

УДК 517.946.6:517.43

О следе разности двух обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков¹

В. А. Садовничий

§ 1. Некоторые вспомогательные предложения

Круг вопросов, связанных с формулами следов для обыкновенных дифференциальных операторов, открыли И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [1]. В работе [2] Л. А. Дикий получил в каком-то смысле окончательные результаты по следам для операторов Штурма-Лиувилля. Формула первого следа для операторов высшего порядка, заданного двучленной операцией и регулярными граничными условиями, выписана в [3].

Мы предлагаем еще один подход для вычисления формулы следа, обладающий, как нам кажется, некоторыми преимуществами.

Рассмотрения проводятся на операторе

$$\begin{aligned} (-1)^m y^{(2m)} + p(x)y &= \lambda y, \\ y(0) = y^{(1)}(0) &= \dots = y^{(m-1)}(0) = 0, \\ y(\pi) = y^{(1)}(\pi) &= \dots = y^{(m-1)}(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Пусть λ_n — собственные числа оператора (1.1), а μ_n — собственные числа "простейшего" оператора ($p(x) = 0$). Методами [4] легко доказывается лемма.

ЛЕММА 1.1. Если $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то $\sum_{n=1}^\infty (\lambda_n - \mu_n) < \infty$.

Основой дальнейшего будет изучение функций Грина определенных параболических задач.

¹ Дифф. уравнения, 1966, т. 2, №12, с. 1611 - 1624.

§ 2. Операторы $2m$ -порядка. Асимптотика функций Грина соответствующих параболических задач

Рассмотрим оператор (1.1) и оператор

$$\begin{aligned} (-1)^m y^{(2m)} &= \mu y, \\ y(0) &= y^{(1)}(0) = \dots = y^{(m-1)}(0) = 0, \\ y(\pi) &= y^{(1)}(\pi) = \dots = y^{(m-1)}(\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим следующие задачи для параболических уравнений, соответствующих нашим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -(-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} - p(x) u, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= u_x^{(1)}(0, t) = \dots = u_x^{(m-1)}(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) &= u_x^{(1)}(\pi, t) = \dots = u_x^{(m-1)}(\pi, t) = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -(-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u(0, t) &= u_x^{(1)}(0, t) = \dots = u_x^{(m-1)}(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) &= u_x^{(1)}(\pi, t) = \dots = u_x^{(m-1)}(\pi, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В дальнейшем функции Грина этих задач будут играть важную роль.

Если обозначить функцию Грина задачи (2.2) через $G(x, y, t)$ а задачи (2.3) через $G_0(x, y, t)$, то можно доказать лемму.

ЛЕММА 2.1. Пусть λ_n — собственные значения задачи (1.1) а μ_n — задачи (2.1), тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = - \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\pi} [G_t^{(1)}(x, x, t) - G_{0t}^{(1)}(x, x, t)] dx$$

при условии, что

$$\int_0^{\pi} p(x) dx = 0.$$

Доказательство непосредственно следует из результатов работы [5] и из леммы 1.1.

Чтобы найти асимптотики по t при $t \rightarrow 0$ функций $G(x, y, t)$ и $G_0(x, y, t)$, изучим асимптотику функций Грина следующих задач:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -(-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \\ u(0, t) &= u^{(1)}(0, t) = \dots = u^{(m-1)}(0, t) = 0 \quad (0 \leq x < \infty), \\ u|_{t=0} &= \varphi(x) \end{aligned} \quad (2.4)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -(-1)^m \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}}, \\ u(\pi, t) &= u^{(1)}(\pi, t) = \dots = u^{(m-1)}(\pi, t) = 0 \quad (-\infty < x \leq \pi), \\ u|_{t=0} &= \varphi(x). \end{aligned} \quad (2.5)$$

После этого воспользуемся тем, что главный член асимптотики функции Грина $G_0(x, y, t)$ задачи (2.3) есть сумма главных членов асимптотики функций Грина задач (2.4) и (2.5) (см. [6]). А главные члены асимптотики этих задач можно вычислить в явном виде. Таким образом, асимптотика $G_0(x, y, t)$ будет известна. Асимптотика $G(x, y, t)$ находится через асимптотику $G_0(x, y, t)$ по интегральному уравнению. По лемме 2.1 находится искомая сумма.

