительно произведенных операций и не зависящее от выбора начального отображения. Это универсальное отображение может быть определено через преобразование удвоения $\mathcal{T}$. Пусть $x = 0$ – точка максимума f. Обозначим как $\alpha = \alpha(f) = -f(0)/f(f(0))$. Тогда интервал $[-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}]$ под действием $\mathcal{T}$ перейдет в $[f(\alpha^{-1}), f(0)]$. В свою очередь, этот интервал отобразится на интервал $[f(f(0)), f(f(\alpha^{-1}))]$. Пусть $\alpha > 0,\ f(f(\alpha^{-1})) < \alpha^{-1},\ \alpha^{-1} < f(\alpha^{-1}),\ f(0) > 0$. В этом случае $[f(f(0)), f(f(\alpha^{-1}))] \subset [-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}]$, и $[f(\alpha^{-1}), f(0)] \bigcap [-\alpha^{-1}, \alpha^{-1}] = \emptyset$. Таким образом, функция $h(x) = -\alpha f(f(\alpha^{-1}x))$ будет вновь функцией, которая порождает унимодальное отображение интервала I в себя. Преобразование удвоения $\mathcal{T}$ определяется следующим образом: $(\mathcal{T}f)(x) = -\alpha f(f(-\alpha^{-1}x)),\ \alpha = -f(0)/f(f(0))$. Оно имеет неподвижную точку $g(x)$, и спектр линеаризованного преобразования в этой точке, $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$, лежит внутри единичного круга за исключением одного собственного значения, равного первой постоянной Фейгенбаума δ.

Рассмотрим множество $\mathcal{U}$, состоящее из четных унимодальных отображений интервала. Допустим, что $f'(0) = 0;\ f(0) = 1;\ f(1) = -\alpha < 0;\ b = f(\alpha) > \alpha;\ f(b) = f^2(\alpha) < \alpha$. Пусть $\mathcal{H}$ обозначает банахово пространство четных функций $f(z)$, а $\mathcal{H}_0$ – его подпространство, состоящее из функций f, удовлетворяющих соотношениям $f(0) = f'(0) = 0$; $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_0 + 1$. Тогда можно показать [102-104], что существует четная аналитическая функция $g(x)$, представимая как $g(x) = 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 - 0.0267057x^6 + \ldots$ и инвариантная относительно преобразования удвоения $\mathcal{T}$. При этом $\alpha = \alpha(g) = 2,5029078750\ldots$ – вторая универсальная постоянная Фейгенбаума. Более того, существует окрестность V_g точки g в пространстве $\mathcal{H}_1$ такая, что преобразование удвоения $\mathcal{T}$ отображает V_g в $\mathcal{H}_1$. Линеаризованное преобразование удвоения, $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$, имеет растягивающееся одномерное подпространство и сжимающееся подпространство коразмерности 1. В растягивающемся подпространстве собственное значение оператора $\mathrm{D}\mathcal{T}(g)$ равно δ.

Этими свойствами объясняется универсальность удвоения.

Большое число экспериментальных и численных исследований (см., например, [77, 105-109] и цитированную там литературу) показали, что универсальные свойства бифуркаций удвоения встречаются в динамических системах, не имеющих связи с отображениями интервала. Этот факт указывает на то, что многомерные отображения устроены так, что по одному направлению они качественно описываются семейством определенных одномерных отображений, а по остальным направлениям имеет место сильное сжатие. Точная формулировка описанного свойства дана в работах [102, 110].

Можно представить универсальность иным способом [111-113], используя понятие спектральной плотности. Такой подход является не столь абстрактным, и может быть подтвержден экспериментально. Обозначим цикл периода $\tau_{m+1} = 2^{m+1}\tau_1$ как $y_{m+1}(t)$, где t – время, выраженное в терминах исходного цикла $y_1(t)$ периода τ_1, $t/\tau_1 = 1, 2, ..., 2^{m+1}$. Цикл $y_{m+1}(t)$ ответвляется от цикла $y_m(t)$ в результате бифуркации удвоения, когда параметр a достигает значения a_{m+1}. Он устойчив в интервале $a \in [a_{m+1}, a_{m+2})$. На плоскости Пуанкаре расстояние между точками такого цикла определим как

$$\Delta_{m+1}(t) = y_{m+1}(t) - y_{m+1}(t + \tau_m) \ , \tag{2}$$

где $\tau_m = 2^m \tau_1 = \tau_{m+1}/2$. Рассмотрим скейлинговую функцию [114], определяющую локальное изменение масштаба (скейлинг) вблизи m-го цикла при каждом удвоении периода:

$$\sigma_m(t) = \frac{\Delta_{m+1}(t)}{\Delta_m(t)} \ . \tag{3}$$

Поскольку $\Delta_{m+1}(t + \tau_m) = -\Delta_{m+1}(t)$, то $\sigma_m(t + \tau_m) = -\sigma(t)$. Теперь можно сделать заключение об амплитудах гармоник в частотном спектре, когда период удваивается. Спектр цикла $y_m(t)$ периодаτ_m можно выразить через Фурье-компоненты b_l^m:

$$y_m(t) = \sum_l b_l^m \exp\left(\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) . \tag{4}$$

В результате $(m+1)$-ой бифуркации в таком спектре в дополнение к частотам $l\omega_m$, $l = 1, 2, ...$, появившимся к m-ой бифуркации, на частотах $k\omega_m/2, k = 1, 3, 5, ...$ возникает 2^m новых субгармоник. Представим цикл $y_{m+1}(t)$ следующим образом: $y_{m+1}(t) = (1/2)[\Delta_{m+1}(t) + \eta_{m+1}(t)]$, где $\Delta_{m+1}(t)$ определяется из (2). Тогда $\eta_{m+1}(t) = y_{m+1}(t) + y_{m+1}(t+\tau_m)$. Очевидно, $\eta_{m+1}(t+\tau_m) = \eta_{m+1}(t)$. Спектральное разложение функции $\eta_{m+1}(t)$ будет содержать только частоты $l\omega_m$, поскольку

$$\begin{aligned} b_k^{m+1} &= \frac{1}{\tau_{m+1}} \int_0^{\tau_{m+1}} dt\ \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i k t}{\tau_{m+1}}\right) = \\ &= \frac{1}{2\tau_m} \int_0^{2\tau_m} dt\ \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{\pi i k t}{\tau_m}\right) = \\ &= \frac{1}{2\tau_m} \int_0^{\tau_m} dt\ \left[\eta_{m+1}(t) + (-1)^k \eta_{m+1}(t + \tau_m)\right] \exp\left(-\frac{\pi i k t}{\tau_m}\right) = 0 \ . \end{aligned} \tag{5}$$

В то же время, амплитуда колебаний с частотами $l\omega_m$ останется той же, так как

$$b_l^m = \frac{1}{\tau_m}\int_0^{\tau_m} dt \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) y_m(t) \ . \tag{6}$$

После удвоения периода, $\tau_{m+1} = 2\tau_m$, найдем, что

$$b_l^{m+1} = \frac{1}{2\tau_m}\int_0^{\tau_m} dt \left[y_{m+1}(t) + (-1)^l y_{m+1}(t+\tau_m)\right] \exp\left(-\frac{\pi i l t}{\tau_m}\right) . \tag{7}$$

Если l – четное, то подынтегральная функций в (7) равна $\eta_{m+1}(t)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} b_{2l}^{m+1} &= \frac{1}{2\tau_m}\int_0^{\tau_m} dt \ \eta_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\tau_m}\int_0^{\tau_m} dt \ y_{m+1}(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{\tau_m}\int_0^{\tau_m} dt \ y_m(t) \exp\left(-\frac{2\pi i l t}{\tau_m}\right) = b_m^l. \end{aligned} \tag{8}$$

В противоположность функции $\eta_{m+1}(t)$, спектральная плотность функции $\Delta_{m+1}(t)$ содержит только субгармоники $k\omega_m/2$. Суммарная интенсивность этих спектральных компонент дается интегралом $I_{m+1} = (1/\tau_{m+1}) \int\limits_0^{\tau_{m+1}} \Delta_{m+1}^2(t)dt$. Поэтому, используя величину $\sigma_m(t)$, найдем:

$$I_{m+1} = \frac{1}{2\tau_m}\int_0^{2\tau_m} \sigma_m^2(t)\Delta_m^2(t)dt = \frac{1}{\tau_m}\int_0^{\tau_m} \sigma_m^2(t)\Delta_m^2(t)dt \ . \tag{9}$$

Как известно [114], при больших m масштабная функция $\sigma_m(t)$ хорошо приближается соотношением

$$\sigma_m(t) = \begin{cases} 1/\alpha, & 0 < t < \tau_m/2 \ , \\ 1/\alpha^2, & \tau_m/2 \le t < \tau_m \ , \end{cases} \tag{10}$$

где α – вторая постоянная Фейгенбаума. Значит, можно оценить интенсивность спектральных компонент как

$$I_{m+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right)\frac{1}{\tau_m}\int_0^{\tau_m} \Delta_m^2(t)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right) I_m \ . \tag{11}$$

Или, окончательно

$$\frac{I_m}{I_{m+1}} = 2\left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^4}\right)^{-1} \ . \tag{12}$$

Таким образом, интенсивность новых спектральных субгармоник, появляющихся в результате бифуркации удвоения, всегда в *постоянное* число раз меньше, чем интенсивность субгармоник, возникших в предыдущую бифуркацию, и не зависит от номера бифуркации. Если в системе имеется внешний шум, то, чтобы следующая бифуркация удвоения была наблюдаема, его дисперсия, по оценкам, данным в работах [115-117], должна быть в 6,619... раз меньше, чем амплитуда субгармоник.

Другой путь к хаосу реализуется через перемежаемость. Строгий подход к этому явлению менее развит, поскольку невозможно точно определить, при каких параметрических значениях достигается развитый хаотический режим. Впервые переход к хаосу через перемежаемость исследован на примере системы Лоренца [118-120], однако несколько ранее возможность появления касательной бифуркации была подробно описана и строго обоснована в работах [121-122]. Перемежаемость свидетельствует о рождении странного аттрактора посредством исчезновения полуустойчивого предельного цикла. Это происходит, когда $a = a_1$ и мультипликатор цикла имеет действительное собственное значение +1. В этот момент происходит слияние устойчивого и неустойчивого циклов в полуустойчивый. В отображении Пуанкаре такая бифуркация выглядит как слияние устойчивой и неустойчивой неподвижных точек. С переходом через критическое значение a_1, $a > a_1$, полуустойчивый цикл исчезает. Типичное поведение системы вблизи значений $a > a_1$, $a \simeq a_1$, будет почти периодическим, но прерывающимся короткими хаотическими всплесками. С увеличением параметра число хаотических пульсаций увеличивается и постепенно наступает развитый хаос.

Отображение Пуанкаре по траекториям, проходящим в окрестности полуустойчивого цикла в некоторых координатах (x, y), $x \in \mathbf{R}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^{n-1}$ записывается как [98]: $x_{k+1} = f(x_k, \varepsilon) = x_k + x_k^2 + bx_k^3 + \varepsilon$, $\mathbf{y}_{k+1} = A(x_k, \varepsilon)\mathbf{y}_k + q(x_k, \mathbf{y}_k, \varepsilon)$, где q – нелинейная функция, $|\lambda_i| < 1$, $\lambda_i \in \vartheta(A(0,0))$, $\varepsilon = c(a - a_1) + \ldots$, $c > 0$. Первое соотношение описывает динамику отображения на центральном многообразии. Рассмотрим его подробнее. При $\varepsilon < 0$ почти все траектории притягиваются к единственной устойчивой неподвижной точке отображения. При $\varepsilon \to 0$ к ней приближается неустойчивая неподвижная точка. В момент $\varepsilon = 0$ в начале координат $x = 0$ происходит слияние устойчивой и неустойчивой точек в одну полуустойчивую. С превышением бифуркационного значения, $\varepsilon > 0$, эта точка исчезает. Допустим, что одномерное отображение имеет участок, порождающий сложную динамику. Тогда при $a \approx a_1$ (но при $\varepsilon > 0$) диаграмма Ламерея такого отображения будет представлять собой длинный периодический участок, соответствующий проходу в достаточно малой окрестности U начала координат и хаотический всплеск, который завершается при новом попадании в U. И так далее. Поведение, возникающее в системах при обратной касательной бифуркации, называется перемежаемостью *1-го рода*.

Перемежаемость может возникать и в других случаях [112, 120, 123]. В частности, если отображение Пуанкаре на центральном многообразии (в полярных координатах) имеет вид $r_{n+1} = (1+\varepsilon)r_n + br_n^3$; $\theta_{n+1} = \theta_n + c$, то система проявляет перемежаемость *2-го рода*. Основное отличие от перемежаемости 1-го рода состоит в том, что в результате слияния устойчивой и неустойчивой неподвижных точек они не исчезают, а происходит передача неустойчивости от неустойчивой точки к устойчивой. Перемежаемость *3-го рода* возникает, если отображение Пуанкаре запишется как $x_{n+1} = -(1+\varepsilon)x_n - bx_n^3$. В этом случае изображающая точка подходит по спирали к единственной устойчивой неподвижной точке, а перемежаемость появляется вследствие потери устойчивости: лестница Ламерея представляет собой медленно раскручивающуюся спираль.

Перемежаемость поддается описанию в рамках ренормализационного подхода. В отличие от сценария удвоения периода, этот подход допускает точное решение функционального РГ уравнения [124-125]. Обобщим функцию, описывающую динамику отображения на центральном многообразии так, чтобы при $x \to 0$ она имела вид: $f(x) = x + b|x|^z$. Тогда в единичном интервале, $I = [0,1]$, вторая итерация, т.е. функция $f(f(x))$, после соответствующего масштабного преобразования демонстрирует то же поведение, что и исходная функция $f(x)$. Следовательно, можно записать соотношение универсальности через оператор удвоения, применяемый к неподвижной точке $g(x)$ как $\mathcal{T}g(x) = \alpha f(f(\alpha^{-1}x))$, $\mathcal{T}g(x) = g(x)$. Граничные условия в этом случае определяются следующим образом: $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$. Представим отображение $x' = f(x)$ в неявном виде, $F(x') = F(x) - a$, т.е. $x'(x) = F^{-1}(F(x) - a) = f(x)$, где a – параметр. Тогда $\alpha x''(x) = x'(\alpha x)$. Поэтому $F(\alpha x'') = F(x'(\alpha x)) = F(\alpha x) - a$. Таким образом, $1/2F(x'') = 1/2F(x) - a$. Для того, чтобы F соответствовало уравнению удвоения, необходимо выполнение равенства $1/2F^*(x) = F^*(\alpha x)$. Оно автоматически учтется, если выбрать $F^*(x) = |x|^{-(z-1)}$, $\alpha = 2^{1/(z-1)}$. Следовательно, $g(x) = F^{*-1}(F^*(x) - a) = (|x|^{-(z-1)} - a)^{-1/(z-1)}$. При $a = b(z-1)$ функция $g(x)$ будет удовлетворять заданным граничным условиям. Таким образом, для перемежаемости отображение неподвижной точки связано с трансляцией $F(x') = F(x) - a$. РГ уравнение для малого возмущения неподвижной точки также допускает точное решение [126].

Большое значение исследование ренормализационных уравнений перемежаемости приобрело после того, как было показано, что с их помощью можно универсальным образом объяснить происхождение фликкер-шума в нелинейных системах [112, 127-128].

Бифуркации двумерного тора, родившегося в результате перехода пары комплексно сопряженных собственных значений цикла через единичную окружность, также могут привести к появлению хаоса в динамических системах. При этом плоскость параметров динамической системы разбивается на резонансные языки, отвечающие наличию у векторного поля предельных циклов, расположенных на торе. Тор является объединением неустойчивых многообразий седловых циклов с устойчивыми циклами. Прежде чем в такой системе произойдет переход к хаотическим колебаниям, тор должен потерять гладкость: существуют такие значения параметров, при которых неустойчивое многообразие седлового цикла начинает "гофрироваться", либо у седлового цикла возникает негрубая гомоклиническая кривая, либо устойчивый и неустойчивый циклы на торе сливаются и исчезают на негладком торе. Этот результат известен как теорема о *разрушении* тора. При выполнении некоторых дополнительных условий разрушение тора приводит к рождению хаоса [87, 98, 108-109, 112, 120, 129-130].

Нарушение гладкости тора удобно рассмотреть на примере отображения кольца в себя, которое при определенных значениях параметров имеет гладкую инвариантную кривую. При этом конкретный вид отображения не играет роли [87, 98]. Перестройки фазовых портретов в таком кольце имеют место и в общей ситуации [131-133], поэтому достаточно рассмотреть модельное отображение. Пусть $\Phi_{a,b} : x_{n+1} = e^{-a}(x_n + b\sin\theta_n),\ \theta_{n+1} = (\theta_n + a + x_n + b\sin\theta_n),\ \mathrm{mod}\, 2\pi,\ a > 0,\ b > 0$. Это отображение является диффеоморфизмом и переводит кольцо $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $|x| \leq x_0,\ x_0 > be^{-a}/(1-e^{-a})$ в себя. Если $a \gg 1$, то из отображения кольца получим отображение окружности, $\varphi_{a,b} : \theta_{n+1} = \theta_n + a + b\sin\theta_k,\ \mathrm{mod}\, 2\pi$, которое достаточно интенсивно изучалось (см., например, [134-137] и цитированную там литературу). В частности, его пространство параметров содержит бифуркационную кривую, при пересечении которой динамика определяется величиной b. Если $b < 1$, то при иррациональном числе вращения все траектории отображения окружности квазипериодические. При рациональном значении числа вращения в отображении окружности имеется равное число устойчивых и неустойчивых периодических точек одинакового периода. Когда $b > 1$, возникает хаотическое множество [135-137].

Динамика отображения кольца во многом аналогична динамике отображения окружности. При $b + e^{-a} < 1$ это отображение имеет инвариантную замкнутую кривую, которая включает неподвижные точки, одна из которых устойчива, а другая седловая, причем ее неустойчивые сепаратрисы замыкаются на устойчивую точку (и образуя тем самым замкнутую кривую). В пространстве параметров (a, b) такая ситуация соответствует определенной области, ограниченной бифуркационными кривыми. При пересечении этих кривых поведение отображения кольца изменяется следующим образом [129]: *а*) возникает бесконечное множество траекторий со счетным числом неустойчивых седловых циклов, при этом изображающая точка остается в малой окрестности неподвижной точки; *б*) происходит бифуркации удвоения периода; *в*) седло и узел сливаются, появляется седло-узел, причем инвариантную кривую в этот момент образует его неустойчивая сепаратриса; если эта кривая гладкая, то после исчезновения седло-узла рождается гладкая замкнутая кривая, к которой притягиваются все точки в кольце; *г*) если в случае *в*) в момент слияния седла и узла сепаратриса негладкая, то возникает инвариантное множество типа подковы Смейла, т.е. хаотическая динамика. Последние два случая (*в* и *г*) реализуются в зависимости от значения параметра b.