Возьмем преобразование Лапласа по t от обеих частей уравнения (2.4) с $\varphi(x) = \delta(x - y)$. Получим

$$\begin{aligned} -(-1)^m \frac{d^{2m} \tilde{u}(x, y, \lambda)}{dx^{2m}} &= \lambda \tilde{u}(x, y, \lambda) - \delta(x - y), \\ \tilde{u}|_{x=0} &= \tilde{u}'|_{x=0} = \dots = \tilde{u}^{m-1}|_{x=0} = 0 \quad (\operatorname{Re} \lambda > 0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Пусть $\lambda = \rho^{2m}$ и m нечетно. Случай четного m рассматривается аналогично. Запишем общее решение однородного обыкновенного уравнения в виде

$$W(x, y, \lambda) = c_1 e^{\rho \omega_1 x} + c_2^{\rho \omega_2 x} + \dots + c_2 e^{\rho \omega_{2m} x}$$

(ω_i — i -корень $2m$ -ой степени из единицы) и найдем, применяя метод вариации постоянных, решения неоднородного уравнения (2.6). Получим

$$c_1^{(1)}(x) e^{\rho \omega_1 x} + \dots + c_{2m}^{(1)}(x) e^{\rho \omega_{2m} x} = 0,$$

$$c_1^{(1)}(x)(\rho\omega_1)e^{\rho\omega_1x} + \dots + c_{2m}^{(1)}(x)(\rho\omega_{2m})e^{\rho\omega_{2m}x} = 0,$$

...

$$c_1^{(1)}(x)(\rho\omega_1)^{2m-1}e^{\rho\omega_1x} + \dots + c_{2m}^{(1)}(x)(\omega_{2m}\rho)^{2m-1}e^{\rho\omega_{2m}x} = -\delta(x-y).$$

Пусть W — определитель этой системы,

$$\begin{aligned} W &= \frac{e^{(\omega_1+\dots+\omega_{2m})\rho x}}{\rho^{-\frac{2m(2m-1)}{2}}} \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \dots & \omega_{2m} \\ \omega_1^{2m-1} & \dots & \omega_{2m}^{2m-1} \end{vmatrix} = \\ &= \rho^{\frac{2m(2m-1)}{2}} \prod_{1 \leq i < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_i). \end{aligned}$$

Обозначим через W_ν алгебраическое дополнение члена из последней строки ν -го столбца системы

$$W_\nu = e^{(\omega_1+\dots+\omega_{\nu-1}+\omega_{\nu+1}+\dots+\omega_{2m})\rho x} \rho^{\frac{(2m-1)(2m-2)}{2}} \prod_{[\nu]} (\omega_k - \omega_i),$$

где через $\prod_{[\nu]} (\omega_k - \omega_i)$ обозначено то же произведение, что и

$\prod_{1 \leq i < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_i) = \prod_{i,k} (\omega_k - \omega_i)$, то индексы i и k не равняются ν .

Тогда

$$c_\nu^{(1)} = -\frac{W_\nu(x)}{W(x)} \delta(x-y),$$

$$c_\nu = \begin{cases} -\int_0^x \frac{W_\nu(x)}{W(x)} \delta(x-y) dx + k_\nu, & \text{если } y \leq x, \\ \text{где } k_\nu \text{ — некоторые неизвестные константы;} \\ k_\nu, & \text{если } y > x, \end{cases}$$

$$c_\nu = \begin{cases} -\frac{W_\nu(y)}{W(y)} + k_\nu, & y \leq x \\ k_\nu, & y > x \end{cases} \quad \text{или}$$

$$c_\nu = \begin{cases} \frac{(-1)^{\nu+1} e^{-\rho\omega_\nu y}}{\rho^{2m-2}} \frac{\prod_{[\nu]} (\omega_k - \omega_i)}{\prod_{(i,k)} (\omega_k - \omega_i)} + k_\nu, & y \leq x \\ k_\nu, & y > x. \end{cases}$$

Обозначим $\frac{\prod_{[\nu]} (\omega_k - \omega_i)}{\prod_{(i,k)} (\omega_k - \omega_i)} (-1)^{\nu+1} = \alpha_\nu = \frac{\omega_0}{2m}$ Пусть теперь $\text{Re}(\rho\omega_1) \geq 0$,

$\operatorname{Re}'(\rho\omega_2) \geq 0 \dots \operatorname{Re}(\rho\omega_m) \geq 0$. Общее решение уравнения (2.6) запишется в виде

$$\tilde{u}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^{2m} \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \sum_{\nu=1}^{2m} k_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}x} & \text{при } y \leq x, \\ \sum_{\nu=1}^{2m} k_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}x} & \text{при } y > x. \end{cases}$$

Определим константы k_{ν} из условий убывания решения на бесконечности и граничных условий в нуле.

При $y < x$ положим $k_{\nu} = -\frac{\alpha_{\nu}}{\rho^{2m-1}} e^{-\rho\omega_{\nu}y}$, $\nu = 1, 2, \dots, m$. Подставляя k_{ν} в решение при $y > x$, получим

$$\tilde{u}(x, y, \lambda) = -\frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \sum_{\nu=m+1}^{2m} k_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}x}.$$

Подставляя $\tilde{u}(x, y, \lambda)$ в граничные условия в точке нуль, получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=m+1}^{2m} k_{\nu} &= \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} e^{-\rho\omega_{\nu}y}, \\ &\dots \\ \sum_{\nu=m+1}^{2m} k_{\nu} (\omega_{\nu})^{m-1} &= \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} (\omega_{\nu})^{m-1} e^{-\rho\omega_{\nu}y}. \end{aligned}$$

Разрешим эту систему относительно k_{ν} . Пусть Δ — определитель этой системы, $\Delta = \prod_{m \leq i < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_i) \neq 0$. Получим

$$k_{m+\nu} = \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{-\rho\omega_i y},$$

где $\beta_i^{\nu} = \frac{\overline{\Pi}_{(i,\nu)}(\omega_k - \omega_j)}{\Delta}$, через $\overline{\Pi}_{(i,\nu)}(\omega_k - \omega_j)$ обозначен определитель, который получен из Δ заменой ν -столбца столбцом 1, $\omega_i, \omega_i^2, \dots, \omega_i^{m-1}$ ($i = 1, \dots, m$). Запишем

$$\tilde{u}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=m+1}^{2m} \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{\rho\omega_{m+\nu}x - \rho\omega_i y}, & y \leq x \\ -\frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{\rho\omega_{m+\nu}x - \rho\omega_i y}, & y > x \end{cases}$$

или, произведя перенумерацию

$$\tilde{u}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu+m} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{\rho\omega_{m+\nu}x - \rho\omega_i y}, & y \leq x \\ - \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{\rho\omega_{m+\nu}x - \rho\omega_i y}, & y > x. \end{cases}$$

Учитывая, что у нас уравнение четного порядка, другими словами, извлекается корень четной степени из единицы, можно положить $\omega_{m+\nu} = -\omega_{\nu}$. Окончательно получаем

$$\tilde{u}(x, y, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{m+\nu} e^{-\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} \beta_{\nu}^{\nu} e^{-\rho\omega_{\nu}(x+y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{-\rho(\omega_{\nu}x + \omega_i y)}, & y \leq x \\ - \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} e^{\rho\omega_{\nu}(x-y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} \beta_{\nu}^{\nu} e^{-\rho\omega_{\nu}(x+y)} + \\ + \frac{1}{\rho^{2m-1}} \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{-\rho(\omega_{\nu}x + \omega_i y)}, & y > x, \end{cases}$$

где $\sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} e^{-\rho(\omega_{\nu}x + \omega_i y)}$ означает, что суммирование производится по индексам i и ν так, что $i \neq \nu$.

Возьмем обратное преобразование Лапласа от найденного решения

$$H(x, y, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{u}(x, y, \lambda) e^{\lambda t} d\lambda \quad (\sigma > 0). \quad (2.7)$$

При вычислении (2.7) понадобится вычислить асимптотику интегралов вида

$$N_j = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{-\rho z_j + \lambda t}}{\rho^{2m-1}} d\lambda,$$

где

$$\lambda = \rho^{2m}, \quad z_j = \begin{cases} \omega_j(x-y), \\ \omega_j(x+y), & \operatorname{Re} \rho z_j \geq 0. \\ \omega_j x + \omega_j y. \end{cases}$$

Сделаем замену переменных $\lambda = \rho^{2m}$, затем $\rho = ut^{\frac{1}{1-2m}}$, получим, что

$$N_j = 2mt^{\frac{1}{1-2m}} \int_C s^{(-\rho z_j + \rho^{2m})t^{\frac{1}{1-2m}}} d\rho = 2mt' \int_C e^{(-\rho z_j + \rho^{2m})t'} d\rho,$$

где контур C расположен в угле раствора π/m , содержащем положительную полуось x -ов и расположенном симметрично относительно указанной полуоси.

Асимптотику N_j при $t \rightarrow 0$ можно считать применяя метод перевала. Пусть $h_j(\rho) = -\rho z_j + \rho^{2m}$.