Количественные закономерности перехода от режима двухчастотных колебаний к хаосу устанавливаются при помощи ренорм-группового подхода [138-139]. Пусть $f(r, \theta) : S^1 \to S^1$ – гладкое взаимно однозначное отображение окружности, имеющее точку перегиба p. Для перехода от квазипериодичности к хаосу необходимо изменять два параметра, чтобы сохранять число вращения $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}(f^n(x_0) - x_0)/n$, равным заданному иррациональному числу. Используя в качестве числа вращения значение золотого среднего, $\rho = \rho^* = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618034\ldots$, можно обнаружить универсальные закономерности при переходе к хаосу. Число $-\rho^*$ есть собственное значение матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

с собственным вектором $(-\rho^*, 1)^T$. Кроме того, T^n – это матрица

$$\begin{pmatrix} \phi_{n+1} & \phi_n \\ \phi_n & \phi_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где ϕ_i – i-е число Фибоначчи ($\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 1$). Таким образом, $\phi_{n-1} - \phi_n\rho^* = (-\rho^*)^n$. Следовательно, можно записать

$$(R_{\rho^*})^{\phi_n}(\theta) - \theta = \phi_n\rho^*, \mod 1, \tag{15}$$

где R_{ρ^*} обозначает оборот вдоль окружности с числом ρ^*. В силу этого получим $|(R_{\rho^*})^{\phi_n}(\theta) - \theta| = (\rho^*)^n$. Далее, используя рекуррентное соотношение для чисел Фибоначчи, найдем, что величина $(R_{\rho^*})^{\phi_n}$ порождается последовательностью композиций $(R_{\rho^*})^{\phi_{n+1}} = (R_{\rho^*})^{\phi_n} \circ (R_{\rho^*})^{\phi_{n-1}}$.

Для поиска фиксированной точки ренормализационного оператора необходимо рассмотреть поднятие $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ функции f, удовлетворяющее соотношению $\exp\left(2\pi i\tilde{f}(\theta)\right) = f(\exp(2\pi i\theta))$. Тогда оператор ренормализации определится как

$$T_1 \begin{bmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha u(\alpha v(\alpha^{-2}\theta)) \\ u(\theta) \end{bmatrix}, \tag{16}$$

или

$$T_2 \begin{bmatrix} u(\theta) \\ v(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 v(\alpha^{-1}u(\alpha^{-1}\theta)) \\ u(\theta) \end{bmatrix}, \tag{17}$$

что соответствует переходу от функций $(\tilde{f}^{\phi_n}, \tilde{f}^{\phi_{n-1}})$ к функциям $(\tilde{f}^{\phi_{n+1}}, \tilde{f}^{\phi_n})$ с масштабным множителем α. Линеаризация каждого оператора T_i в соответствующей неподвижной точке g имеет неустойчивое собственное значение, которое отвечает скейлинговому поведению с таким свойством, что $f(\theta) + \varepsilon_n$ имеет число вращения ϕ_{n-1}/ϕ_n. При этом масштабные постоянные равны $\delta = -2,83362...$, $\alpha = -1,28857...$.

Помимо перечисленных путей развития хаоса, в динамических системах возможен переход к хаотическому поведению через гомоклинические бифуркации. Пусть $T_a : M \to M$ – некоторое преобразование множества M в себя. Точка $p \in M$ называется гиперболической неподвижной точкой отображения T_a, если $T_a p = p$ и $\mathrm{D}T_a\big|_p$ не имеет собственного значения равного единице. При этом устойчивое и неустойчивое многообразия точки p определяются соответственно следующим образом: $W^s(p) = \{\mathrm{x} \in M \big| \; T_a^t\mathrm{x} \to p, \; t \to +\infty\}$ и $W^u(p) = \{\mathrm{x} \in M \big| \; T_a^t\mathrm{x} \to p, \; t \to -\infty\}$. Предположим, что p – гиперболическая неподвижная точка отображения T_a. Точка q называется *гомоклинической* к точке p, если $p \neq q \in W^s(p) \bigcap W^u(p)$. Это означает, что $\lim\limits_{t\to\pm\infty} T^t q = p$.

Одномерное отображение имеет гомоклинические точки, если оно обладает периодической орбитой, период которой отличен от 2^i, $i = 0, 1, 2, \ldots$ [140-142]. В свою очередь, наличие гомоклинических точек гарантирует положительность энтропии [142], т.е. существование хаотичности. Более того, недавно были получены достаточно общие утверждения, касающиеся сложного поведения *двумерных* динамических систем [143-145]. Основной их смысл кратко сводится к следующему. Однопараметрическое семейство диффеоморфизмов поверхности, имеющее гомоклиническую структуру, на множестве значений параметра положительной меры порождает странные аттракторы. Пусть T_a – однопараметрическое семейство диффеоморфизмов класса C^∞, заданных на поверхности. Предположим, что T_0 имеет гомоклиническое касание в некоторой периодической точке p_0. Тогда при достаточно общих предположениях существует *положительная* лебегова мера множества A_c параметрических значений, близких к $a = 0$, таких, что для $a \in A_c$ диффеоморфизм T_a проявляет *хаотическое* поведение, обусловленное наличием странного аттрактора. Следствие из этого важного утверждения справедливо для одномерных динамических систем достаточно общего вида [145]: Пусть T_a – гладкое отображение интервала I или отображение окружности S^1 и точка p_0 – гиперболическая периодическая точка для T_0. Допустим, что отрицательная орбита точки p_0 пересекает неустойчивое множество невырожденной критической точки отображения T_0. Тогда, если такая гомоклиническая структура имеет место в случае общего положения, то *мера* множества параметрических значений a, близких к $a = 0$, для которых T_a проявляет хаотическое поведение, *положительна.*

Другой важный результат был получен Ньюхаузом [146-147], который показал, что семейство двумерных диффеоморфизмов, имеющее гомоклиническое касание устойчивых и неустойчивых сепаратрис, обладает чрезвычайно сложным поведением. Такая динамика действительно была обнаружена на примере уравнения Дюффинга [86, 148-149] посредством обобщенной теории Мельникова [150] (см. §4). Более того, формирование гомоклинических траекторий всегда сопровождается глубокими перестройками динамики, которые включают появление подков Смейла [21], каскадов удвоения периода [151], седло-узловых циклов [152], неограниченного количества сосуществующих периодических аттракторов [146, 153].

Обобщение этих результатов на семейство диффеоморфизмов произвольной размерности было описано в работах [152, 154-156]. Основное утверждение, полученное в этом направлении, сводится к следующему. Пусть T_a – семейство диффеоморфизмов многообразия M, $\mathrm{dim}M \geq 2$, имеющее гомоклиническое касание при $a = \tilde{a}$. Тогда существует множество $A_c \subset \mathbf{R}$ такое, что T_a *обладает* странным аттрактором для каждого $a \in A_c$ и $A_c \bigcap [\tilde{a} - \varepsilon,\ \tilde{a} + \varepsilon]$ имеет *положительную* меру Лебега для всех $\varepsilon > 0$.

Если рассматривать вместо отображений *потоки*, то можно получить новые интересные утверждения, касающиеся развития хаотической динамики. Один из первых результатов в этом направлении был получен Шильниковым [157]. Пусть поток T^t в пространстве $\mathbf{R}^3$ имеет равновесную точку в начале координат с действительным положительным собственным значением λ_1 и пару комплексно сопряженных собственных значений $\lambda_{2,3}$ с отрицательными действительными частями. Тогда, используя теорему об устойчивом многообразии [86], можно ввести координаты так, что ось z будет содержать локально неустойчивое многообразие, а плоскость (x, y) будет содержать локально устойчивое многообразие. Допустим, что траектория γ является гомоклинической (к точке 0) типа седло-фокус, т.е. при $\gamma \in W^u(0)$ она имеет выходящую из 0 неустойчивую сепаратрису, которая при $t \to \infty$ по спирали стремится к 0 в плоскости (x, y). Тогда справедлив следующий точный результат [86,157]: Если $|\mathrm{Re}\lambda_{2,3}| < \lambda_1$, то существует возмущение потока T^t такое, что возмущенный поток T_1^t будет иметь гомоклиническую орбиту γ_1 вблизи γ, а отображение, порождаемое потоком T_1^t, будет иметь *счетное* *множество подков.* Обобщение этого результата привело к существенному углублению понимания бифуркаций в динамических системах, имеющих гомоклинические структуры, и путей развития в них хаотического поведения (см., например, [86-87, 144, 148, 158] и приведенную там литературу).

Таким образом, имеются достаточно мощные аналитические методы исследования развития хаотического поведения динамических систем. Однако кроме сценариев рождения хаоса в тех или иных системах немаловажным является вопрос о свойствах хаотических динамических систем и способах их изучения.

3 Некоторые свойства хаотических динамических систем

Свойства хаотических систем даются такими инвариантами как характеристические показатели Ляпунова, размерность странного аттрактора, энтропия динамической системы (см., например, [25, 27, 31, 77, 101, 109, 112-113, 159-164] и приводимые там ссылки) и рядом других. Кроме того, важными характеристиками динамических систем являются эргодичность и перемешивание [25, 31, 92, 101, 123, 165-166], K-свойство [31, 101, 163, 165, 167], бернуллиевость [31, 163, 165, 167-169], выполнение центральной предельной теоремы теории вероятностей [166, 169-170], экспоненциальное убывание корреляций [123, 166, 169, 171]. Установление последних свойств в динамической системе положены в основу современного представления о детерминированном хаосе. Описание хаотических динамических систем возможно также через исследование характеристик их хаотических аттракторов или путем рассмотрения поведения типичных фазовых траекторий.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ – типичная фазовая траектория системы (1) и $\mathbf{x}_1(t)$ – близкая к ней траектория, $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}(t) + \vec{\xi}(t)$. Рассмотрим функцию

$$\Xi(\vec{\xi}(0)) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\vec{\xi}(t)|}{|\vec{\xi}(0)|} \ , \tag{18}$$

которая определена на векторах начального смещения $\vec{\xi}(0)$ таких, что $|\vec{\xi}(0)| = \varepsilon$, где $\varepsilon \to 0$. Тогда, в зависимости от направления вектора $\vec{\xi}(0)$ функция $\Xi(\vec{\xi}(0))$ будет принимать конечный ряд значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, ..., n$, которые называются *характеристическими показателями Ляпунова* (см., например, [77, 92, 113, 123, 160-162] и данные там ссылки).

Характеристические показатели Ляпунова служат мерой хаотичности динамических систем. В частности, если имеются положительные показатели, то поведение системы будет хаотическим.

Строгое обоснование теория характеристических показателей Ляпунова получила после доказательства известной мультипликативной эргодической теоремы [172-174], которая устанавливает существование так называемых правильных по Ляпунову траекторий в фазовом пространстве. Рассмотрим измеримый мультипликативный коцикл относительно преобразования T, т.е. измеримую функцию $\psi(m, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in M$, со значениями в пространстве квадратных матриц порядка $j \geq 1$ такую, что выполняется $\psi(m+k, \mathbf{x}) = \psi(m, T^k\mathbf{x})\psi(k, \mathbf{x})$. Тогда величина$\lambda^+(\mathbf{x}, q) = \overline{\lim}_{n\to\infty}(1/n)\ln||\psi(m, \mathbf{x})q||$, $q \in \pi^{-1}(\mathbf{x})$, где $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ – слой над $\mathbf{x} \in M$, называется *характеристическим показателем Ляпунова* преобразования T с коциклом $\psi(m, \mathbf{x})$. Теперь, если для некоторого нормального базиса $\{\mathbf{e}_i(\mathbf{x})\}$ имеет место равенство $\sum\limits_i \lambda^+(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i(\mathbf{x})) = \underline{\lim}_{m\to\infty}\ln|\det\psi(m, \mathbf{x})|$, то точка $\mathbf{x} \in M$ называется *правильной вперед.* Соответствующий характеристический показатель λ^- получается заменой верхнего предела при $n \to +\infty$ на верхний предел при $n \to -\infty$. Точка $\mathbf{x}$ называется правильной назад, если она является правильной вперед для показателя λ^-. Двусторонние траектории динамических систем (1) (т.е. траектории, существующие для $t > 0$ и $t < 0$) приводят к понятию (при некоторых дополнительных условиях [175]) *правильных точек* по Ляпунову с согласованными значениями показателей λ^+ и λ^-. Далее, можно показать, что если $\mathbf{x}$ – правильная по Ляпунову точка, то $T^k\mathbf{x}$ будет правильной по Ляпунову *траекторией.* Пусть $X_0 \subset M$ – множество правильных по Ляпунову траекторий. Мультипликативная эргодическая теорема утверждает, что X_0 имеет *полную* меру. Таким образом, доказывается существование показателей Ляпунова, которые могут быть определены для почти всякого $\mathbf{x} \in M$.

Для одномерных отображений, порождаемых функцией f, имеется единственный показатель Ляпунова, который можно записать как

$$\lambda = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\left|\frac{df}{dx_i}\right| \ . \tag{19}$$

Другими важными характеристиками служит энтропия [160, 163-165], которая определяет обратную величину среднего времени предсказуемости поведения хаотической системы и характеризует ее сложность [92, 113, 171, 176], и размерность инвариантного множества динамической системы [77, 112, 160, 164, 177]. Кратко остановимся на некоторых положениях теории.

Формально *энтропия* h динамической системы $(M, \mathcal{S}, \mu, T)$ вводится как верхняя грань по всем конечным измеримым разбиениям η: $h(T) = \sup\{h(T, \eta)\}$. Таким образом, энтропия представляет собой наибольшую возможную скорость создания информации преобразованием T с помощью конечных разбиений пространства состояний динамической системы. Поскольку энтропия – количественная характеристика, с помощью которой можно (дополнительно к прочим важным инвариантам) описать отдельные стороны хаотичности, она оказывается тесно связанной с другими характеристиками поведения динамических систем. В частности, энтропия выражается через показатели Ляпунова следующим образом [174]:

$$h(T) = \int\limits_M \sum_{\lambda_i \geq 0}\lambda_i(\mathbf{x})d\mu \ .$$

Это соотношение может быть в ряде случаев упрощено. Именно, если T – дифференцируемое отображение конечномерного многообразия и μ – эргодическая вероятностная мера для динамической системы $(M, \mathcal{S})$, то $h \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ [160, 174]. Равенство в этом выражении имеет место, если рассматривать одну хаотическую компоненту движения, т.е. если мера μ – мера Синая-Рюэля-Боуэна [160]. Величина энтропии h не зависит от способа разбиения фазового пространства. Кроме того, если две динамические системы имеют равные энтропии, то их статистические законы движения одинаковы [167, 178].

Размерностные характеристики инвариантных множеств динамических систем могут вводиться по разному (см., например, [112, 161, 179-182] и приведенные там ссылки). Однако основные математические результаты получены только для некоторых из них [177, 183-186]. Пусть M – компактное пространство и $A \subset M$. Допустим, что $N(\varepsilon)$ – минимальное число шаров радиуса ε, необходимых для покрытия множества A. Тогда пределы $\overline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \equiv \overline{C}(A)$ и $\underline{\lim}_{\varepsilon \to 0} \ln N(\varepsilon) / \ln(1/\varepsilon) \equiv \underline{C}(A)$ называется *верхней* (соответственно *нижней*) *емкостью* множества A. Если их значения совпадают, $\overline{C}(A) = \underline{C}(A) \equiv C(A)$, то величина $C(A)$ называется *емкостью* [177] или *фрактальной размерностью* [164, 187-188] множества A.

Характеристические показатели Ляпунова, энтропия и размерность дают возможность посредством изучения наблюдаемых (т.е. сигнала или определенной реализации, по которым судят о характере процесса в исследуемой физической системе) определить количество независимых переменных, однозначно описывающих состояние системы и тем самым установить конечномерность рассматриваемого явления. Большинство результатов в этом направлении основаны на теории Такенса [189-190] (см. также [164] и приведенные там ссылки) и используют тот факт, что свойства аттрактора можно определить из временно́й последовательности одной составляющей. Именно, если составить векторную функцию $\hat{y} = \{x_i(t), x_i(t+\tau), \ldots, x_i(t+2n\tau)\}$, где $x_i(t)$ – произвольная составляющая переменной $\mathbf{x}$, то метрические свойства исходного n-мерного и построенного $(2n+1)$-мерного пространств будут одинаковы.

Опираясь на теорию Такенса, в принципе можно отличить *динамический* процесс от *чисто случайного*, т.е. недетерминированного. Наблюдаемая $\hat{y} = \{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ называется *детерминированно порожденной*, если выполнены следующие условия [164, 189-190]: существует конечномерная динамическая система $\{T\}$, точка x_0 и липшиц-непрерывная функция ϕ такие, что выполняется $\phi(T^i(x_0)) = y_i$ для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$, причем $\mathrm{dist}(T^t x, T^t x') \leq \mathrm{const} \cdot e^{\lambda t} \mathrm{dist}(x, x')$, т.е. максимальный ляпуновский показатель для $\{T\}$ является ограниченным. Введем пространство B всех наблюдаемых как множество последовательностей $\hat{y} = \{y_0, y_1, y_2, \ldots\}$, $\sum_{i=0}^{\infty} |y_i|/2^i < \infty$. Тогда при соответствующем введении нормы пространство B будет полным нормированным линейным пространством. Зададим в B динамическую систему посредством определения отображения сдвига $\hat{y} \mapsto T\hat{y}$, где $T\hat{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$. Таким образом, получим универсальную динамическую систему, порождающую любую ограниченную наблюдаемую. Рассмотрим предельное множество $A(\hat{y})$ и предельную емкость (т.е. размерность) $C(A)$ наблюдаемой. Эти инварианты легко ввести, если рассмотреть произвольную наблюдаемую $\hat{y}$

как начальное состояние универсальной динамической системы в пространстве B. Тогда $A(\hat{y}) = \text{clos}\left(\{T^k\hat{y}\}_{k=0}^{\infty}\right)$, где $\{T^k\hat{y}\}_{k=0}^{\infty}$ – полутраектория, задаваемая отображением T. Если $C(A) < \infty$, то данной наблюдаемой соответствует конечномерная динамическая система. При выполнении дополнительного условия об ограниченности максимального ляпуновского показателя наблюдаемая будет детерминированно порожденной. Следовательно, определенная обработка наблюдаемого сигнала может дать ответ на принципиальный вопрос о конечномерности исследуемого процесса. Некоторые алгоритмы обработки наблюдаемых приведены в работах [77, 92, 112, 123, 133, 161, 164, 179, 180-181].

Опишем теперь иерархию важных свойств динамических систем, которые можно рассматривать как последовательно усиливающие друг друга свойства хаотичности [191].

1) *Существование инвариантной меры* [25, 27, 101, 169, 192]. Множество с введенной на нем мерой может быть рассмотрено как пространство элементарных событий. В этом случае каждая функция, тем или иным образом определенная на этом множестве, является случайной переменной, а последовательность ее итераций, получаемых через некоторое преобразование $\{T\}$, можно представить как последовательность случайных величин. Поэтому существование инвариантной меры для конкретного семейства динамических систем имеет следствием его хаотическое поведение.

2) *Перемешивание* [25, 101, 112-113, 123, 165-166, 171]. Если автокорреляционная функция $b(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ для любой функции $\mathbf{f}$, $\int |\mathbf{f}|^2 d\bar{P} < \infty$, где $\bar{P}$ – инвариантное распределение, то в системе имеет место перемешивание. Существование перемешивания влечет необратимость и непредсказуемость динамики.

3) *K-свойство* [27, 101, 163, 175, 193]. Если динамическая система является K-системой, то она обладает перемешиванием всех степеней и имеет положительную энтропию. K-свойство означает, что детерминированную динамическую систему можно закодировать в регулярный стационарный процесс теории вероятностей.

4) *Бернуллиевость* [27, 31, 165, 169, 193]. Поведение динамической системы тем случайнее, чем она ближе к последовательности независимых случайных величин. Если кодирование динамической системы в регулярный стационарный процесс представляет собой такую последовательность, то динамическая система называется бернуллиевской.

5) *Выполнение условий центральной предельной теоремы* [24, 169, 194]. Для любой функции $\mathbf{f}$, описывающей тот или иной динамический процесс, найдется такая дисперсия $\sigma = \sigma(\mathbf{f})$, что

$$\lim_{n\to\infty} \mu \left\{ \mathbf{x} : \sqrt{n} \, \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{f}(T^k(\mathbf{x})) - \bar{\mathbf{f}} \right] < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{a} e^{-u^2/2\sigma} d\mu \ , \quad \bar{\mathbf{f}} = \int \mathbf{f} d\mu \ .$$

Смысл выполнения центральной предельной теоремы состоит в том, что распределение мер таких областей $\mathbf{x}$, временные флюктуации которых не превышают определенного числа a, является гауссовским.