Имеется $2m-1$ точка перевала

$$\rho_{j,k} = \frac{|z_j|^{\frac{1}{2m-1}}}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}} e^{\frac{i \arg z_j}{2m-1} + \frac{2k\pi i}{2m-1}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1).$$

Линии уровня $\operatorname{Re} h_j(\rho)$ будут расположены так. Для каждого N_j будет оюна точка перевала, расположенная ближе других к положительной полуоси вещественной оси, которая и определит главный член асимптотики N_j при $t \rightarrow 0$. Эта точка будет лежать в указанном выше угле. Будем обозначать эту точку перевала через ρ_{j,k_0} . Тогда главный член вычисленного вклада в асимптотику будет асимптотически равен

$$V_{\rho_{j,k_0}} \approx \left| \sqrt{\frac{2\pi}{t' h''(\rho_{j,k_0})}} \right| e^{t' h(\rho_{j,k_0})} e^{\frac{\pi}{2} i - \frac{i}{2} \arg h''(\rho_{j,k_0})}.$$

Произведя необходимые вычисления, получим

$$N_j \approx \frac{A_j}{t^{\frac{1}{2(2m-1)}}} \frac{e^{-\frac{|z_j|^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}} G_j}}{|z_j|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}},$$

где

$$A_j = \frac{\sqrt{2\pi} (2m)^{\frac{m-1}{2m-1}}}{[2m(2m-1)]^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\pi}{2} i - \frac{i}{2} \arg h''(\rho_{j,k_0})},$$

а

$$C_j = \left[e^{\frac{i(\arg z_j + 2\pi k_0)}{2m-1} + i \arg z_j} + \frac{1}{2m} e^{i \frac{2m}{2m-1} (\arg z_j + 2\pi k_0)} \right] \frac{1}{(2m)^{\frac{1}{2m-1}}}.$$

Вычислив асимптотику каждого из интегралов, входящих в (2.7), получим, что

$$H(x, y, t) \approx \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_{m+\nu} J_{\nu}^{-} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} \beta_{\nu}^{\nu} J_{\nu}^{+} + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} J_{i,\nu}^0 \right], \\ y \leq x, \\ \frac{1}{2\pi i} \left[- \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} J_{\nu}^{-} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} \beta_{\nu}^{\nu} J_{\nu}^{+} + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} J_{i,\nu}^0 \right], \\ y < x, \end{cases}$$

где введены следующие обозначения:

$$J_{\nu}^{-} = \frac{A_{\nu}^{-}}{t^{\frac{1}{2(2m-1)}}} \frac{e^{\frac{-c_{\nu}^{-}|x-y|^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{|x-y|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}},$$

$$A_{\nu}^{-} = \frac{\sqrt{2\pi}(2m)^{\frac{m-1}{2m-1}} e^{\frac{\pi}{2} i - \frac{i}{2} \arg h''\{\rho_{j,k_0}[\omega_{\nu}(x-y)]\}}}{[2m(2m-1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.8)$$

$$C_{\nu}^{-} = \left\{ e^{\frac{i[\arg \omega_{\nu}(x-y) + 2\pi k_0]}{2m-1} + i \arg \omega_{\nu}(x-y)} + \frac{1}{2m} e^{i \frac{2m}{2m-1} [\arg \omega_{\nu}(x-y) + 2\pi k_0]} \right\} \frac{1}{2m^{\frac{1}{2m-1}}},$$

а J_{ν}^{+} , A_{ν}^{+} , C_{ν}^{+} , $J_{i,\nu}^0$, $A_{i,\nu}^0$, $C_{i,\nu}^0$ получаются из J_{ν}^{-} , A_{ν}^{-} , C_{ν}^{-} , заменой $\omega_{\nu}(x-y)$ соответственно на $\omega_{\nu}(x+y)$ и $\omega_{\nu}x + \omega_i y$.

Из определения α_{ν} следует, что $\alpha_{m+\nu} = -\alpha_{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \dots, m$).

Окончательно запишем

$$H(x, y, t) \approx \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_{m+\nu} J_{\nu}^{-} + \sum_{\nu=1}^m \alpha_{\nu} \beta_{\nu}^{\nu} J_{\nu}^{+} + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^{\nu} J_{i,\nu}^0 \right]. \quad (2.9)$$

ПРИМЕЧАНИЕ 1. Если $x = y$, то $J_{\nu}^{-} = \frac{c}{t^{\frac{1}{2m}}}$. Это получается непосредственным вычислением интегралов. Явное значение константы нам не понадобится. При $m = 1$ значение J_{ν}^{-} при $x = y$ можно получить предельным переходом при $x \rightarrow y$ из приведенных выше формул.