6) *Скорость убывания корреляций* [169, 194]. Если для функции $\mathbf{f}$ ее среднее $\bar{\mathbf{f}} = 0$, то

найдутся такие $p > 0,\ 0 < q < 1$, что

$$\left| \int \mathbf{f}(T^k(\mathrm{x}))\mathbf{f}(\mathrm{x})d\mu \right| \leq pq^{|k|} \ .$$

В этом случае имеет место экспоненциальное убывание корреляций, что для гладких функций $\mathbf{f}$ говорит о близости системы к конечной цепи Маркова.

Хаотические диссипативные динамические системы можно изучать путем исследования свойств и структуры странных аттракторов, являющихся математическим образом хаотических колебаний.

Аттрактор динамической системы называется *странным*, если он отличен от конечного объединения гладких подмногообразий пространства M [87, 195]. Часто подчеркивается, что динамика системы является хаотической благодаря наличию в ее фазовом пространстве странного аттрактора. В этих случаях понятие "странный аттрактор" имеет собирательный смысл, и его иногда заменяют словосочетанием "*хаотический* аттрактор". Под хаотическим аттрактором может подразумеваться несколько типов аттракторов, однако гиперболические аттракторы, стохастические (или квазигиперболические) аттракторы, перемешивающие аттракторы и квазистохастические аттракторы (или квазиаттракторы) являются наиболее распространенными.

Множество $\mathcal{A}$ называется *гиперболическим* аттрактором, если оно является аттрактором и одновременно гиперболическим множеством динамической системы, т.е. ее касательное пространство разлагается на два подпространства, E^s и E^u, которые определяются тем фактом, что бесконечно близкие траектории, соответствующие пространству E^s, экспоненциально сходятся друг к другу при $t \to \infty$, а в пространстве E^u экспоненциально быстро сходятся при $t \to -\infty$. Более точно, следуя [101] (см. также [31, 84-87, 192, 194, 196] и цитируемую там литературу), определим гиперболическую траекторию $T^n\mathrm{x} \equiv \mathrm{x}_n$ динамической системы следующим образом. Пусть каждая итерация, T^n, является гладкой в окрестности $\mathrm{x} \in M$. Тогда существует дифференциал $\partial T_{\mathrm{x}_n}$ отображений касательного пространства Σ_{x_n} в касательное пространство $\Sigma_{T\mathrm{x}_n}$. Траектория x_n называется *гиперболической*, если существуют подпространства $E^s_{T^k\mathbf{x}}$ и $E^u_{T^k\mathbf{x}}$ касательного пространства $\Sigma_{T^k\mathbf{x}}$, $0 \leq k < \infty$, такие, что $\Sigma_{T^k\mathbf{x}} = E^s_{T^k\mathbf{x}} + E^u_{T^k\mathbf{x}}$ и $\partial T_{T^k\mathbf{x}}(E^s_{T^k\mathbf{x}}) = E^s_{T^{k+1}\mathbf{x}}$, $\partial T_{T^k\mathbf{x}}(E^u_{T^k\mathbf{x}}) = E^u_{T^{k+1}\mathbf{x}}$, $||\partial T_{T^k\mathbf{x}}e|| \leq c||e||$, $e \in E^s_{T^k\mathbf{x}}$, $||\partial T_{T^k\mathbf{x}}e|| \geq c^{-1}||e||$, $e \in E^u_{T^k\mathbf{x}}$, $\mathrm{dist}(E^s_{T^k\mathbf{x}}, E^u_{T^k\mathbf{x}}) \geq \mathrm{const}$, $0 < k < \infty$, где c – некоторая постоянная. Множество Λ называется *гиперболическим множеством*, если оно замкнуто и состоит из траекторий, удовлетворяющих условиям гиперболичности. Множество Λ называется *гиперболическим аттрактором* динамической системы $\{T^t\}$, ($t \in \mathbf{R}$ или $t \in \mathbf{Z}$), если Λ – замкнутое топологически транзитивное (т.е. для $U, V \in \Lambda$ выполняется $T^tU \bigcap V \neq \emptyset$) гиперболическое множество и существует такая окрестность $U \supset \Lambda$, что $\Lambda = \bigcap\limits_{t\geq 0} T^t(U)$. Таким образом, гиперболический аттрактор Λ – замкнутое притягивающее множество, инвариантное относительно динамической системы $\{T^t\}$.

Гиперболический аттрактор характеризуется тем свойством, что он является структурно устойчивым множеством. Системы с гиперболическим аттрактором имеют наиболее выраженные хаотические свойства. Малые возмущения таких систем не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора так и поведения систем в целом. Динамические системы с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем со строго хаотическими свойствами [85, 166]. Однако в настоящее время гиперболических аттракторов построено немного. Это известный соленоид Смейла-Вильямса (см., например, [21, 25-26, 31, 77, 85, 92], аттрактор Лози [85, 101, 192, 197-199], аттрактор Плыкина [25, 85-86, 196, 200] и аттрактор Белых [192, 201-202] (см. §4.7).

Аттрактор $\mathcal{A}$ является *стохастическим*, если для любой абсолютно непрерывной инвариантной меры μ в U ее смещение $\mu_t(\mathcal{C}) = \mu(T^t\mathcal{C})$ при $t \to \infty$ сходится (слабо) к предельной инвариантной мере ν, которая не зависит от μ, и динамическая система $(\mathcal{A}, \nu, \{T^t\})$ обладает свойством перемешивания [166, 192, 194]. Стохастический аттрактор является математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения физической системы. Известный пример стохастического аттрактора – аттрактор Лоренца при $b = 8/3,\ \sigma = 10,\ r = 28$ [202-204]. Малые возмущения систем со стохастическим аттрактором могут приводить к модификациям такого аттрактора, но в то же время динамика системы будет оставаться хаотической. Всякое гиперболическое предельное множество является стохастическим аттрактором. В то же время стохастические аттракторы необязательно являются странными (см. [84-85, 87, 192, 202]).

Подавляющее большинство аттракторов хаотических динамических систем принадлежат к квазистохастическому типу (т.е. являются квазиаттракторами) [205-206]. Квазистохастические аттракторы содержат в себе помимо седловых предельных циклов еще и устойчивые предельные циклы, период которых достаточно велик, а область притяжения мала. Слабые возмущения систем с квазистохастическим аттрактором ведут к сложным качественным перестройкам как в динамике системы, так и в структуре самого аттрактора. По этой причине для большинства систем их области хаотичности всегда содержат достаточно малые подобласти с регулярной (периодической) динамикой. В приложениях, однако, это обстоятельство не играет существенную роль, поскольку устойчивые предельные циклы, содержащиеся в квазистохастическом аттракторе не выявляются численно. Динамика системы с квазистохастическим аттрактором также выглядит хаотической. Например, аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами, бесконечно близкими к значениям $b = 8/3,\ \sigma = 10\frac{1}{5},\ r = 30\frac{1}{5}$, существуют устойчивые предельные циклы [207-208]. Но никакие численные методы до настоящего времени не выявили эти циклы.

Параллельно с изучением особенностей и типов аттракторов хаотические свойства динамических систем можно исследовать посредством анализа фазовых траекторий. В этом отношении наиболее развитой является теория одномерных отображений. Одномерные отображения позволяют аналитически получить ряд важных свойств, которые могут быть обобщены на системы бóльших размерностей. С другой стороны, многомерные динамические системы часто сводятся к одномерным. Так, характерные особенноти известного соленоидального диффеоморфизма Смейла-Вильямса $D^2 \times S^1$ полностью описываются отображением окружности степени два. Геодезические потоки на гиперболической поверхности имеют много общего с одномерными динамическими системами. Наконец, бифуркационная структура многомерных систем достаточно хорошо описывается посредством качественных перестроек, встречающихся в одномерных отображениях (см. §2). По этим причинам одномерные отображения интенсивно исследуются и в настоящее время представляют собой ответвившийся и быстро развивающийся раздел теории динамических систем.

Для определения хаотического поведения одномерных отображений используются свойства топологической транзитивности, плотности периодических траекторий (циклов) или свойство перемешивания, которые легко переносятся на одномерный случай. Пусть Λ – компактное инвариантное множество относительно T. Тогда это множество Λ называется *топологически транзитивным*, если для любых двух открытых множеств Ω_1, Ω_2 найдется число t такое, что $T^t(\Omega_1) \bigcap \Omega_2 \neq \emptyset$. Говорят, что отображение T^t имеет *чувствительную зависимость от начальных условий* на Λ, если существует $\epsilon > 0$ такое, что $x \in \Lambda$ и любой окрестности U точки x существует $y \in U$ и $t > 0$, для которых $|T^t x - T^t y| > \epsilon$.

Отображение T называется *хаотическим*, если выполняются следующие условия [209]:

а) T является топологически транзитивным на Λ;

б) циклы отображения T являются плотными в Λ;

в) T имеет чувствительную зависимость от начальных условий.

Таким образом, хаотическое отображение должно обладать тремя важными свойствами: непредсказуемостью, неразложимостью и элементом регулярности.

С другой стороны, одномерные динамические системы проявляют хаотическую динамику, если обладают свойством перемешивания. Дадим строгое определение. Множество Λ называется *перемешивающим множеством*, если для открытого подмножества U в Λ и любого конечного покрытия $\Sigma = \{\sigma_j\}$ множества Λ существует $m = m(U, \Sigma)$ и $r \geq 1$, зависящее только от Λ и такое, что $T^m\Big(\bigcup\limits_{i=0}^{r-1} T^i U\Big)\sigma_j \neq \emptyset$ для всех j. Если динамическая система является перемешивающей и она имеет аттрактор, то аттрактор такого типа называется перемешивающим. Более точно, множество Λ называется *перемешивающим аттрактором*, если Λ является аттрактором, т.е. имеется $V \supset \Lambda$ такое, что $V \neq \Lambda$, $TV \subset \Lambda$ и $\bigcap\limits_{t>0} TV = \Lambda$, и одновременно Λ – перемешивающее множество для T.

Свойство перемешивания на определенном притягивающем множестве Λ имеет следствием топологическую транзитивность. В свою очередь, топологическая транзитивность эквивалентна тому факту, что в Λ имеется всюду плотная траектория. Более того, имеет место следующее утверждение [142]: если $f \in C^0(I, I)$ и I – интервал, то перемешивающий аттрактор состоит из нескольких подынтервалов, которые циклически отображаются друг в друга, и периодические точки плотны на нем.

Рассмотрим отображение интервала I в общей форме: $T_a : I \to I$, $I = [\alpha, \beta]$

$$T_a : x \longmapsto f(a, x) \ , \tag{20}$$

где a – управляющий параметр. Отображение T интервала $[\alpha, \beta]$ обладает *хаотическим поведением* (или *хаотической динамикой*), если оно имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру μ, по отношению к которой σ-алгебра $\bigwedge_t T^{-t}(\mathcal{S})$ состоит из конечного числа атомов, где $\mathcal{S}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств интервала $[\alpha, \beta]$ и $T^{-t}(\mathcal{S})$ – σ-алгебра подмножеств, имеющих вид $T^{-t}\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \in \mathcal{S}$ [101-102].

Остановимся немного подробнее на этом определении [102]. Как известно, эндоморфизм T пространства M в себя называется *точным*, если $\bigcap_n \mathcal{M}_n = \mathcal{S}_0$, где $\mathcal{S}_0$ – σ-алгебра подмножеств M, которые имеют меру 0 или 1. Допустим, что в приведенном определении σ-алгебра состоит из r атомов. Тогда существует r подмножеств $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ..., \mathcal{C}_r$, которые должны удовлетворять следующим условиям: $\mathcal{C}_i \bigcap \mathcal{C}_j = \emptyset$ для $i \neq j$, $\mathcal{C}_{i+1} = T\mathcal{C}_i$, $i < r$, и $T\mathcal{C}_r \subseteq \mathcal{C}_1$. При этом эргодическими компонентами отображения T^r являются множества $\mathcal{C}_j$, $1 \leq j \leq r$. В свою очередь, отображение $T^r\big|_{\mathcal{C}_i}$ будет точным эндоморфизмом и, таким образом, проявлять свойство перемешивания (см. [165]).

Известный пример отображения с хаотическим поведением – квадратичное отображение при $a = 4$, $T : x \mapsto ax(1-x)$. Это отображение имеет инвариантную меру, которая непрерывна по отношению к мере Лебега, $\mu(dx) = dx/\Big(\pi\sqrt{x(1-x)}\Big)$. Однако в общем случае инвариантную меру в явном виде найти не удается, и ее построение для произвольных динамических систем является достаточно сложной задачей.

В теории одномерных отображений важную роль играет производная Шварца Sf функции f: $Sf = f'''/f' - 3(f''/f')^2/2$. В частности, унимодальное отображение T_a с условием $Sf < 0$ может иметь не более чем один устойчивый цикл [210]. Более того, отображение с отрицательной производной Шварца имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру, если орбита его критической точки x_c попадает на отталкивающее канторово множество или когда орбита этой точки, начиная с некоторой итерации, совпадает с неустойчивым циклом конечного периода. Более точно [211-212], пусть отображение (20) является унимодальным отображением интервала I в себя, а функция f имеет отрицательную производную Шварца. Предположим, что

$$\begin{gathered} T_a^l T_a^m x_c = T_a^m x_c \ , \\ \left| T_a' T_a^m x_c \cdot T_a' T_a^{m+1} x_c \cdot \ldots \cdot T_a' T_a^{m+l+1} x_c \right| > 1 \ , \end{gathered} \tag{21}$$

где $T_a'(x_c) = 0$ и $m, l > 0$ – некоторые целые числа. Тогда на интервале I существует абсолютно непрерывная инвариантная мера. Этот результат известен как *теорема Огнева-Мисюревича.*

Необходимо отметить, что если унимодальное отображение с хаотическим поведением имеет отрицательную производную Шварца, то оно *не может иметь* устойчивых циклов.

Обозначим множество параметрических значений a, соответствующих хаотическому поведению отображения T_a, через A_c. Для некоторых семейств отображений, определенных на интервале, мера таких параметрических значений положительна (см. [101-102, 213-215]). В частности, был получен замечательный результат о том что множество значений параметра a, для которых квадратичное отображение $T_a : x \mapsto ax(1-x)$ имеет положительный показатель Ляпунова, обладает положительной мерой Лебега (см. [213-215]). Следствием из этого утверждения является важная теорема Якобсона [216]: Пусть F – одномерное отображение, близкое в C^3 норме к отображению $x \mapsto x(1-x)$ и a_0 – значение параметра a такое, что $a_0 F(x_c) = 1$. Тогда мера множества $A_c = \{a \in (0, a_0] \mid F_a : x \mapsto aF(x)$ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру$\}$, является *положительной.*

Отметим еще один глубокий результат [217], касающийся одномерного отображения (20), порождаемого квадратичной функцией $f(x, a) = ax(1-x)$, $a \in (0, 4] \equiv A$. Долгое время существовала гипотеза, что значения параметра a, соответствующие устойчивому периодическому поведению такого отображения, всюду плотны в области A. Численные исследования показали, что с увеличением a доля тех его значений, которые отвечают хаотической динамике, увеличивается. В работе [217] было доказано, что если два квадратичных отображения являются топологически сопряженными, то они являются и квазисимметрично сопряженными. Тогда из общей теории одномерных отображений (см. [213]) можно сделать заключение, что множество параметрических значений, для которых отображение имеет одну и ту же непериодическую нидинг-последовательность, имеет только один элемент. Это означает, в частности, что множество значений параметра, для которого соответствующее отображение обладает устойчивым циклом, является открытым и плотным.

4 Методы стабилизации хаотической динамики

Проблема стабилизации хаотической динамики и управления поведением различных систем, о которой говорилось во введении, является частью более общей задачи *управления динамическими системами* (см. [218] и приведенные там ссылки). Она является достаточно разветвленной и может быть решена на основе использования различных методов, наиболее известные и эффективные из которых представлены ниже.

Под стабилизацией неустойчивого или хаотического поведения динамических систем обычно подразумевается искусственное создание в изучаемой системе *устойчивых* (как правило, периодических) колебаний посредством внешних мультипликативных или аддитивных воздействий. Иными словами, для стабилизации необходимо найти такие внешние возмущения, которые вывели бы систему из хаотического режима на регулярный. При внешней простоте формулировки этой проблемы ее решение для ряда динамических систем оказывается достаточно сложной задачей. Тем не менее, общий анализ гладких систем с периодическими возмущениями позволяет выявить ряд их примечательных свойств.

Поскольку ниже будут рассматриваться в основном системы с хаотическим поведением, введем подмножество A_c множества допустимых параметрических значений A такое, что при $a \in A_c$ динамическая система (в том или ином смысле, точные определения см. в §4) проявляет хаотические свойства.

4.1 Системы с внешними возмущениями

Предположим, что рассматриваемая система задается обыкновенными дифференциальными уравнениями вида (1). Проблема управления ее поведением заключается в том, чтобы найти такое внешнее возмущение G, при котором фазовый поток $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G)$, порождаемый возмущенной динамической системой $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'(\mathbf{x}, a, G)$, стремился бы к выбранному подмножеству $X(G)$ ее фазового пространства. Подмножество $X(G)$ может быть как аттрактором так и неустойчивым множеством. В последнем случае возмущения G модифицируют систему (1) таким образом, что фазовые траектории подходят к подмножеству $X(G)$ и остаются в достаточно малой его окрестности $U \supset X(G)$ под действием G. Как правило, в приложениях в качестве подмножества $X(G)$ выбирается цикл определенного периода.

Для развития аналитического подхода рассмотрим отображение $T_a : M \to M$,

$$T_a : \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a) \ , \tag{22}$$

где $a \in A$, $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_n\}$, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$. Определим возмущение G, действующее на множестве параметров A, $G : A \to A$, как

$$G : a \longmapsto g(a), \ a \in A \ . \tag{23}$$

Тогда результирующее возмущенное отображение можно записать в виде

$$\mathbf{T}_a : \begin{cases} \mathbf{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a) \ , \\ \\ a \longmapsto g(a), \quad \mathbf{x} \in M, \quad a \in A. \end{cases} \tag{24}$$

Далее ограничимся только *периодическими* возмущениями. Тогда, анализируя отображение (24), можно обнаружить ряд его интересных свойств [219-222]. Прежде всего легко понять, что период P любого цикла периодически возмущаемого отображения (22) определяется из соотношения: $P = \tau k$, где τ – период возмущения и k – положительное целое. Однако, если спроектировать полученный P-периодический цикл на пространство M (т.е. просто рассмотреть систему (24) как неавтономную), то в этом пространстве возможно получить цикл, который не может быть назван циклом в обычном понимании. Дело в том, что точки цикла, которые отличаются друг от друга только в значении координаты a (если они существуют), спроектируются в одну и ту же точку пространства M. По этой причине изображающая точка возмущенного отображения будет по несколько раз попадать в некоторые точки, формирующие цикл. Например, для одномерных отображений, $n = 1$, в общем случае в проекции на исходное пространство $M = I$ получится цикл периода $k\tau$. Однако в I возможно получить цикл с совпадающими x-координатами, когда $x_i = x_m,\ a_i \neq a_m,\ i \neq m$, где (x_i, a_i) и (x_m, a_m) – точки цикла отображения (24). В этом случае на координатной оси получится $(P - l)$ точек, где l – число совпадений. В частности, при $P = 2$ $(\tau = 2)$ вполне возможно в проекции наблюдать только одну фиксированную точку. Для $P > 2$ вероятно появление более экзотических циклов. Описанная ситуация, однако, не является случаем общего положения, и, как правило, встречается только при специально подобранных возмущениях.