ПРИМЕЧАНИЕ 2. Непосредственной проверкой можно убедиться, что при $x = y$ функции $\frac{J_\nu^+}{2\pi i \beta_\nu^+}$, $\frac{J_{i,\nu}^0}{2\pi i \gamma_{i,\nu}^0}$ стремятся к δ -функциям при $t \rightarrow 0$ ($t > 0$), где

$$\begin{aligned}\beta_\nu^+ &= \frac{A_\nu^+}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-c_\nu^+(2x)} \frac{2m}{2m-1}}{(2x)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}} dx, \\ \gamma_{i,\nu}^0 &= \frac{A_{i,\nu}^0}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{e^{-c_{i,\nu}^0[x(\omega_i + \omega_\nu)] \frac{2m}{2m-1}}}{[x(\omega_i + \omega_\nu)]^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}} dx.\end{aligned}\quad (2.10)$$

Заменой $\bar{x} = -x + \pi$ задача (2.5) приводится к задаче (2.4). Повторяя все предыдущие рассуждения получим аналогичную (2.9) асимптотику функции Грина задачи (2.5). Функции J_ν^- , J_ν^+ , $J_{\nu,i}^0$ заменяются на аналогичные функции, зависящие от переменных $\bar{x} = -x + \pi$, $\bar{y} = -y + \pi$. Сложив главные члены функций Грина задач (2.4) и (2.5), получим главный член функции Грина $G_0(x, y, t)$ задачи (2.3) на отрезке. Таким образом, доказана следующая основная теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Главный член асимптотики функций Грина $G_0(x, y, t)$ задачи (2.3) при $t \rightarrow 0$ имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\bar{G}(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_{m+\nu} J_\nu^-(x, y) + \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu \beta_\nu^+ J_\nu^+(x, y) + \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^\nu J_{i,\nu}^0(x, y) \left. \right] + \frac{1}{2\pi i} \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_{m+\nu} J_\nu^-(\bar{x}, \bar{y}) + \right. \\ &+ \sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu \beta_\nu^+ J_\nu^+(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_i \beta_i^\nu J_{i,\nu}^0(\bar{x}, \bar{y}) \left. \right],\end{aligned}\quad (2.11)$$

где J_ν^- , J_ν^+ , $J_{\nu,i}^0$ находятся по формуле (2.8) $\alpha_\nu = \frac{\omega_\nu}{2m}$, $\beta_i^\nu = \frac{\prod_{(i,\nu)} (\omega_k - \omega_j)}{\Delta}$, где вронсиан $\Delta = \prod_{m \leq i < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_j)$, а через $\prod_{(i,\nu)} (\omega_k - \omega_j)$ обозначен определитель, который получается из Δ заменой ν -го столбца столбцом из $1, \omega_i, \omega_i^2, \dots, \omega_i^{m-1}$; $\sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m$ означает, что суммирование производится так, что $i \neq \nu$.

В дальнейшем ввиду полной аналогии первой и второй скобки все рассуждения будем приводить только для первой скобки. Для второй скобки будем выписывать сразу окончательные результаты.

§ 3. Вычисление формулы следа разности двух дифференциальных операторов $2m$ -го порядка

Рассмотрим функции Грина $G(x, y, t)$ и $G_0(x, y, t)$ задач (2.2), (2.3). Для них справедливо следующее интегральное соотношение:

$$G(x, y, t) = G_0(x, y, t) - \int_0^t d\tau \int_0^\pi G_0(x, \xi, t - \tau) G(\xi, y, \tau) p(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Разрешимость этого уравнения доказывается обычным методом последовательных приближений. В качестве первого приближения берется $G_0(x, y, t)$. Из дальнейшего будет следовать, что можно взять только два члена получающегося ряда

$$G(x, y, t) = G_0(x, y, t) - \int_0^t d\tau \int_0^\pi G_0(x, \xi, t - \tau) G_0(\xi, y, \tau) p(\xi) d\xi + \Theta_1(x, y, t),$$

где через $\Theta_1(x, y, t)$ обозначены все остальные члены. В наших рассмотрениях они будут давать нулевой вклад. Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Если функция $p(x)$ дважды дифференцируема и если $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = \left[\sum_{\nu=1}^m \alpha_\nu \beta_\nu^\nu \beta_\nu^+ + \sum_{\nu=1}^m \sum_{i=1}^m \alpha_\nu \beta_\nu^\nu \gamma_{i,\nu}^0 \right] [p(0) + p(\pi)], \quad (3.2)$$