Введение τ-циклического преобразования (23) отображения (22) означает, что результирующее отображение (24) можно записать как

$$\mathbf{T} = \begin{cases} T_{a_1} : \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathrm{x}, a_1) \equiv \mathbf{f}_1 \ , \\ T_{a_2} : \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathrm{x}, a_2) \equiv \mathbf{f}_2 \ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ T_{a_\tau} : \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{f}(\mathrm{x}, a_\tau) \equiv \mathbf{f}_\tau \ . \end{cases} \tag{25}$$

Рассмотрим τ функций следующего вида:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}_\tau(\mathbf{f}_{\tau-1}(...\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathrm{x}))...)), \mathbf{F}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(...\mathbf{f}_3(\mathbf{f}_2(\mathrm{x}))...)), \dots , \mathbf{F}_\tau = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathbf{f}_{\tau-2}(...\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(\mathrm{x}))...)),$$

где $\mathrm{x} = \{x_1, \dots , x_n\}$ и $\mathbf{f}_i = \{f_i^{(1)}, \dots , f_i^{(n)}\}$, $\mathbf{F}_i = \{F_i^{(1)}, \dots , F_i^{(n)}\}$, $i = 1, 2, \dots , \tau$, – n-компонентные функции. Тогда возмущенное отображение (24) представится в виде

$$T_1 :\ \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{F}_1,\ T_2 :\ \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{F}_2,\ \dots ,\ T_\tau :\ \mathrm{x} \longmapsto \mathbf{F}_\tau, \tag{26}$$

для которого начальные условия определяются следующим образом: $\mathrm{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathrm{x}_0)$, $\mathrm{x}_2 = \mathbf{f}_2(\mathrm{x}_1), \dots ,\ \mathrm{x}_{\tau-1} = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathrm{x}_{\tau-2})$. Теперь можно доказать [221-222], что если отображение T_k, $1 \le k \le \tau$, имеет цикл периода t и функции $\mathbf{f}_k(\mathrm{x})$ являются непрерывными, тогда отображение T_p, $p = k + 1 \pmod \tau$, также имеет цикл того же периода t. Более того, если цикл отображения T_k является устойчивым, то цикл отображения T_p является также устойчивым; если $\mathbf{f}_k$ – гомеоморфизм, то отображения T_k и T_p являются топологически эквивалентными.

Основной смысл данного утверждения заключается в том, что исследование отображения с периодическим возмущением можно существенно упростить. Вместо исходного неавтономного отображения (24) достаточно рассмотреть *одно из автономных* отображений $T_1, T_2, \dots , T_\tau$, определяемое выражением (26). Таким образом, вся динамика исходного отображения (24) будет задаваться совокупностью отображений (26), которые действуют независимо друг от друга и связаны лишь начальными условиями. Это справедливо для *любого* множества допустимых значений A параметра a динамической системы (22) с периодическим возмущением (23).

4.2 Силовое и параметрическое воздействия

Предположим, что рассматривается динамичаская система с некоторым возмущением. Если такое возмущение реализуются посредством мультипликативного воздействия по отношению к динамическим переменным x_i, то говорят, что имеет место *параметрическое* (или *мультипликативное*) управление, поскольку, как правило, параметры мультипликативно включаются в динамическую систему. В этом случае регулирование состоит в такой модификации функции $\mathbf{v}$ в соотношении (1), чтобы новая система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t)$ имела бы требуемое (выбранное заранее) поведение. Здесь $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a_0 + a_1(t))$, и параметр $a_1(t)$ обычно является T-периодической функцией. Для параметрических возмущений *с обратной связью* учитывается текущее состояние системы: $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a(\mathbf{x}(t)))$. В этом случае параметр a должен изменяться специальным путем, и необязательно периодически.

Достаточно часто в приложениях встречается ситуация, когда мультипликативное введение внешних возмущений в систему невозможно. Тогда фазовый поток $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G)$ разлагается на две составляющие: часть, соответствующую невозмущенному фазовому потоку, $\mathbf{F}^t(\mathbf{x})$, и компоненту $\mathbf{F}^t(G)$, которая инициируется исключительно возмущениями, $\mathbf{F}^t(\mathbf{x}, G) = \mathbf{F}^t(\mathbf{x}) + \mathbf{F}^t(G)$. В этом случае имеет место аддитивное возмущение, т.е. $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, a', t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{g}(t)$, где $\mathbf{g}(t)$ обозначает внешнее воздействие. Таким образом, управление динамикой системы подразумевает приложение силовой компоненты к векторной функции. Поэтому данный тип управления поведением динамической системы называется *силовым.* В свою очередь, если в силовом контроле учитывается обратная связь, то функция $\mathbf{v}$ модифицируется как $v_i' = v_i(x, a) + g_k(x_i(t))$, $i = 1, 2, ..., n$, $1 \leq k \leq n$.

По ряду причин параметрический метод имеет определенные преимущества перед силовым. Во первых, в приложениях к физическим, химическим и другим важным системам часто рассматриваются величины, которые являются пропорциональными динамическим переменным x_i. Для таких систем $\mathbf{v}(0, a_1, ..., a_m) = 0$, а гиперповерхности x_i являются инвариантными множествами. Это означает, что система (1) отражает реальные процессы только на симплексе $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \,|\, x_i > 0, \ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i < \text{const}\}$. В этом случае внешнее аддитивное воздействие может привести к тому, что фазовые траектории покинут множество $\mathbf{X}$, пересекая гиперповерхности $x_j = 0$. Поэтому силовое воздействие может явиться причиной вырождения системы или выхода ее на нежелательный режим эволюции. Например, для биологических систем это означает вымирание части особей. В то же время, параметрическое воздействие означает изменение ресурсов системы и, таким образом, является более тонким в сравнении с силовым. Во вторых, силовое возмущение гораздо труднее реализовать. Так, для химических систем силовой контроль подразумевает введение (и соответственно удаление) дополнительных веществ; для биологических систем такой метод может быть реализован через стерилизацию части особей или введением в сообщество дополнительных видов. С другой стороны, в противоположность параметрическому воздействию, силовой метод, как правило, приводит к требуемому результату для почти всех систем, поскольку во многих случаях ее естественное поведение может быть буквально "задавлено" внешней силой.

Опишем один из давно известных результатов, касающийся силового воздействия [223]. Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A(\theta)\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta) + \varepsilon \mathbf{g}(\theta) \ , \\ \dot{\theta} &= 1 \ , \end{aligned} \tag{27}$$

заданную в некоторой области $D = D_0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, где $D_0 \subset \mathbf{R}^n$ – ограниченная, гомеоморфная шару область, содержащая точку $\mathbf{x} = 0$ и имеющая гладкую границу ∂D_0, и ε – параметр. Относительно правой части системы (27) будем предполагать следующее: $A(\theta)$ и $\mathbf{g}(\theta)$ являются T-периодическими функциями класса C^0, параметр ε удовлетворяет условию $0 \le \varepsilon \ll 1$, и функция $\mathbf{F} : D \to \mathbf{R}^n$ имеет вид $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta) = \sum\limits_{i=1}^{N} f_i(\theta, \mathbf{x})\mathbf{x}^{A_i}$, $N \in \mathbf{N}$, $A_i \in \mathbf{Z}^n$, $A_i = (a_i^1, ..., a_i^n)$, $a_i^j \ge 0$, $||A_i|| = \sum\limits_{k=1}^{n} a_i^k \ge 2$, где $f_i(\theta, \mathbf{x})$ – T-периодические функции класса C^1 по θ и по $\mathbf{x}$ в D_0. В частности, $A(\theta)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta)$ могут от θ не зависеть. В дальнейшем нам понадобится понятие тривиального цикла L_0^T в D, которым назовем множество $0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$.

Теперь можно получить следующий результат (см. [223]): если система

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= A(\theta)\mathbf{y} \ , \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \tag{28}$$

в ограниченной области $B : L_0^T \subset B$ груба, то существуют значения $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ система (27) обладает предельным циклом L^T, отличным от L_0^T (при $\varepsilon \ne 0$), причем для любой окрестности $U \supset L_0^T : U \subset D$ существует $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ такое, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_1$ цикл $L^T \subset U$. Если, кроме того, L_0^T является устойчивым для системы (28), то для достаточно малых ε цикл L^T будет асимптотически устойчивым. Таким образом, если принять, в частности, $n = 2$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, $A(\theta) = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_1^2 & -2\delta \end{pmatrix}$, $\delta > 0$, то при $\varepsilon = 0$ система (27) описывает нелинейные колебания, затухающие в некоторой окрестности $\mathbf{x} = 0$. В этом случае приведенное утверждение гарантирует, что при наличии достаточно малой вынуждающей силы в некоторой окрестности начала координат имеются *устойчивые* периодические колебания.

На основании этих результатов естественно предположить, что если удачно подобрать частоту внешнего воздействия на *хаотическую* систему, до даже при достаточно малых амплитудах такое воздействие приведет либо к *стабилизации* неустойчивых циклов, существовавших в невозмущенной системе, либо к рождению новых *устойчивых* циклов. Эта проблема была исследована в работах [224-226] (см. также [77]), в которых рассматривалось *силовое* возбуждение систем со странным аттрактором. Однако гипотеза о стабилизации хаотических колебаний *параметрическим* образом в области

A_c, отвечающей существованию только хаотического поведения (так чтобы можно было говорить *именно о подавлении хаоса*) впервые численно получила подтверждение в публикациях [63-64, 227] (см. также обзор [220]), где был рассмотрен класс дифференциальных уравнений с неполиномиальной правой частью. Впоследствии метод подавления хаоса (без обратной связи) был аналитически обоснован в работах [65-66].

Данное направление получило широкое распространение после известной работы группы из Мэриленда [78-79], где было показано, что при помощи достаточно слабых параметрических возмущений возможно стабилизировать практически любой седловой предельный цикл, вложенный в хаотический аттрактор. Публикация этих результатов стимулировала изучение вопросов стабилизации хаотического поведения и вызвала большой интерес к вопросам управления неустойчивыми системами. Позже появилась целая серия работ, как численных, так и теоретических, посвященных исследованиям возможности подавления хаоса и получения периодической или другой требуемой динамики в различных системах и отображениях (см., например, [50-62, 67-76, 228-229] и цитируемую литературу в [54, 56, 61-62, 228-229]). Этот раздел теории динамического хаоса в настоящее время продолжает интенсивно развиваться: появляются новые работы (в основном численные и экспериментальные), в которых предлагаются либо различные усовершенствования уже известных методов, либо их приложения к новым классам систем, в частности, к распределенным системам (см., например, [59-60, 230-237] и приводимые там ссылки).

4.3 Метод резонансных возбуждений

Для управления поведением хаотических динамических систем в ряде работ было предложено использовать так называемые *резонансные возбуждения* [70-72, 238-239]. Этот метод основан на наблюдении, что благодаря нелинейным модовым взаимодействиям периодически возбуждаемая система в типичном случае *не будет* проявлять периодического поведения. Поэтому для рождения предписанного (т.е. заранее заданного) режима движения представляется естественным возмущать систему специальным образом (апериодически). Для достижения возможности контроля посредством резонансных возбуждений в систему (1), находящуюся в хаотическом режиме, необходимо аддитивно включить внешнее возмущение $\mathbf{F}(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{F}(t) \; . \tag{29}$$

Далее, пусть требуемая динамика задается функцией $\mathbf{y}(t)$, которая удовлетворяет так называемому уравнению предписанного движения,

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{g}(\mathbf{y}) \; . \tag{30}$$

Теперь, выбирая возмущение в виде $\mathbf{F} = \mathbf{g}(\mathbf{y}(t)) - \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), a)$ и подставляя в (29), получим уравнение контролирования:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, a) + \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{y}, a) \; . \tag{31}$$

Таким образом, если устремить $\mathbf{x} \to \mathbf{y}$ при $t \to \infty$, то в конечном счете динамика будет представлена уравнением (30).

Для некоторых начальных условий хаотическую систему действительно можно "заставить" вести себя предписанным образом. Однако это возможно далеко не всегда, и существуют начальные условия, для которых поведение не будет задаваться функцией $\mathbf{y}(t)$. Кроме того, этот метод контроля сильно зависит от знания динамики системы, и малые ошибки в модели (29) могут расти вследствие возмущения $\mathbf{F}(t)$ [238]. Тем не менее, нетрудно определенным способом усовершенствовать контролирование (29)-(31); это приведет к эффективности использования метода резонансных возбуждений [239].

Хотя описанные виды воздействия могут оказаться весьма успешными в некоторых приложениях, тем не менее они являются *силовыми*, и следовательно далеко не всегда применимы (см. Введение).

4.4 Метод Гребоджи-Отта-Йорка

Известный параметрический *метод с обратной связью*, развитый, в основном, в работах [78-79] и получивший широкое продолжение во многих других публикациях (см. ссылки в [54, 56, 61-62, 68, 228-229]), основывается на предположении, что параметры a_i системы могут быть преобразованы в неявные (зависящие от $\mathbf{x}$) функции времени. Если изображающая точка находится в малой окрестности неустойчивого положения равновесия или неустойчивого предельного цикла, то малыми изменениями параметров можно добиться, чтобы она эту окрестность не покидала. В случае хаотического аттрактора тем же способом можно заставить систему "работать" практически на любом предельном цикле, вложенном в такой аттрактор.

Допустим, что в окрестности неустойчивого предельного цикла, который нужно стабилизировать, система задается отображением Пуанкаре $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, a)$. Для этого отображения предельный цикл будет представляться неустойчивой неподвижной точкой $\mathbf{x}^*$. (Для сложного цикла, имеющего несколько оборотов, рассматривается соответствующая итерация отображения). В окрестности $\mathbf{x}^*$ для значений параметра a, близких к выбранному a_0, поведение отображения дается линейным преобразованием

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* = \hat{A}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*) + \hat{B}(a - a_0) \ , \tag{32}$$

где $\hat{A}$ – k-мерная матрица Якоби, $\hat{B}$ – k-мерный вектор-столбец, $\hat{A} = \partial\mathbf{f}/\partial\mathbf{x}\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$, $\hat{B} = \partial\mathbf{f}/\partial a\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$, взятые в точке $a = a_0$. Если от итерации к итерации параметр a изменяется, то, определяя $\mathbf{x}_n$ через линейное отображение (32), можно задать подходящее малое отклонение в значении a от номинального a_0. В линейном приближении это изменение параметра можно записать в виде

$$a_n - a_0 = -\hat{L}^T(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*) \ , \tag{33}$$

где $\hat{L}$ – k-мерный вектор-столбец и T означает операцию транспонирования. Следовательно, из (32) находим, что

$$\delta \mathbf{x}_{n+1} = (\hat{A} - \hat{B}\hat{L}^T)\delta \mathbf{x}_n \ , \tag{34}$$

где $\delta \mathbf{x}_n = \mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*$. Таким образом, неподвижная точка $\mathbf{x}^*$ будет стабилизирована, если определить $\hat{L}$ так, чтобы матрица $(\hat{A} - \hat{B}\hat{L}^T)$ имела собственные значения по модулю меньше единицы.

Очевидно, возмущение параметра a вблизи его номинального значения не должно быть слишком большим. Максимально допустимое отклонение $\delta a_{\max}$ дается выражением $\delta a_{\max} > |\hat{L}^T(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*)|$.

Рассмотрим поведение исходного отображения при малом отклонении управляющего параметра, $-a' < a < a'$. Пусть $|\lambda_s| < 1$ и $|\lambda_u| > 1$ – собственные значения, соответствующие устойчивому и неустойчивому направлениям на поверхности сечения в точке $\mathbf{x}^*$, а $\mathbf{e}_s$ и $\mathbf{e}_u$ – собственные векторы, отвечающие этим направлениям. Если отклонить параметр a от его номинального значения a_0 не некоторую величину, $a = \bar{a}$, $\bar{a} \in (-a', a')$, то положение неподвижной точки окажется смещенным в некоторую другую точку $\mathbf{x}^*(\bar{a})$. Для малых отклонений $(a - \bar{a})$ новое положение определяется соотношением

$$\mathbf{g} \equiv \left.\frac{\partial \mathbf{x}^*(a)}{\partial a}\right|_{a=a_0} \simeq \frac{1}{\bar{a}}\ \mathbf{x}^*(\bar{a}) \ . \tag{35}$$

Вблизи $\mathbf{x}^*$ можно использовать линейное приближение:

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*(a) \simeq \hat{A}(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}^*(a)) \ . \tag{36}$$

Тогда, учитывая, что $\mathbf{x}^*(a) \simeq a\mathbf{g}$,

$$\mathbf{x}_{n+1} \simeq a_n\mathbf{g} + (\lambda_u \mathbf{e}_u \mathbf{q}_u + \lambda_s \mathbf{e}_s \mathbf{q}_s)(\mathbf{x}_n - a_n\mathbf{g}) \ , \tag{37}$$

где векторы $\mathbf{q}_u$ и $\mathbf{q}_s$ определяются из соотношений $\mathbf{q}_s\mathbf{e}_s = \mathbf{q}_u\mathbf{e}_u = 1$, $\mathbf{q}_s\mathbf{e}_u = \mathbf{q}_u\mathbf{e}_s = 0$. Следовательно, $a_n = a_n(\mathbf{x}_n)$. Для $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}^*$ необходимо, чтобы $\mathbf{x}_n$ почти попала на устойчивое многообразие точки $\mathbf{x}^*$. Поэтому выбирается a_n так, что $\mathbf{q}_u\mathbf{x}_{n+1} = 0$. Теперь, если $\mathbf{x}_{n+1}$ попало на устойчивое многообразие, то возмущение устремляется к 0, и поэтому траектория теперь будет притягиваться к неподвижной точке $\mathbf{x}^*$ со скоростью, определяемой величиной λ_s. Таким образом,

$$a_n = \frac{\lambda_u}{\lambda_{u-1}} \frac{(\mathbf{x}_n\mathbf{q}_u)}{(\mathbf{g}\mathbf{q}_u)} \ . \tag{38}$$

Когда $a > a'$, то, допуская $\mathbf{g}\mathbf{q}_u \neq 0$, находим, что $a_n \neq 0$, только если $\mathbf{x}_n$ попадает в область $|\mathbf{x}_n\mathbf{q}_u| < \mathbf{x}'$. Следовательно, $\mathbf{x}' = a'|(1 - \lambda_u^{-1})\mathbf{g}\mathbf{q}_u|$. Таким образом, для малых a' типичное начальное условие исходного отображения рождает хаотическую траекторию, качественно не отличающуюся от неконтролируемого случая до тех пор, пока $\mathbf{x}_n$ не попадет в эту область. Однако, вследствие неучтенных в соотношении (38) нелинейностей, даже в этом случае траектория не всегда может быть увлечена возмущением и достаточно близко подойти к точке $\mathbf{x}^*$, чтобы управление было достижимо. Среднее время такого переходного процесса дается соотношением $\langle \tau \rangle \sim (a')^{-\beta}$, где $\beta = 1 + \ln|\lambda_u|/(2\ln|\lambda_s|^{-1})$.

Процедура стабилизации неустойчивых циклов является эффективной, когда траектория близка к нужному циклу. Но если она проходит вдали от требуемого положения, то может пройти достаточно долгое время, прежде чем контролирование окажется возможным. Если аттрактор эргодический, то практически любая окрестность оказывается достижимой. Однако когда аттрактор системы не эргодический и, например, включает устойчивые предельные циклы (т.е. является квазиаттрактором), то этот метод может быть применен только для стабилизации *некоторых* траекторий. Для преодоления этих трудностей было предложено использовать различные процедуры [80-82, 240-241], позволившие по-новому подойти к проблеме стабилизации неустойчивых циклов, а также разработать другие близкие по реализации способы контроля хаотических динамических систем (см. [56, 228, 234, 242-243]).

Хотя эти методы могут быть использованы достаточно широко (от стабилизации поведения систем химической кинетики до управления сокращениями сердечной мышцы [37-38, 44, 54, 58, 83, 235, 244-248], обзоры по экспериментальным результатам см. в статьях [228-229]), основной их недостаток сводится к тому, что, применяя их на практике, необходимо не только каждый раз задавать *положение* изображающей точки (что не всегда возможно), но и учитывать *уровень шума*, поскольку они оказываются весьма податливы к влиянию шумовых факторов [83]. Чтобы избежать этих трудностей, нужно *исключить* обратную связь, т.е. рассмотреть *чисто* параметрическое воздействие.

4.5 Параметрическое возбуждение и подавление хаоса

Данный подход к проблеме подавления хаоса впервые был описан в работах [63-64, 227], где для стабилизации хаотической динамики было предложено использовать простое периодическое возбуждение *в области значений параметров A_c, отвечающих существованию хаотических колебаний*. Этот подход получил аналитическое обоснование в ряде последующих публикаций [41-42, 49, 65-66, 219-222, 249-251]. Сейчас это метод удалось обобщить [252-255], так что его использование дает возможность не только подавлять хаос, но и стабилизировать заранее заданные циклы, т.е., таким образом, *управлять системой* (см. ниже).

Исследуем сначала динамические системы, которые не обладают хаотическим поведением, но в то же время *не имеют* нетривиальных устойчивых циклов. В контексте подавления хаоса проблема создания *устойчивой* динамики для таких систем может быть рассмотрена как предварительный шаг к построению последовательной теории стабилизации хаотического поведения для потоков.

Рассмотрим два дифференциальных уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\dot{x}\left[x^4(1+2a) - \frac{1}{8}(1-a)\right] \tag{39}$$

и

$$\ddot{x} + x = -\varepsilon\dot{x}(x^2 + ax + 1) \tag{40}$$

в области D_0, где D_0 имеет тот же смысл, что и в системе (27), ε и a – параметры. Будем полагать, что величина ε является достаточно малой, $0 \leq \varepsilon \ll 1$. Системы (39) и (40) эквивалентны уравнениям вандерполевского типа, которые часто используются как математические модели радиофизических генераторов [77, 105-107]. Остановимся сначала на системе (39). Структура ее фазового пространства, которую можно установить, пользуясь методом усреднения, является несложной. Именно,

а) При $a < -1/2$ система (39) имеет один устойчивый фокус.

б) При $a \in (-1/2, 1)$ система (39) обладает устойчивым фокусом и неустойчивым предельным циклом. Заметим, что в нулевом по ε приближении предельный цикл имеет радиус $R = [(1-a)/(1+2a)]^{1/4}$, и поэтому при a близких к значению $-1/2$, цикл может не лежать в ограниченной области D_0.

в) При $a > 1$ система (39) имеет только один неустойчивый фокус.

Таким образом, ни при каких ограниченных значениях a система (39) *не* обладает устойчивыми предельными циклами. Однако ниже будет показано, что при определенных изменениях параметра a в данной системе возникают *устойчивые* периодические колебания, амплитуда которых не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Введем периодическое возмущение периода $T = 2\pi/\omega$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \quad \dot{\tau} = 1 \ , \\ &\dot{y} = \varepsilon y \left[x^4 (1 + 2h\cos 2\omega\tau) - \frac{1}{8}(1 - h\cos 2\omega\tau) \right] - x \ , \end{aligned} \tag{41}$$

где h – амплитуда возмущений, $\omega = 1/(1+\eta\varepsilon)^{1/2}$ и $\eta > 0$ является постоянной величиной. Уравнения (41) определены в ограниченной области $D = D_0 \times \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$, содержащей начало координат, и $D_0 \subset \mathbf{R}^n$. Теперь, посредством замены переменных $\theta = \omega\tau$, $x = b\cos(\varphi + \theta)$ при условии $(db/d\theta)\cos(\varphi+\theta) - (d\varphi/d\theta)b\sin(\varphi+\theta) = 0$, приходим к системе уравнений для b и φ, усредняя которую за время T и оставляя только члены первого порядка по ε (иными словами, переходя к присоединенной системе), получим

$$\begin{aligned} &\frac{db}{d\theta} = \varepsilon B(b,\varphi) = \varepsilon \frac{b}{16}(b^4 - 1)(1 + \frac{h}{2}\cos 2\varphi) \ , \\ &\frac{d\varphi}{d\theta} = \varepsilon \Phi(b,\varphi) = \varepsilon \left[\frac{\eta}{2} + \frac{h}{32}(5b^4 + 1)\sin 2\varphi \right] \ . \end{aligned} \tag{42}$$

Хорошо известно, что стационарные решения b_0, φ_0 такой системы, т.е.

$$B(b_0,\varphi_0) = \Phi(b_0,\varphi_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial(B,\Phi)}{\partial(b,\varphi)} \right|_{b=b_0, \ \varphi=\varphi_0} \neq 0 \ , \tag{43}$$

отвечают предельным циклам системы (41) в нулевом порядке теории возмущений, устойчивость которых совпадает с устойчивостью решений (43). Кроме того, бифуркационные значения параметра h в (42) с точностью до $O(\varepsilon)$ совпадают с соответствующими значениями для системы (41).

Легко видеть, что система (43), кроме решения, отвечающего тривиальному циклу L_0^T, имеет еще три пары решений:

а) $b = 1,\ \sin 2\varphi = -8\eta/3h,\ \cos 2\varphi > 0;$

б) $b = 1,\ \sin 2\varphi = -8\eta/3h,\ \cos 2\varphi < 0;$

в) $b^4 = \left(16\eta(h^4-4)^{-1/2} - 1\right)/5,\ \cos 2\varphi = -2/h,\ \sin 2\varphi < 0.$

Таким образом, аналитически можно установить качественные изменения в динамике системы при увеличении амплитуды возмущений h. При этом эволюцию структуры разбиения фазового пространства системы (41) на траектории при изменении амплитуды h легко понять, пользуясь отображением Пуанкаре $\tau = 0$.

1) При $h = 0$ в системе (41) имеется тривиальный устойчивый предельный цикл L_0^T и неустойчивый инвариантный тор Tor^2. При изменении параметра h размеры этого тора меняются только на величины первого порядка по ε.

2) При $h \in (0, \min(2, 8\eta/3))$ на торе Tor^2 могут возникать седловые и неустойчивые предельные циклы периодов, больших T.

3) Если $h = h_1 = 2 + \delta(D)$ (величина $\delta(D) > 0$ введена в связи с конечностью области D_0), то, кроме L_0^T и Tor^2, в области D имеется еще два устойчивых предельных цикла L_1^T и L_2^T периодов T. С ростом параметра h циклы L_1^T и L_2^T монотонно стягиваются к циклу L_0^T.

4) При $h = h_2 = 8\eta/3$ на торе Tor^2 рождаются две пары циклов периода T: два седловых, L_3^T и L_4^T, и два неустойчивых, L_5^T и L_6^T. Заметим, что если $\eta > 3/4$, то случаи 3) и 4) необходимо поменять местами.

5) Когда $h = h_3 = 2[1 + (4\eta/3)^2]^{1/2}$, то происходит влипание устойчивых циклов L_1^T и L_2^T в седловые L_3^T и L_4^T соответственно, с передачей им своей устойчивости. Сами же циклы L_1^T и L_2^T становятся седловыми.

6) При $h = h_4 = 2[1 + (8\eta)^2]^{1/2}$ циклы L_1^T и L_2^T влипают в тривиальный цикл L_0^T, делая его седловым.

7) В случае $h > h_4$ в системе (41) существует седловой цикл L_0^T, устойчивые циклы L_3^T и L_4^T, и неустойчивые циклы L_5^T и L_6^T.

Таким образом, используя метод параметрических возмущений, можно получить *устойчивые* предельные циклы в системе (39). Но из-за присутствия неустойчивых предельных циклов областью притяжения L_3^T и L_4^T является не вся область D.

Рассмотрим теперь систему (40). Теми же методами легко установить, что для любого ограниченного значения параметра a она имеет только единственный устойчивый фокус. Вводя параметрическое возмущение, можно установить, что в этой системе тривиальный цикл L_0^T всегда устойчив, и при значениях $h^2 < h_1^2 = 8\left[1 + (1+\eta^2)^{1/2}\right]$ других траекторий она не имеет. При $h^2 = h_1^2$ в системе (40) происходит бифуркация рождения трех пар предельных циклов: трех устойчивых и трех седловых. В сечении Пуанкаре плоскостью $\tau = 0$ это выглядит как появление трех седло-узлов, каждый из которых затем распадается на седло и устойчивый узел. Расстояние ρ от них до начала координат вычисляется как

$$\rho^2_{\text{седл.}} = \frac{h^2 - 8 - \sqrt{h^4 - 16h^2 - 64\eta^2}}{2} + O(\varepsilon),$$

$$\rho^2_{\text{уст.}} = \frac{h^2 - 8 + \sqrt{h^4 - 16h^2 - 64\eta^2}}{2} + O(\varepsilon).$$

Следовательно, при $h > h_1$ в системе (40) вместе с тривиальным L_0^T существует четыре устойчивых предельных цикла.

Замечание 1. В силу присутствия малого параметра ε, из полученных результатов следует, что чем ближе модуль мультипликатора неустойчивого предельного цикла к 1, тем может быть меньше по амплитуде параметрическое воздействие, которое необходимо приложить к системе для рождения устойчивых предельных циклов.

Замечание 2. Аналогичный изложенным выше результат легко получить для определенных систем *любой* размерности. Например, для систем, представимых как прямое произведение (39) или (40) и уравнений типа $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{W}\mathbf{z}$, где $\mathbf{W}$ – матрица, имеющая собственные значения с отрицательными действительными частями, существует параметрическое возмущение, приводящее к появлению *устойчивых* периодических движений.

Замечание 3. Если $\varepsilon \to 0$, то расстояние ρ не стремится к 0. Это означает, что для достаточно малых ε устойчивые периодические решения имеют *конечную* амплитуду.

Таким образом, для определенного класса динамических систем, которые в автономном случае *не* обладают устойчивой динамикой, возможно найти параметрические возмущения, выводящее их на режим устойчивых периодических колебаний.

Для обоснования возможности *подавления хаоса* рассмотрим два семейства одномерных унимодальных отображений: семейство квадратичных отображений, $T_a : [0,1] \to [0,1]$,

$$T_a : x \longmapsto \varphi(x,a) = ax(1-x)\ , \tag{44}$$

где $a \in (0,4] = A$, и семейство экспоненциальных отображений, $\mathcal{T}_a : I \to I$,

$$\mathcal{T}_a : x \longmapsto \chi(x,a) = a\exp[a(1-x)]\ , \tag{45}$$

где $a \neq 0$. Эти семейства широко используются как модели многих физических, химических и других систем и поэтому привлекают большое внимание исследователей (см., например, [77, 86, 103, 112-113, 142, 160-161, 171, 209, 215]). Например, отображение (45) естественным образом возникает при исследовании ряда колебательных химических реакций. Более того, любое унимодальное отображение является полусопряженным квадратичному, и поэтому семейство (44) играет важную роль в теории унимодальных отображений.

Для того, чтобы доказать, что хаотическое поведение, проявляемое отображениями (44) и (45) возможно стабилизировать параметрическим воздействием, каждому периодическому возмущению периода τ параметра a, $a_{i+1} = g(a_i)$, $i = 1,2,\dots,\tau-1$, $a_1 = g(a_\tau)$, $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$ $(a_i \in A,\ i = 1,2,\dots,\tau)$, поставим в соответствие вектор

$\hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau)$ из пространства $\mathbf{R}^\tau$. Тогда можно рассмотреть множество $\mathbf{A} = \{\hat{a} \in \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{\tau \text{ раз}} : \ \hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau), \ a_i \neq a_j, \ 1 \leq i, j \leq \tau, \ i \neq j, a_1, ..., a_\tau \in A\}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}^\tau$, отвечающее *всевозможным* периодическим возмущениям периода τ, оперирующих в A. Далее, следуя §4.1, возмущенные квадратичное и экспоненциальное семейства перепишем как

$$\mathbf{T}_a = \begin{cases} x \longmapsto \varphi(a, x) \ , \\ a \longmapsto g(a) \ , \end{cases} \tag{46}$$

и

$$\vec{\mathcal{T}}_a = \begin{cases} x \longmapsto \chi(a, x) \ , \\ a \longmapsto g(a) \ , \end{cases} \tag{47}$$

где $a_{i+1} = g(a_i), \ i = 1, 2, \dots, \tau{-}1, \ a_1 = g(a_\tau), \ a_i \neq a_j, \ i \neq j$, соответственно. Рассмторим подмножество A_c параметрических значений a, соответствующих *хаотическому* поведению (см. §3) отображений. В этом случае множество $\mathbf{A}_c = \{\hat{a} \in \underbrace{A_c \otimes A_c \otimes \cdots \otimes A_c}_{\tau \text{ раз}} :$ $\hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau), \ a_i \neq a_j, \ 1 \leq i, j \leq \tau, \ i \neq j, \ a_1, \dots, a_\tau \in A_c\}$, будет соответствовать любым возмущениям периода τ, оперирующим в A_c. Теперь можно показать [65-66, 220, 222], что существует подмножество $\mathbf{A}_d \subset \mathbf{A}_c$ такое, что если $\hat{a} \in \mathbf{A}_d$, то возмущенные отображения (46), (47) будут обладать устойчивыми циклами конечных периодов. Доказательство данного утверждения проводится путем построения подмножества $\mathbf{A}_d$ и нахождения устойчивых циклов в отображениях (46), (47).

Таким образом, периодические параметрические возмущения *на хаотическом* множестве приводят к подавлению хаоса. При этом, очевидно, множество параметрических значений $\hat{a} \in \mathbf{A}$, для которых в периодически возмущаемых семействах (46), (47) существуют устойчивые циклы, открыто в $\mathbf{A}$.

Идея подавления хаоса простым параметрическим воздействием рассматривалась в целом ряде публикаций (см. [50, 52, 54, 60, 67-68, 83, 256]. В частности, были развиты довольно эффективные методы резонансной стабилизации [50, 52, 60] и методы высокочастотной (нерезонансной) стабилизации [68] хаотического поведения.

4.6 Методы резонансной и высокочастотной стабилизации

Для теоретического обоснования данных методов используется обобщенная теория Мельникова [150] (см. также [86, 113, 148]), заключающаяся в оценке расстояния между устойчивой и неустойчивой сепаратрисами. В бифуркационном случае устойчивая и неустойчивая сепаратрисы образуют гомоклиническую петлю. При разрушении такой гомоклинической структуры возможны три случая: выходящая сепаратриса окружает входящую; входящая сепаратриса окружает выходящую; сепаратрисы пересекаются. В первых двух случаях расстояние между сепаратрисами соответственно $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ для любого момента времени. И если только найдется момент t_0, когда Δ *меняет знак*, возникает хаотическое поведение.

Рассмотрим уравнение Дюффинга-Холмса [257] (соответствующие ссылки см. в [77, 86, 105, 148-149]) с параметрическим возмущением:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y \ , \\ &\dot{y} = x - \beta\Big[1 + \eta\cos(\Omega t)\Big]x^3 - \delta y + \gamma\cos\omega t \ , \end{aligned} \tag{48}$$

где η – амплитуда и Ω – частота параметрического возмущения. Согласно [86], расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразиями в момент времени t_0 для невозмущенного уравнения (48) дается выражением

$$\Delta(t_0) = 2\pi\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}\gamma\omega\mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\sin(\omega t_0) + \frac{4\delta}{3\beta} \ .$$

Нетрудно рассчитать это расстояние для уравнения (48):

$$\Delta(t_0) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\beta}}\pi\gamma\omega \ \mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2}\right)\sin(\omega t_0) + \frac{4\delta}{3\beta} + \frac{\pi\eta}{6\beta}(\Omega^4 - 6\Omega^2 + 1)\mathrm{csch}\left(\frac{\pi\Omega}{2}\right)\sin(\Omega t_0) \ ,$$

или, вводя соответствующие обозначения, $\Delta(t_0) = A(\omega)\sin(\omega t_0) + B(\Omega)\sin(\Omega t_0) + C$. Для того, чтобы величина Δ оставалась положительной для всех t_0, необходимо выполнение неравенства

$$\eta > \left|\frac{6\beta(A(\omega) - C)}{\pi(\Omega^4 - 6\Omega^2 + 1)\mathrm{csch}(\pi\Omega/2)}\right| \ .$$

Однако это условие не является достаточным. Оно будет таковым, если частоты Ω и ω являются соизмеримыми. В то же время, если отношение Ω/ω иррационально, то существует значение t_0, когда $\Delta(t_0)$ меняет знак. При этом период времени τ, в течение которого происходит двойная смена знака, можно определить из соотношения $A(\omega) - B(\Omega) - C \simeq 0$, которое гарантирует выполнение условия касания сепаратрис. Величина τ, в зависимости от Ω, претерпевает скачки в точках, где частоты Ω и ω являются соизмеримыми. Используя численное моделирование, можно убедиться, что хаос подавляется на частотах $\Omega \sim \Omega_R^{(k)} \equiv k\Omega_R^{(1)}$, где $\Omega_R^{(k)}$ – гармоники частоты возбуждения ω уравнения (48).

Таким образом, стабилизация хаотической динамики в уравнении Дюффинга-Холмса наблюдается при резонансном соотношении частоты внешнего параметрического возмущения и частоты силовой составляющей.

Если параметрическое возмущение уравнения Дюффинга-Холмса ввести иначе,

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y \ , \\ &\dot{y} = a(t)x - \beta x^3 - \delta y + \gamma\cos\omega t \ , \end{aligned} \tag{49}$$

где $a(t) = a(1 + \eta\cos\Omega t)$, то для наблюдения стабилизации хаотической динамики можно использовать высокочастотное возбуждение [68], когда частота Ω достаточно велика по сравнению с частотой ω. Аналогичная идея, позволившая стабилизировать перевернутый маятник посредством быстрых колебаний подвеса, был описан еще в 1951 году [258-259].

Основная идея (как для маятника, так и уравнения Дюффинга-Холмса) состоит в том, чтобы разделить быстрые ξ и медленные X переменные. В этом случае, полагая, что функция $x(t)$ представляется композицией $x = X + \xi$, $\langle x \rangle = X$, удается получить уравнение для X. Перейдем от уравнения (49) с параметрическим возмущением к уравнению для Фурье-компонент, полагая $\xi = \eta(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) + \eta(C\cos 2\Omega t + D\sin 2\Omega t) + \dots$. Тогда получим неограниченное число сцепленных нелинейных уравнений:

$$\ddot{X} - aX + \beta X^3 + \frac{3}{2}\eta^2\beta X(A^2 + B^2 + \cdots) - \frac{1}{2}a\eta^2 A = -\delta\dot{X} + \gamma\cos\omega t\ ,$$

$$(-\Omega^2 A + \Omega\dot{B} + \ddot{A}) - aX + \delta(\dot{A} + \Omega B) - \beta(3X^2 A + \frac{3}{4}\eta^2 A^3 + \cdots) = aX\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

В свою очередь, эти уравнения допускают исследование методом асимптотического разложения функций $A, B, \dots$. Используя этот факт и опуская промежуточные выкладки, в первом приближении получим так называемое ренормализованное уравнение Дюффинга-Холмса:

$$\ddot{X} - \tilde{a}X + \beta X^3 = -\delta\dot{X} + \gamma\cos\omega t\ , \tag{50}$$

где $\tilde{a} = a(1 - a\eta^2/2\Omega^2)$. Для этого уравнения расстояние между сепаратрисами дается выражением

$$\Delta(t_0) = \pi\omega\gamma\left(\frac{2}{\beta}\right)^{1/2}\mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\tilde{a}}}\right)\sin\omega t_0 + \frac{4\delta\tilde{a}^{3/2}}{3\beta}\ , \tag{51}$$

а условие сохранения его знака определяется из неравенства

$$\delta > \frac{3\pi\gamma\sqrt{\beta}\omega}{(2\tilde{a})^{3/2}}\mathrm{sch}\left(\frac{\pi\omega}{2\sqrt{\tilde{a}}}\right)\ . \tag{52}$$

Следовательно, если $\tilde{a}$ является достаточно малым, то выражение (52) легко выполняется, и подавление хаоса должно наблюдаться.