где β_ν^+ , $\gamma_{i,\nu}^0$ находится по формулам (2.10), $\alpha_\nu = \frac{\omega_\nu}{2m}$, $\beta_i^\nu = \frac{\prod_{j \neq i} (\omega_k - \omega_j)}{\Delta}$, $\Delta = \prod_{m \leq i < k \leq 2m} (\omega_k - \omega_i)$, а через $\prod_{i,\nu} (\omega_k - \omega_i)$ обозначен определитель, который получается из Δ заменой ν -го столбца столбцом из 1, $\omega_i, \omega_i^2, \dots, (\omega_i)^{m-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.1) простым преобразованием получаем

$$G_0(x, y, t) - G(x, y, t) = \left[\int_0^t d\tau \int_0^\pi G_0(x, \xi, t - \tau) G_0(\xi, y, \tau) [p(\xi) -$$

$$-p(x)] d\xi + p(x) \int_0^t d\tau \int_0^\pi G_0(x, \xi, t - \tau) G_0(\xi, y, \tau) d\xi + \Theta_1(x, y, t) \Big],$$

где через $\Theta_1(x, y, t)$ обозначены члены, порядок особенности которых меньше. В этом можно убедиться либо непосредственным вычислением, либо сразу заметив, что дальнейшие итерации понижают особенность членов.

Пользуясь формулой свертки двух функций Грина, которая верна в силу единственности решения задачи, получим

$$G_0(x, y, t) - G(x, y, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\pi G_0(x, \xi, t - \tau) G_0(\xi, y, \tau) [p(\xi) - p(x)] d\xi + \\ + p(x) G_0(x, t, t) + \Theta_1(x, y, t).$$

Откуда

$$G_{0t}^{(1)}(x, x, t) - G_t^{(1)}(x, x, t) = \left\{ \int_0^t d\tau \int_0^\pi G_{0t}^{(1)}(x, \xi, t - \tau) G_0(\xi, y, \tau) [p(\xi) - \right. \\ \left. - p(x)] d\xi \right\} \Big|_{x=y} + p(x) G_0(x, x, t) + p(x) G_{0t}^{(1)}(x, x, t) + \Theta_{1t}^{(1)}(x, x, t) = \\ = A(x, t) + B(x, t) + C(x, t) + \Theta_{1t}^{(1)}(x, x, t). \quad (3.3)$$

Формула (3.3) получается простым дифференцированием по t .

В получившемся результате полагается y равным x . Член, получающийся из дифференцирования по верхнему пределу, равен нулю. В этом можно убедиться следующим образом. Разобьем интеграл по τ на два и, пользуясь примечанием 2, получим функцию $G_0(x, x, t)[p(x) - p(x)]$, равную нулю. Простые оценки показывают, что дифференцирование под знаком интеграла по t законно.

Вычислим теперь

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi [G_0(x, x, t) - G(x, x, t)] dx = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi A(x, t) dx + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi B(x, t) dx + \\ + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi C(x, t) dx + \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi \Theta_{1t}^{(1)}(x, x, t) dx.$$

Докажем, что $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi C(x, t) dx = 0$. Так, как $G_0(x, x, y)$ равно сумме слагаемых, то нам достаточно рассмотреть каждое слагаемое в отдельности. При $x = y$ $J_\nu^- = \frac{c}{t^{\frac{1}{2m}}}$ и, поскольку $\int_0^\pi p(x) dx = 0$, то члены $\frac{\partial J_\nu^-}{\partial t}$ будут давать нулевой вклад. Это следует из следующего рекуррентного соотношения

$$\frac{\partial J_\nu^-}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \frac{J_\nu^- \cdot (x - y)}{t} - \frac{1}{2m} J_\nu^- \frac{1}{t},$$

в котором y надо положить равным x .

Аналогичное рекуррентное соотношение верно и для J_ν^+ , $J_{t,\nu}^0$. Например для J_ν^+ оно пишется так:

$$\frac{\partial J_\nu^+}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial}{\partial x} J_\nu^+ \cdot \frac{(x + y)}{t} - \frac{1}{2m} J_\nu^+ \frac{1}{t}, \quad (3.4)$$

устанавливается это соотношение следующим образом:

$$J_\nu^+ = \frac{\bar{A}_\nu^+}{t^{\frac{1}{2(2m-1)}} \cdot (x + y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}} e^{\frac{-C_\nu^+(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}},$$

где \bar{A}_ν^+ — некоторая константа

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_\nu^+}{\partial t} &= \bar{A}_\nu^+ \left[\frac{C_\nu^+}{2m-1} \frac{e^{\frac{-C_\nu^+(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{t^{\frac{1}{2(2m-1)}} \cdot (x + y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}} \frac{(x + y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{2m}{2m-1}}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2(2m-1)} \frac{e^{\frac{-C_\nu^+(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{(x + y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} t^{\frac{1}{2m-1}}} t^{-\frac{4m+3}{2(2m-1)}} = \right. \\ &= \frac{\bar{A}_\nu^+ C_\nu^+ e^{\frac{-C_\nu^+(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{(2m-1) t^{\frac{1}{2(2m-1)}} (x + y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} t^{\frac{2m}{2m-1}}} - \frac{1}{2(2m-1)} \frac{J_\nu^+}{t}. \end{aligned}$$