Неоспоримым преимуществом описанных методов является то, что они позволяют развить аналитический подход. Однако они не дают возможность управлять системами с неустойчивым или хаотическим поведением.

4.7 Подавление хаоса и стабилизация заданных циклов

Как будет показано ниже, для управления системами с неустойчивым и/или хаотическим поведением необходимо использовать специально подобранные возмущения.

Исследуем сначала возможность управления и проблему стабилизации хаотической динамики на примерах достаточно общих семейств отображений [220, 222]. Из анализа этих семейств будет ясно видно, что при помощи простого *периодического* параметрического *возмущения без обратной связи* вида (23) удается не просто подавить хаос (как это показано в §§4.5-4.6), но и стабилизировать циклы, которые *уже существовали* как неустойчивые в первоначальном (невозмущенном) отображении.

Рассмотрим семейство отображений интервала $[0,1]$ в себя:

$$T_a:\ x \longmapsto f(x,a) \ = \ \begin{cases} q(a)x + r(a)\ ,\ 0 \le x \le a, \\ \\ p(a)(1-x)\ ,\quad a < x \le 1, \end{cases} \tag{53}$$

где $a \in (0,1)$ – управляющий параметр и $q(a) = (1-a)/(a(2-a))$, $r(a) = 1/(2-a)$, $p(a) = 1/(1-a)$. Основная особенность семейства (53) состоит в том, что при $a = 1/2$ оно сопряжено с семейством квадратичных отображений на интервале $[\varphi^2(1/2), \varphi(1/2)]$. Нетрудно показать, что для любого $a \in (0,1)$ отображение T_a (53) имеет перемешивающий аттрактор $\Lambda = [0,1]$. Существование перемешивающего аттрактора является достаточно сильным свойством: отображения с таким свойством не обладают устойчивыми циклами и имеют чувствительную зависимость от начальных условий. Более того, для отображений с перемешивающим типом аттрактора возможно построить абсолютно непрерывную инвариантную меру (см. §3).

Рассмотрим возмущенное семейство (53). Для простоты ограничимся случаем двухпериодического преобразования параметра a. Тогда семейство (53) можно записать как

$$\begin{cases} T_1: x \longmapsto F_1(x) \equiv T_{a_2} \circ T_{a_1}\ , \\ \\ T_2: x \longmapsto F_2(x) \equiv T_{a_1} \circ T_{a_2}\ . \end{cases} \tag{54}$$

Без потери общности будем полагать, что $0 < a_1 < a_2 < 1$. Введем следующие обозначения: $a_1 = a,\ a_2 = a + \epsilon,\ \epsilon > 0$. Легко понять, что отображение T_1 имеет три неподвижные точки, которые существуют для любых значений параметров $a_1, a_2 \in (0,1)$. Эти неподвижные точки соответствуют трем различным циклам периода два возмущенного отображения (54). Цикл, соответствующий средней из этих точек, возникает из неподвижной точки невозмущенного отображения (53), а два других цикла (периода два), отвечающих остальным двум неподвижным точкам, рождаются от цикла периода два.

Нетрудно показать, что возможно найти такие параметрические значения, что эти последние точки становятся устойчивыми. Действительно, $|q_1p_2| = (1-a)/[a(2-a)(1-a-\epsilon)]$, $|q_2p_1| = (1-a-\epsilon)/[(a+\epsilon)(2-a-\epsilon)(1-\epsilon)]$. Теперь, вводя обозначение $|q_1p_2| \equiv s_1(\epsilon)$, и $|q_2p_1| \equiv s_2(\epsilon)$, рассмотрим функции $s_1(\epsilon),\ s_2(\epsilon)$ в области $0 < \epsilon < 1-a$. Из их анализа следует, что для любого $a \in (0,1)$ существует диапазон значений параметра $\epsilon \in (\epsilon^*, 1-a)$, где $s_2(\epsilon) < 1$. Другими словами, в интервале $(\epsilon^*, 1-a)$ возмущенное отображение (54) имеет *стабилизированный* двухпериодический цикл, и почти все фазовые точки из интервала $[0,1]$ будут притягиваться к нему. Необходимо отметить, что этот цикл уже существовал как *неустойчивый* в первоначальном (невозмущенном) отображении (53). Он *становится устойчивым* посредством непрерывного изменения параметров отображения (54) от значений (a_1, a_1) к значениям (a_1, a_2), так что $s_2(a_1, a_2) < 1$.

Подробные аналитические исследования показывают, что для более сложного управления семейством (53) необходимо приложить к нему специфические возмущения [222].

Рассмотрим теперь обобщение полученных результатов на определенный класс *двумерных* отображений, обладающих наиболее сильными хаотическими свойствами (см.

§3). В качестве примера изучим т.н. отображение Белых. Это отображение естественным образом возникает при исследовании некоторых конкретных радиофизических моделей [201]. Математически отображение Белых вводится следующим образом. Пусть $Q = \{(x,y): \ |x| < 1, \ |y| < 1\}$ – квадрат на плоскости (x,y). Рассмотрим преобразование

$$T: \ (x,y) \longmapsto f(x,y) \ , \tag{55}$$

такое, что

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\lambda_1(x+1) - 1, \ \dfrac{1}{\lambda_2}(y+1) - 1\right) \ , & (x,y) \in Q_1, \\ \left(\lambda_3(x-1) + 1, \ \dfrac{1}{\lambda_4}(y-1) + 1\right) \ , & (x,y) \in Q_2, \end{cases} \tag{56}$$

где области Q_1, Q_2 получаются разделением исходного квадрата Q некоторой функцией $h(x): [-1,1] \to [-1,1]$ на две части:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y) \in Q: \ y < h(x)\} \ , \\ Q_2 &= \{(x,y) \in Q: \ y > h(x)\} \ . \end{aligned} \tag{57}$$

Кроме того, допустим, что постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ и функция $h(x)$ выбраны так, что под действием преобразования T квадрат Q отображается в себя, $TQ \subset Q$. Полученная конструкция (55)-(57) называется *отображением Белых.*

Для дальнейшего рассмотрения ограничимся в (57) линейной функцией вида $h(x) = ax$ и выберем постоянные λ_i следующим образом: $\lambda_1 = \lambda_3$, $1/\lambda_2 = 1/\lambda_4 \equiv \lambda_2$. Тогда отображение Белых можно записать в виде

$$T: \ (x,y) \longmapsto f(x,y) = \begin{cases} (\lambda_1(x+1) - 1, \ \lambda_2(y+1) - 1) \ , & y < ax, \\ (\lambda_1(x-1) + 1, \ \lambda_2(y-1) + 1) \ , & y > ax, \end{cases} \tag{58}$$

$|a| < 1$. Отображение (58) замечательно тем фактом, что обладает аттрактором гиперболического типа. Известно, что если множество Λ является аттрактором для диффеоморфизма $T: Q \to Q$ компактного многообразия Q, то существует (открытая) окрестность, которая сжимается к Λ с увеличением итераций. Свойство гиперболичности для отображений означает, что в любой точке p аттрактора Λ имеется два инвариантных направления. Вдоль одного из них точки компакта Q экспоненциально стремятся к p, а вдоль другого точки экспоненциально быстро уходят от точки p. Это свойство позволяет построить устойчивое и неустойчивое подмногообразия многообразия Q. В свою очередь, существование устойчивого и неустойчивого подмногообразий подразумевает наличие у отображения чувствительной зависимости от начальных условий. Более того, отображения с гиперболическим типом аттрактора обладают инвариантными мерами, которые позволяют установить статистические свойства типичных траекторий.

Отображение Белых (58), однако, не может быть гиперболическим в строгом смысле, поскольку оно разрывно. Тем не менее, это отображение является типичным представителем динамических систем с особенностями. Такой тип отображений может появиться во многих физических задачах. При условии, что множество точек разрыва имеет нулевую меру и некоторых других допущениях (см. [202]), можно получить строгие результаты, касающиеся разрывных динамических систем. В частности, для каждой регулярной точки возможно сформировать устойчивое и неустойчивое многообразия. Кроме того, опираясь на конкретный вид множества точек разрыва, удается построить эргодическую инвариантную меру.

Нетрудно найти условия существования гиперболического аттрактора для отображения Белых [222]. Для этого, во-первых, заметим, что при $|a| < 1$ это отображение имеет две неподвижные точки, $X = (1,1)$ и $Y = (-1,-1)$. Во-вторых, для всех точек квадрата, где определено отображение (58), производная равна $\mathrm{D}f = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Для гиперболичности необходимо, чтобы $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$ (или наоборот), и $TQ \subset Q$. Легко проверить, что последнее неравенство удовлетворяется, если только $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 2/(1+|a|)$, $|a| < 1$. Наконец, для выполнения условия существования аттрактора гиперболического типа требуется, чтобы преобразование T было взаимно однозначным (т.е. гомеоморфизмом). Это требование автоматически удовлетворяется, если $0 < \lambda_1 < 1/2$. Следовательно, для гиперболичности аттрактора в отображении Белых (58) получаем следующую систему неравенств:

$$1)\ 0 < \lambda_1 < 1/2; \qquad 2)\ 1 < \lambda_2 < 2/(1+|a|); \qquad 3)\ |a| < 1\ . \tag{59}$$

Для того, чтобы рассмотреть возможность подавления хаоса в отображении (58)-(59), необходимо прежде его обобщить на случай $|a| > 1$. При выполнении этого неравенства неподвижная точка X попадает уже в область $y < ax$, а точка Y – в область $y > ax$. Поэтому для существования этих неподвижных точек при $|a| > 1$ необходимо переписать отображение Белых (58) как

$$T:\ (x,y) \longmapsto \begin{cases} (\lambda_1(x+1)-1,\ \lambda_2(y+1)-1), & y > ax, \\ \\ (\lambda_1(x-1)+1,\ \lambda_2(y-1)+1), & y < ax. \end{cases} \tag{60}$$

Таким образом, новое отображение (60) получается из исходного отображения (58) посредством замены $x \leftrightarrow y$ и $a = 1/a'$. Значит, для выполнения условий гиперболичности для обобщенного отображения Белых (60) необходимо выполнение следующих неравенств:

$$1)\ 0 < \lambda_2 < 1/2; \qquad 2)\ 1 < \lambda_1 < 2/(1+1/|a|); \qquad 3)\ |a| > 1\ . \tag{61}$$

Отметим, что теперь, в отличие от отображения (58), $|\lambda_2| < 1$ и $|\lambda_1| > 1$. Иными словами, сжимающее и растягивающее направления меняются местами.

Пусть параметр a отображения Белых циклически возмущается с периодом 2. Для того, чтобы найти качественное изменение в динамике такого отображения, необходимо переключать параметр a вблизи значения $a = 1$ таким образом, чтобы $a_1 < 1$, $a_2 > 1$. Кроме того, для выполнения условий гиперболичности для возмущенного отображения как при $a_1 < 1$ так и при $a_2 > 1$ требуется, чтобы изменялись также и параметры λ_1, λ_2. Учитывая эти условия, можно переписать возмущенное отображение Белых следующим образом:

$$\bar{T} = \begin{cases} (x,y) \longmapsto f(a_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2) \circ f(a_1, \lambda_1^1, \lambda_2^1)(x,y) \\ \\ (x,y) \longmapsto f(a_1, \lambda_1^1, \lambda_2^1) \circ f(a_2, \lambda_1^2, \lambda_2^2)(x,y) \end{cases} \qquad (62)$$

для четных и нечетных итераций соответственно.

Далее, поскольку как для $a_1 < 1$ так и для $a_2 > 1$ отображение Белых имеет неподвижные точки $X = (1,1)$ и $Y = (-1,-1)$, то эти точки останутся неподвижными также и для отображения (62). Более того, дифференциал $\mathrm{D}\bar{T}$ возмущенного отображения (в случае четных и нечетных итераций) определяется как

$$\mathrm{D}\bar{T} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2\lambda_1^1 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2\lambda_2^1 \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} \lambda_1^* & 0 \\ 0 & \lambda_2^* \end{pmatrix}.$$

Поэтому, вследствие того, что для $a_1 < 1$ выполняются неравенства $0 < \lambda_1^1 < 1/2$, $1 < \lambda_2^1 < 2/(1+|a_1|)$ и $1 < \lambda_1^2 < 1/(1+1/|a_2|)$, $0 < \lambda_2^2 < 1/2$ при $a_2 > 1$, собственные значения λ_1^* и λ_2^* матрицы $D\bar{T}$ будут изменяться в диапазоне $0 < \lambda_1^* < 1/(1 + 1/|a_2|)$, $0 < \lambda_2^* < 1/(1+|a_1|)$. Иначе говоря, $|\lambda_1^*| < 1$, $|\lambda_2^*| < 1$ и неподвижные точки X, Y отображения (60) становятся *устойчивыми*. Это означает, что гиперболический аттрактор вырождается и сменяется простым аттрактором.

Таким образом, простое циклическое преобразование параметра в отображении с ярко выраженными хаотическими свойствами приводит к качественному изменению в динамике: из гиперболического оно преобразуется в регулярное, обладающее устойчивыми неподвижными точками.

Опишем теперь практически реализуемый метод поиска возмущений, приводящих к стабилизации заранее выбранных циклов [252]. Он позволяет осуществить *полный контроль* над динамикой систем, которые эффективно описываются, например, унимодальными отображениями.

Пусть отображение $T_a : x \mapsto f(x,a)$, $x \in M$, $a \in A$ удовлетворяет следующим свойствам: 1) существует подмножество $\sigma \subset M$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \sigma$ найдется значение $a^* \in A$, для которого $f(x_1, a^*) = x_2$; 2) существует критическая точка $x_c \in \sigma$ такая, что $\partial f(x,a)/\partial x\Big|_{x=x_c} \equiv \mathrm{D}_x f(x_c, a) = 0$ при любом $a \in A$. Тогда для любых $x_2, x_3, \dots, x_N \in \sigma$ найдутся такие x_1 и $a_1, a_2, \dots, a_N$, что цикл $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ будет устойчивым циклом возмущенного отображения $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, \dots, a_N)$.

Действительно, выберем произвольные величины $x_1, x_2, \dots, x_N$. В силу условия 1) система уравнений $f(x_1, a_1) = x_2$, $f(x_2, a_2) = x_3$, $\dots$, $f(x_N, a_N) = x_1$ относительно параметрических значений $a_1, a_2, \dots, a_N$ имеет решение вида $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$. Это означает, что последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_N) = \gamma$ является циклом периода N отображения $\mathbf{T}_a$ при периодическом возмущении $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_N)$. Чтобы этот цикл γ

сделать устойчивым, достаточно выбрать элемент x_1 близким к критическому значению x_c, поскольку $\beta(\gamma) = \prod_{i=1}^{N} \mathrm{D}_x f(x_i, a_i)$ и $\mathrm{D}_x f(x_c, a) = 0$ при любом a. Это гарантирует выполнение условия устойчивости $|\beta(\gamma)| < 1$.

Нетрудно найти условия на уровень внешего шума, который не разрушил бы стабилизированные циклы. Допустим, что $f(x, a) \in C^2[M \times A]$ и возмущенное отображение $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_t)$ имеет устойчивый цикл периода t, $\gamma = (x_1, x_2, \dots, x_t)$. Тогда, если $|\Delta a_i| \le \delta_a = \left(tS_a L S_x^{t-1} \sum_{i=1}^{t} S_x^i\right)^{-1}$, где $i = 1, 2, \dots, t$, $S_a = \max_{x,a} |\mathrm{D}_a f(x, a)|$, $L = \max_{x,a} |\mathrm{D}_x^2 f(x, a)|$, $S_x = \max_{x,a} |\mathrm{D}_x f(x, a)|$, то это отображение имеет также устойчивый цикл $\gamma' = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_t + \Delta x_t)$ периода t при $\hat{a}' = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_t + \Delta a_t)$, причем $|\Delta x_i| \le \delta_x = 1/\left(L S_x^{t-1}\right)$. Эти оценки позволяют эффективно определять предельно допустимые ошибки в задании необходимых управляющих параметров.

5 Заключительные замечания

В данном обзоре на достаточно строгом уровне описаны основные положения современной теории хаотических динамических систем. Необходимо отметить, что исследование хаотических колебаний в настоящее время сильно разветвилось. Появились новые направления, связанные с теорией инвариантной меры [25, 27, 160, 169, 192, 194, 213], изучением гомоклинических структур [86-87, 143-145, 147-148, 155], свойством гиперболичности [25-26, 31, 143-144, 160, 193], теорией показателей Ляпунова [31, 93, 159-160, 162, 172-174, 184-186] и др. (см., например, [24-25, 27, 31, 86, 101, 142, 152, 154, 158, 167, 176, 209, 213, 260-261] и приведенную там литературу). Поэтому количество работ в этой области практически необъятно. Так, библиография по динамическим системам [262] включает более 4400 публикаций, а по хаотическим колебаниям [263] – около 7000 (!). Кроме того, внушительные списки литературы по практически всем современным направлениям нелинейной динамики и ее приложениям собраны в монографиях [25, 27, 31, 77, 86, 92, 105-109, 113, 133, 160-161].

Переход к хаотическим колебаниям в динамических системах осуществляется через последовательность качественных перестроек в их поведении. Основные типы таких перестроек при плавном изменении параметров системы и методы их описания при помощи ренормгруппового анализа составляет самостоятельный раздел нелинейной динамики – теорию бифуркаций. Большой интерес с точки зрения возникновения хаотических колебаний представляют перестройки систем в целом, их подмножеств и аттракторов. Наиболее часто встречающиеся в приложениях типы таких бифуркаций описаны в §2. Из литературы по теории бифуркаций следует обратить внимание на достаточно полные обзоры [87, 97], монографии [86, 88-90, 257] и работы, включающие историю вопроса [265-266].

В настоящее время существует несколько подходов к изучению свойств хаотических динамических систем. Ряд таких подходов дан в §3, где на строгом уровне представлены основные концепции эргодической теории и теории одномерных отображений, относящиеся к хаотической динамике. В качестве дальнейшего ознакомления можно рекомендовать работы [13, 21, 23, 25, 27, 101, 160, 167, 169, 174-175, 193, 209].

Сейчас интенсивно развивается новая область математической физики, связанная с обоснованием возможности управления поведением хаотических систем различного происхождения. Основные методы, допускающие аналитические подходы, представлены в данном обзоре, другие достаточно полно отражены в списке литературы (см., например, [50-58, 60-62, 65-66, 68-73, 75, 79-82, 220-222, 228, 240-242, 252-255]).

В заключение необходимо отметить, что главная цель данного обзора состояла в описании различных подходов, используемых в настоящее время при анализе нелинейных динамических систем. Однако ряд методов и проблем осталось за пределами нашего рассмотрения. Тем не менее, часть из них описывается в других статьях данного тома, другие отражены в работах, учебных пособиях и монографиях, приведенных в списке литературы.

6 Литература

1. A.Poincare. *Calcul des Probabilities.*– Paris, Gauthier-Villars, 1912.

2. L.Boltzman. Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik.– *Journ. f. Mathem.*, 1887, bd.100, s.201-212.

3. L.Boltzmann. *Vorlesungen über Gastheorie.*– Leipzig, 1896.

4. Л.Больцман. *Статьи и речи.*– М., Наука, 1970.

5. P.Ehrenfest, T.Ehrenfest.– *Enzyklopaedie d. Math. Wiss.*, Bd.IV, Tl.32. Leipzig, 1911.

6. П.Эренфест. *Сборник статей.*– М., Наука, 1972.

7. М.Кац. *Вероятность и смежные вопросы в физике.*– М., Мир, 1965.

8. *The Bolzmann Equation: Theory and Application.* Ed. E.G.D.Cohen and W.Thirring.– Springer, Berlin, 1973.

9. E.Fermi, J.Pasta and S.Ulam. *Studies of Nonlinear Problems.*– Los Alamos Scientific Report, LA-1940, 1955.

10. J.Ford. Equipartion of energy for nonlinear systems.– *J. Math. Phys.*, 1961, v.2, No3, p.387-393.

11. E.A.Jakson. Nonlinear coupled oscillators. Perturbation theory: ergodic problem.– *J. Math. Phys.*, 1963, v.4, No4, p.551-558

12. А.Пуанкаре. *Избранные труды. Том 1.*– М., Наука, 1973.

13. G.D.Birkhoff. *Dynamical Systems.*– American Mathematical Society, N.Y., 1927.

14. Н.С.Крылов. *Работы по обоснованию статистической физики.*– М.-Л., Изд-во АН СССР, 1950.

15. М.Борн. Возможно ли предсказание в классической механике?– *Успехи физ. наук*, 1959, т.69, вып.2, с.173-187.

16. J.Ford. Foreword to "Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems" by V.M.Alekseev and M.V.Yakobson.– *Phys. Rep.*, 1981, v.75, No5, p.288-289.

17. А.Н.Колмогоров. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега.– *ДАН СССР*, 1958, т.119, No5, с.861-864.

18. А.Н.Колмогоров. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов.– *ДАН СССР*, 1959, т.124, No4, с.754-755.

19. Я.Г.Синай. О понятии энтропии динамической системы.– *ДАН СССР*, 1959, т.124, No4, с.768-771.

20. S.Smale. Diffeomorphisms with many periodic points.– In: *Differential and Combinatorial Topology*, ed. S.S.Cairns. Princeton University Press, 1965, p.63-80.

21. С.Смейл. Дифференцируемые динамические системы.– *Успехи матем. наук*, 1970, т.25, вып.1, с.113-185.

22. Д.В.Аносов. Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны.– *ДАН СССР*, 1962, т.145, No4, с.707-709; Эргодические свойства геодезических потоков на замкнутых многообразиях отрицательной кривизны.– *ДАН СССР*, 1963, т.151, No6, с.1250-1252.

23. Д.В.Аносов. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны.*– М., Наука, 1967.

24. Р.Боуэн. *Методы символической динамики.*– М., Мир, 1979.

25. A.Katok, B.Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.*– Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

26. З.Нитецки. *Введение в дифференциальную динамику.*– М., Мир, 1975.

27. A.Lasota, M.C.Mackey. *Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics.*– Springer, Berlin, 1994.

28. Я.Г.Синай. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики.– *Докл. АН СССР*, 1963, т.153, No6, с.1261-1264.

29. Я.Г.Синай. Об одной физической системе, имеющей положительную энтропию.– *Вестник Моск. ун-та*, сер. Матем.-Мех., 1963, т.5, с.6-12.

30. L.A.Bunimovich, Ya.G.Sinai. Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatters.– *Commun. Math. Phys.*, 1981, v.78, No4, p.479-497.

31. *Динамические системы. Том 2.* Серия "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления."– ВИНИТИ, 1985.

32. L.A.Bunimovich. Conditions of stochasticity for two-dimensional billiards.– *Chaos*, 1991, v.1, No2, p.187-193.

33. A.Tabachnikov. *Billiards.*– France Mathematical Soc. Press, 1995.

34. *Proc. of the SPIE 1993 Annual Meeting "Chaos in Communications".*– San Diego, California, 11-16 July, 1993, v.2038.

35. A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko. Extraction of the prototypes encoded in a chaotic attractor. In: *Artificial Neural Networks*, eds. I.Alexander and J. Taylor.– Elsevier, North-Holland, 1992, p.449-452.

36. A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko. Processing information encoded in chaotic sets of dynamical systems.– *SPIE*, 1993, v.2038, p.263-272.

37. S.Hayes, C.Grebogi, E.Ott. Communicating with chaos.– *Phys. Rev. Lett.*, 1993, v.70, No20, p.3031-3034.

38. S.Hayes, C.Grebogi, E.Ott, A.Mark. Experimental control of chaos for communication.– *Phys. Rev. Lett.*, 1994, v.73, No13, p.1781-1784.

39. H.D.I.Abarbanel, P.S.Linsay. Secure communications and unstable periodic orbits of strange attractors.– *IEEE Trans. Circuits Systs.*, 1993, v.40, No10, p.643-645.

40. *Physica D*, 1995, v.84, No1-2.

41. A.Yu.Loskutov, G.E.Thomas. On a possible mechanism of self-organization in a two-dimensional network of coupled quadratic maps.– *SPIE*, 1993, v.2037, p.238-249.

42. A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko, K.A.Vasiliev. Predicted dynamics for cyclic cascades of chaotic deterministic automata.– *Int. J. Neural Systems*, 1995, v.6, p.175-182.

43. L.Glass. Cardiac arrhythmias and circle maps – A classical problem.– *Chaos*, 1991, v.1, No1, p.13-19.

44. A.Garfinkel, M.L.Spano, W.L.Ditto. Controlling cardiac chaos.– *Science*, 1992, v.257, p.1230-1235.

45. А.Ю.Лоскутов, С.Д.Рыбалко. О динамике отображения окружности при параметрическом воздействии.– *Вестн. Моск. ун-та, сер. Физ.-астр.*, 1993, т.34, No4, с.19-27.

46. А.Ю.Лоскутов. Нелинейная динамика и сердечная аритмия.– *Прикладная нелинейная динамика*, 1994, т.2, No3-4, с.14-25.

47. L.Bresler, G.Metcalfe, J.M.Ottino, T.Shinbrot. Isolated mixing regions: origin, robustness and control.– *Chem. Eng. Sci.*, 1996, v.58, p.1671-1679.

48. T.Shinbrot, J.M.Ottino. A geometric method to create coherent structures in chaotic flows.– *Phys. Rev. Lett.*, 1993, v.71, p.843-847.

49. А.Ю.Лоскутов, Г.Э.Томас. Хаос и дестохастизация в двумерной решетке сцепленных отображений.– *Вестн. Моск. ун-та, сер. Физ.-астр.*, 1993, т.34, No5, с.3-11.

50. R.Lima, M.Pettini. Suppression of chaos by resonant parametric perturbations.– *Phys. Rev. A*, 1990, v.41, No2, p.726-733.

51. J.Singer, Y-Z.Wang, H.H.Bau. Controlling a chaotic system.– *Phys. Rev. Lett.*, 1991, v.66, p.1123-1125.

52. L.Fronzoni, M.Geocondo, M.Pettini. Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations.– *Phys. Rev. A*, 1991, v.43, p.6483-6487.

53. Y.Braiman, I.Goldhirsh. Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations.– *Phys. Rev. Lett.*, 1991, v.66, p.2545-2548.

54. S.Rajasekar, M.Lakshmanan. Algorithms for controlling chaotic motion: application for the BVP oscillator.– *Physica D*, 1993, v.67, No1-3, p.282-300.

55. S.Bielawski, D.Derozier, P.Glorieux. Controlling unstable periodic orbits by a delayed continuous feedback.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.49, No2, p.971-974.

56. Ph.V.Bayly, L.N.Virgin. Practical considerations in the control of chaos.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.50, No1, p.604-607.

57. D.Vassiliadis. Parametric adaptive control and parameter identification of low-dimensional chaotic systems.–*Physica D*, 1994, v.71, No1-2, p.319-341.

58. B.Hübinger, R.Doerner, W.Martienssen. Controlling chaos experimentally in systems exhibiting large effective Lyapunov exponents.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.50, No2, p.932-948.

59. R.Mettini, T.Kurz. Optimized periodic control of chaotic systems.– *Phys. Lett. A*, 1995, v.206, No5-6, p.331-339.

60. R.Chacon. Suppression of chaos by selective resonant parametric perturbations.– *Phys. Rev. E*, 1995, v.51, No1, p.761-764.

61. T.Shinbrot. Chaos: Unpredictable Yet Controllable?– *Nonlinear Sci. Today*, 1993, v.3, No2, p.1-8.

62. T.Shinbrot, C.Grebogi, E.Ott, J.A.Jorke. Using small perturbations to control chaos.– *Nature*, 1993, v.363, p.411-417.

63. В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. Дестохастизация системы со странным аттрактором посредством параметрического воздействия.– *Вестник Моск. ун-та, сер. Физ.-астр.*, 1985, т.26, No3, с.40-44.

64. В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия.– *ДАН СССР*, 1987, т.293, вып.6, с.1346-1348.

65. А.Ю.Лоскутов, А.И.Шишмарев. Об одном свойстве семейства квадратичных отображений при параметрическом воздействии.– *Успехи матем. наук*, 1993 т.48, вып.1, с.169-170.

66. A.Yu.Loskutov, A.I.Shishmarev. Control of dynamical systems behavior by parametric perturbations: an analytic approach.– *Chaos*, 1994, v.4, No2, p.351-355.

67. M.Pettini. Controlling chaos through parametric excitations. In: *Dynamics and Stochastic Processes*. Ed. R.Lima, L.Streit, R.Vilela Mendes.– Springer, Berlin, 1990, p.242-250.

68. Yu.S.Kivshar, B.Rödelsperger, H.Benner. Suppression of chaos by nonresonant parametric perturbations.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.49, p.319-324.

69. A.B.Corbet. Suppression of chaos in $1D$ maps.– *Phys. Lett. A*, 1988, v.130, No4-5, p.267-270.

70. A. Hübler, R. Georgii, M. Kuckler, W. Stelzl, E. Lüsher. Resonant stimulation of nonlinear damped oscillators by Poincaré maps.– *Helv. Phys. Acta*, 1988, v.61, p.897-900.

71. A. Hübler. Adaptive control of chaotic systems.– *Helv. Phys. Acta*, 1989, v.62, p.343-346.

72. E. Lüsher, A. Hübler. Resonant stimulations of complex systems.– *Helv. Phys. Acta*, 1989, v.62, p.544-551.

73. E. A. Jackson, A. Hübler. Periodic entrainment of chaotic logistic map dynamics.– *Physica D*, 1990, v.44, p.407-420.

74. B.A.Huberman, E.Lumer. Dynamics of adaptive systems.– *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 1990, v.37, p.547-550.

75. K.Pyragas. Stabilization of unstable periodic and aperiodic orbits of chaotic systems by self-controlling feedback.– *Z. Naturforsch A*, 1993, v.48, p.629-632.

76. G.I.Dykman, P.S.Landa, Yu.I.Neimark. Synchronization the chaotic oscillations by external force.– *Chaos, Solitons & Fractals*, v.1, No4, p.339-353.

77. Ю.И.Неймарк, П.С.Ланда. *Стохастические и хаотические колебания*.– М., Наука, 1987.

78. E.Ott, C.Grebogi, J.A.Yorke. Controlling chaos.– *Phys. Rev. Lett.*, 1990, v.64, p.1196-1199.

79. F.J.Romeiras, E.Ott, C.Grebogi, W.P.Dayawansa. Controlling chaotic dynamical systems.– *Physica D*, 1992, v.58, p.165-192.

80. T.Shinbrot, E.Ott, C.Grebogi, J.A.Jorke. Using chaos to direct trajectories to targets.– *Phys. Rev. Lett.*, 1990, v.65, p.3215-3218.

81. T.Shinbrot, C.Grebogi, E.Ott, J.A.Yorke. Using chaos to target stationary states of flows.– *Phys. Lett. A*, 1992, v.169, p.349-354.

82. E.Kostelich, C.Grebogi, E.Ott, J.A.Jorke. Higher dimensional targetting.– *Phys. Rev. E*, 1993, v.47, p.305-310.

83. R.Meucci, W.Gadomski, M.Ciofini, F.T.Arecchi. Experimental control of chaos by weak parametric perturbations.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.49, No4, p.2528-2531.

84. J.Milnor. On the concept of attractor.– *Commun. Math. Physics*, 1985, v.99, No2, p.177-196.

85. В.С.Афраймович. Об аттракторах.– В кн. *"Нелинейные волны. Динамика и эволюция."* Ред. А.В.Гапонов-Грехов, М.И.Рабинович.– М., Наука, 1989, с.16-29.

86. J.Guckenheimer, P.Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields.*– Springer, Berlin, 1990 (Third printing).

87. В.И.Арнольд, В.С.Афраймович, Ю.С.Ильяшенко, Л.П.Шильников. Теория бифуркаций.– В кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 5.*– М., ВИНИТИ, 1986, с.5-218.

88. Н.Н.Баутин, Е.А.Леонтович. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.*– М., Наука, 1990.

89. Дж.Марсден, М.Мак-Кракен. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.*– М., Мир, 1980.

90. Б.Хэссард, Н.Казаринов, И.Вэн. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.*– М., Мир, 1985.

91. В.И.Арнольд. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.*– М., Наука, 1978.

92. А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. *Введение в синергетику.*– М., Наука, 1990.

93. J.P.La Salle, S.Lefschetz. *Stability by Lypunov's Direct Method.*– Academic Press, New York, 1961.

94. Л.Г.Хазин, Э.Э.Шноль. *Устойчивость критических положений равновесия.*– Изд-во АН СССР, Пущино, 1985.

95. Э.Джури. *Инноры и устойчивость динамических систем.*– М., Наука, 1979.

96. Н.Н.Баутин. *Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.*– М., Наука, 1984.

97. А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер. *Теория бифуркаций динамических систем на плоскости.*– М., Наука, 1967.

98. В.С.Афраймович. Внутренние бифуркации и кризисы аттракторов.– В кн. *"Нелинейные волны. Структуры и бифуркации".* Ред. А.В.Гапонов-Грехов, М.И.Рабинович.– М., Наука, 1987, с.189-213.

99. M.J.Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations.– *J. Stat. Phys.*, 1978, v.19, p.25-52.

100. M.J.Feigenbaum. Universal metric properties of nonlinear transformations.– *J. Stat. Phys.*, 1979, v.21, p.669-706.

101. Я.Г.Синай. *Современные проблемы эргодической теории.*– М., Наука, 1995.

102. Е.Б.Вул, Я.Г.Синай, К.М.Ханин. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм.– *Успехи матам. наук*, 1984, т.39, вып.3 (237), с.3-37.

103. P.Collet, J.-P.Eckmann. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.*– Birkhauser, Boston, 1980.

104. O.E.Lanford III. A computer-assisted proof of the Feigenbaum conjectures.– *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1982, v.6, p.427-434.

105. Ф.Мун. *Хаотические колебания.*– М., Мир, 1990.

106. M.S. El Naschie. *Stress, Stability and Chaos in Structural Engineering: An Energy Approach.*– McGraw-Hill, London, 1990.

107. E.A.Jackson. *Perspectives of Nonlinear Dynamics. Vol.I, II.*– Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989, 1990.

108. *Chaos II*, ed. Hao Bai-Lin.– Worls Sci., 1990.

109. P.Manneville. *Dissipative Structures and Weak Turbulence.*– Academic Press, London, 1990.

110. P.Collet, J.-P.Eckmann, H.Koch. Period doubling bifurcations for families of maps on $\mathbf{R}^n$.– *J. Stat. Phys.*, 1980, v.25, p.1-14.

111. M.J.Feigenbaum. The onset spectrum of turbulence.– *Phys. Lett. A*, v.74, p.375-378.

112. Г.Шустер. *Детерминированный хаос. Введение.*– М., Мир, 1988.

113. А.Лихтенберг, М.Либерман. *Регулярная и стохастическая динамика.*– М., Мир, 1984.

114. М.Фейгенбаум. Универсальность в поведении нелинейных систем.– *Успехи физ. наук*, 1983, т.141, вып.2, с.343-374.

115. J.Crutchfield, M.Nauenberg, J.Rudnick. Scaling for external noise at the onset of chaos.– *Phys. Rev. Lett.*, 1981, v.46, No14, p.933-935.

116. M.J.Feigenbaum, B.Hasslacher. Irrational decimations and path integrals for external noise.– *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v.49, No9, p.605-609.

117. J.-P.Eckmann. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems.– *Rev. Mod. Phys.*, 1981, v.53, No4, Part 1, p.643-654.

118. Y.Pomeau, P.Manneville. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems.– *Commun. Math. Phys.*, 1980, v.74, No7, p.189-197.

119. P.Manneville, Y.Pomeau. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems.– *Physica D*, 1980, v.1, No2, p.219-226.

120. П.Берже, И.Помо, К.Видаль. *Порядок в хаосе.*– М., Мир, 1991.

121. В.С.Афраймович, Л.П.Шильников. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.– *Докл. АН СССР*, 1974, т.219, No3, с.1281-1285.

122. В.И.Лукьянов, Л.П.Шильников. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.– *Докл. АН СССР*, 1978, т.243, No1, с.26-29.

123. A.Yu.Loskutov, A.S.Mikhailov. *Complex Patterns.*– Springer, Berlin, 1991.

124. B.Hu. Functional renormalization-group equations approach to the transition to chaos.– In: *Chaos and Statistical Methods*, ed. Y.Kuramoto. Springer, Berlin, 1984, p.72-82.

125. B.Hu, J.Rudnick. Exact solutions to the Feigenbaum renormalization-group equation for intermittency.– *Phys. Rev. Lett.*, 1982, v.48, No24, p.1645-1648.

126. B.Hu. Introduction to real-space renormalization-group methods in critical and chaotic phenomena.– *Phys. Rep.*, 1982, v.91, No5, p.233-295.

127. P.Manneville. Intermittency, self-similarity and $1/f$-spectrum in dissipative dynamical systems.– *J. de Phys.*, 1980, v.41, No11, p.1235-1243.

128. I.Procaccia, H.G.Schuster. Functional renormalization group theory of universal $1/f$-noise in dynamical systems.– *Phys. Rev. A*, 1983, v.28, No2, p.1210-1212.

129. В.С.Афраймович, Л.П.Шильников. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.– В кн.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.* Горький, 1983, с.3-26.

130. K.Kaneko. *Collapse of Tori and Genesis of Chaos in Dissipative Systems.*– World Sci., Singapore, 1986.

131. D.G.Aronson, M.A.Chory, G.R.Hall, R.P.McGehee. A discrete dynamical systems with subtly wild behavior. In: *New Approach to Nonlinear Problems in Dynamics.*– Philadelphia, SIAM, 1980, p.339-360.

132. J.Carry, J.A.Yorke. A transition from Hopf bifurcation to chaos: computer experiments with maps on $\mathbf{R}^2$. In: *Lecture Notes in Mathematics.*– Springer, Berlin, 1978, v.470, p.48-66.

133. В.С.Анищенко. *Сложные колебания в простых системах.*– М., Наука, 1990.

134. J.Belair, L.Glass. Universality and self-similarity in the bifurcations of circle maps.– *Physica D*, 1985, v.16, p.143-154.

135. S.Newhouse, J.Palis, F.Takens. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms.– *Publ. Math. IHES*, 1983, No57, p.5-72.

136. K.Kaneko. Supercritical behavior of disordered orbits of a circle map.– *Progr. Theor. Phys.*, 1984, v.73, No6, p.1089-1103.

137. P.L.Boyland. Bifurcations of circle maps: Arnol'd tongues, bistability and rotation intervals.– *Commun. Math. Phys.*, 1986, v.106, p.353-381.

138. M.J.Feigenbaum, L.P.Kadanoff, S.J.Shenker. Quasiperiodicity in dissipative systems: a renormalization group analysis.– *Physica D*, 1982, v.5, p.370-386.

139. S.J.Shenker. Scaling behavior in a map of a circle onto itself: empirical results.– *Physica D*, 1982, v.5, p.405-411.

140. А.Н.Шарковский. О проблеме изоморфизма динамических систем. В кн.: *Труды V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям.*– Киев, Наук. думка, 1970, т.2, с.541-545.