Вычислим

$$\frac{\partial}{\partial x} J_\nu^+ = \bar{A}_\nu^+ \left[\frac{C_\nu^+ 2m}{2m-1} \frac{e^{\frac{-C_\nu^+(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{(x + y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} t^{\frac{1}{2(2m-1)}} t^{\frac{1}{2m-1}}} + \right.$$

$$+ \frac{2m-2}{2(2m-1)} \frac{e^{\frac{-C_{\nu}^{+}(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{(x+y)^{1+\frac{2m-2}{2(2m-1)}} t^{\frac{1}{2(2m-1)}}} \Big],$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} J_{\nu}^{+} \cdot (x+y) &= -\frac{\bar{A}_{\nu}^{+} C_{\nu}^{+} 2m}{2m-1} \frac{e^{\frac{-C_{\nu}^{+}(x+y)^{\frac{2m}{2m-1}}}{t^{\frac{1}{2m-1}}}}}{t^{\frac{1}{2(2m-1)}} (x+y)^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} t^{\frac{1}{2m-1}}} - \\ &\quad - \frac{2m-2}{2(2m-1)} J_{\nu}^{+}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\frac{\partial J_{\nu}^{+}}{\partial t} = -\frac{1}{2m} \frac{\partial J_{\nu}^{+}}{\partial x} \cdot \frac{(x+y)}{t} - \frac{1}{2m} J_{\nu}^{+} \cdot \frac{1}{t}.$$

Рассмотрев рекуррентное соотношение (3.4) при $y = x$ и пользуясь примечанием 2, и учитывая, что $\int \delta'(x) \varphi(x) = -\varphi'(x)$, а также, что $\delta^{(i)}(\alpha x) = \frac{1}{\alpha^{i+1}} \delta(x)$, получим, что $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\pi} C(x, t) dx = 0$, так как рассуждения для членов $J_{i, \nu}^0$ совершенно аналогичны.

Докажем, что $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\pi} A(x, t) dx = 0$. Для этого будем пользоваться разложением

$$p(\xi) - p(x) = (\xi - x)p'(x) + \frac{(\xi - x)^2}{2} p''[x + \eta(\xi - x)] \quad (0 < \eta < 1). \quad (3.5)$$

Если в вычисляемом пределе заменить $\frac{\partial J_{\nu}^{-}}{\partial t}$, $\frac{\partial J_{\nu}^{+}}{\partial t}$, $\frac{\partial J_{i, \nu}^0}{\partial t}$ по рекуррентным соотношениям для них, получатся суммы членов, особенность по t которых одна и та же. Поэтому произведем вычисления для какого-нибудь одного члена. Пусть

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow x} \int_0^t d\tau \times \\ &\times \int_0^{\pi} \frac{e^{\frac{-C_{\nu}^{-}|x-\xi|^{\frac{2m}{2m-1}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m-1}}}}}{|x-\xi|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} (t-\tau)^{\frac{1}{2(2m-1)}}} (x-\xi) e^{\frac{-C_{\nu}^{-}|x-\xi|^{\frac{2m}{2m-1}}}{\tau^{\frac{1}{2m-1}}}} \frac{1}{|\xi-\tau|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} \tau^{\frac{1}{2(2m-1)}}} d\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что L — член, который получается, если рассмотреть только первый член разложения (3.5). Второй член этого разложения будет в наших рассмотрениях давать нулевой вклад. Оценки для выражений со вторым членом разложения (3.5) можно производить по модулю.

Запишем, что

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow x} \int_0^t \frac{F(x, y, t, \tau)}{(t - \tau)^{1+\gamma} \tau^\gamma} \left(\gamma = \frac{1}{2(2m-1)} \right).$$

Тогда

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \lim_{y \rightarrow x} \frac{F(x, y, t, \tau)}{(t - \tau)^{1+\gamma} \tau^\gamma} d\tau,$$

так как $\Phi(x, y, t, \tau) = \Phi_y(x, \tau) = \frac{F(x, y, t, \tau)}{(t - \tau)^{1+\gamma} \tau^\gamma}$ — непрерывная функция параметров x и y . Покажем, что $\lim_{y \rightarrow x} F(x, y, t, \tau) = F(x, x, t, \tau) = F(x, x, t, \tau)$. Действительно

$$L = \lim_{y \rightarrow x} F(x, y, t, \tau) = \lim_{y \rightarrow x} \int_0^\pi \frac{e^{\frac{-C_\nu^- |x - \xi|^{\frac{2m}{2m-1}}}{(t - \tau)^{\frac{2m}{2m-1}}}} (x - \xi) e^{\frac{-C_\nu^- |\xi - \tau|^{\frac{2m}{2m-1}}}{\tau^{\frac{2m}{2m-1}}}}}{|x - \xi|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} |\xi - \tau|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}}} d\xi.$$

В написанном выше выражении можно сделать предельный переход под знак интеграла, так как сходимость его по y равномерная.