141. L.Block. Homoclinic points of mappings of the interval.– *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1978, v.72, p.576-580.

142. А.Н.Шарковский, Ю.Л.Майстренко, Е.Ю.Романенко. *Разностные уравнения и их приложения.*– Киев, Наукова думка, 1986.

143. J.Palis, F.Takens. Hyperbolicity and creation of homoclinic orbits.– *Ann. of Math.*, 1987, v.125, p.337-374.

144. J.Palis, F.Takens. *Hyperbolicity and Sensitive-Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations.*– Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1993.

145. L.Mora, M.Viana. Abundance of strange attractors.– *Acta Math.*, v.171, p.1-71.

146. S.E.Newhouse. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms.– *Publ. Math. IHES*, 1979, v.50, p.101-151.

147. S.E.Newhouse. Lectures on dynamical systems. In: *Progress in Mathematics*, No8.– Birkhauser, Boston, 1978, p.1-114.

148. S.Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.*– Springer, Berlin, 1990.

149. P.J.Holmes, F.C.Moon. Strange attractors and chaos in nonlinear mechanics.– *Trans. ASME*, Ser. E, 1983, v.50, No4, p.1021-1032.

150. В.К.Мельников. Устойчивость центра при периодических по времени возмущениях.– *Тр. Моск. матем. об-ва*, 1963, т.12, с.3-52.

151. J.A.Yorke, K.A.Alligood. Cascades of period doubling bifurcations: a prerequisite for horseshoes.– *Bull. AMS*, 1983, v.9, p.319-322.

152. M.Viana. Chaotic dynamical behaviour.– *Proc. of XIth Int. Congress of Math. Phys. (Paris, 1994).*– Internat. Press, Cambridge, MA, 1995, p.1142-1154.

153. C.Robinson. Bifurcation to infinitely many sinks.– *Commun. Math. Phys.*, 1983, v.90, p.433-459.

154. M.Viana. Strange attractors in higher dimensions.– *Bull. Braz. Math. Soc.*, 1993, v.24, p.13-62.

155. N.Romero. Persistence of homoclinic tangencies in higher dimensions.– *Thesis IMPA*, 1992.

156. J.Palis, M.Viana. High dimension diffeomorphisms displaying infinitely many periodic attractors.– *Ann. of Math.*, 1994, v.140, p.207-250.

157. Л.П.Шильников. Об одном случае существования счетного множества периодических движений.– *Докл. АН СССР*, 1965, т.160, No3, с.558-561.

158. L.Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems.*– Springer, Berlin, 1996.

159. Б.Ф.Былов, Р.Э.Виноград, Д.М.Гробман, В.В.Немыцкий. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.*– М., Наука, 1966.

160. J.-P.Eckmann, D.Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors.– *Rev. Mod. Phys.*, 1985, v.57, No3, Part 1, p.617-656.

161. Т.С.Ахромеева, С.П.Курдюмов, Г.Г.Малинецкий, А.А.Самарский. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос.*– М., Наука, 1992.

162. *Lyapunov Exponents.*– Lect. Notes in Math., No 1186. Springer, Berlin, 1986.

163. Н.Мартин, Дж.Ингленд. *Математическая теория энтропии.*– М., Мир, 1988.

164. В.С.Афраймович, А.М.Рейман. Размерность и энтропия в многомерных системах.– В сб. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция.* Ред. А.В.Гапонов-Грехов, И.М.Рабинович.– М., Наука, 1989, с.238-262.

165. И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин. *Эргодическая теория.*– М., Наука, 1980.

166. Я.Г.Синай. Стохастичность динамических систем.– В сб. *Нелинейные волны.* Ред. А.В.Гапонов-Грехов.– М., Наука, 1979, с.192-212.

167. Д.Орнстейн. *Эргодическая теория, случайность и динамические системы.*– М., Мир, 1978.

168. P.Shields. *The Theory of Bernoulli Shifts.*– Univ. of Chicago Press, Chicago and London, 1973.

169. Я.Г.Синай. Конечномерная случайность.– *Успехи матем. наук*, 1991, т.46, вып.3, с.147-159.

170. В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1,2.*– М., Мир, 1984.

171. Г.М.Заславский *Стохастичность динамических систем.*– М., Наука, 1984.

172. В.И.Оселедец. *Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем.*– Труды Моск. матем. об-ва, 1968, т.19, с.179-210.

173. В.М.Миллионщиков. Критерий устойчивости вероятностного спектра линейных систем дифференциальных уравнений с рекуррентными коэффициентами и критерий почти приводимости систем с почти периодическими коэффициентами.– *Матем. сб.*, 1969, т.78, No2, с.179-201.

174. Я.Б.Песин. Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория.– *Успехи матем. наук*, 1977, т.32, вып.4, с.55-111.

175. И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай. Первоначальные понятия и основные примеры эргодической теории.– В сб. *Динамические системы. Т.2.*– М., ВИНИТИ, 1985, с.7-35.

176. V.M.Alekseev, M.V.Yakobson. Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic systems.– *Phys. Rep.*, 1981, v.75, No5, p.287-325.

177. А.Н.Колмогоров, В.М.Тихомиров. ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах.– *Успехи матем. наук*, 1959, т.14, вып.2, с.3-86.

178. П.Биллингслей. *Эргодическая теория и информация.*– М., Мир, 1969.

179. P.Grassberger, I.Procaccia. Measuring the strangeness of strange attractors.– *Physica D*, 1983, v.9, No1-2, p.189-208.

180. J.Farmer, E.Ott, J.A.Yorke. The dimension of chaotic attractors.– *Physica D*, 1983, v.7, No1-3, p.153-180.

181. H.G.E.Hentschel, I.Procaccia. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors.– *Physica D*, 1983, v.8, No3, p.435-444.

182. G.Paladin, A.Vulpiani. Anomalous scaling laws in multifractal objects.– *Phys. Rep.*, 1987, v.156, No4, p.147-225.

183. L.-S.Young. Capasity of attractors.– *Ergod. Theory and Dyn. Syst.*, 1981, v.1, No3, p.381-388.

184. F.Ledrappier. Some relations between dimension and Lyapunov exponents.– *Commun. Math. Phys.*, 1981, v.81, No2, p.229-238.

185. L.-S.Young. Dimension, entropy and Lyapunov exponents.– *Ergod. Theory and Dyn. Syst.*, 1982, v.2, No1, p.109-124.

186. Ya.B.Pesin. On the relation of the dimension with respect to a dynamical system.– *Ergod. Theory and Dyn. Syst.*, 1984, v.4, No3, p.405-420.

187. B.B.Mandelbrot. *Fractals: Form, Chance and Dimension.*– San Francisco, Freeman and Co, 1977.

188. *Фракталы в физике.*– Сб. статей. Ред. Л.Пьетронеро, Э.Тозатти, Я.Г.Синай, И.М.Халатников.– М., Мир, 1988.

189. F.Takens. Detecting strange attractors in turbulence.– In: *Lect. Notes in Math.*, v.898. Springer, Berlin, 1980, p.336-382.

190. F.Takens. Distinguishing deterministic and random systems.– In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Ed. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph.– New York, Pitman, 1983, p.314-333.

191. Я.Г.Синай. Стохастичность гладких динамических систем. Элементы теории КАМ.– В сб. *Динамические системы. Т.2.*– М., ВИНИТИ, 1985, с.115-122.

192. Е.А.Сатаев. Инвариантные меры для гиперболических отображений с особенностями.– *Успехи матем. наук*, 1992, т.47, вып.1, с.147-202.

193. R.Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics.*– Springer, Berlin, 1987.

194. М.Л.Бланк. Малые возмущения хаотических динамических систем.– *Успехи матем. наук*, 1989, т.44, вып.6, с.3-28.

195. *Странные аттракторы.* Сб. статей.– М., Мир, 1981.

196. Р.В.Плыкин. О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов.– *Успехи матем. наук*, 1984, т.39, вып.6, с.75-113.

197. R.Lozi. Un attracteur etrange du type attracteur de Henon.– *J. de Phys.*, 1978, v.39, Coll.C5, p.9-11.

198. M.Misiurewicz. Strange attractors for the Lozi mappings.– In: *Nonlinear Dynamics.* Ed. R.G.Helleman.– New York, New York Acad. Sci., 1980, v.357, p. 348-358.

199. P.Collet, Y.Levi. Ergodic properties of the Lozi mappings.– *Commun. Math. Phys.*, 1984, v.93, No4, p.461-482.

200. Р.В.Плыкин. Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей.– *Матем. сб.*, 1974, т.94, No6, с.243-264.

201. В.П.Белых. Модели дискретных систем фазовой синхронизации.– В сб. *Системы фазовой синхронизации.* Ред. В.В.Шахгильдян, Л.Н.Белюстина.– М., Радио и связь, 1982, с.161-176.

202. Л.А.Бунимович. Системы гиперболического типа с особенностями.– В сб. *Динамические системы. Т.2.*– М., ВИНИТИ, 1985, с.173-204.

203. Л.А.Бунимович, Я.Г.Синай. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца.– В сб. *Нелинейные волны.* Ред. А.В.Гапонов-Грехов.– М., Наука, 1979, с.212-226.

204. L.A.Bunimovich. Statistical properties of Lorenz attractors.– In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Ed. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph.– New York, Pitman, 1983, p.71-92.

205. V.S.Afraimovich, L.P.Shilnikov. On strange attractors and quasiattractors.– In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Ed. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph.– New York, Pitman, 1983, p.1-34.

206. R.Carrido, L.Simó. Some ideas about strange attractors.– In: *Lect. Notes in Phys.*, 1983, v.179, p.1-28.

207. В.С.Афраймович, В.В.Быков, Л.П.Шильников. О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца.– *Успехи матем. наук*, 1980, т.35, вып.5, с.164-165.

208. В.В.Быков. О бифуркациях динамических систем, близких к системам с сепаратрисным контуром, содержащим седло-фокус.– В сб. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений.*– Горький, ГГУ, 1980, с.44-72.

209. R.L.Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.*– New York, Amsterdam, Addison-Wesley Publ. Co., 1993 (Second Edition).

210. D.Singer. Stable orbits and bifurcations of maps of the interval.– *SIAM J. Appl. Math.*, 1978, v.35, No2, p.260-267.

211. А.И.Огнев. Метрические свойства некоторого класса отображений отрезка в себя.– *Матем. заметки*, 1981, т.30, No5, с.723-736.

212. M.Misiurewicz. Absolutely continuous measures for certain maps of an interval.– *Publ. Math. I.H.E.S.*, 1981, v.53, p.17-51.

213. W.de Melo, S.van Strien. *One-Dimensional Dynamics.*– Springer, Berlin, 1993.

214. M.Tsudjii. *A proof of Benedicks-Carleson-Jakobson theorem for the quadratic family.*– Preprint, Kyoto Univ., 1992; *Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems.*– Preprint, Kyoto Univ., 1992.

215. M.Benedicks, L.Carleson. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$.– *Annals of Math.*, 1985, v.122, p.1-25.

216. M.V.Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps.– *Commun. Math. Phys.*, 1981, v.81, No1, p.39-88.

217. G.Świątek. *Hyperbolicity is dense in the real quadratic family.*– Preprint Stony Brook, 1992.

218. Ю.И.Неймарк. *Динамические системы и управляемые процессы.*– М., Наука, 1978.

219. A.Yu.Loskutov. Dynamics control of chaotic systems by parametric destochastization.– *J. Phys. A*, 1993, v.26, No18, p.4581-4594.

220. A.Yu.Loskutov. Non-feedback controlling complex behaviour: an analytic approach.– In: *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results.* Ed. J.Awreicewicz.– Springer, Berlin, 1995, p.125-150.

221. A.N.Deryugin, A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko. Inducing stable periodic behaviour in a class of dynamical systems by parametric perturbations.– *Chaos, Solitons & Fractals*, 1996, v.7, No10, p.1555-1567.

222. A.Yu.Loskutov, S.D.Rybalko. Parametric perturbations and suppression of chaos in n-dimensional maps.– *Preprint ICTP IC/94/347*, Trieste, Italy, 1994.

223. М.Розо. *Нелинейные колебания и теория устойчивости.*– М., Наука. 1971.

224. Е.Н.Дудник, Ю.И.Кузнецов, И.И.Минакова, Ю.М.Романовский. Синхронизация в системах со странным аттрактором.– *Вестн. МГУ*, сер. Физ.-Астр., 1983, т.38, No4, с.84-87.

225. Ю.И.Кузнецов, В.В.Милюлин, И.И.Минакова, Б.А.Сильнов. Синхронизация хаотических автоколебаний.– *Докл. АН СССР*, 1984, т.275, No4-6, с.1388-1391.

226. Ю.И.Кузнецов, П.С.Ланда, А.Ф.Ольховой, С.М.Перминов. Связь между амплитудным порогом синхронизации и энтропией в стохастических автоколебательных системах.– *Докл. АН СССР*, 1985, т.281, No2, с.291-294.

227. В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. О возможности управления системой со странным аттрактором.– В сб. *Проблемы экологического мониторинга и моделирования экосистем. Том VIII.*– Ленинград, Гидрометеоиздат, 1985, с.175-189.

228. J.F.Linder, W.L.Ditto. Removal, suppression, and control of chaos by nonlinear design.– *Appl. Mech. Rev.*, 1995, v.48, No12, p.795-807.

229. E.Ott, M.L.Spano. Controlling chaos.– *Physics Today*, 1995, v.48, No5, p.34-40.

230. P.So, E.Ott. Controlling chaos using time delay coordinates via stabilization of periodic orbits.– *Phys. Rev. E*, 1995, v.51, No4, p.2955-2962.

231. G.A.Johnson, M.Löcher, E.R.Hunt. Stabilized spatiotemporal waves in a convectively unstable open flow system: coupled diode resonators.– *Phys. Rev. E*, 1995, v.51, p.1625-1628.

232. R.V.Solé, L.Menéndez de la Prida. Controlling chaos in discrete neural networks.– *Phys. Lett. A*, 1995, v.199, No1-2, p.65-69.

233. D.Auerbach. Controlling extended systems of chaotic elements.– *Phys. Rev. Lett.*, 1994, v.72, No8, p.1184-1187.

234. M.Ding, E.Ott, C.Grebogi. Controlling chaos in a temporally irregular environment.– *Physica D*, 1994, v.74, No1-2, p.386-394.

235. J.E.S.Socolar, D.W.Sukow, D.J.Gauthier. Stabilizing unstable periodic orbits in fast dynamical systems.– *Phys. Rev E*, 1994, v.50, No4, p.3245-3248.

236. A.Kittel, K.Pyragas, R.Richter. Prerecorded history of a system as an experimental tool to control chaos.– *Phys. Rev. E*, 1994, v.50, No1, p.262-268.

237. M.A.Matias, J.Guemez. Stabilization of chaos by proportional pulses in the system variables.– *Phys. Rev. Lett.*, 1994, v.72, No1, p.1455-1458.

238. G.Reiser, A.Hübler, E.Lüscher. Algorithm for the determination of the resonances of anharmonic damped oscillators.– *Z. Naturforsch A*, 1987, v.42, p.803-807.

239. E.A.Jackson. Control of dynamics flows with attractors.– *Phys. Rev. A*, 1991, v.44, p.4839-4853.

240. J.D.Farmer, J.J.Sidorovich. Optimal shadowing and noise reduction.– *Preprint of the Los Alamos National Lab.*, No LA-UR-90-653.– 30pp.

241. T.Shinbrot, E.Ott, C.Grebogi, J.A.Yorke. Using chaos to direct orbits to targets in systems describable by a one-dimensional map.– *Phys. Rev. A*, 1992, v.45, No6, p.4165-4168.

242. I.M.Starobinets, A.S.Pikovsky. Multistep controlling chaos.– *Phys. Lett. A*, v.181, p.149-152.

243. B.Hübinger, R.Doerner, W.Martienssen. Local control of chaotic motion.– *Zietschrift für Phys. B*, 1993, v.90, p.103-106.

244. S.J.Schiff, K.Jerger, D.H.Duong, T.Chang, M.L.Spano, W.L.Ditto. Controlling chaos in the brain.– *Nature*, 1994, v.370, p.615-620.

245. Y.Liu, N.Kikuchi, J.Ohtsubo. Controlling dynamical behavior of a semiconductor laser with external optical feedback.– *Phys. Rev. E*, 1995, v.51, No4, p.2697-2700.

246. V.Petrov, M.J.Crowley, K.Showalter. Tracking unstable periodic orbits in the Belousov-Zhabotinsky reaction.– *Phys. Rev. Lett.*, 1994, v.72, No18, p.2955-2958.

247. V.In, W.L.Ditto, M.L.Spano. Adaptive control and tracking of chaos in a magnetoelastic ribbon.– *Phys. Rev. E*, 1995, v.51, N04, p.2689-2692.

248. B.Blazejczyk, T.Kapitaniak, J.Woewoda, J.Brindley. Controlling chaos in mechanical systems.– *Appl. Mech. Rev.*, 1993, v.46, No7, p.385-391.

249. N.L.Komarova, A.Yu.Loskutov. Stabilization of chaotic oscillations in dynamical systems: rigorous results.– *SPIE*, 1993, v.2037, p.71-81.

250. Н.Л.Комарова, А.Ю.Лоскутов. Стабилизация хаотического поведения колебательной химической реакции.– *Матем. моделирование*, 1995, т.7, No10, с.133-143.

251. A.Yu.Loskutov, S.D.Rybalko, U.Feudel, J.Kurths. Suppression of chaos by cyclic parametric excitation in two-dimensional maps.– *J. Phys. A*, 1996, v.29, No18, p.5759-5773.

252. А.Ю.Лоскутов, Ю.В.Мищенко, С.Д.Рыбалко. Стабилизация неустойчивого поведения динамических систем и проблема обработки информации.– *Физ. мысль России*, 1997, т.2/3, с.53-66.

253. A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko, K.A.Vasiliev. Stabilization of chaotic dynamics of one-dimensional maps by a cyclic parametric transformation.– *Int. J. Bif. and Chaos*, 1996, v.6, No4, p.725-735.

254. А.Ю.Лоскутов, А.К.Прохоров. Параметрические возмущения и стабилизация хаотического поведения динамических систем.– *Физ. мысль России*, 1997, т.2/3, с.36-52.

255. А.Н.Дерюгин, А.Ю.Лоскутов, В.М.Терешко. К вопросу о рождении устойчивого периодического поведения параметрически возбуждаемых динамических систем.– *ТМФ*, 1995, т.104, No3, с.507-512.

256. Z.Galias. New method for stabilization of unstable periodic orbits in chaotic systems.– *Int. J. Bif. and Chaos*, 1995, v.5, No1, p.281-295.

257. G.Duffing. *Erzwungene Schwingungen bei Veränderlicher Eigenfrequenz.*– F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1918.

258. П.Л.Капица. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса.– *ЖЭТФ*, 1951, т.21, вып.5, с.588-597.

259. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Механика.*– М., Наука, 1988.

260. W.Parry, M.Pollicott. *Zeta Functions and the Periodic Orbit Structure of Hyperbolic Dynamics.*– Soc. Math. de France, 1990.

261. D.Ruelle. *Dynamical Zeta Functions for piecewise Monotone Maps of the Interval.*– Americal Math. Soc., 1994.

262. K.Shiraiva. *Bibliography of Dynamical Systems.*– Nagoya Univ., Preprint No1, 1985.

263. Z.Shu-yu.*Bibliography on Chaos.*– World Sci., 1991.

264. S.N.Chow, J.K.Hale. *Methods of Bifurcation Theory.*– Springer, Berlin, 1982.

265. В.И.Арнольд. *Теория катастроф.*– В кн.: Динамические системы, т.5. М., ВИНИТИ, с.219-277.

266. Р.Гилмор. *Прикладная теория катастроф. Т.1,2.*– М., Мир, 1984.