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \int_0^\pi \frac{e^{\frac{-C_\nu^- |x - \xi|^{\frac{2m}{2m-1}}}{(t - \tau)^{\frac{2m}{2m-1}}}} (x - \xi) e^{\frac{-C_\nu^- |\xi - \tau|^{\frac{2m}{2m-1}}}{\tau^{\frac{2m}{2m-1}}}}}{|x - \xi|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} (t - \tau)^{\frac{1}{2(2m-1)}} (t - \tau) |\xi - \tau|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} \tau^{\frac{1}{2(2m-1)}}} d\xi =$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \left[\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^\pi \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t d\tau \left[\int_0^{x-\varepsilon} + \int_{x+\varepsilon}^\pi \right],$$

так как подынтегральная функция симметрична относительно точки x и нечетна.

Оценим теперь, например,

$$\left| \int_0^t d\tau \int_0^{x-\varepsilon} \frac{e^{-\frac{C_\nu^- |x-\xi|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m-1}}}} e^{-\frac{C_\nu^- |x-\xi|}{\tau^{\frac{1}{2m-1}}}} (x-\xi)}{|x-\xi|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} |\xi-x|^{\frac{2m-2}{2(2m-1)}} (t-\tau)^{1+\frac{1}{2(2m-1)}} \tau^{\frac{1}{2(2m-1)}}} d\xi \right| \leq$$

$$\leq C_0 \int_0^t \frac{e^{-\frac{C_\nu^- \varepsilon}{(t-\tau)^{\frac{1}{2m-1}}}} e^{-\frac{C_\nu^- \varepsilon}{\tau^{\frac{1}{2m-1}}}}}{(t-\tau)^{1+\frac{1}{2(2m-1)}} \tau^{\frac{1}{2(2m-1)}}} d\tau \leq C_1 t,$$

так как подынтегральная функция ограничена. Значит $L = 0$. Члены со вторым членом разложения (3.5) оцениваются на основании того, что $e^{-a^\alpha} \cdot a$ (α — нечетно) есть равномерно ограниченная величина и что

$$\int_a^b \frac{e^{-C_\nu^- [\frac{(x-\xi)}{(t-\tau)^\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}} - C_\nu^- [\frac{(\xi-y)}{\tau^\alpha}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{(t-\tau)^\alpha \tau^\alpha} d\xi \leq M(\varepsilon) \frac{e^{-C_\nu^- [\frac{(x-y)}{(t^\alpha)}]^{\frac{1}{1-\alpha}}}}{t^\alpha}.$$

Эти члены дают тоже нулевой вклад. Значит $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi A(x, t) dx = 0$. Учитывая, что у дальнейших членов итерации $G(x, y, t)$ особенность по t будет меньше, получаем $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi \Theta_{1t}^{(1)}(x, x, t) dx = 0$.

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = - \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi [G_t^{(1)}(x, x, t) - G_{0t}^{(1)}(x, x, t)] dx =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^\pi p(x) G_0(x, x, t) dx.$$

Пользуясь условием регуляризации, наложенным на функцию $p(x)$, согласно примечанию 2, получим доказательство теоремы 2.1. \square

При $m = 2$ для оператора четвертого порядка проведенные вычисления дают

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \mu_n) = -\frac{p(0) + p(\pi)}{4}, \quad \text{если} \quad \int_0^\pi p(x) dx = 0.$$

Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю А. Г. Костюченко за постоянное внимание к данной работе.

Литература

1. Гельфанд И. М., Левитан Б. М. ДАН СССР, **88**, № 4 (1953), 593—596.
2. Дикий Л. А. УМН, XIII, вып. 3 (1958), 111—143.
3. Шевченко Р. Ф. ДАН СССР, **164**, №1, 1965.
4. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы, Москва, Гостехиздат, 1954.
5. Лидский В. Б. ДАН СССР, **125**, № 3 (1959), С. 485—487.
6. Эйдельман С. Д. Параболические системы. М., 1964.